Problema 1:

Fie limbajul:

$L = \{a^n b^n c^n \mid n \in N\}$

Este independent de context?

Rezolvare:

- Facem observatia ca: $\mathbf{z} \in L$ ddaca:
  a. ordinea simb. este data de regulile:
     i. simb. **a** apar inaintea simb. **b** si **c**
     ii. simb. **b** apar inaintea simb. **c**
  b. nr. simb. **a** este egal cu nr. simb. **b** este egal cu nr. simb. **c**
     (si notam: $nr_a(\mathbf{z})=nr_b(\mathbf{z})=nr_c(\mathbf{z})$)

Vom dem. ca nu este independent de context, prin reducere la absurd, folosind lema de pompare pentru limbaje independente de context.

- PP. ca este independent de context.
  Atunci au loc conditiile din lema de pompare
  De aici rezulta ca $\exists$ $\mathbf{p} \in \mathbf{N}^*$ astfel incat:
  $\forall$ $\mathbf{z} \in L$ care satisfice
  - $|\mathbf{z}|>=\mathbf{p}$
  - $\exists$ o descompunere $\mathbf{z} = \mathbf{uvwxy}$ astfel incat: $\mathbf{uv^iwx^iy} \in L$, $\forall$ $i \in N$
    si $|\mathbf{vx}| >= \mathbf{1}$
    si $|\mathbf{vwx}| <= \mathbf{p}$

Dem., Versiunea 1:

Alegem **z** cu $|\mathbf{z}|>=\mathbf{p}$ (satisface cond. de mai sus)

- $\exists$ **n** a.i. $|a^n b^n c^n| >= \mathbf{p}$; $z \in L \Rightarrow z = a^n b^n c^n$ si $|\mathbf{z}|>=\mathbf{p}$
- z = uvwxy descompunerea din lema de pompare
  ne aflam in unul din urmatoarele cazuri generale:
  1. cel putin unul dintre **v** si **x** contin cel putin 2 simboluri (dintre a,b,c) diferite; **(cazul 1)**
  2. **v** si **x** contin un singur simbol de oricate ori (o sau mai multe) dar acelasi simbol (sau a, sau b, sau c)
     dar **v** si **x** nu pot fi ambele vide
     (cazul 2)
  3. **v** si **x** contin un simbol (a, sau b, sau c) de oricate ori,
     dar nu pot fi vide,
     dar **v** si **x** nu contin acelasi simbol **(cazul 3)**

cazul 1: *(vezi cazurile posibile pentru cazul 1; aleg unul dintre ele si dem. pt. el; pentru celelalte demonstratia se face analog)*

fie: $v = a^{k1}b^{k2}$, k1>0, k2>0 ***(rel.1)***   (oricare x)

fie i =2

cf. Lemei de pompare: $uv^2wx^2y \in L$
adica:
$uv^2wx^2y = u\, a^{k1}\, \underline{\mathbf{b^{k2}\, a^{k1}}}\, b^{k2}\, wx^2y \in L$,
atunci cand k1>0 si k2>0 *(cf. **rel.1**)*
ar insemna ca simb. **b** pot sa apara inaintea simb. **a**
ceea ce nu e adevarat pentru cuvintele din L
(observatia (a.)(i.))
=> <u>contradictie</u>

<u>Se poate dem. in mod ***analog*** ca</u>:
- pentru oricare doua (sau trei) simboluri distincte ar fi format v, v^2 nu va mai pastra ordinea simbolurilor care este necesara pt.ca $uv^2wx^2y \in L$
... => <u>contradictie</u>
- pentru oricare doua (sau trei) simboluri distincte ar fi format x, x^2 nu va mai pastra ordinea simbolurilor care este necesara pt.ca $uv^2wx^2y \in L$
... => <u>contradictie</u>

<u>**cazul 2**</u>: *(dintre cazurile posibile pentru cazul 2 aleg unul dintre ele si dem. pt. el)*
fie: $v = a^{k1}$ k1>=0
$x = a^{k2}$ k2>=0

Stim ca: **|vx| >=1**
⇔ $|\mathbf{a}^{k1}\mathbf{a}^{k2}|$ **>=1**
⇔ k1+ k2 > 0 ***(rel.2)***
(k1, k2 – nu sunt simultan 0)
atunci: $u = a^{k3}$, k3>=0
$w = a^{k4}$, k4>=0
$y = a^{n-k1-k2-k3-k4}b^nc^n$, n-k1-k2-k3-k4 >=0
fie i =2: cf. lemei: $uv^2wx^2y \in L$
$uv^2wx^2y = a^{k3}\ a^{2*k1}\ a^{k4}\ a^{2*k2}\ a^{n-k1-k2-k3-k4}b^nc^n$
dar: $uv^2wx^2y \in L$ => $nr_a(z')=nr_b(z')=nr_c(z')$
k3+2*k1+k4 +2*k2+ n-k1-k2-k3-k4 = n = n
=> n+k1+k2 = n
=> k1+k2 = 0
dar *(cf. **rel.2**)* : k1+k2>0
=> <u>contradictie</u>

Se dem. analog pt. orice alte combinatii posibile atunci cand si **y** si **u** contin un acelasi simbol (**a**, sau **b**, sau **c**), ca in $z' = uv^2wx^2y$ nu are loc relatia $nr_a(z')=nr_b(z')=nr_c(z')$
=> <u>contradictie</u>

<u>**cazul 3:**</u> *(dintre cazurile posibile pentru cazul 3 aleg unul dintre ele si dem. pt. el)*
fie: $v = a^{k1}$, k1>0 (rel.4)
$x = b^{k2}$, k2>0 (rel.5)
atunci: $u = a^{k3}$, k3>=0

$y = b^{k4}c^n$, $k4>=0$
$w = a^{n-k1-k3}b^{n-k2-k4}$, $n-k1-k2>=0$; $n-k2-k4>=0$

fie i =2; atunci $uv^2wx^2y \in L$
$uv^2wx^2y = a^{k3}\ \ a^{2*k1}\ \ a^{n-k1-k2}b^{n-k2-k4}\ \ b^{2*k2}\ \ b^{k4}c^n$
$z' = uv^2wx^2y \in L \Rightarrow nr_a(z')=nr_b(z')=nr_c(z')$
$k3+2*k1+n-k1-k3 = n-k2-k4 + 2*k2 +k4 = n$
$\Rightarrow n+k1 = n+k2 = n$
$\Rightarrow k1=0$ contrad cu (rel.4)
($\Rightarrow k2=0$, contrad. cu (rel.5))

Se dem. analog pt. orice alte combinatii posibile atunci cand si v si x contin cate un simbol (a, sau b, sau c), dar nu acelasi ca in $z'= uv^2wx^2y$ nu are loc relatia $nr_a(z')=nr_b(z')=nr_c(z')$
=> <u>contradictie</u>

<u>cazurile posibile pt. cazul 1</u>
$z = a^nb^nc^n$, $z = uvwxy$
cel putin unul dintre v si x contin cel putin 2 simboluri (dintre a,b,c) diferite;
$v = a^{k1}b^{k2}$, $k1>0$, $k2>0$ si nu specificam ce poate contine x
$v = a^{k1}b^{k2}\ c^{k3}$, $k1>0$, $k2>0$, $k3>0$ si nu specificam ce poate contine x
$v = b^{k2}\ c^{k3}$, $k2>0$, $k3>0$ si nu specificam ce poate contine x
daca v contine un singur acelasi simbol, ne situam in cazul 1 daca:
$x = a^{k1}b^{k2}$, $k1>0$, $k2>0$
$x = a^{k1}b^{k2}\ c^{k3}$, $k1>0$, $k2>0$, $k3>0$
$x = b^{k2}\ c^{k3}$, $k2>0$, $k3>0$

analog se face dem. pt. fiecare dintre cazurile de mai sus (ajunge la o contradictie)

<u>Exercitiu</u>:
descrieti cazurile posibile pt. cazul 2 si cazul 3

Dem., Versiunea 2 (scurta ☺):

Alegem **z** cu |**z**|>=**p** (satisface cond. de mai sus)

$z = a^p b^p c^p$

- => |**z**|>=**p**
- z = uvwxy descompunerea din lema de pompare

- astfel incat: $\mathbf{uv^iwx^iy} \in L, \forall i \in N$
  si |**vx**| **>=1**
  si |**vwx**|<=**p**

Pentru ca |**vwx**|<=**p** : secventa **vwx** contine maxim 2 simboluri dintre a, b,c.
Astfel, in secventa $\mathbf{uv^iwx^iy}$ exista cel putin un simbol care nu este “pompat” si cel putin unul care este “pompat” ; astfel se pierde egalitatea dintre numarul de aparitii ale celor doua simboluri.
