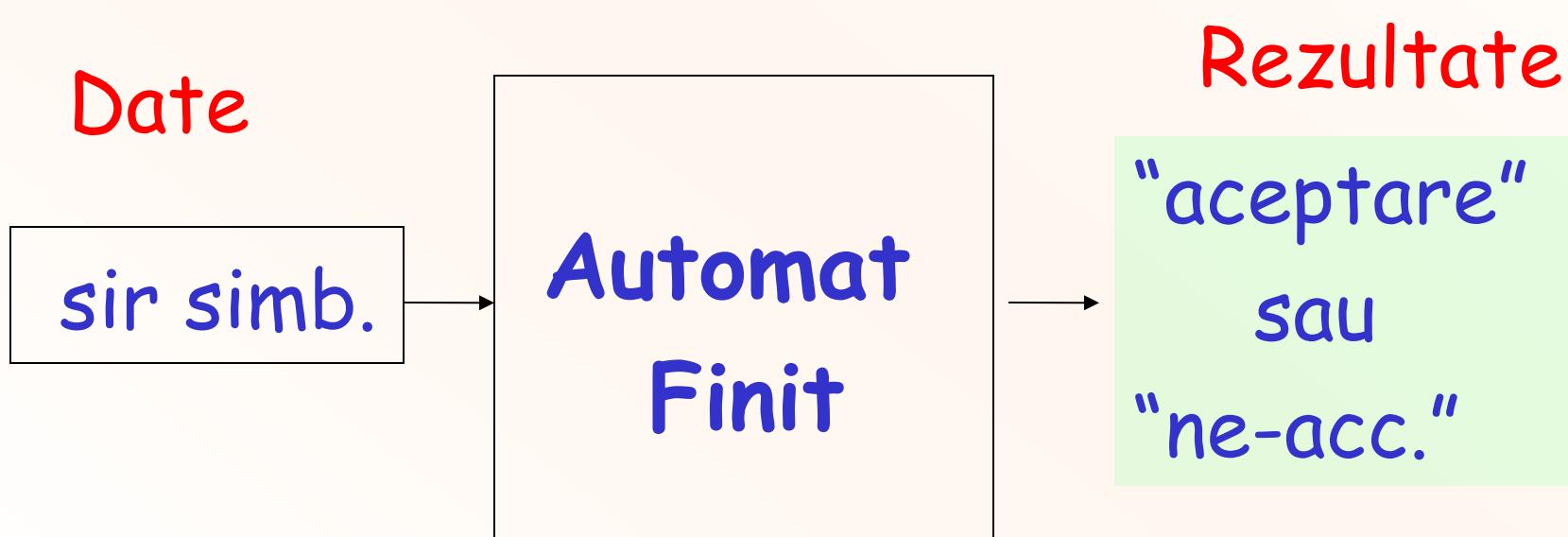


Automat finit (AF)



Automat finit: model fizic

banda de intrare



cap
citire



directie de deplasare

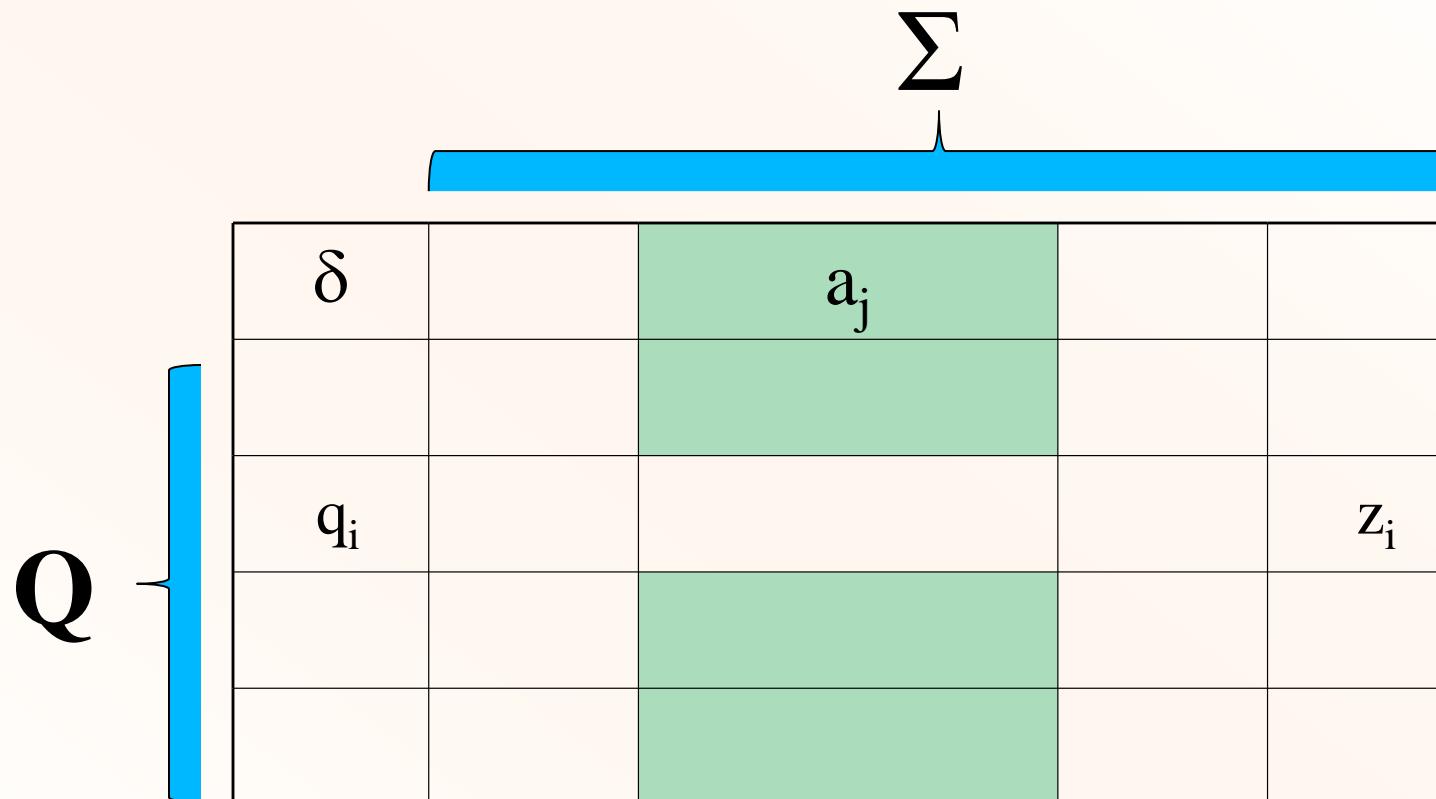


stari

Automat finit: model matematic

- Un *automat finit* este un ansamblu
 $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$:
- Q – alfabetul starilor
- Σ – alfabet de intrare
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow P(Q)$ functie de tranzitie
- $q_0 \in Q$ - stare initială
- $F \subseteq Q$ multimea stărilor finale

AF – reprezentare tabelara



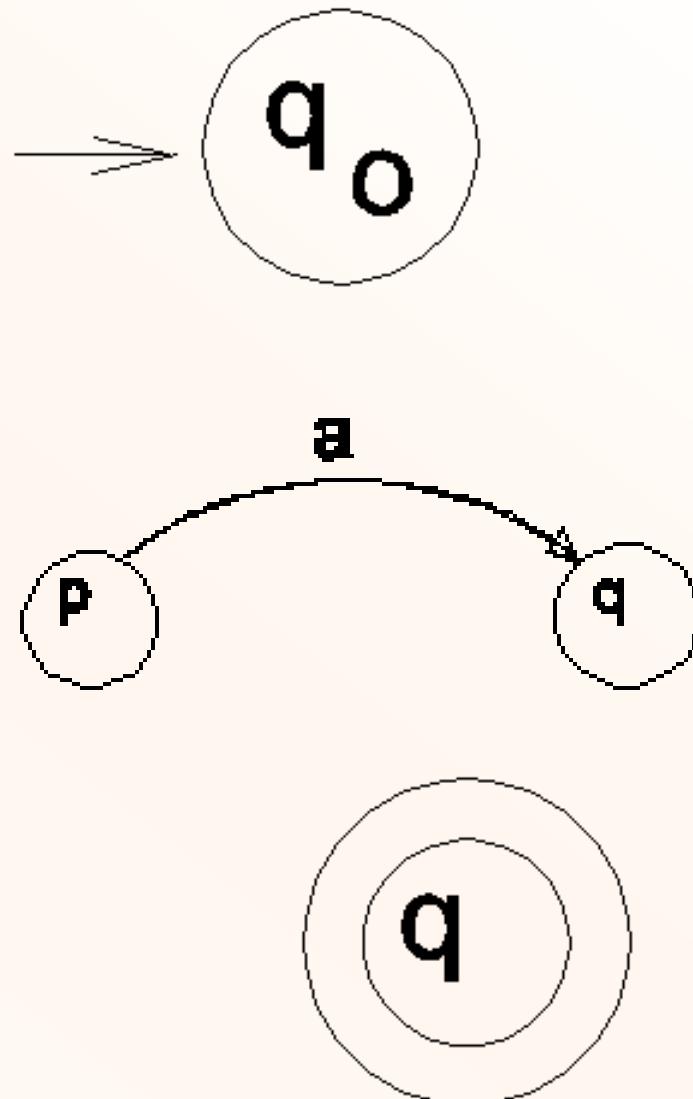
$z_i = \begin{cases} 0 & \text{daca } q_i \text{ nu e stare finala} \\ 1 & \text{daca } q_i \text{ este stare finala} \end{cases}$

AF reprezentat tabelar; exemplu

δ	0	1	
p	q	p	0
q	r	p	0
r	r	r	1

AF – reprezentare sub forma de graf

- graf orientat
- cu noduri si arce etichetate
- (graf de tranzitii)



Configuratii si relatii de tranzitie

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

configuratie: $(q, x) \in Q \times \Sigma^*$

tranzitie: element din $(Q \times \Sigma^*) \times (Q \times \Sigma^*)$

- \vdash tranzitie directa $(p, aw) \vdash (q, w) \Leftrightarrow \delta(p, a) \ni q;$
 $p, q \in Q, a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$
- \vdash^k k-tranzitie
- \vdash^+ +-tranzitie
- \vdash^* *-tranzitie

Limbaj acceptat; autom. echivalente

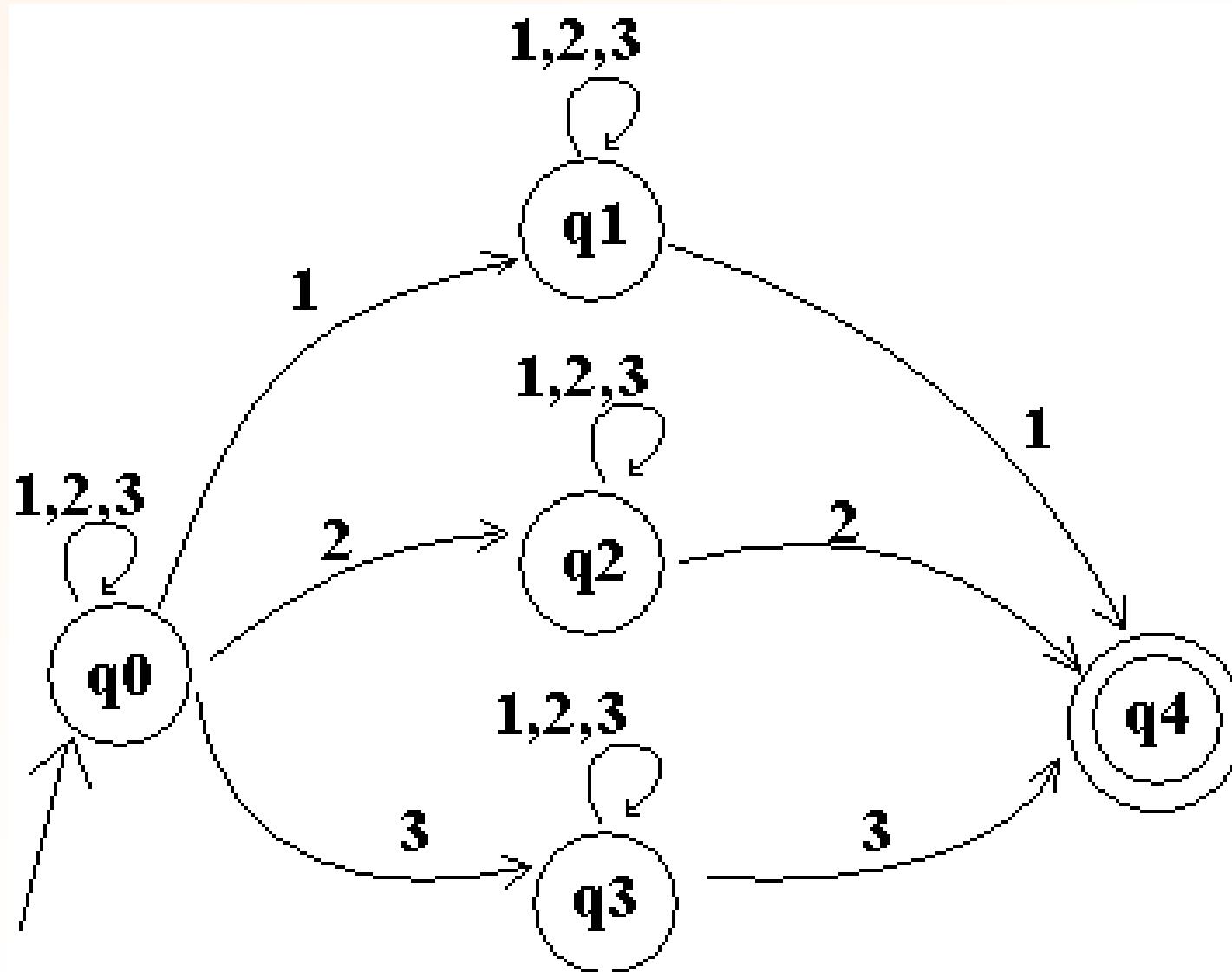
- Limbaj acceptat de automat

$$L(M) = \{w \mid w \in \Sigma^*, (q_0, w) \xrightarrow{*} (q_f, \epsilon), q_f \in F\}$$

- Automate echivalente

M_1 echivalent cu M_2 daca: $L(M_1) = L(M_2)$

Automat finit - exemplu



Determinism

- Automat finit determinist (AFD)
 $|\delta(q,a)| \leq 1 \quad \forall q \in Q, a \in \Sigma$
- Automat finit nedeterminist (AFN)
 $\exists q \in Q, a \in \Sigma \text{ astfel incat } |\delta(q,a)| > 1$
- Automat finit determinist complet definit
 $|\delta(q,a)| = 1 \quad \forall q \in Q, a \in \Sigma$

Echivalenta dintre AFD si AFN

Teorema:

- $\forall M_1 - \text{AFN} \quad \exists M_2 - \text{AFD} \text{ echivalent}$

Constructie (nu demonstratie!):

- Pornim cu: $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{01}, F_1)$ – AFN oarecare
- Construim: $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{02}, F_2)$ – AFD
pe baza lui M_1
a.i. $L(M_1) = L(M_2)$

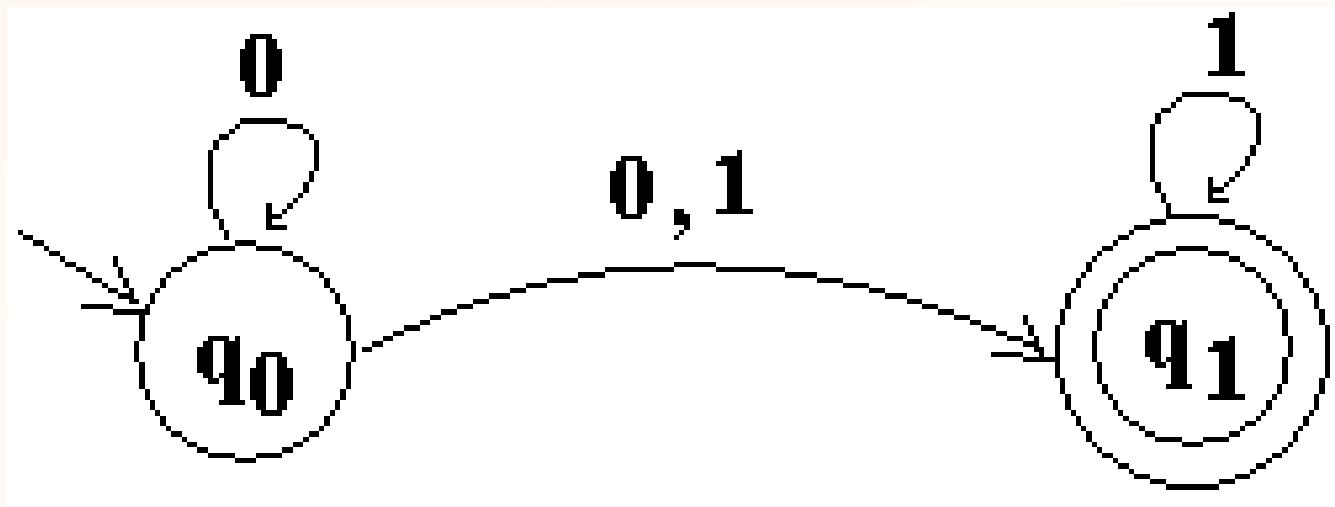
Teor: $\forall M_1 - \text{AFN} \quad \exists M_2 - \text{AFD}$ echivalent

- $\Sigma_2 = \Sigma_1$
- $Q_2 = \mathcal{P}(Q_1)$
- $q_{02} = \{q_{01}\}$
- $F_2 = \{S \in \mathcal{P}(Q_1) \mid S \cap F_1 \neq \emptyset\}$
- $\delta_2(q, a) = \{r \in Q_1 \mid \exists q_1 \in q \text{ a.i. } r \in \delta_1(q_1, a)\}$

$$= \bigcup_{q_1 \in q} \delta(q_1, a)$$

M_2 – determinist (?)

Problema: determinati AFD echiv. pt.



Pana aici am discutat in saptamana 2.
Vom reveni mai tarziu pentru restul.

AF – stari care nu contribuie la acceptarea unui cuvant

- stare neproductiva – (nu e stare productiva)
- stare inaccesibila – (nu e stare accesibila)
- stare productiva: $q \in Q$ a.i.
 $\exists w \in \Sigma^* \text{ si } q_f \in F \text{ a.i. } (q, w) \vdash^*(q_f, \varepsilon)$
- stare accesibila: $q \in Q$ a.i.
 $\exists w \in \Sigma^* \text{ a.i. } (q_0, w) \vdash^*(q, \varepsilon)$

Algoritm determin. starii accesibile

1. $i := 0$

$A_0 := \{q_0\}$

2. **Repeta**

$i := i + 1$

$A_{i+1} := A_i \cup \{ q \in Q \mid \exists p \in A_i, \exists a \in \Sigma \text{ a.i. } q \in \delta(p, a) \}$

pană cand $A_i = A_{i+1}$

$\{A_i - multimea starilor accesibile\}$

Algoritm determin. starii productive

1. $i := 0$

$A_0 := F$

2. Repeta

$i := i + 1$

$A_{i+1} = A_i \cup \{ q \in Q \mid \exists p \in A_i, \exists a \in \Sigma \text{ a.i. } p \in \delta(q, a) \}$

pană cand $A_i = A_{i+1}$

$\{A_i - multimea starilor productive\}$

Teorema:

$\forall M_1 - AF$ există $M_2 - AF$ fără st. neproductive **echiv.**

Constructie (nu demonstratie!):

- Pornim cu: $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{01}, F_1)$ – AF oarecare
- determinam A – multimea starilor productive (algoritmul anterior)
- Construim: M_2 pe baza lui M_1 (a.i. $L(M_1) = L(M_2)$)

$$M_2 = (A, \Sigma_1, \delta_{1/A}, q_{01}, F_1)$$
$$L(M_1) = L(M_2) !$$

Teorema:

$\forall M_1 - \text{AF}$ există $M_2 - \text{AF}$ fără st. inaccesibile echiv.

Constructie (nu demonstratie!):

- ... analog ...

? alta metoda de determinare a AFD echivalent pentru un AFN dat

- $M_1 \Rightarrow ? M_2$

Idea:

1. $\{q_{01}\} \in Q_2$
pornim cu $Q_2 = \{q_{01}\}$
2. adaugam la Q_2 toate submultimile lui Q_1 la care se poate ajunge prin functia de tranzitie, atunci cand se aplica unei stari $q \in Q_2$ deja adaugata

AFD complet definit

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ (AFD)

- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ functie de tranzitie ; $|\delta(q,a)| \leq 1$
- ...

Teor: \forall AFD \exists AFD complet definit echivalent

Constructie:

AFD \Rightarrow AFD complet definit:

- adaugam o stare (neproductiva) r si extindem δ astfel:
- $\forall (q,a) \in Q \times \Sigma$ a.i. $\delta(q,a) = \emptyset$ devine: $\delta(q,a) = \{r\}$
- $\forall a \in \Sigma$ $\delta(r,a) = \{r\}$

Minimizarea automatelor finite

Ce vrem:

Automat deterministic cu numar minim de stari !

Automat redus

- AFD
- nu contine stari inaccesibile si neproductive
- nu contine perechi de stari echivalente

Minimizarea AFD

- automat cu numar minim de stari
 - fara stari –inaccesibile, neproductive
 - mai putine stari ?
- ideea: relatie de echivalenta; clase de echivalenta
- stari diferențiate
- stari k diferențiate
- stari echivalente
- stari k-echivalente

Automatul redus

Fie M_1 – un automat finit oarecare

- Determinam AFD echivalent
- Eliminam starile inaccesibile si neproductive
- Determinam AFD echivalent complet definit

Fie $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automatul rezultat.

- Determinam relatia \equiv (stari echivalente, clase de echivalenta)
- Pe baza relatiei \equiv determinam automatul:

$$M_{\equiv} = (Q/\equiv, \Sigma, \delta_{\equiv}, [q_0], F_{\equiv})$$

Q/\equiv - multimea claselor de echivalenta

$$\delta_{\equiv}([q], a) = [\delta(q, a)]$$

$$F_{\equiv} = \{ [q] \mid q \in F \}$$

Automat redus

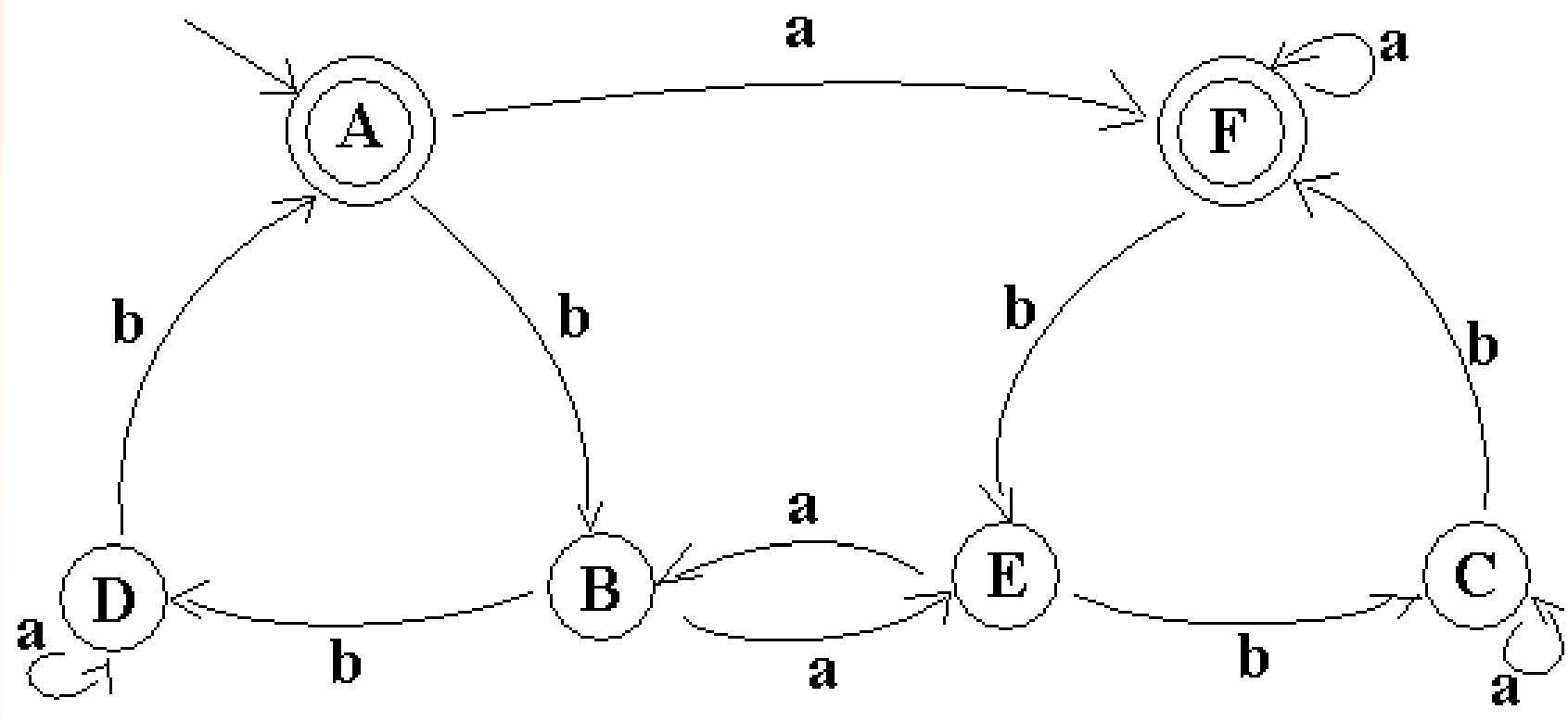
- **Teorema**

Automatul redus are numar minim de stari
dintre toate AFD echivalente

- **Teorema**

$\forall M_1 - AF \exists M_2 - \text{automat redus echivalent}$

Determinati clasele de echivalenta ale starilor automatului de mai jos



determinati automatul redus !

Stari diferențiate

- o alta exprimare

q_1, q_2 sunt *stari diferențiate* de $x \in \Sigma^*$

daca $\exists q_f \in F$ a.i. $(q_1, x) \vdash^*(q_f, \varepsilon)$

si nu există nici un $q \in F$ a.i. $(q_2, x) \vdash^*(q, \varepsilon)$

sau

daca $\exists q_f \in F$ a.i. $(q_2, x) \vdash^*(q_f, \varepsilon)$

si nu există nici un $q \in F$ a.i. $(q_1, x) \vdash^*(q, \varepsilon)$

- x (de mai sus) *diferențiază* pe q_1 și q_2

Stari diferențiate

- o alta exprimare

PP. AFD complet definit

q_1, q_2 sunt *stari diferențiate* de $x \in \Sigma^*$

daca $\exists r_1, r_2$ astfel incat: $(q_1, x) \vdash^*(r_1, \varepsilon)$

si $(q_2, x) \vdash^*(r_2, \varepsilon)$

are loc una dintre:

1. $r_1 \in F$ si $r_2 \in Q-F$
2. $r_1 \in Q-F$ si $r_2 \in F$

Relatii intre stari

- q_1, q_2 - stari diferențiate
 - cf. def. de mai sus
 - ($\exists x \in \Sigma^*$ care să le diferențieze)
- stari k diferențiate
 - dacă $\exists x \in \Sigma^*, |x| \leq k$ care să le diferențieze
- stari echivalente (\equiv)
 - dacă nu există $x \in \Sigma^*$ care să le diferențieze
- stari k -echivalente (\equiv^k)
 - dacă nu există $x \in \Sigma^*, |x| \leq k$, care să le diferențieze

Proprietati ale rel. de k -echivalenta (\equiv^k)

- $q_1 \equiv^0 q_2$ dacă ($q_1, q_2 \in F$) sau ($q_1, q_2 \in Q - F$)
- $\equiv^0 \supseteq \equiv^1 \supseteq \equiv^2 \supseteq \dots \supseteq \equiv^n \supseteq \dots$
- Dacă $(\equiv^k) = (\equiv^{k+1})$ atunci $(\equiv^k) = \equiv$

Lema:

Pt. orice M există $n \in \mathbf{N}$ a.i. $q_1 \equiv^n q_2 \Rightarrow q_1 \equiv q_2$

- ideea: pot avea un nr. finit de relații distincte (max. $|Q|$)