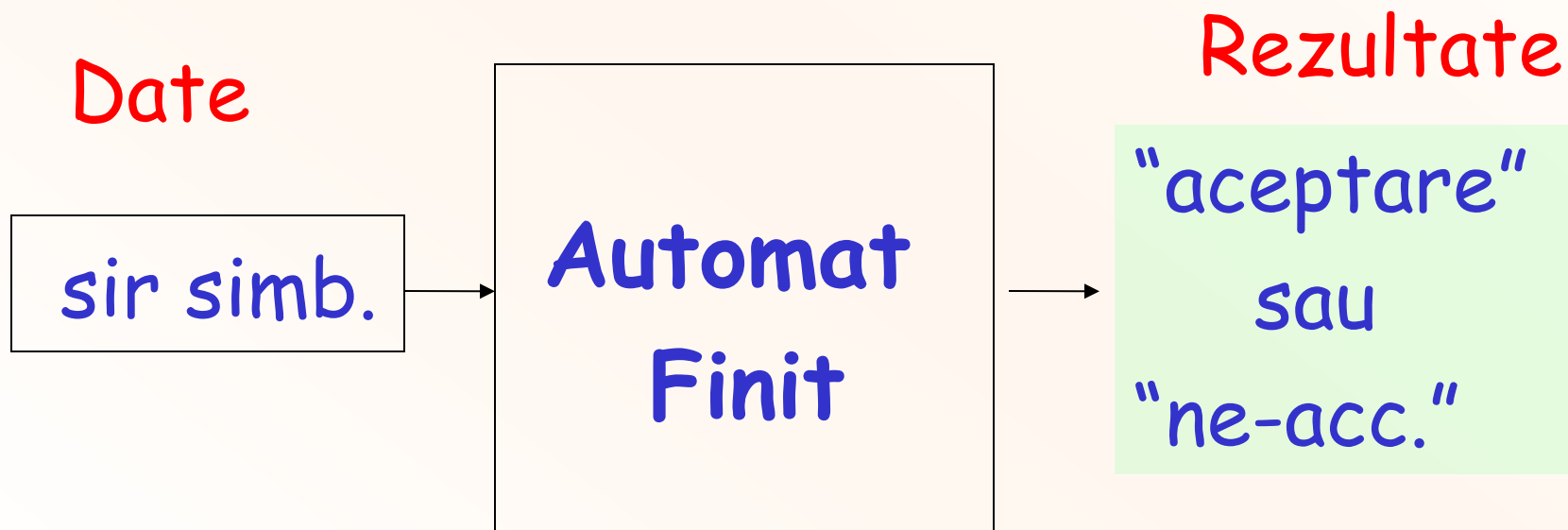


# Automat finit (AF)



# Automat finit: model fizic

banda de intrare



cap  
citire

directie de deplasare



stari

# Automat finit: model matematic

- Un *automat finit* este un ansamblu

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) :$$

- $Q$  – alfabetul starilor
- $\Sigma$  – alfabet de intrare
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$  functie de tranzitie
- $q_0 \in Q$  - stare initială
- $F \subseteq Q$  multimea stărilor finale

# AF – reprezentare tabelara

$\delta$		$a_j$		
$q_i$				$z_i$

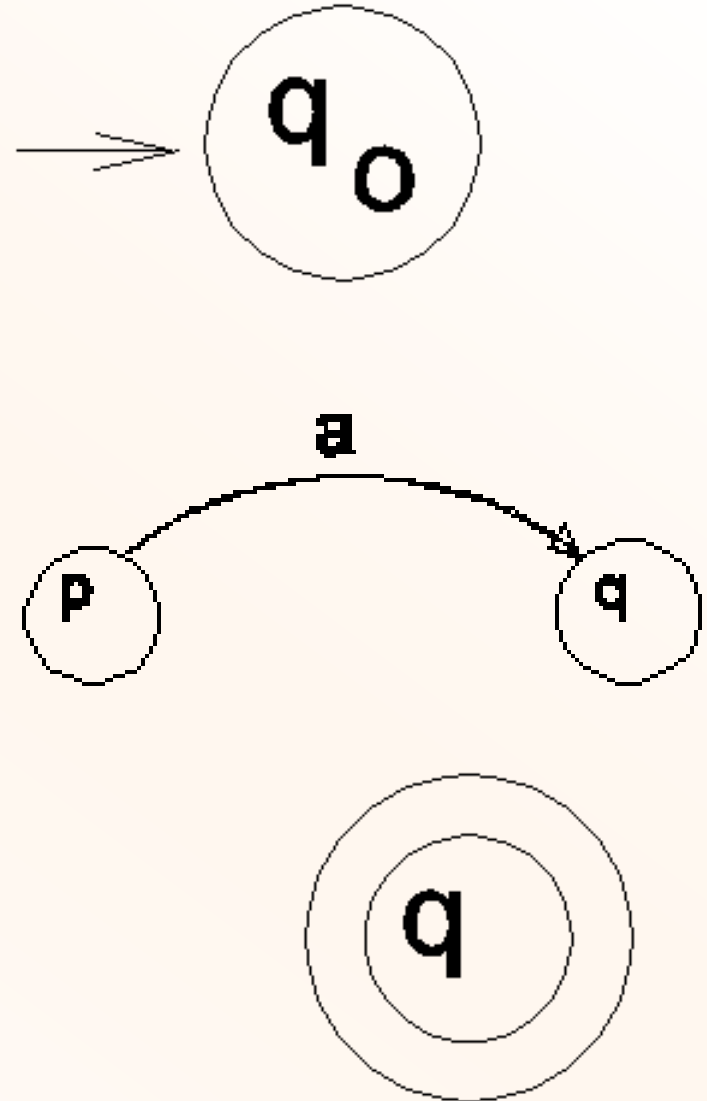
$z_i =$     0 daca  $q_i$  nu e stare finala  
               1 daca  $q_i$  este stare finala

# AF reprezentat tabelar; exemplu

$\delta$	0	1	
p	q	p	0
q	r	p	0
r	r	r	1

# AF – reprezentare sub forma de graf

- graf orientat
- cu noduri si arce etichetate
- (graf de tranzitii)



# Configuratii si relatii de tranzitie

$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ .

configuratie:  $(q, x) \in Q \times \Sigma^*$

tranzitie: element din  $(Q \times \Sigma^*) \times (Q \times \Sigma^*)$

- $\vdash$  tranzitie directa
  - $\vdash^k$  k-tranzitie
  - $\vdash^+$  +-tranzitie
  - $\vdash^*$  \*-tranzitie
- $$(p, aw) \vdash (q, w) \iff \delta(p, a) \ni q;$$
- $$p, q \in Q, a \in \Sigma, w \in \Sigma^*$$

# Limбай acceptat; autom. echivalente

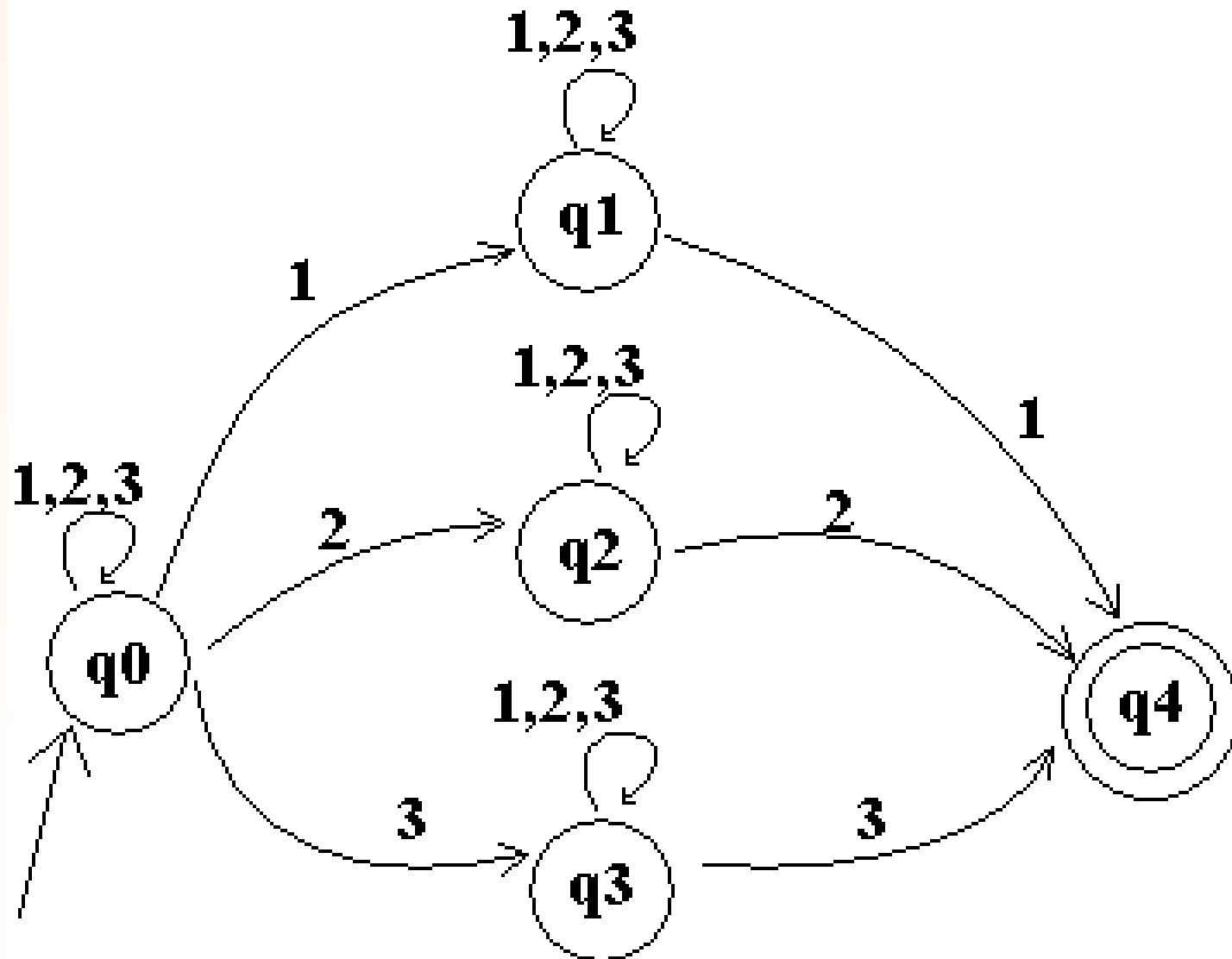
- Limбай acceptat de automat

$$L(M) = \{w \mid w \in \Sigma^*, (q_0, w) \vdash^* (q_f, \varepsilon), q_f \in F\}$$

- Automate echivalente

$M_1$  echivalent cu  $M_2$  daca:  $L(M_1) = L(M_2)$

# Automat finit - exemplu



# Determinism

- Automat finit determinist (AFD)

$$|\delta(q,a)| \leq 1 \quad \forall q \in Q, a \in \Sigma$$

- Automat finit nedeterminist (AFN)

$$\exists q \in Q, a \in \Sigma \text{ astfel incat } |\delta(q,a)| > 1$$

- Automat finit determinist complet definit

$$|\delta(q,a)| = 1 \quad \forall q \in Q, a \in \Sigma$$

# Echivalenta dintre AFD si AFN

Teorema:

- $\forall M_1 - \text{AFN} \quad \exists M_2 - \text{AFD echivalent}$

Constructie (nu demonstratie!):

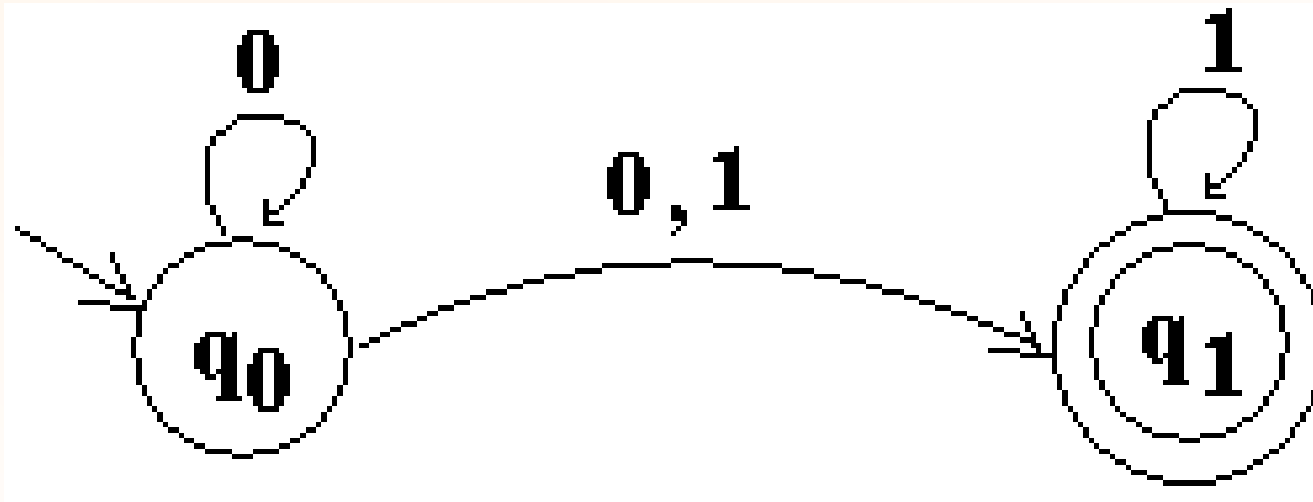
- Pornim cu:  $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{01}, F_1) - \text{AFN}$  oarecare
- Construim:  $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{02}, F_2) - \text{AFD}$   
pe baza lui  $M_1$   
a.i.  $L(M_1) = L(M_2)$

**Teor:  $\forall M_1 - \text{AFN} \quad \exists M_2 - \text{AFD}$  equivalent**

- $\Sigma_2 = \Sigma_1$
- $Q_2 = \mathcal{P}(Q_1)$
- $q_{02} = \{q_{01}\}$
- $F_2 = \{S \in \mathcal{P}(Q_1) \mid S \cap F_1 \neq \emptyset\}$
- $\delta_2(q, a) = \{r \in Q_1 \mid \exists q_1 \in q \text{ a.i. } r \in \delta_1(q_1, a)\}$   
$$= \bigcup_{q_1 \in q} \delta(q_1, a)$$

**$M_2$  – determinist (?)**

# Problema: determinati AFD echiv. pt.



Pana aici am discutat in saptamana 2.  
Vom reveni mai tarziu pentru restul.

# AF – stări care nu contribuie la acceptarea unui cuvânt

- stare neproductivă – (nu e stare productivă)
- stare inaccesibilă – (nu e stare accesibilă)
- stare productivă:  $q \in Q$  a.i.  
$$\exists w \in \Sigma^* \text{ si } q_f \in F \text{ a.i. } (q, w) \vdash^* (q_f, \varepsilon)$$
- stare accesibilă:  $q \in Q$  a.i.  
$$\exists w \in \Sigma^* \text{ a.i. } (q_0, w) \vdash^* (q, \varepsilon)$$

# Algoritm determin. stari accesibile

1.  $i:=0$

$A_0:=\{q_0\}$

2. **Repeta**

$i:=i+1$

$A_{i+1} := A_i \cup \{ q \in Q \mid \exists p \in A_i, \exists a \in \Sigma \text{ a.i. } q \in \delta(p, a) \}$

**pana cand**  $A_i = A_{i+1}$

$\{ A_i - \text{multimea starilor accesibile} \}$

# Algoritm determin. stari productive

1.  $i:=0$

$A_0:=F$

2. **Repeta**

$i:=i+1$

$A_{i+1}=A_i \cup \{ q \in Q \mid \exists p \in A_i, \exists a \in \Sigma \text{ a.i. } p \in \delta(q,a) \}$

**pana cand**  $A_i=A_{i+1}$

$\{ A_i - \text{multimea starilor productive} \}$

## Teorema:

$\forall M_1 - \text{AF}$  exista  $M_2 - \text{AF}$  fara st. neproductive **echiv.**

Constructie (nu demonstratie!):

- Pornim cu:  $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{01}, F_1) - \text{AF}$  oarecare
- determinam  $A$  – multimea starilor productive (algoritmul anterior)
- Construim:  $M_2$  pe baza lui  $M_1$  (a.i.  $L(M_1) = L(M_2)$ )

$$M_2 = (A, \Sigma_1, \delta_{1/A}, q_{01}, F_1)$$

$$L(M_1) = L(M_2) \quad !$$

Teorema:

$\forall M_1 - \text{AF}$  exista  $M_2 - \text{AF}$  fara st. inaccesibile **echiv.**

Constructie (nu demonstratie!):

- ... analog ...

# ? alta metoda de determinare a AFD echivalent pentru un AFN dat

- $M_1 \Rightarrow ? M_2$

Ideea:

1.  $\{q_{01}\} \in Q_2$   
pornim cu  $Q_2 = \{q_{01}\}$
2. adaugam la  $Q_2$  toate submultimile lui  $Q_1$  la care se poate ajunge prin functia de tranzitie, atunci cand se aplica unei stari  $q \in Q_2$  deja adaugata

# AFD complet definit

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \quad (\text{AFD})$$

- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$  functie de tranzitie ;  $|\delta(q,a)| \leq 1$
- ...

Teor:  $\forall$  AFD  $\exists$  AFD complet definit echivalent

Constructie:

AFD  $\Rightarrow$  AFD complet definit:

- adaugam o stare (neproductiva)  $r$  si extindem  $\delta$  astfel:
- $\forall (q,a) \in Q \times \Sigma$  a.i.  $\delta(q,a) = \emptyset$  devine:  $\delta(q,a) = \{r\}$
- $\forall a \in \Sigma$   $\delta(r,a) = \{r\}$

# Minimizarea automatelor finite

**Ce vrem:**

**Automat determinist cu numar minim de stari !**

**Automat redus**

- AFD
- nu contine stari inaccesibile si neproductive
- nu contine perechi de **stari echivalente**

# Minimizarea AFD

- automat cu numar minim de stari
  - fara stari –inaccesibile, neproductive
  - mai putine stari ?

ideea: relatie de echivalenta; clase de echivalenta

- stari diferite
- stari  $k$  diferite
- stari echivalente
- stari  $k$ -echivalente

# Automatul redus

Fie  $M_1$  – un automat finit oarecare

- Determinam AFD echivalent
- Eliminam starile inaccesibile si neproductive
- Determinam AFD echivalent complet definit

Fie  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  automatul rezultat.

- Determinam relatia  $\equiv$  (stari echivalente, clase de echivalenta)
- Pe baza relatiei  $\equiv$  determinam automatul:

$$M_{\equiv} = (Q/\equiv, \Sigma, \delta_{\equiv}, [q_0], F_{\equiv})$$

$Q/\equiv$  - multimea claselor de echivalenta

$$\delta_{\equiv}([q], a) = [\delta(q, a)]$$

$$F_{\equiv} = \{[q] \mid q \in F\}$$

# Automat redus

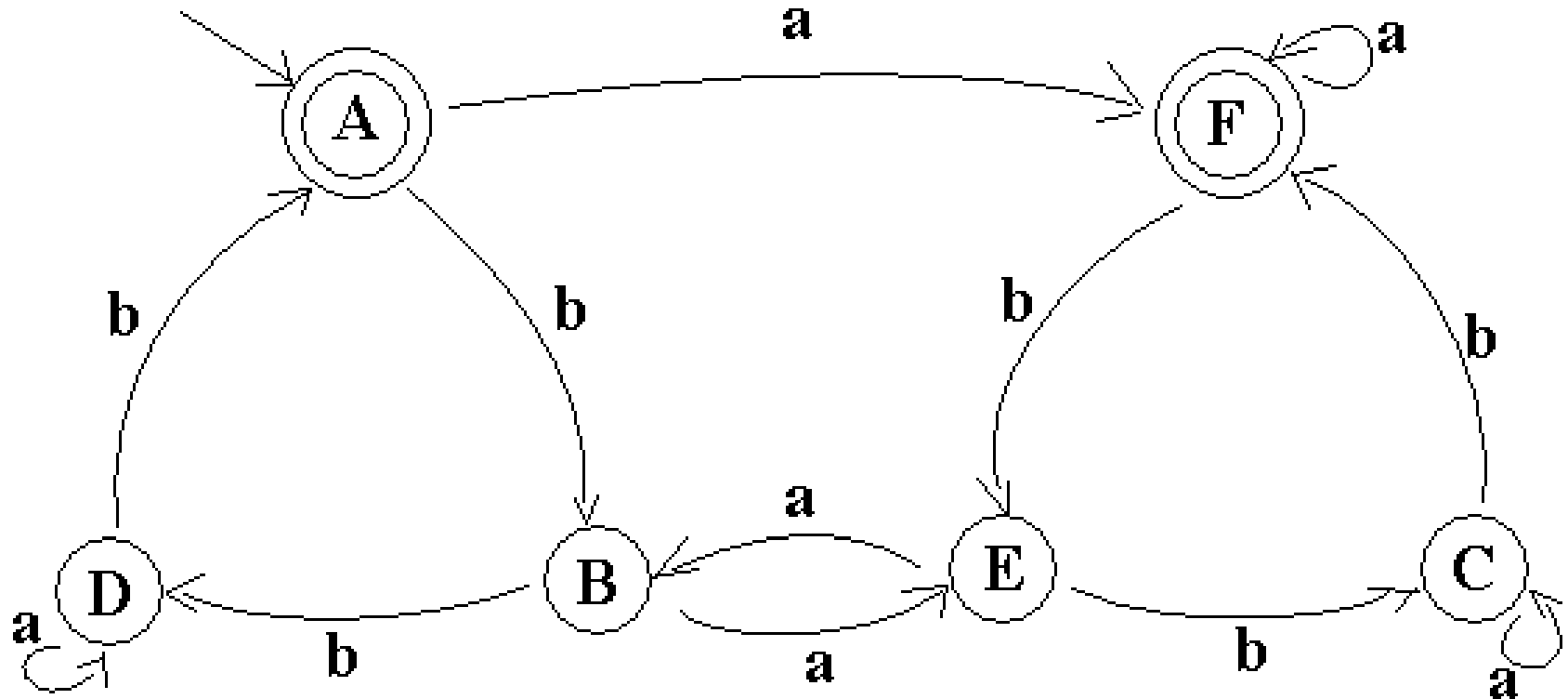
- **Teorema**

Automatul redus are numar minim de stari  
dintre toate AFD echivalente

- **Teorema**

$\forall M_1 - AF \exists M_2 - \text{automat redus echivalent}$

# Determinati clasele de echivalenta ale starilor automatului de mai jos



determinati automatul redus !

# Stari diferite

- o alta exprimare

$q_1, q_2$  sunt *stari diferite* de  $x \in \Sigma^*$

daca  $\exists q_f \in F$  a.i.  $(q_1, x) \vdash^*(q_f, \varepsilon)$

si nu exista nici un  $q \in F$  a.i.  $(q_2, x) \vdash^*(q, \varepsilon)$

sau

daca  $\exists q_f \in F$  a.i.  $(q_2, x) \vdash^*(q_f, \varepsilon)$

si nu exista nici un  $q \in F$  a.i.  $(q_1, x) \vdash^*(q, \varepsilon)$

- $x$  (de mai sus) *diferentiaza* pe  $q_1$  si  $q_2$

# Stari diferite

- o alta exprimare

PP. AFD complet definit

$q_1, q_2$  sunt *stari diferite* de  $x \in \Sigma^*$

daca  $\exists r_1, r_2$  astfel incat:  $(q_1, x) \vdash^*(r_1, \varepsilon)$

si  $(q_2, x) \vdash^*(r_2, \varepsilon)$

are loc una dintre:

1.  $r_1 \in F$  si  $r_2 \in Q-F$
2.  $r_1 \in Q-F$  si  $r_2 \in F$

# Relatii intre stari

- $q_1, q_2$  - stari diferite  
– cf. def. de mai sus  
– ( $\exists x \in \Sigma^*$  care sa le diferentieze)
- stari  $k$  diferite  
– daca  $\exists x \in \Sigma^*, |x| \leq k$  care sa le diferentieze
- stari echivalente ( $\equiv$ )  
– daca nu exista  $x \in \Sigma^*$  care sa le diferentieze
- stari  $k$ -echivalente ( $\equiv^k$ )  
– daca nu exista  $x \in \Sigma^*, |x| \leq k$ , care sa le diferentieze

# Proprietati ale rel. de k-echivalenta ( $\equiv^k$ )

- $q_1 \equiv^0 q_2$  ddaca  $(q_1, q_2 \in F)$  sau  $(q_1, q_2 \in Q-F)$
- $\equiv^0 \supseteq \equiv^1 \supseteq \equiv^2 \supseteq \dots \supseteq \equiv^n \supseteq \dots$
- Daca  $(\equiv^k) = (\equiv^{k+1})$  atunci  $(\equiv^k) = \equiv$

Lema:

Pt. orice M exista  $n \in \mathbf{N}$  a.i.  $q_1 \equiv^n q_2 \Rightarrow q_1 \equiv q_2$

- idee: pot avea un nr. finit de relatii distincte (max.  $|Q|$ )