



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет: «Специальное машиностроение»

Кафедра: «Робототехнические системы и мехатроника»

Лабораторная работа № 5

по курсу «Теория автоматического управления»

Вариант 14

Выполнил: Садовец Роман
Группа: СМ7-51Б

Проверил(а):

Москва, 2023 г.

I. Домашнее задание № 2 по курсу «Линейная ТАУ»

$$W_{нч} = \frac{100}{(5s + 1)(0,0125s + 1)(0,005s + 1)}$$

Требования к системе:

$$D_{ск} = 125 \text{ с}^{-1}$$

$$D_{уск} = 120 \text{ с}^{-2}$$

$$t_{пп} \leq 0,55 \text{ сек}$$

$$\sigma_{max} \leq 30\%$$

А) Выбрать последовательное корректирующее устройство

Б) Выбрать параллельное корректирующее устройство

Решение:

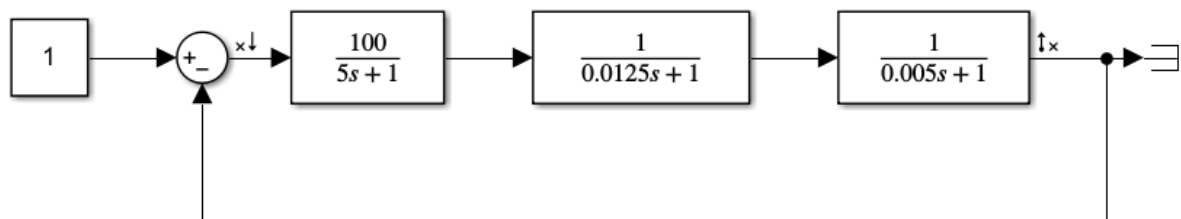


Рис. 1. Структурная схема системы до коррекции

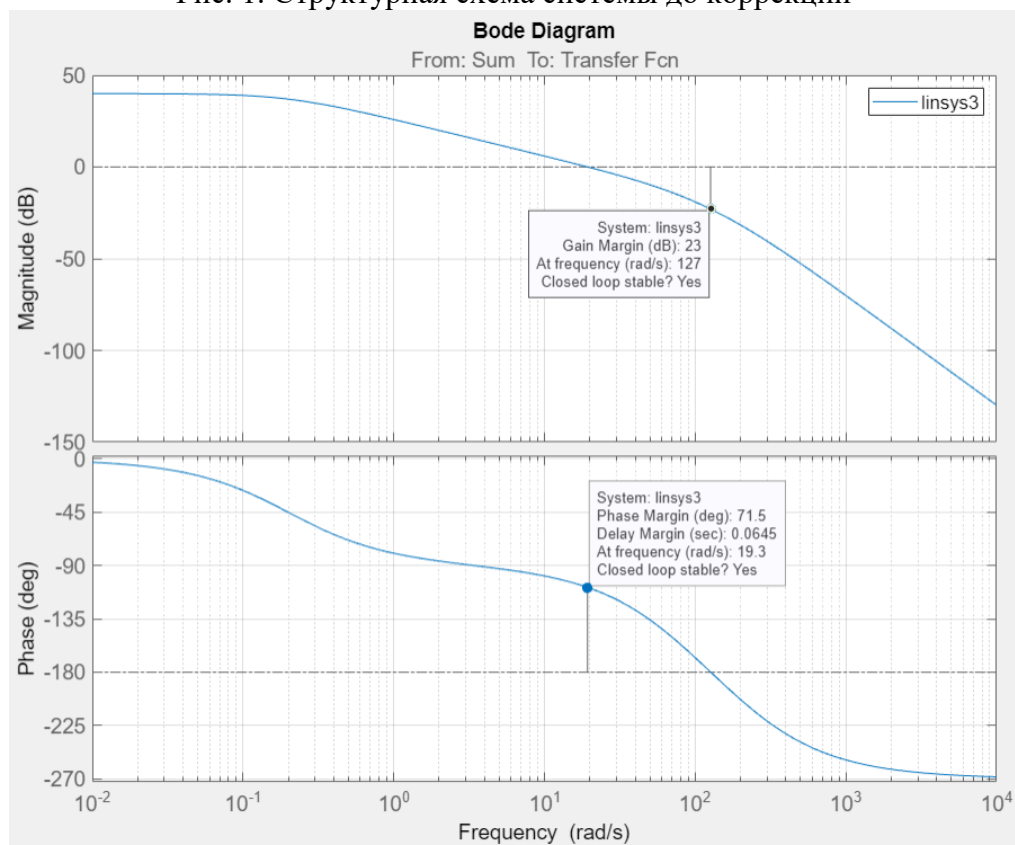


Рис. 2. ЛЧХ системы до коррекции

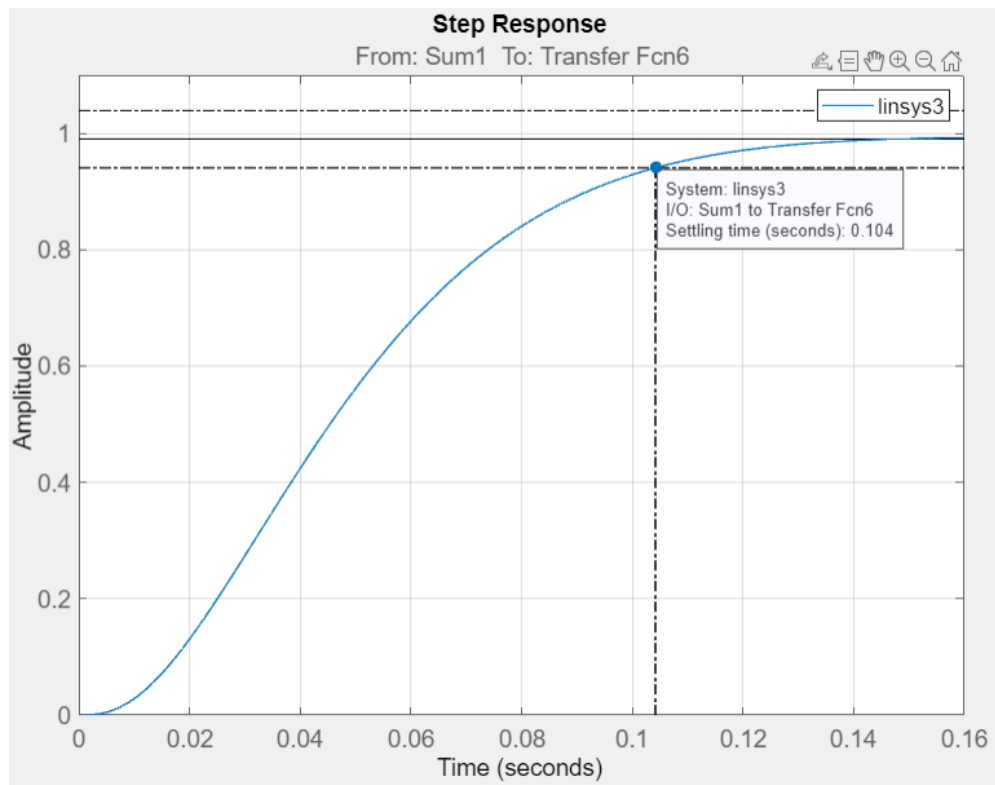


Рис. 3. Переходной процесс системы до коррекции

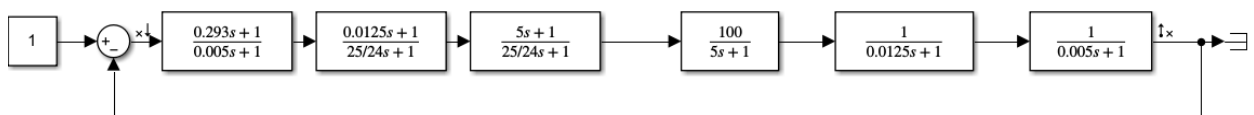


Рис. 4. Структурная схема системы при введении последовательного КУ

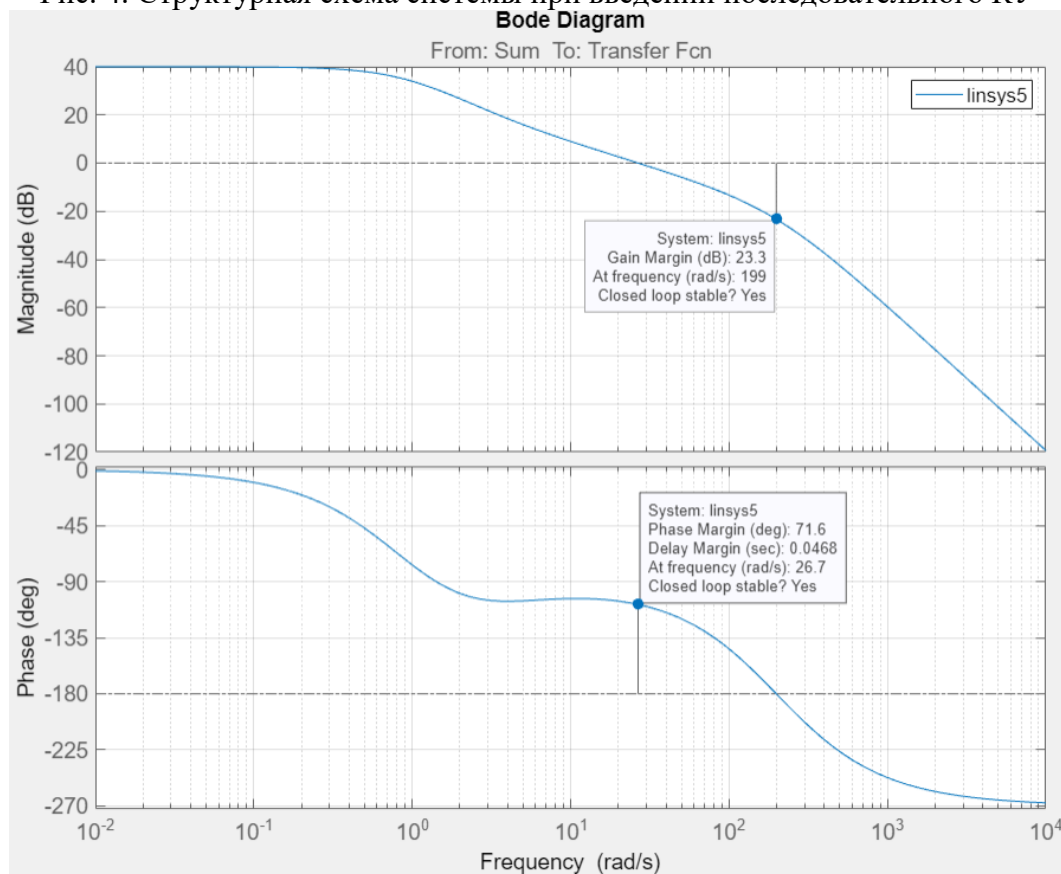


Рис. 5. ЛЧХ системы при введении последовательного КУ

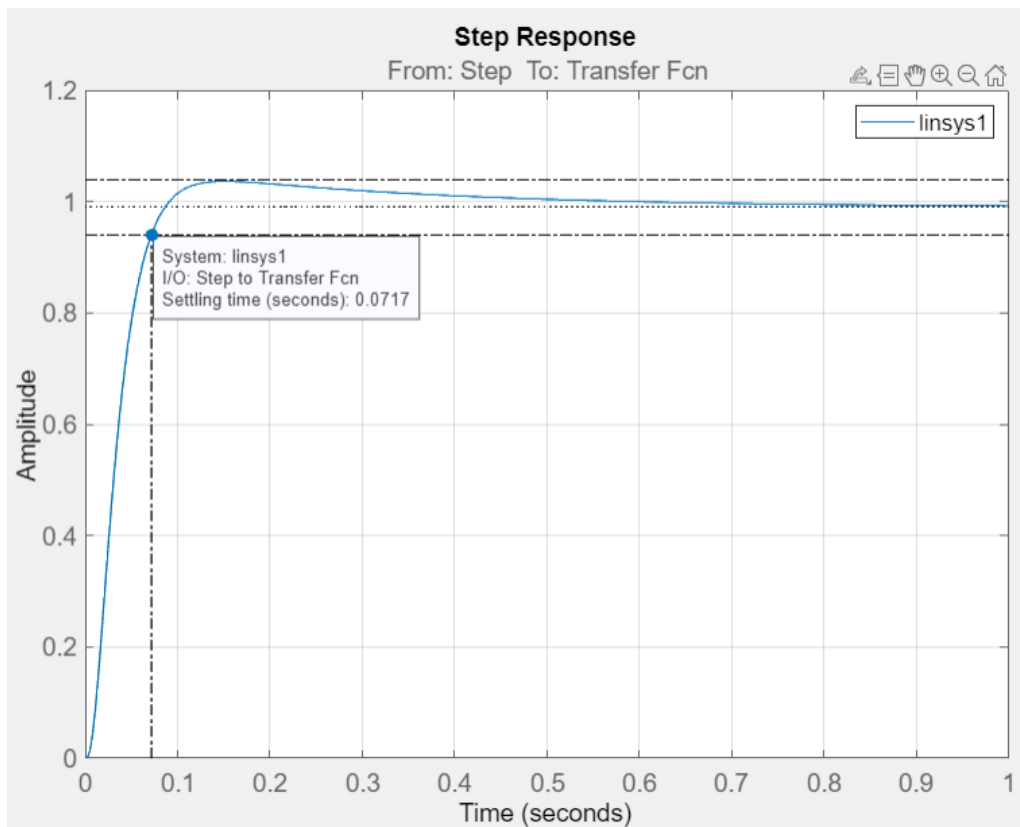


Рис. 6. Переходной процесс системы при введении последовательного КУ

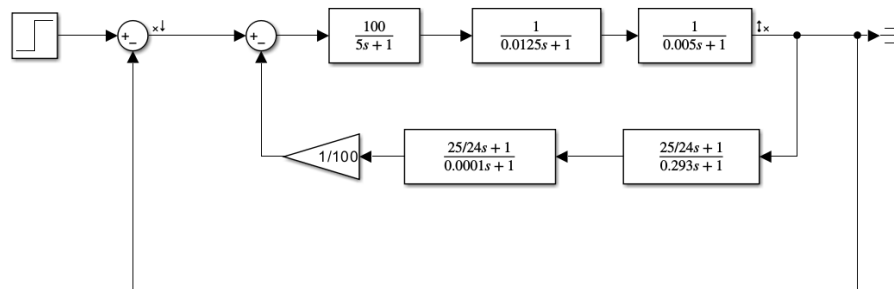


Рис. 7. Структурная схема системы при введении параллельного КУ

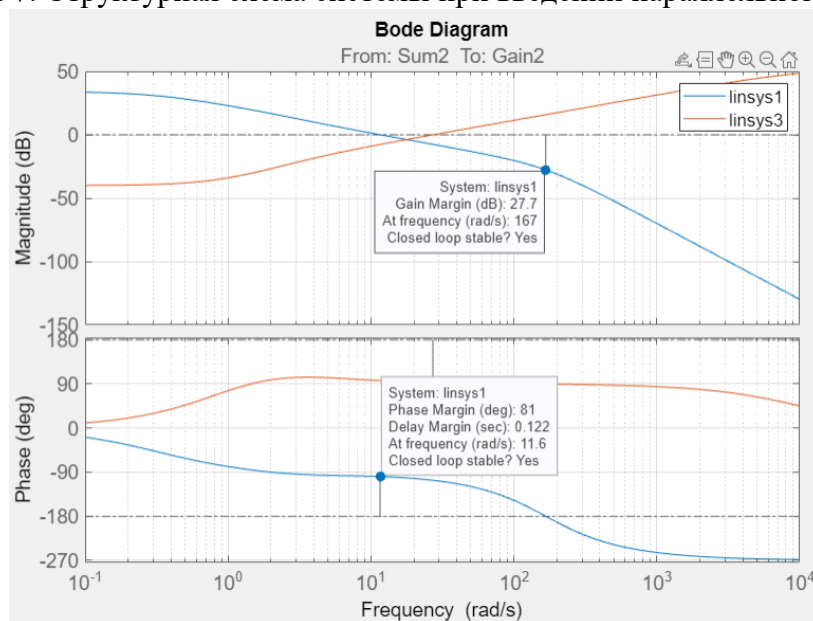


Рис. 8. ЛЧХ системы при введении параллельного КУ вместе с ЛЧХ передаточной функции параллельного КУ

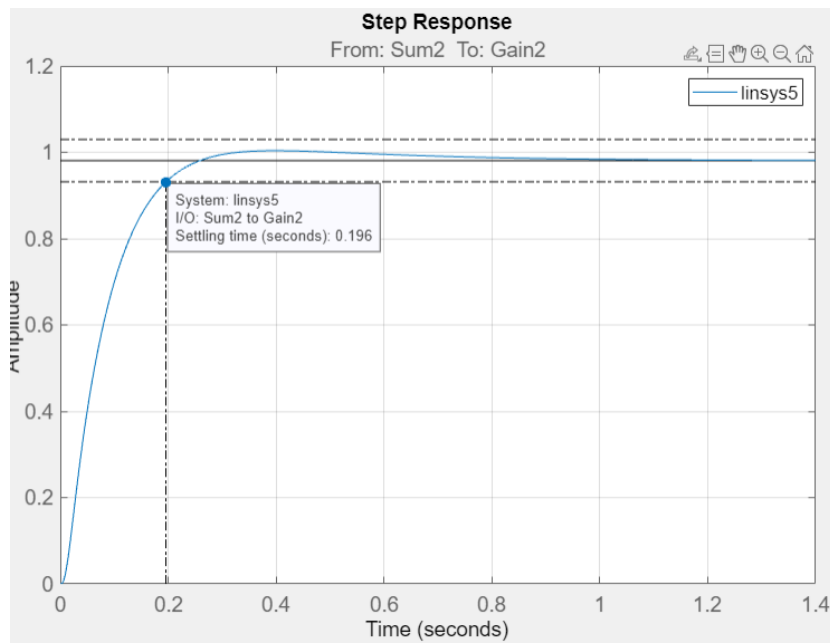


Рис. 9. Переходной процесс системы при введении параллельного КУ

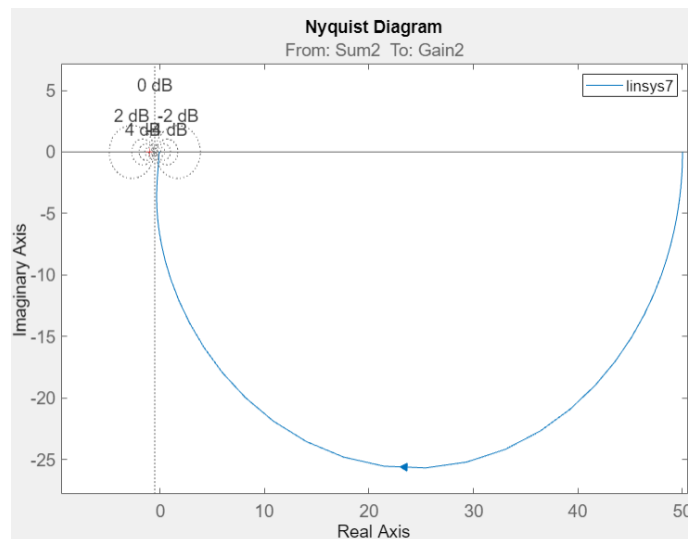


Рис. 10. Проверка устойчивости системы при введении параллельного КУ

Порядок астатизма равен 0, положительных полюсов 0, не охватываем точку $(-1, 0) \rightarrow$ система **устойчива**

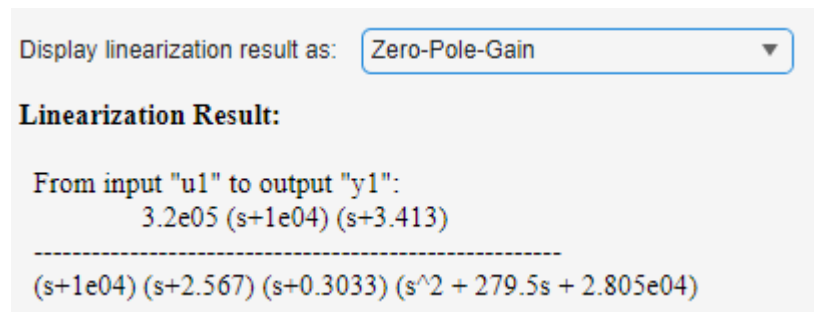


Рис. 11. Получившаяся передаточная функция желаемой системы при введении параллельного КУ

II. Компьютерное управление рисующим устройством

Рисующее устройство – это система, состоящая из карандаша, перемещающемуся по полю размерами $A \times A$, передачи винт-гайка, а также привода, включающего в себя двигатель и редуктор.

В этой задаче необходимо смоделировать работу данной системы, где:

А) На вход подаётся моменты на выходе привода. Поскольку имеем 2D кинематику перемещения (2 привода на управление), оптимальным будет спроецировать вектор результирующего момента M на оси Ox и Oy . Тогда получим, что на вход подаётся:

$$M = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix} \quad (1)$$

Б) На выходе снимаются параметры скорости и координат карандаша:

$$K = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (2)$$

которые необходимо отобразить с помощью разработанной в симулинке схемы рисующего устройства.

В таблице 1 представлены физические параметры системы, а также критерии к точности и скорости работы рисующей системы.

R – процент от размера поля, по которому будет строиться круговая траектория для проверки точности системы, [%]

T – время, за которая должна отрисоваться окружность, [с]

J_B – момент инерции винта с учётом вала двигателя, [кг*м²]

i – передаточное отношение передачи винт-гайка (величина перемещения гайки (карандаша) за один полный оборот винта), [м/об]

m_K – масса карандаша, [кг]

r_B – радиус винта, [мм]

R, %	90
A, м	0.1
Момент инерции винта, кг * м ²	0.006
Передаточное отношение винтовой передачи, мм на оборот	12
Радиус винта, мм	20
Масса карандаша, кг	0.1
T, с	8

Табл. 1. Исходные данные

Основные уравнения, описывающие работу рисующего устройства

$$i = \frac{l}{N} = \left| \frac{t}{t} \right| = \frac{v}{n} = \frac{v}{2\pi\omega}, \quad (3)$$

где v – линейная скорость карандаша в направлении одной из осей, [мм/с];
 n – количество совершенных оборотов винта, [об/с]; ω – угловая скорость вращения винта, [рад/с]; l – перемещение винта вдоль одной из осей, [мм]; N – количество оборотов винта (ход гайки), [об].

Откуда получим линейную скорость перемещения карандаша

$$v = 2\pi * \omega * i \quad (4)$$

Или же угловую скорость винта, необходимую для задания определенной линейной скорости:

$$\omega = \frac{v}{2\pi*i} \quad (5)$$

Найти момент в зависимости от скорости вращения можно по формуле:

$$J_{sum}\dot{\omega} = M; \quad (6)$$

где J_{sum} – приведенный момент инерции

С учетом (3) – (5), выражение (6) примет вид:

$$J_B * \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{2\pi*i} \right) = M \quad (7)$$

Подставим (1) в (7). Получим матрицу:

$$M = \frac{J_B}{2\pi * i} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Или в виде системы:

$$\begin{cases} M_x = \frac{J_B}{2\pi * i} * \ddot{x} \\ M_y = \frac{J_B}{2\pi * i} * \ddot{y} \end{cases} \quad (9)$$

Зададим на вход параметрическую кривую в формате $[x(s), y(s)]$, $s \in [0; 1]$, 0 – начало траектории, 1 – её конец, при том $s = s(t)$, где $t \in [0; T]$. T – полное время отрисовки фигуры

Для теста введём в параметрическом виде окружность.

$$\begin{cases} x = x(s) = r * \cos(2\pi * s) \\ y = y(s) = r * \sin(2\pi * s) \end{cases} \quad (10)$$

Для скоростей и ускорений тогда получим:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\pi r * \sin(2\pi * s) \\ \dot{y} = 2\pi r * \cos(2\pi * s) \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -4\pi^2 r * \cos(2\pi * s) \\ \ddot{y} = -4\pi^2 r * \sin(2\pi * s) \end{cases} \quad (12)$$

Желательно выполнение условий: $s(0) = 0$, $s(T) = 1$, $\dot{s}(0) = 0$, $\dot{s}(T) = 0$, с целью предотвращения дерганий и быстрого износа двигателей рисующего устройство (плавный старт и торможение). Положим:

$$s = s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

Тогда пол заданные требования: $c = d = 0$. Получим систему:

$$\begin{cases} aT^3 + bT^2 = 1 \\ 3aT^2 + 2bT = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Откуда можно посчитать: $a = \frac{-2}{T^3}$, $b = \frac{3}{T^2} \rightarrow$

$$\rightarrow s = s(t) = -\frac{2}{T^3} * t^3 + \frac{3}{T^2} * t^2 \quad (14)$$

Для упрощения построения и добавления функции плавного торможения и разгона, введём массив от 0 до T с количеством точек, равному $j = 5000$. Тогда для каждого значения t_j можно будет посчитать координату (10), необходимую скорость (11) и ускорение (12).

Рассчитывать производные будем численно, поскольку иные способы не подходят под условия, либо требуют уточнения для каждой отдельной кривой (использование библиотеки `syms`, инструмент `diff()` – увеличивает время отработки всей программы, при том не способно брать производные сложной функции). Рассчёты будем проводить на основе следующей формулы:

$$y' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + \bar{O}(h), \quad (15)$$

где h – шаг разбиения ($h = T / j$); $\bar{O}(h)$ – погрешность. При том, чтобы не потерять значения первой и второй производной, будем брать дополнительные две итерации по времени.

```
Test_R = A/2*R; % Радиус отрисовываемой тестовой окружности
j = 5000; % Количество итераций
% t - Вектор-столбец со значениями времени от 0 до T с шагом T/j
t = linspace(0, T, j)';

% Дополнительные расчётные точки по времени для сохранения
% размерности массивов первой и второй производной
t(j+1) = T + T/j;
t(j+2) = T + 2 * T/j;

s = -2/T^3 .* t.^3 + 3/T^2 .* t.^2; % Функции s = s(t)

% Координаты точек графика (система 10)
x = Test_R * cos(2*pi * s);
y = Test_R * sin(2*pi * s);

% Скорости между точками графика (система 11)
for i=1:(j+1)
    x_dot(i, 1) = ( x(i+1) - x(i) ) / ( T / j );
    y_dot(i, 1) = ( y(i+1) - y(i) ) / ( T / j );
end

% Ускорения между точками графика (система 12)
for i=1:(j)
    x_ddot(i, 1) = ( x_dot(i+1) - x_dot(i) ) / ( T / j );
    y_ddot(i, 1) = ( y_dot(i+1) - y_dot(i) ) / ( T / j );
end

% Вектора координат точек K графика функции, а также скорости v и
% ускорения a между ними
K = [ x(1:j, 1), y(1:j, 1) ];
v = [ x_dot(1:j, 1), y_dot(1:j, 1) ];
a = [ x_ddot, y_ddot ];
```

Привод должен обрабатывать посчитанные значения координат, скоростей и ускорений. Значения моментов, которые должны быть на приводе, можно получить с помощью системы (9). Отсюда получим вектор значений моментов M_x и M_y , которые будут на валах. Ускорение вала привода можно получить из уравнения (6).

$$\varepsilon_x(t) = \frac{M_x}{J_{sum}}; \quad \varepsilon_y(t) = \frac{M_y}{J_{sum}}$$

Угловую скорость вращения винта можно определить по формуле (5), а мощность на осях можно посчитать по следующим выражениям:

$$P_x = |M_x * \omega_x|; \quad P_y = |M_y * \omega_y| \quad (15)$$

```
% Torque
M = Jv*2*pi/i .* a;

% Angular acceleration
E = M ./ Jv;

% Angular velocity
w = 2*pi/i .* v;

% Power
P = abs( M .* w );
```

Далее выведем графики моментов, скоростей и ускорения от времени, а также график мощности приводов для тестовой окружности. Рисунок 10 – требуемые графики для оси Ox , рисунок 11 – для оси Oy .

Следующим этапом необходимо проверить корректную работу нашей системы. Для этого разработаем нашего модель рисующего устройства в системе Simulink, где на вход подаются рассчитанные значения моментов из пунктов ранее. Тогда решаем прямую задачу динамики и стараемся получить значения координат точек на выходе. Разработанная система представлена на рисунке 12. Вся система основана на уравнениях системы (9). Важным условием является установка начальных условий в интеграторах, которые можно определить по ранее заданным матрицам в MATLAB. Получившийся график представлен на рисунке 13. Он удовлетворяет поставленным тестовым условиям задачи

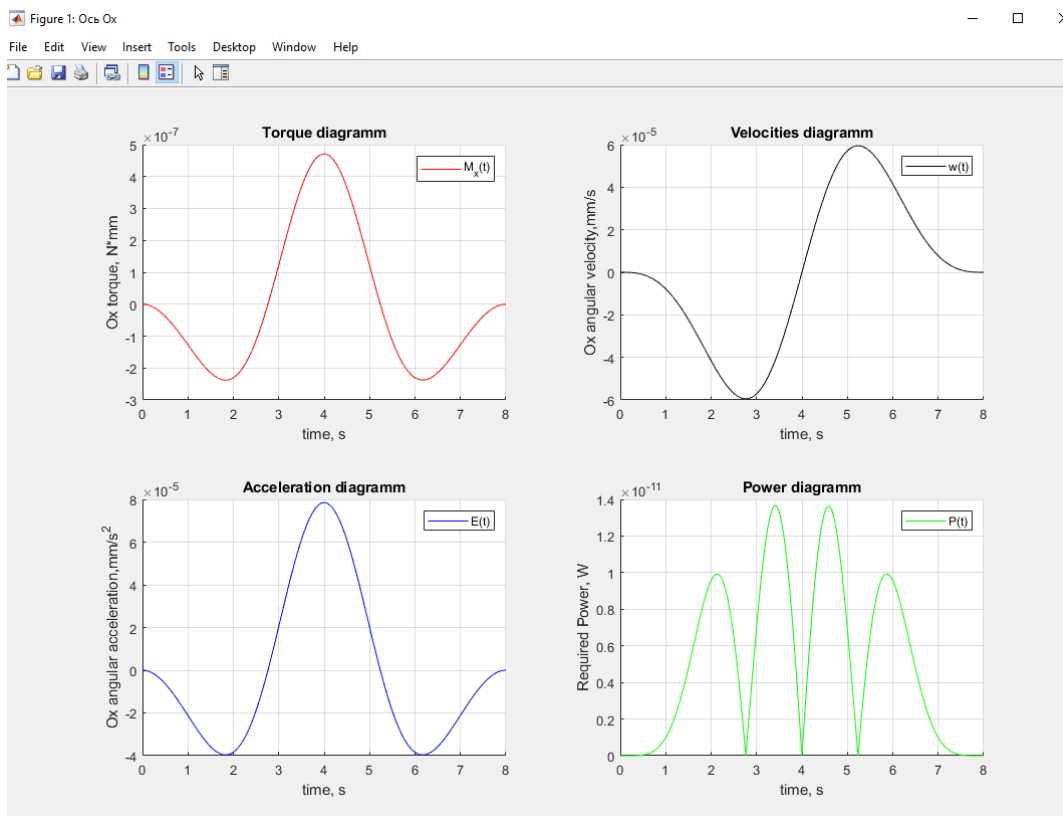


Рис. 10. Требуемые графики для оси Ox

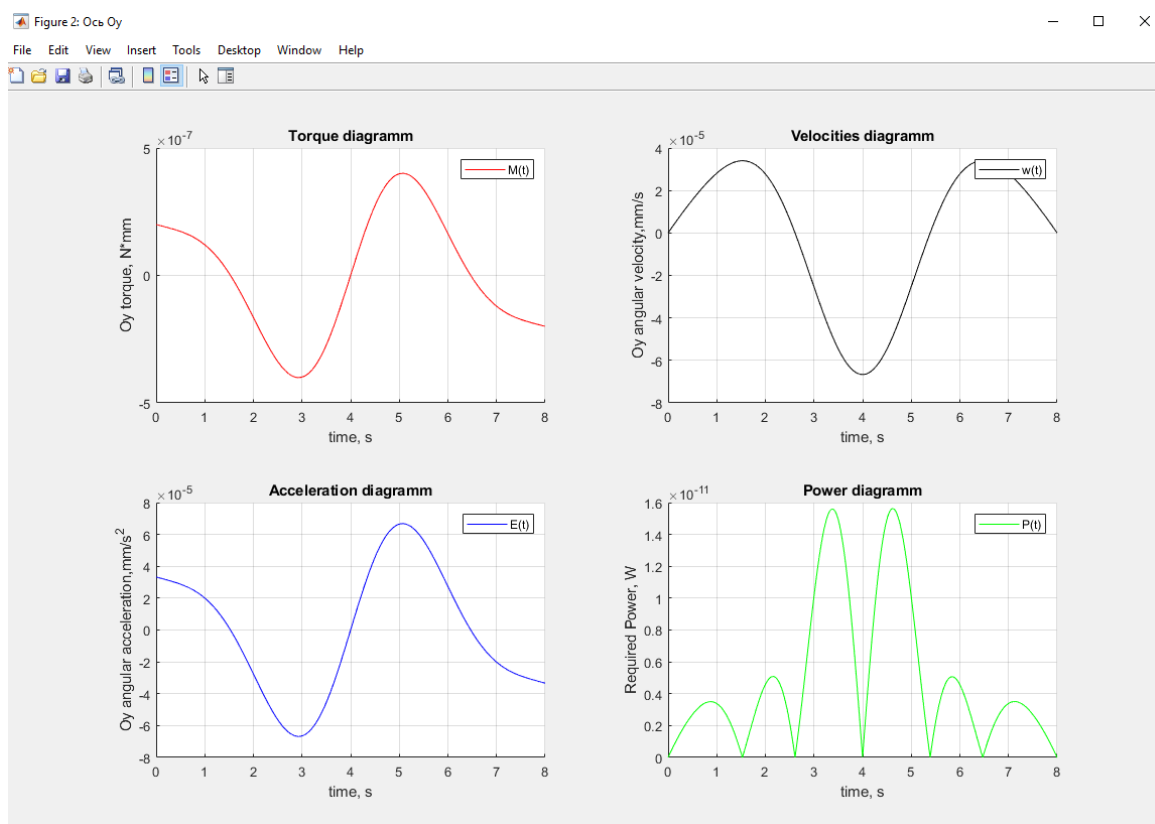


Рис. 11. Требуемые графики для оси Oy

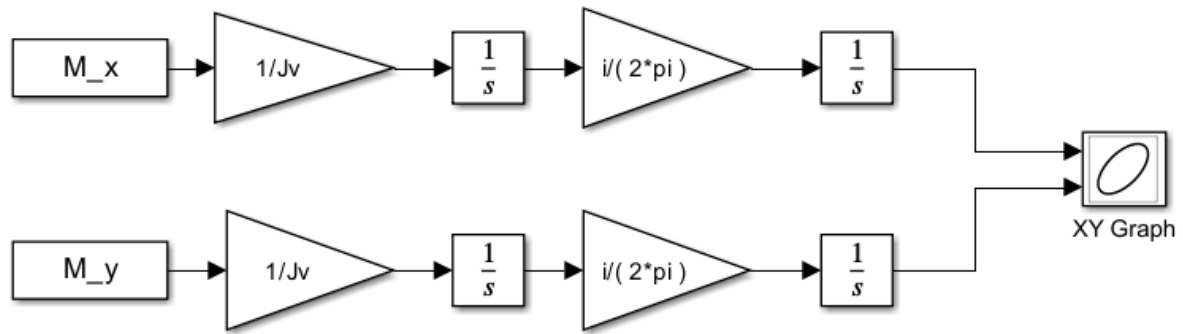


Рис. 12. Структурная схема рисующего устройства

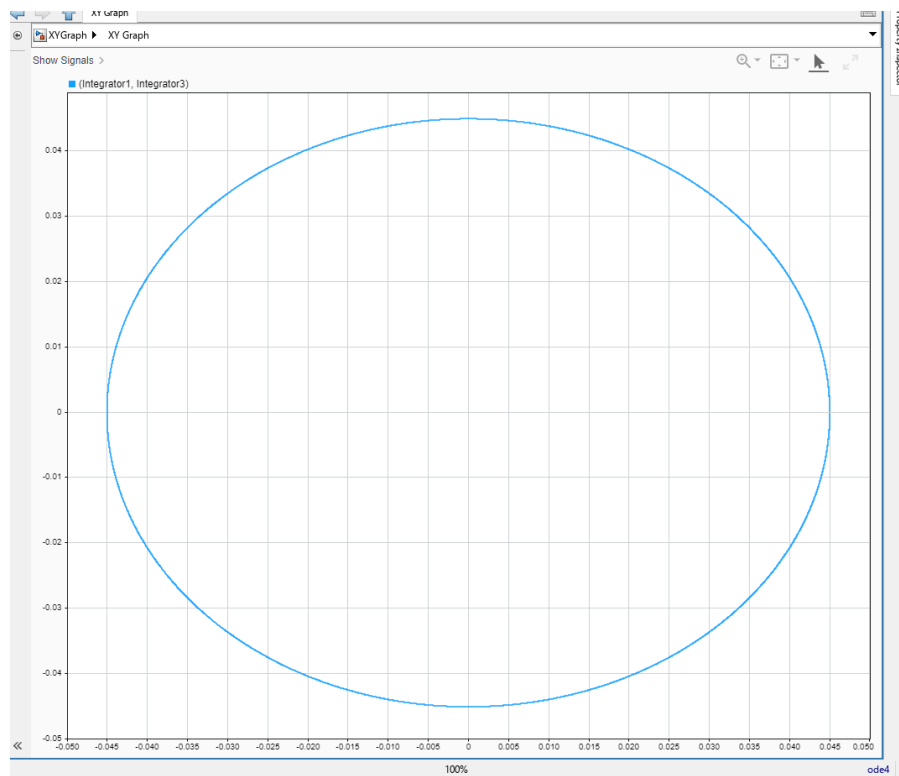


Рис. 13. Получившийся график окружности

В качестве произвольной кривой выберем лемнискату Бернулли. Она описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(s) = \frac{C\sqrt{2} \cos(2\pi*s)}{1+\sin^2(2\pi*s)} \\ y = y(s) = \frac{C\sqrt{2} \sin(2\pi*s)\cos(2\pi*s)'}{1+\sin^2(2\pi*s)} \end{cases} \quad (16)$$

где C – это расстояние от центра лемниската до фокуса. Рассмотрим самый простой случай – центр совпадает с точкой начала координата (пересечением Ox и Oy). Тогда получим графики моментов, ускорений, угловых скоростей и мощности (рис. 14, 15) и сам график лемнискаты в simulink (рис. 16)

$c = 0.1$; % От центра лемнискаты до фокуса

$x = (c * \sqrt{2} * \cos(2*\pi*s)) ./ (1 + \sin(2*\pi*s).^2);$

$y = (c * (\sin(2*\pi*s) .* \cos(2*\pi*s))) ./ (1 + \sin(2*\pi*s).^2);$

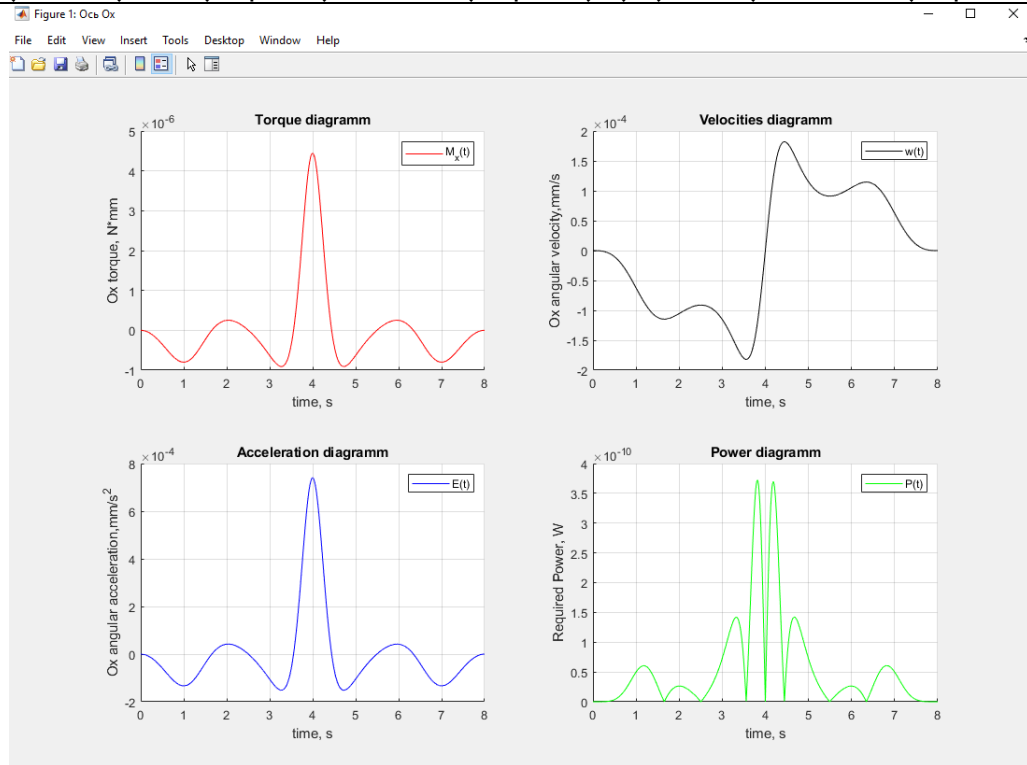


Рис. 14. Требуемые графики для оси Ох (лемниската)

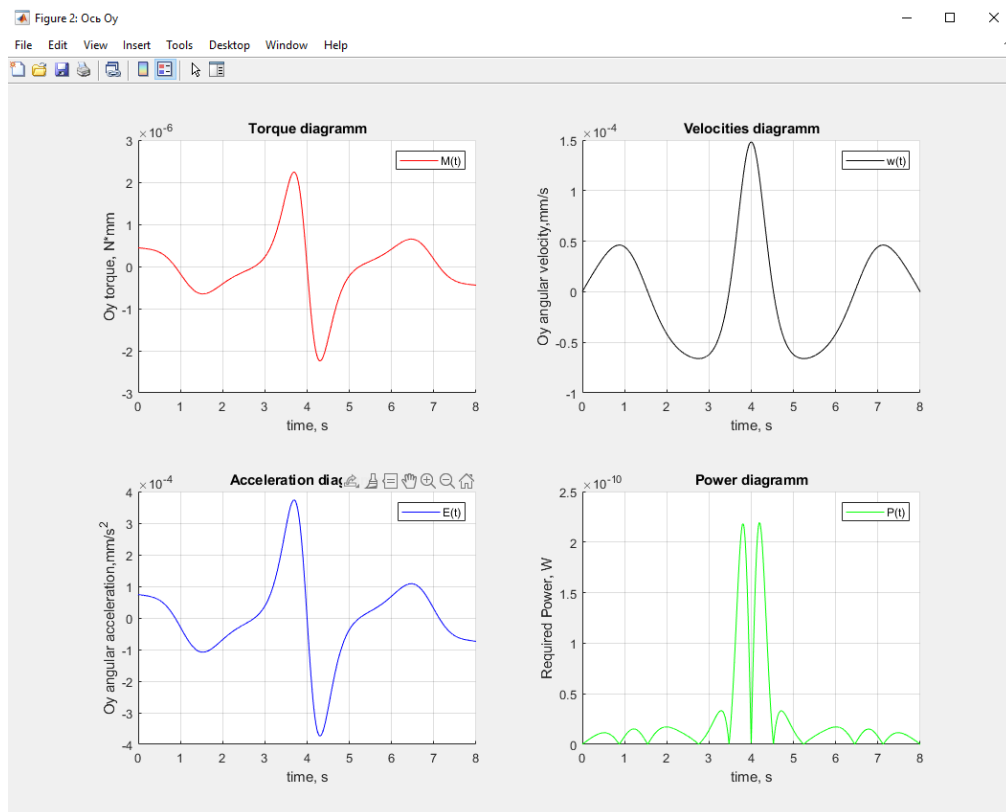


Рис. 15. Требуемые графики для оси Оу (лемниската)

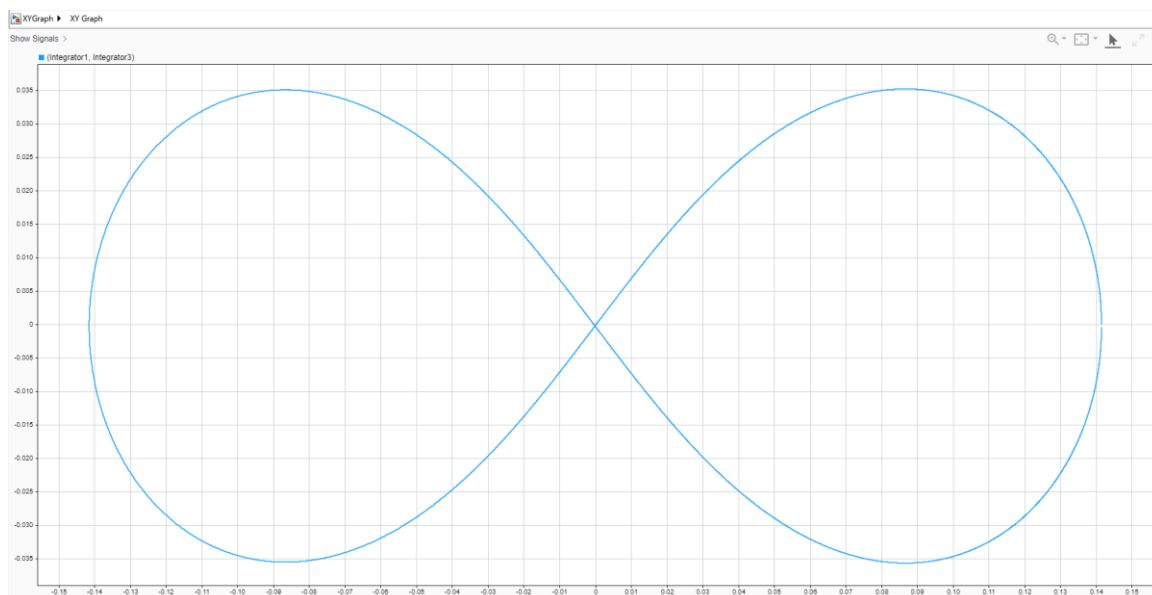


Рис. 16. Получившийся график лемнискаты

В качестве улучшения системы можно рассмотреть отработку резких изменений ускорений на старте программы. Если проанализировать рисунки 11 и 15, графики ускорений, то замечен резкий скачок ускорений, что негативно сказывается на работе двигателей. Для решения проблемы необходимо обеспечить нулевое ускорение на старте и плавный переход на конце (точка перегиба). Тогда общие условия будут выглядеть так:

$$s(0) = 0, s(T) = 1, \dot{s}(0) = 0, \dot{s}(T) = 0, \ddot{s}(0) = 0, \ddot{s}(T) = 0$$

Возьмем под этим условия следующее уравнение:

$$s = s(t) = at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2 + et + f$$

Тогда:

$$d = e = f = 0$$

$$\begin{cases} aT^5 + bT^4 + cT^3 = 1 \\ 5aT^4 + 4bT^3 + 3cT^2 = 0 \\ 20aT^3 + 12bT^2 + 6cT = 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$\text{Откуда можно получить: } a = -\frac{6}{5T^5}, b = -\frac{3}{5T^4}, c = \frac{14}{5T^3} \rightarrow$$

$$\rightarrow s = s(t) = -\frac{6}{5T^5} * t^5 - \frac{3}{5T^4} * t^4 + \frac{14}{5T^3} * t^3 \quad (18)$$

Тогда график $s = s(t)$ будет выглядеть так, как показано на рисунке 17. На рисунках 18-20 можно увидеть графики, аналогичные рисункам 10, 11, 13, но с применением другого вида уравнения $s = s(t)$.

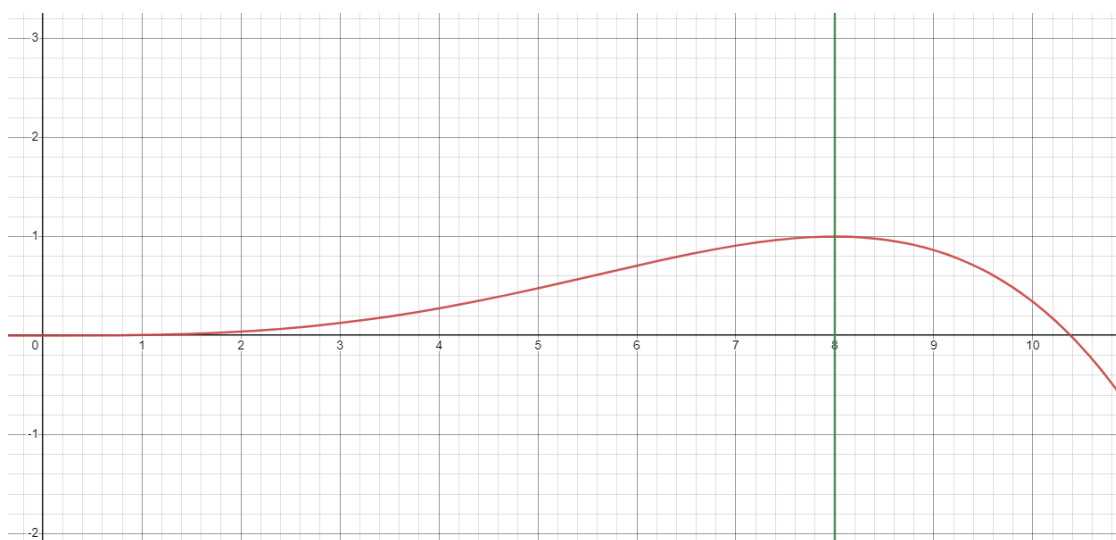


Рис. 17. График $s = s(t)$ для устранения проблемы с резким стартом двигателя

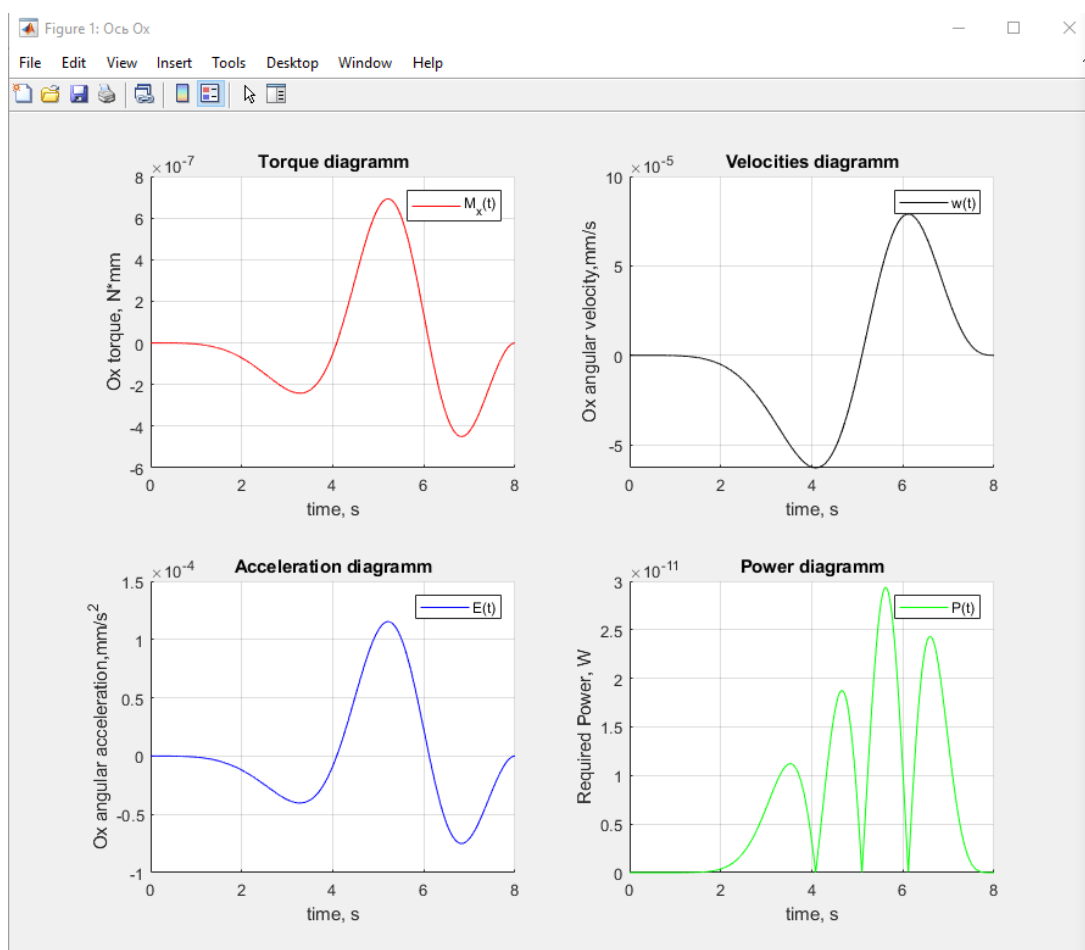


Рис. 18. Требуемые графики для оси Ox (с устранением ненулевого ускорения на старте)

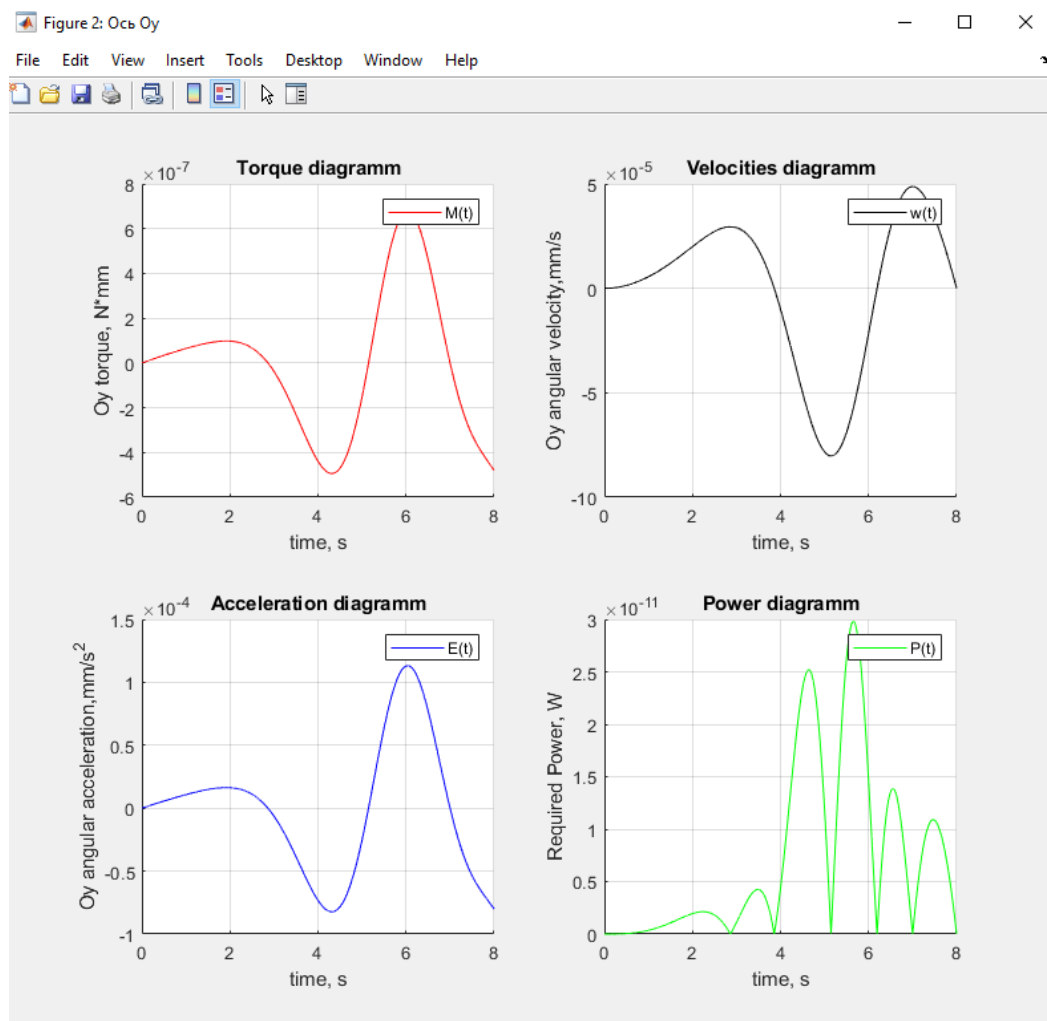


Рис. 19. Требуемые графики для оси Oy (с устранением ненулевого ускорения на старте)

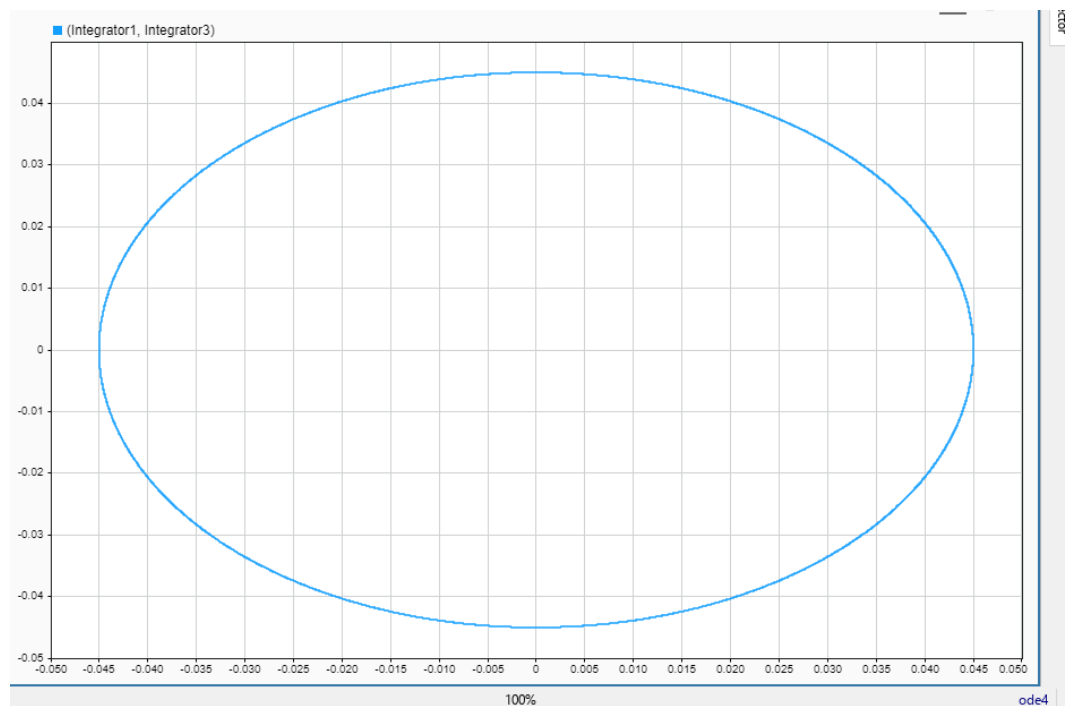


Рис. 20. График окружности в Simulink (с устранением ненулевого ускорения на старте)

Приложение

1. Публичный репозиторий для лабораторных работ по ТАУ // GitHub
URL: <https://github.com/RiXenGC/Control-Theory.git>