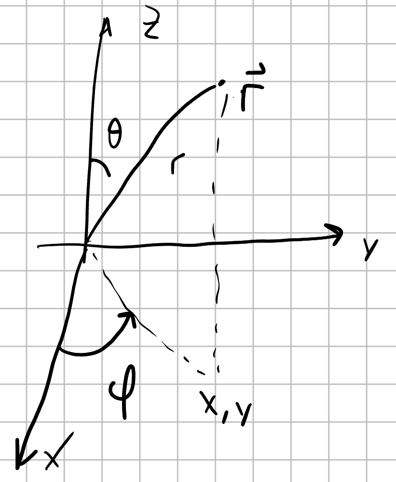
Kugelkoordinaten



$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

$z = r\cos\theta$

$$\vec{t}_r = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \vec{e}_r, \quad t_r = 1$$

$$\vec{t}_\theta = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix}, \quad t_\theta = r$$

$$t_\varphi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t_\varphi = r\sin\theta$$

$\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi$

Gradient: $(\text{grad}\, F)_r = \frac{\partial F}{\partial r}$, $\text{grad}\,(F)_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}$

$(\text{grad}\, F)_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial\varphi}$

Vektorfeld

$\vec{V} = V_r\vec{e}_r + V_\theta\vec{e}_\theta + V_\varphi\vec{e}_\varphi$

$$\text{div}\,\vec{V} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\, V_r\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r\sin\theta\, V_\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(r\, V_\varphi\right)\right]$$

$$\boxed{= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 V_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, V_\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}V_\varphi\right]}$$

Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

$$\Delta F = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}\right]$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\underset{\uparrow}{\Delta_{S^2}}(\theta,\varphi)$$

Laplaceoperator auf der Einheitskugel

Rotation

$$\mathrm{rot}\,\vec V = \vec e_r \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta\, V_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial\varphi}\right] + \vec e_\theta \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r V_\varphi)}{\partial r}\right]$$
$$+ \vec e_\varphi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right]$$

$$\Delta_{S^2} = (\vec r \times \vec\nabla)^2$$

"Drehimpulsquadrat"

$$\vec L = \vec r \times \vec p \,, \xrightarrow[q.]{} \vec L = i\hbar\, \vec r \times \vec\nabla$$

$$\vec L^2 = -\hbar^2 \Delta_{S^2}$$

Nachweis

$$(\vec r \times \vec\nabla)\cdot(\vec r \times \vec\nabla)\Psi = \vec r \cdot \underbrace{\mathrm{rot}(\vec r \times \mathrm{grad}\,\Psi)}_{\text{nur } \vec e_r\text{-Komponente}}$$

$$\mathrm{rot}\left(\cancel{r}\,\vec e_r \times \left(\vec e_\theta \frac{1}{\cancel{r}}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} + \vec e_\varphi \frac{1}{\cancel{r}\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right)\right]\Bigg\}_r = \mathrm{rot}\left[\vec e_\varphi \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} - \vec e_\theta \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right]_r$$

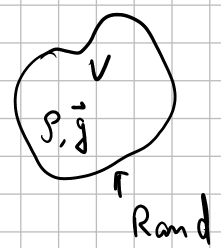
also $$V_\theta = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\,, \quad V_\varphi = \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}$$

$$(\vec r \times \vec\nabla)^2\Psi = \vec r \cdot \mathrm{rot}\,(\vec r \times \mathrm{grad}\,\Psi) = \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\right]$$

Helmholtz'sches Theorem

Ein [hinreichend schnell für $|\vec r| \to \infty$ abfallendes] Vektorfeld $\vec W(\vec r)$ kann aus seiner Quelldichte $\rho(|\vec r|) = \mathrm{div}\,\vec W(\vec r)$ und seiner Wirbeldichte $\vec g(\vec r) = \mathrm{rot}\,\vec W(\vec r)$ eindeutig berechnet werden

$$\vec W(\vec r) = -\mathrm{grad}_{\vec r}\left[\int d^3r' \frac{\rho(\vec r')}{4\pi|\vec r - \vec r'|}\right] + \mathrm{rot}_{\vec r}\left[\int d^3r' \frac{\vec g(\vec r')}{4\pi|\vec r - \vec r'|}\right]$$



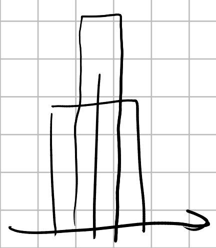
Zerlegung: $\vec W(\vec r) = \vec W_1(\vec r) + \vec W_2(\vec r)$ in einen wirbelfreien und einen quellenfreien Anteil

$\vec W_1(\vec r) = -\text{grad}\,\Phi(\vec r)$, $\text{rot}\,\vec W_1(\vec r) = \vec 0$

$\vec W_2(\vec r) = \text{rot}\,\vec A(\vec r)$, $\text{div}\,\vec W_2(\vec r) = 0$

Beweis des Helmholtz'schen Satzes

Ausgangspunkt: $\delta^3(\vec r - \vec r') = -\frac{1}{4\pi}\Delta_{\vec r}\frac{1}{|\vec r - \vec r'|}$



$\lim_{\varepsilon \to 0^+} f_\varepsilon(x) = \delta(x)$

und die triviale Darstellung des Vektorfelds:

$$W(\vec r) = -\Delta_{\vec r}\int d^3r' \frac{\vec W(\vec r')}{4\pi|\vec r - \vec r'|}$$

benutze $-\Delta = \text{rot rot} - \text{grad div}$

Wir lesen ab, dass $\Phi(\vec r) = \text{div}_{\vec r}\int \frac{d^3r'}{4\pi}\frac{\vec W(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}$

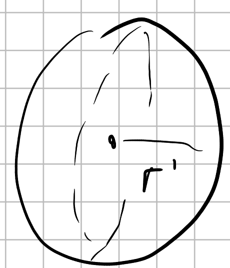
$$= \int \frac{d^3r'}{4\pi}\vec W(\vec r')\cdot \underbrace{\text{grad}_{\vec r}\frac{1}{|\vec r - \vec r'|}}_{= -\text{grad}_{\vec r'}\frac{1}{|\vec r - \vec r'|}}$$

Mit der Formel:

$$\text{div}(\vec v \cdot f) = (\text{div}\,\vec v)f + \vec v\,\text{grad}\,f \quad (\text{bzgl } \vec r')$$

wird hieraus:

$$\Phi(\vec r) = \int \frac{d^3r'}{4\pi}\left[\frac{\text{div}_{\vec r'}\vec W(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|} - \text{div}_{\vec r'}\left(\frac{\vec W(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}\right)\right]$$



Gauß'schen Satz → Oberflächenintegral

das verschwindet, falls $r'^2\,|\vec W(\vec r')|\,\frac{1}{r'} \xrightarrow{r' \to \infty} 0$

d.h $|\vec{W}(\vec{r}')| \sim (r')^{-1-\varepsilon}$ mit $\varepsilon > 0$

also $\Phi(\vec{r}) = \int \frac{d^3r'}{4\pi} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ ✓

Ebenso lesen wir ab

$$\mathrm{rot}(\vec{e}f) = \vec{\nabla}(\vec{e}f) = -\vec{e} \times \vec{\nabla} f$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mathrm{rot}_{\vec{r}} \int \frac{d^3\vec{r}'}{4\pi} \frac{\vec{W}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= \int \frac{d^3r'}{4\pi} \vec{W}(\vec{r}') \times \mathrm{grad}_{\vec{r}'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

mit der Formel: $\mathrm{rot}(f\vec{e}) = (\mathrm{grad} f) \times \vec{e} + f\, \mathrm{rot}\, \vec{e}$ bzgl $\vec{r}'$

Wird hieraus

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int \frac{d^3r'}{4\pi} \left[\frac{\mathrm{rot}_{\vec{r}'} \vec{W}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \mathrm{rot}_{\vec{r}'} \left(\frac{\vec{W}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \right]$$

Gaußscher Satz (in abgewandeter Form):

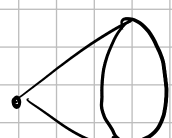
$$\mathrm{div}(\vec{v} \times \vec{e}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \times \vec{e}) = \vec{e} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{e} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{v}$$

$$\vec{e} \cdot \int_V dV\, \mathrm{rot}\, \vec{v} = \oint_{\partial V} d\vec{F} (\vec{v} \times \vec{e}) = \vec{e} \oint_{\partial V} \vec{F} \times \vec{v}$$

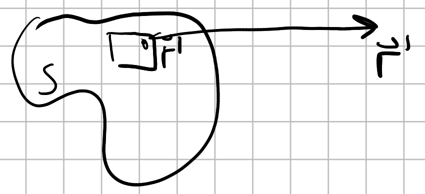
also $\vec{A}(\vec{r}) = \int \frac{d^3r'}{4\pi} \frac{\vec{g}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

Elektrostatik: $\vec{E} = -\mathrm{grad}\, \Phi$, $\mathrm{div}\, \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$

$$\frac{d\vec{F} \cdot \vec{e}_r}{r^2} = d\Omega$$



$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

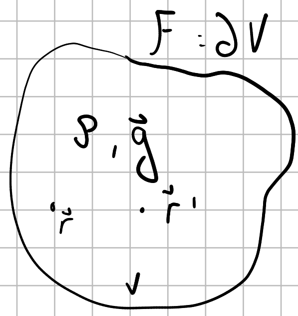


Magnetostatik

$\operatorname{div}\vec{B} = 0$, $\quad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ ($\vec{A}$ Vektorpotential)

$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \qquad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ (Stromdichte)

Variation des Helmholz'schen Satzes



In V seien $\rho = \operatorname{div}\vec{W}$, $\vec{g} = \operatorname{rot}\vec{W}$ gegeben, sowie die Werte von $\vec{W}$ auf der Randfläche

Dann ist das Vektorfeld <u>in V</u> eindeutig bestimmt.

$$\vec{W}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\Phi(\vec{r}) + \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}) \text{ für alle } \vec{r}\in V$$

mit $\Phi(\vec{r}) = \int_V dV' \, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \oint_F d\vec{F} \cdot \frac{\vec{W}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ (Quelldichte, Randwerte)

und $\vec{A}(\vec{r}) = \int_V dV' \, \frac{\vec{g}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \oint_F d\vec{F}\,' \times \frac{\vec{W}(\vec{r}\,')}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ (Wirbeldichte, Randwerte)