PROF. DR. TIM HOFFMANN, DR. AARON MONTAG WS 2020/2021

Mathematik für Physiker 1 (Lineare Algebra) Übungsblatt 2

09.11.2020 – 13.11.2020

Zentralübung (asynchron online, Fragestunde am Donnerstag, den 12.11.2020, ab 09:00 in BBB)
Ein lineares Gleichungssystem hat im Allgemeinen die Form $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, für gegebenes $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Der Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ ist gesucht. Dies ist äquivalent zur Bestimmung der gemeinsamen Lösung der m Gleichungen $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ für $i \in \{1,\ldots,m\}$. Ein Lösungsverfahren ist das *gaußsche Eliminationsverfahren.*

Der Gauß-Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Schritt 1: Reformulierung als *Erweiterte Koeffizientenmatrix* Wir schreiben das zu lösende lineare Gleichungsystem knapp in eine *erweiterten Koeffizientenmatrix* um:

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nm} & b_m \end{array}\right)$$

Schritt 2: Forme M in *strenge Zeilenstufenform* um Ziel dieses Schrittes ist es, die erweiterte Koeffizientenmatrix M in *strenge Zeilenstufenform* umzuformen. Eine Matrix liegt in dieser Form vor, wenn

- der erste von null verschiedene Eintrag jeder Zeile 1 ist (Diese Elemente werden auch als *Pivots* bezeichnet),
- die Pivots die einzigen von null verschiedenen Einträge in ihrer Spalte sind und
- jede Zeile mindestens so viele führende Nullen wie die vorherige hat.

Zum Beispiel ist die folgende Matrix in strenger Zeilenstufenform, wobei $*$ für beliebige von null verschiedene Zahlen steht:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Drei Typen *elementarer Zeilenoperationen* sind für Umformungen von M erlaubt, nämlich

(A) das Vertauschen zweier Zeilen von M,

(B) die Multiplikation einer Zeile mit einem Nicht-Null-Skalar und

(C) das Hinzufügen eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Durch Anwendung dieser Operationen auf M ändert sich dessen Lösungsmenge nicht.
Um die Zeilenstufenform einer Matrix zu erhalten, gehen wir erst die Spalten von *links nach rechts* durch, wählen dabei aus nicht-null Einträgen geeignete Pivot-Elemente aus (soweit oben wie möglich, so weit unten wie nötig – Manchmal müssen wir die Pivot-Zeile mit (A) nach oben tauschen), und "nullen alles *unterhalb* dieser Pivotelemente mittels (C) aus". Wir erhalten die Zeilenstufenform. Um weiter die *strenge* Zeilenstufenform zu erhalten, reskalieren wir noch die entsprechenden Zeilen (B), so dass die Pivot-Elemente stets 1 werden, und nullen von rechts nach links gehend die Bereiche *überhalb* der Pivot-Elementen aus (C).

Schritt 3: Ablesen der Lösung (falls existent) Nun können verschiedene Situationen eintreten

- Der linke Block von M konnte auf die Einheitsmatrix reduziert werden. Es gibt genau eine Lösung, unabhängig davon, mit welchem Vektor $\boldsymbol{b}$ wir begonnen haben. Die Lösung kann unmittelbar als der rechte-Vektor der erweiterten Koeffizientenmatrix abgelesen werden. Man sagt auch, die Matrix A ist *regulär.*
- Andernfalls hat der linke Block der erweiterten Koeffizientenmatrix in strenger Zeilenstufenform mehr Spalten als von null verschiedene Zeilen. Abhängig davon, mit welchem Vektor $\boldsymbol{b}$ begonnen wurde, gibt es entweder gar keine Lösung oder eine unendliche Anzahl von Lösungen. Wir werden uns später damit beschäftigen, wie man hier geschickt die Lösung abliest.

Z 3 (Ein lineares Gleichungssystem)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$ mit Hilfe des Algorithmus von Gauß:

$$\begin{aligned} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 8 \\ -3x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 3x_4 &= 1 \\ -x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 15 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 &= -6 \end{aligned}$$

Disskussionaufgaben (in den Übungsgruppen vom 09.11.2020 bis zum 13.11.2020)

D 1 (Kontraposition)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, dass die folgende Aussage stets wahr ist:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Die Folgerung auf der rechten Seite der Äquivalenz nennt man die Kontraposition zur Folgerung auf der linken Seite.

(b) Wie lautet die Kontraposition zu der Aussage "Wenn es regnet, ist die Straße nass"?

(c) Seien A, B, C Mengen derart, dass $A \subset B \subset C$. Zeigen Sie, dass dann $C \setminus B \subset C \setminus A$.

(d) Seien wieder A, B beliebige C Mengen (nicht zwingend die aus Teilaufgabe (c)). Beweisen Sie mithilfe der Resultate von Z 1 (c), D 1 (a) und H 2, dass

$$A \not\subset C \Rightarrow A \not\subset B \vee B \not\subset C$$

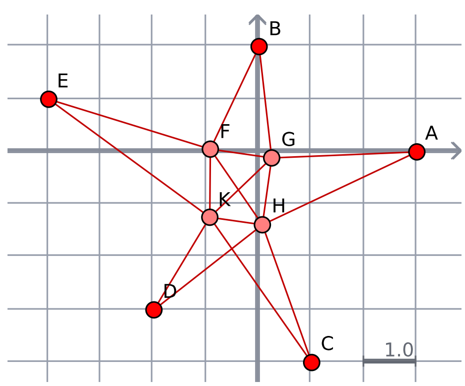
D 2 (Federnetzwerke: Matrix-Vektor-Produkte zur Beschreibung der Gleichungssysteme)

Wir betrachten ein ebenes Netzwerk, welches aus (idealen) Federn und (Masse-)Punkten aufgebaut ist (vergleiche Beispiel 1.1 aus der Vorlesung bzw. dessen interaktive Version auf mathe-vital.de).

Gegeben seien fünf (fixierte) Punkte in der Ebene mit folgenden Koordinaten.

$$A = (3, 0), \quad B = (0, 2), \quad C = (1, -4), \quad D = (-2, -3) \quad \text{und} \quad E = (-4, 1)$$

Diese Punkte seien durch elastische Federn mit vier (beweglichen) Knotenpunkten F, G, H und K verbunden, wie im Bild dargestellt.



Wir bezeichnen die x- und y-Koordinaten eines Punktes P mit x_P bzw. y_P (z.B. $x_A = 3$). Die Koordinaten der beweglichen Knotenpunkte F, G, H und K des Systems Gleichgewichtsposition sind gesucht.

(a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, das für jeden beweglichen Knotenpunkt mittels der Krafteinwirkung durch benachbarte Punkte mit Federkonstante $h = 1$ die Ruhelage des Systems beschreibt.

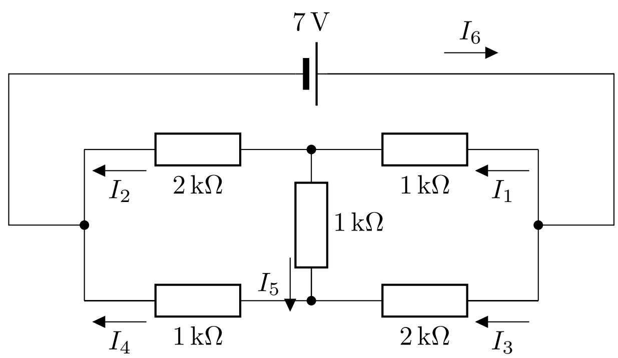
(b) Formulieren Sie dieses aus mehreren Gleichungen bestehende Gleichungssystem zu zwei Gleichungen der Form $M \cdot \boldsymbol{x} = a$ und $M \cdot \boldsymbol{y} = b$ mit einer geeigneten Matrix $M \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^4$ um. Der Vektor $\boldsymbol{x}$ soll hierbei die unbekannten Variablen x_F, x_G, x_H und x_K in seinen Komponenten enthalten. Der Vektor $\boldsymbol{y}$ soll die unbekannten y_F, y_G, y_H und y_K in seinen Komponenten enthalten.

(c) Lösen Sie die beiden Gleichungssysteme mit dem Gauß-Algorithmus.

Hausaufgaben (Abgabe im Moodle bis zum Montag, den 16.11.2020, um 11:00 Uhr)

H 3 (Stromkreis)

Wir betrachten den Stromkreis



(a) Begründen Sie mit Hilfe der kirchhoffschen Regeln dass $I_1, \ldots, I_6$ das folgende Gleichungssystem erfüllen.

$$\begin{aligned} I_1 + I_3 - I_6 &= 0 \\ -I_1 + I_2 + I_5 &= 0 \\ -I_3 + I_4 - I_5 &= 0 \\ I_2 + 2I_2 &= 7\text{mA} \\ I_1 - 2I_3 + I_5 &= 0 \\ -2I_2 + I_4 + I_5 &= 0 \end{aligned}$$

Hier wurde die erste kirchhoffsche Regel nur an drei von vier Knotenpunkten angewendet. Warum erhalten wir durch das Anwenden auf den vierten Knotenpunkt keine neue Information ?

(b) Lösen Sie obgiges Gleichungssystem mit dem Gaußverfahren und bestimmen sie $I_0, \ldots, I_6$.

(c) Berechnen Sie den Gesamtwiederstand des Stromkreises.