# Übungen zur Experimentalphysik 3

Prof. Dr. L. Fabbietti
Wintersemester 2019/20
Übungsblatt 1 - Lösung
20. Oktober - 26. Oktober 2019

Dr. Carsten Rohr (exph-uebung@ph.tum.de)

## Aufgabe 1

Zeigen Sie ausgehend von den Maxwell-Gleichungen im Vakuum, dass für die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ die Wellengleichung gilt:

$$\Delta\vec{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \tag{1}$$

## Lösung

Man verwendet die Identität

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B} \tag{2}$$

Aus den Maxwell-Gleichungen gilt, dass

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} \ = \ 0 \tag{3}$$

und mit

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B} = \Delta\vec{B} \tag{4}$$

wird diese Identität zu:

$$\Delta\vec{B} = -\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) \tag{5}$$

Dann geht aus den Maxwell-Gleichungen hervor:

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{B} &= -\,\vec{\nabla}\times\mu_0\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} &(6)\\
&= -\,\mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) &(7)\\
&= -\,\mu_0\epsilon_0\left(-\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\right) &(8)\\
\Rightarrow \Delta\vec{B} &= \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} &(9)
\end{aligned}$$

## Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass

$$\psi(r,t) = \frac{f(r-vt)}{r} \tag{10}$$

eine Lösung der Wellengleichung ist und eine kugelförmig fortschreitende Erregung darstellt, deren Zentrum im Ursprung liegt und die sich mit der Geschwindigkeit $v$ nach außen ausbreitet. Dabei ist $f(r-vt)$ eine beliebige zweifach differenzierbare Funktion.

*Hinweis:* Transformieren Sie den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten und lösen Sie allgemein die Wellengleichung.

## Lösung

Die Wellengleichung für dispersionsfreie Wellen in drei Dimensionen lautet in kartesischen Koordinaten:

$$\triangle\psi(\vec{r},t) = \nabla^2\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{11}$$

Hier ist der Laplace-Operator

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{12}$$

Wegen der Kugelsymmetrie des Problems liegt es nahe, zu Kugelkoordinaten überzugehen. Die kartesischen Koordinaten transformieren sich dann wie folgt:

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta \tag{13}$$

Die Wellenfunktion hängt somit nur noch vom Radius $r = |\vec{r}|$ ab, $\psi(\vec{r},t) = \psi(r,t)$. Um den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten herzuleiten, schreiben wir für die x-Koordinate

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} \tag{14}$$

und somit für die 2. Ableitung

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\\ &= \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\end{aligned} \tag{15}$$

Mit $x^2+y^2+z^2 = r^2$ folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r}\\ \Rightarrow \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} &= \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial x} + x\frac{\partial(1/r)}{\partial x} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)\end{aligned} \tag{16}$$

Somit erhält man für die x-Komponente des Laplace-Operators:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{17}$$

Für die Ableitungen nach $y$ und $z$ gelten analoge Beziehungen. Der gesamte Laplace-Operator für ein kugelsymmetrisches Problem lautet damit:

$$\begin{aligned}
\triangle\psi =& \frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left(3 - \frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial r} && (18)\\
=& \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} && (19)\\
=& \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) && (20)
\end{aligned}$$

Die Wellengleichung lautet damit (nach Multiplikation mit $r$):

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi) \tag{21}$$

Dies ist eine eindimensionale Wellengleichung in der Variablen $r$ für die Funktion $(r\psi)$. Um zu überprüfen, ob die angegebene Gleichung 2 tatsächlich eine Lösung der Wellengleichung ist, muss diese noch in **??** eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi) && (22)\\
\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\cdot\frac{f(r-vt)}{r}) &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\cdot\frac{f(r-vt)}{r}) && (23)\\
\frac{\partial^2}{\partial r^2}(f(r-vt)) &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(f(r-vt)) && (24)\\
f(r-vt) &= \frac{1}{v^2}\cdot(-v)^2\cdot f(r-vt)) && (25)\\
f(r-vt) &= f(r-vt) && (26)
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$\psi(r,t) = C_1\frac{f(r-vt)}{r} + C_2\frac{f(r+vt)}{r} \tag{27}$$

## Aufgabe 3

Die Wellengleichung einer Lichtquelle sei gegeben durch:

$$\psi(x,t) = 10^3\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\cdot\sin\left(3\pi\cdot10^6\frac{1}{\mathrm{m}}\cdot x - 9\pi\cdot10^{14}\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot t\right) \tag{28}$$

Berechnen Sie die Phasengeschwindigkeit, die Wellenlänge, die Frequenz, die Periode und die Amplitude der Welle, wobei $x$ in Metern und $t$ in Sekunden angegeben ist.

## Lösung

Phasengeschwindigkeit:

$$v = \frac{\omega}{k} = 3\cdot10^8\frac{m}{s}$$

Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 666nm$$

Frequenz:

$$f = \frac{c}{\lambda} = 4,5 \cdot 10^{14} Hz$$

Periode:

$$T = \frac{1}{f} = 2,22 \cdot 10^{-15} s$$

Amplitude:

$$A = 10^3 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

## Aufgabe 4

Eine punktförmige Lichtquelle beleuchte einen kreisrunden Tisch (Radius 1m). Die Lichtquelle befinde sich direkt über der Tischmitte.

(a) Bei variabler Höhe der Lampe über dem Tisch, wann wird die Bestrahlungsstärke $E_e(\mathrm{W/m^2})$ am Tischrand maximal?

(b) Wie groß muss bei dieser Anordnung die Leistung $P$ der Lichtquelle sein, damit die Bestrahlungsstärke an jeder Stelle des Tisches mindestens $3\mathrm{W/m^2}$ beträgt?

## Lösung

(a) Bei dieser Anordnung ist der Tisch in der Mitte immer am besten beleuchtet, d.h. die Bestrahlungsstärke ist dort am größten. Die Bestrahlungsstärke wird von zwei Größen bestimmt:

- dem Abstand der Lichtquelle vom Tisch, da die Bestrahlungsstärke mit $1/l^2$ abnimmt, wenn $l$ der Abstand Lichtquelle-Flächenelement ist.
- der Projektion des Flächenelements auf eine Fläche senkrecht zur Verbindung Lichtquelle-Flächenelement (Ausbreitungsrichtung der Lichtstrahlen).

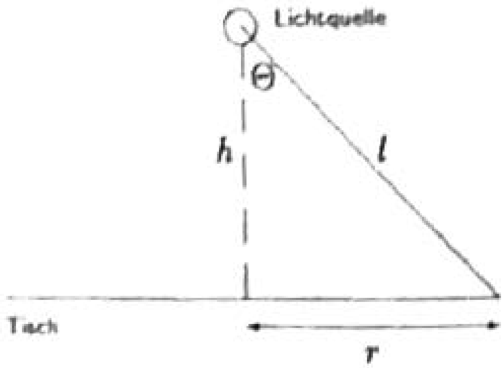
In weiter Entfernung vom Tisch führt der Abstand zur Abnahme der Bestrahlungsstärke, nah am Tisch die Projektion.

Wir betrachten eine schmale Fläche $F$ entlang des Tischrands (ringförmige Fläche mit der Breite $\Delta r$, so dass $F = 2\pi r \Delta r$ ist). Der Abstand zur Lichtquelle sei $l$. Mit dem Radius $r$ des Tisches und der Höhe $h$ der Lichtquelle über der Tischmitte ist $l = \sqrt{r^2 + h^2}$. Ist $\Theta$ der Winkel zwischen $h$ und $l$, so ist $\cos\Theta = h/l$.

Damit ist die projizierte Fläche (also die Fläche senkrecht zur Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts) $F\cos\Theta = Fh/l$.

Für die Lichtquelle, die die Gesamtleistung $P$ in den vollen Raumwinkel abstrahlt, ist die *Strahlungsflussdichte* $S$ im Abstand $l$

$$S = \frac{P}{4\pi l^2} = \frac{P}{4\pi(r^2 + h^2)}.$$




Die Projektion auf die Tischfläche wird mit dem Faktor $\cos\Theta$ berücksichtigt und wir erhalten für die Bestrahlungsstärke $E_e$ am Tischrand

$$E_e = S\cos\Theta = \frac{P}{4\pi(r^2+h^2)}\cos\Theta = \frac{P}{4\pi(r^2+h^2)}\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} \tag{29}$$

$$= \frac{Ph}{4\pi(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{30}$$

Diesen Ausdruck müssen wir jetzt nach $h$ ableiten, um das Maximum zu finden. Aus physikalischen Überlegungen wissen wir bereits, dass es Minima für $h = 0$ und $h = \infty$ gibt. Da

$$\frac{dE_e}{dh} = \frac{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}} - h\frac{3}{2}(r^2+h^2)^{\frac{1}{2}}2h}{(r^2+h^2)^3}\frac{P}{4\pi}$$

ist, können wir das Maximum aus

$$(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}} - 3h^2(r^2+h^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

bestimmen. Durch Multiplikation mit $\sqrt{r^2+h^2}^{-1}$ erhalten wir

$$r^2 + h^2 - 3h^2 = 0 \Rightarrow r^2 = 2h^2.$$

Also ist

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}}r.$$

Die Bestrahlungsstärke ist also maximal, wenn die Lichtquelle in einer Höhe $h = 70,7\text{cm}$ angebracht wird.

(b) Wir fordern $E_e = 3\text{W/cm}$ und hängen die Lichtquelle in der eben errechneten optimalen Höhe auf. Die geringste Betrahlungsdichte ist am Tischrand, so dass wir die oben gefundene Gleichung für $E_e$ benutzen können. Wenn wir diese nach $P$ auflösen, erhalten wir

$$P = E_e\frac{4\pi(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}{h}.$$

Einsetzen ergibt $P = 97,95\text{W}$.

## Aufgabe 5

Eine transversale elektromagnetische Welle im Vakuum sei zirkular polarisiert.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \begin{pmatrix} \cos(kz-\omega t) \\ \sin(kz-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

und breite sich in z-Richtung aus. Berechnen Sie für diese Welle die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r},t)$, den Poynting-Vektor $\vec{S}(\vec{r},t)$ und den Strahlungsdruck auf eine um den Winkel $\theta$ gegen die Ausbreitungsrichtung geneigte, total absorbierende Ebene.

## Lösung

Man verwendet die Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{32}$$

Damit ergibt sich

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} -k\cos(kz-\omega t) \\ -k\sin(kz-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = -k\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{33}$$

Integration nach $t$ liefert dann für die magnetische Induktion:

$$\vec{B} = E_0 \frac{k}{\omega} \begin{pmatrix} -\sin(kz-\omega t) \\ \cos(kz-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k}{\omega} \begin{pmatrix} -E_y \\ E_x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega}\left(\vec{k} \times \vec{E}\right) \tag{34}$$

Der Poynting-Vektor $\vec{S}$ gibt die Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes an:

$$\vec{S} = c^2 \epsilon_0 \left(\vec{E} \times \vec{B}\right) \tag{35}$$

$$= \frac{kE_0^2}{\mu_0 \omega} \begin{pmatrix} \cos(kz-\omega t) \\ \sin(kz-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(kz-\omega t) \\ \cos(kz-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

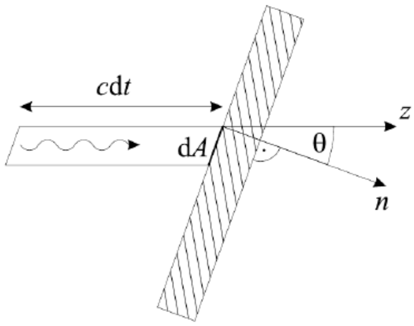
$$= \frac{kE_0^2}{\mu_0 \omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos^2(kz-\omega t) + \sin^2(kz-\omega t) \end{pmatrix} \tag{37}$$

$$= \frac{kE_0^2}{\mu_0 \omega} \vec{e}_z = \epsilon_0 c E_0^2 \vec{e}_z = \text{const.} \tag{38}$$

Im Gegensatz zu einer linear polarisierten Welle oszilliert die Energiestromdichte einer zirkular polarisierten Welle nicht. Nun betrachten wir eine Fläche, deren Normale mit der Ausbreitungsrichtung der Welle einen Winkel $\theta$ einschließt (siehe Abbildung).

Die Feldimpulsdichte $\vec{\pi}$ der elektromagnetischen Welle ist

$$\vec{\pi} = \vec{D} \times \vec{B} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{S} = \frac{1}{c^2} \vec{S} \tag{39}$$




Alle Wellenfronten in dem schiefen Zylinder mit Volumen $dV = cdtdA_\perp = cdt\cos\theta dA$ erreichen in der Zeit $dt$ das Flächenelement $dA$. Der Feldimpuls beträgt daher

$$d\vec{p} = \vec{\pi} dV = \frac{1}{c^2}\vec{S}dV = \epsilon_0 E_0^2 \cos(\theta) dA\ dt\ \vec{e}_z \tag{40}$$

Die Ebene sei vollständig absorbierend, d.h. der Strahlungsdruck ist

$$p_s = \frac{d\vec{F}\cdot\vec{n}}{dA} \tag{41}$$

wobei $d\vec{F}\cdot\vec{n}$ die Normalkomponente der auf die Ebene ausgeübten Kraft

$$d\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \epsilon_0 E_0^2 dA\cos(\theta)\ \vec{e}_z \tag{42}$$

ist. Mit $\vec{n} = \cos(\theta)\vec{e}_z$ folgt für den Strahlungsdruck:

$$p_s = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\theta) \tag{43}$$

## Aufgabe 6

Eine kleine Kugel mit Radius $R$ und Dichte $\rho$ soll durch den Strahlungsdruck in einem senkrecht nach oben verlaufenden Laserstrahl gegen die Schwerkraft in der Schwebe gehalten werden (siehe Abbildung).

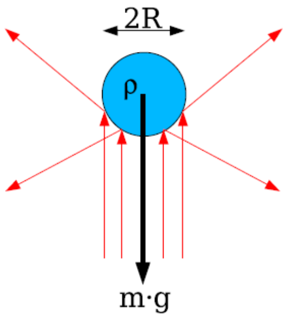
(a) Wie groß muss die Intensität des Lasers sein, wenn sie über den Kugelquerschnitt als konstant angesehen werden kann und das Reflexionsvermögen der Kugel 100 % beträgt?

(b) Wie ändert sich das Ergebnis, wenn die Strahlung anstatt auf eine Kugel senkrecht auf eine ebene Kreisfläche mit Radius $R$ trifft?

## Lösung

(a) Wie schon in der vorherigen Aufgabe gezeigt, ist der Poynting-Vektor gegeben durch:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} \tag{44}$$




und die Impulsdichte

$$\vec{\pi} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{S} \tag{45}$$

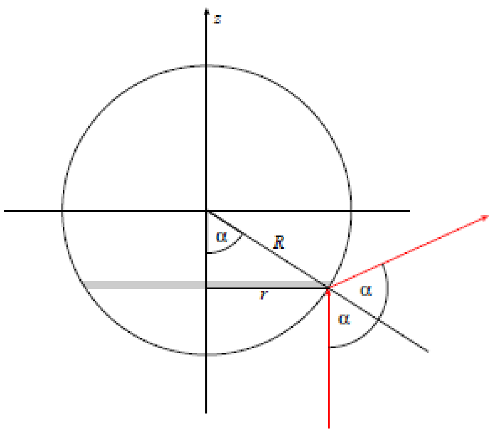
Der mittlere Impulsübertrag auf ein senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ stehendes Flächenelement $dA_\perp$ ist bei vollständiger Absorption der elektromagnetischen Welle:

$$d\vec{p} = \vec{\pi} dV = \frac{1}{c^2} \cdot \left\langle \vec{S} \right\rangle \cdot c \cdot dt \cdot dA_\perp = \frac{1}{c} \cdot I \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \cdot dt \cdot dA_\perp \tag{46}$$

Die Kraft auf das Flächenelement ist

$$d\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{47}$$

Im Falle der Kugel muss deren Gewichstskraft $F_G = mg$ durch den Lichtdruck kompensiert werden. Wir zerlegen dazu die Kugeloberfläche in Streifen mit konstantem Polarwinkel zur Einfallrichtung $z$ des Lichts (siehe Abbildung). Ein Kreis mit dem Radius $r = R\sin(\alpha)$ hat




die Fläche

$$dA_z = 2\pi R^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha) d\alpha \qquad \frac{dA_z}{d\alpha} = \frac{d(\pi(R\sin\alpha)^2)}{d\alpha} = \pi R^2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{48}$$

Der Impulsübertrag in $z$-Richtung bei Absorption beträgt

$$\frac{dp_z}{dt}_a = \frac{I}{c} dA_z, \tag{49}$$

der Impulsübertrag in $z$-Richtung bei Emission beträgt

$$\frac{dp_z}{dt}_e = \frac{I}{c} \cos(2\alpha) dA_z \tag{50}$$

Die x- und y-Komponenten des Impulsübertrags bei der Reflexion heben sich bei der Integration über den gesamten Streifen auf. Integriert man nun über die vom Licht beschienene untere Halbkugel, so erhält man:

$$\frac{dp_z}{dt} = \frac{I}{c} \int (1 + \cos(2\alpha)) \; dA_z \tag{51}$$

$$= 2\pi R^2 \frac{I}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2\alpha)) \sin(\alpha) \cos(\alpha) \; d\alpha = \pi R^2 \frac{I}{c} \tag{52}$$

Die notwendige Intensität des Lichtes ist daher

$$I = \frac{mgc}{\pi R^2} = \frac{4}{3} R\rho g c \tag{53}$$

mit der Massendichte $\rho = \frac{m}{V}$ der Kugel.

(b) Wie man an

$$\frac{dp_z}{dt} = \pi R^2 \frac{I}{c} \tag{54}$$

sieht, ist der auf die Kugel übertragene Impuls genauso groß, als ob die Strahlung senkrecht auf eine vollständig absorbierende Fläche $\pi R^2$ treffen würde. Man kann sich überlegen, dass sich der bei der Emission übertragene Impulsübertrag auf die Kugel auch in $z$-Richtung aufhebt, da ab einem Winkel $\alpha > 45°$ der Impulsübertrag in negativer $z$-Richtung erfolgt.