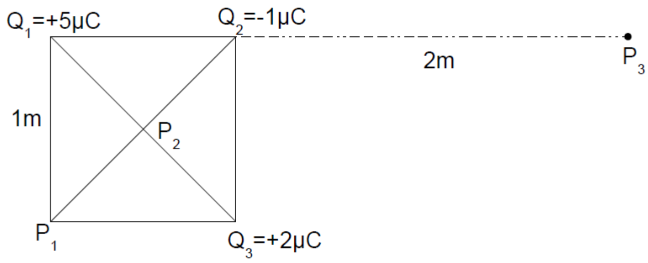
Übungen zur Experimentalphysik 2

Prof. Dr. R. Kienberger
Sommersemester 2020
Übungsblatt 1 - Lösung
27. April - 03. Mai 2020

Dr. Carsten Rohr (exph-uebung@ph.tum.de)

Aufgabe 1

Die Punktladungen Q_1, Q_2 und Q_3 befinden sich an drei Ecken eines Quadrats mit 1 m Seitenlänge. Der Abstand zwischen Q_2 und P_3 beträgt 2 m (siehe Abbildung). Beachten Sie: $V(\infty) = 0$



(a) Berechnen Sie das elektrostatische Potential V bei P_1, P_2 und P_3.

(b) Gibt es außer in unendlicher Entfernung Punkte oder Oberflächen im Raum, wo das elektrostatische Potential Null ist?

(c) Es gibt zwei Punkte, bei denen das elektrische Feld Null ist. Können Sie abschätzen, wo sich diese Punkte befinden? Begründen Sie Ihre Antwort und skizzieren Sie die Feldlinien.

(d) Berechnen Sie die elektrostatische Energie des Systems.

Lösung

(a) Das elektrostatische Potential an einem Ort $\mathbf{r}$ wird durch die drei Ladungen bestimmt:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|} + \frac{Q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}|} + \frac{Q_3}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}|}\right) \tag{1}$$

Hier sind $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1$ etc. Ortsvektoren. Bei P_1 beträgt das elektrostatische Potential dann

$$\Phi(\mathbf{r}_{P_1}) = \frac{10^{-6}\mathrm{C}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{5}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{P_1}|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{P_1}|} + \frac{2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_{P_1}|}\right) = \tag{2}$$

$$\frac{10^{-6}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{5}{1\mathrm{m}} - \frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{m}} + \frac{2}{1\mathrm{m}}\right) = 5.7 \times 10^{-4}\,\mathrm{V} \tag{3}$$

Bei P_2:

$$\Phi(\mathbf{r}_{P_2}) = \frac{10^{-6}\mathrm{C}}{4\pi\epsilon_0}(5 - 1 + 2)\sqrt{2}\mathrm{m}^{-1} = 7.6 \times 10^{-4}\,\mathrm{V} \tag{4}$$

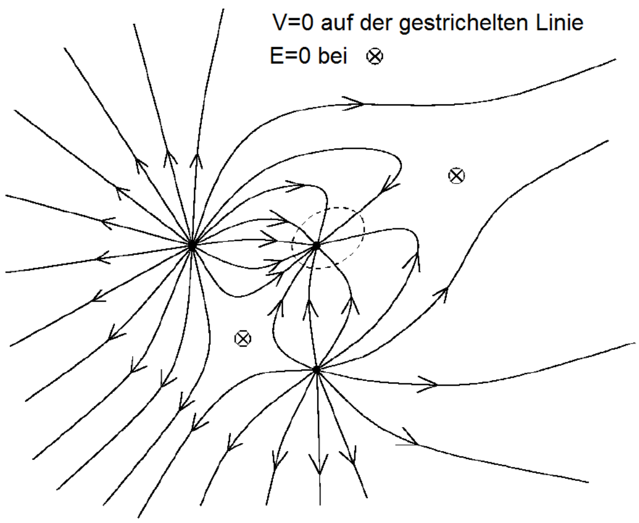
Bei P_3:

$$\Phi(\mathbf{r}_{P_3}) = \frac{10^{-6}\mathrm{C}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{5}{3\mathrm{m}} - \frac{1}{2\mathrm{m}} + \frac{2}{\sqrt{5}\mathrm{m}}\right) = 1.86 \times 10^{-4}\,\mathrm{V} \tag{5}$$

(b) Unser Ausdruck für das elektrostatische Potential Φ ist die Summe aus zwei positiven und einem negativem Term. Man kann also sehen, dass, wenn wir nah genug an Q_2 herankommen, der negative Term die beiden positiven Ausdrücke ausgleichen kann. Daher gibt es um Q_2 eine 'Ei-förmige' Fläche, wo das Potential null ist.

(c) Wie man in der Skizze sehen kann, gibt es zwei Punkte, wo das elektrische Feld null ist. Einer ist mehr oder weniger zwischen den beiden positiven Ladungen zu finden: Dort löschen sich die beiden Felder der Ladungen aus. Allerdings muss man auch noch die negative Ladung in Betracht ziehen, die diesen Punkt verschiebt.

Der andere Punkt befindet sich oben rechts der negativen Ladung. Hier wird die Abstoßung der beiden positiven Ladungen gerade durch die Anziehung der negativen Ladung ausgeglichen (auf eine positive Testladung).



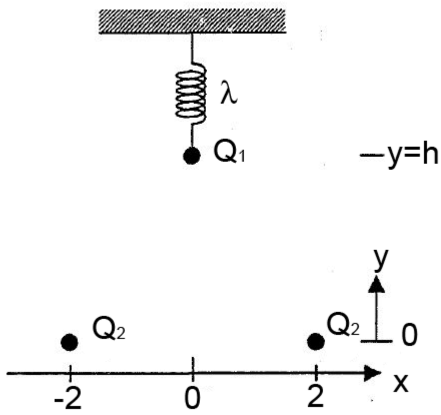
(d) Die elektrostatische Energie des Systems ist gegeben durch:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q_1Q_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}+\frac{Q_2Q_3}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|}+\frac{Q_3Q_1}{|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1|}\right) = \tag{6}$$

$$\frac{10^{-12}}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{5}{1}-\frac{2}{1}+\frac{10}{\sqrt{2}}\right) = 6.4\times 10^{-4}\,\mathrm{J} \tag{7}$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die folgende Anordnung von drei positiv geladenen Punktladungen (siehe Abbildung). Die Ladung Q_1 ist an der Decke mit einer Feder der Federkonstanten λ befestigt und wird durch die von den beiden Ladungen Q_2 auf sie ausgeübte Kraft aus ihrer Ruhelage $y = h$ ausgelenkt.



(a) Bestimmen Sie die resultierende Kraft auf die Ladung Q_1 in Abhängigkeit von y.

(b) Der Abstand der beiden Ladungen Q_2 sei nun Null ($a = 0$). Bestimmen Sie die Ladung Q_2 als Funktion von y so, dass die resultierende Kraft auf die Ladung Q_1 Null wird.

Lösung

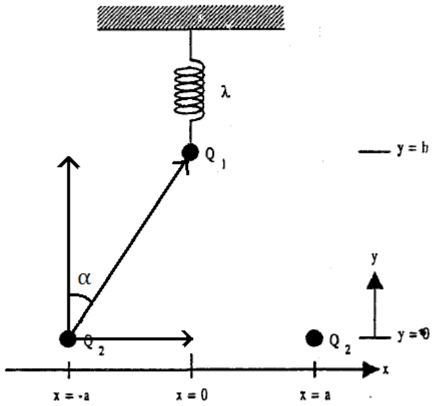
(a) Q_1 wird in positive y-Richtung ausgelenkt. Es folgt für die Federkraft:

$$\vec{F}_f = -\lambda\,(y-h)\,\vec{e}_y = \lambda\,(h-y)\,\vec{e}_y \tag{8}$$

Mithilfe des Coulomb'schen Gesetzes können die Kräfte der Ladungen Q_2 auf die Ladung Q_1 wie folgt bestimmt werden:

$$\vec{F}_{el} = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0\,(y^2+a^2)}\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix} + \frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0\,(y^2+a^2)}\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{el} = \frac{2Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0\,(y^2+a^2)}\cos\alpha\cdot\vec{e}_y = \frac{2Q_1Q_2y}{4\pi\epsilon_0\sqrt{y^2+a^2}^3}\cdot\vec{e}_y \tag{10}$$



Die resultierende Kraft auf Q_1 in Abhängigkeit von y ist somit

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_f + \vec{F}_{el} = \left(\lambda (h - y) + \frac{2Q_1 Q_2 y}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{y^2 + a^2}^3} \right) \vec{e}_y \tag{11}$$

(b) Mit $a = 0$ folgt für die resultierende Kraft auf Q_1:

$$\vec{F}_{res} = \left(\lambda (h - y) + \frac{2Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 y^2} \right) \vec{e}_y \tag{12}$$

Damit alle Kräfte auf Q_1 verschwinden, muss für Q_2 gelten:

$$0 = \left(\lambda (h - y) + \frac{2Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 y^2} \right) \vec{e}_y \tag{13}$$

$$\Rightarrow Q_2 = -\frac{\lambda (h - y)\, 2\pi\epsilon_0 y^2}{Q_1} \tag{14}$$

Aufgabe 3

(a) Welche Arbeit ist nötig, um die infinitesimale Ladungsmenge dQ aus dem Unendlichen auf eine metallische Kugel mit Radius R zu bringen, wenn sich bereits die Ladung Q auf der Kugel befindet? Welche Arbeit ist nötig, um die Ladung der Kugel von Q_1 um einen endlichen Betrag auf Q_2 zu erhöhen?

(b) Aus dem Ergebnis von (a) folgt, dass man die Arbeit $\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$ aufwenden muss, um eine anfänglich ungeladene Kugel mit Q zu laden. Wie lautet die Energiedichte $w(r)$ des Feldes der geladenen Kugel? Integrieren Sie diese Energiedichte über den gesamten Raum und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Aufladearbeit.

Lösung

(a) Das Potential an der Oberfläche der leitenden Kugel als Funktion ihrer Ladung Q ist

$$\phi(Q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R}$$

Um die infinitesimale Ladung $\mathrm{d}Q$ dazuzubringen, ist die Arbeit

$$\mathrm{d}W = \phi(Q)\mathrm{d}Q$$

nötig, also

$$\mathrm{d}W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}\mathrm{d}Q$$

Die Arbeit für die endliche Ladungsänderung von Q_1 auf Q_2 ergibt sich hieraus durch Integration über Q:

$$W = \int_{Q_1}^{Q_2} \mathrm{d}Q\phi(Q) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{Q_1}^{Q_2} \mathrm{d}QQ = \frac{Q_2^2}{8\pi\varepsilon_0 R} - \frac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \tag{15}$$

(b) Das Feld der geladenen Kugel lautet:

$$\mathbf{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, r \geq R$$

und

$$\mathbf{E}(\vec{r}) = 0, r < R$$

Die zugehörige Energiedichte $w = \frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}^2$ ist also

$$w(\vec{r}) = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^4}, r \geq R$$

und

$$w(\vec{r}) = 0, r < R$$

Da w rotationssymmetrisch ist, also nur eine Funktion von r, verwendet man bei der Integration über den Raum Kugelkoordinaten und erhält:

$$W = \int_0^\infty \mathrm{d}r 4\pi r^2 w(r) = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{\mathrm{d}r^2}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^\infty = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \tag{16}$$

was tatsächlich mit der „Aufladearbeit “ übereinstimmt.

Aufgabe 4

Ein Plattenkondensator bestehe aus zwei quadratischen Platten der Seitenlänge $L = 10$ cm mit dem Abstand $d = 1$ cm, an die eine variable Spannung U angelegt werden kann.

(a) Wie groß ist die Kapazität des Plattenkondensators?

(b) Es wird nun eine Spannung $U = 2200$ V angelegt. Wie groß ist dann die Ladung auf einer Platte? Wie groß ist die Flächenladungsdichte?

(c) Wie groß ist die elektrische Feldstärke zwischen den Platten bei $U = 2200$ V? Welche Spannung U darf maximal angelgt werden? (Durchbruchfeldstärke in Luft $\approxeq 10^6$ V/m)

(d) Nun werden Öltröpfchen in den Plattenkondensator eingesprüht (Milikan-Versuch). Bei einem Tröpfchen, das bei der angelegten Spannung von $U = 2200$ V ruht, bestimmt man einen Radius von $r = 1,88$ μm. Die Dichte des Verwendeten Öls beträgt $\rho_{\text{Öl}} = 0,9$ g cm^{-3}. Mit wie vielen Elementarladungen ist das Öltröpfchen geladen?

Hinweis: Ruhendes Tröpfchen bedeutet, dass die Summe der Kräfte auf das Tröpfchen verschwindet.

(e) Bei welchen allgemeinen Spannungen U lassen sich noch ruhende Tröpfchen beobachten, die den gleichen Radius haben?

Lösung

(a) Kapazität eines Plattenkondensators:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon_0 \frac{L^2}{d} = 8,85 \text{ pF} \tag{17}$$

(b)

$$Q = CU = 19,5 \text{ nC} = 1,22 \cdot 10^{11} \; e \tag{18}$$

Auf einer Platte ist +Q, auf der anderen −Q:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = 1,95 \; \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2} \tag{19}$$

(c)

$$E = \frac{U}{d} = 2,2 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}} \tag{20}$$

$$E_{\text{durch}} = \frac{U_{\text{max}}}{d} \qquad \Rightarrow \qquad U_{\text{max}} = E_{\text{durch}} d = 10^4 \text{ V} \tag{21}$$

(d) Milikan-Versuch: Die Größe der Tröpfchen bestimmt man z.B über die Sinkgeschwindigkeit ohne Feld (laminare Strömung). Ein Tröpfchen ruht bei

$$F_G = F_E \tag{22}$$

$$mg = qE = neE \tag{23}$$

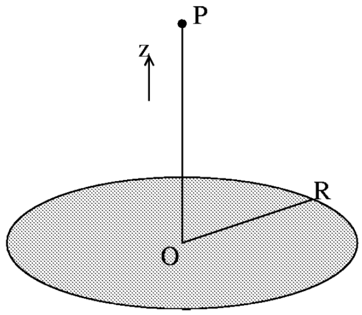
$$\Rightarrow n = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3 g}{eE} = 6,97 \approx 7 \tag{24}$$

(e)

$$n \;\propto\; 1/E \;\propto\; 1/U \Rightarrow U_n = U_1 \frac{1}{n} \tag{25}$$

Aufgabe 5

Eine Scheibe mit Radius R hat eine Flächenladungsdichte σ (siehe Abbildung). Die $z-$Achse schneidet den Mittelpunkt O. Die Gesamtladung der Scheibe beträgt $Q = \pi R^2 \sigma$.



(a) Berechnen Sie die Größe und Richtung des elektrischen Feldes $\mathbf{E}(z)$ an einem Punkt P in einer Entfernung z über dem Mittelpunkt der Scheibe. Drücken Sie das Ergebis für $\mathbf{E}(z)$ als abhängig von Q, R, ϵ_0 und z aus.

Hinweis: Das Ergebnis für das elektrische Feld entlang der $z-$Achse eines Ringes mit Radius r und Ladung q mag hier hilfreich sein:

$$E_{Ring} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z \tag{26}$$

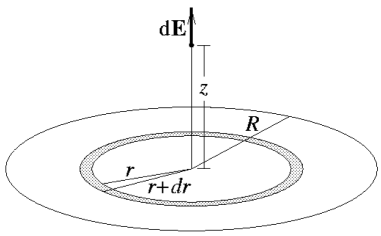
(b) Skizzieren Sie $\mathbf{E}(z)$ als Funktion von z für den positiven Bereich von z. Benutzen Sie R als Einheit für die Abszisse und $\frac{Q}{(4\pi\epsilon_0 R^2)}$ als Einheit für $\mathbf{E}(z)$.

Lösung

(a) In dieser Aufgabe ist das Ergebnis für das elektrische Feld eines Ringes als Hinweis gegeben:

$$E_{Ring} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z \tag{27}$$

Nun haben wir hier keinen Ring, sondern eine Scheibe. Der Trick besteht darin, diese Scheibe in Ringe zu unterteilen (siehe Skizze.)



Für diese Ringe ist ihr jeweiliges E-Feld dE bekannt. Diese lassen sich dann über den Radius R der Scheibe integrieren. Die Fläche des in der Abbildung markierten Ringes beträgt

$$2\pi r dr \tag{28}$$

und die Ladung

$$\sigma(2\pi r dr) = \left(\frac{Q}{\pi R^2}\right)(2\pi r dr) \tag{29}$$

Daher ist das elektrische Feld dieses Ringes gegeben durch:

$$d\vec{E} = \mathbf{e}_z \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z dq}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \mathbf{e}_z \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \tag{30}$$

Um diesen Ausdruck zu integrieren, benutzt man die Substitution

$$s = \sqrt{z^2 + r^2} \tag{31}$$

wodurch

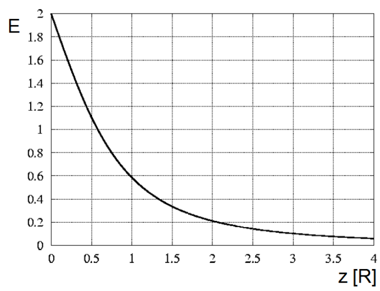
$$r dr = s ds \tag{32}$$

und das Integral dann die Form $\int \frac{1}{s^2} ds$ hat:

$$E = \int dE = \mathbf{e}_z \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \mathbf{e}_z \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[-\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right|_0^R \tag{33}$$

Also ist das elektrische Feld gegeben durch:

$$\vec{E}(z) = \mathbf{e}_z \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \tag{34}$$



(b)