PROF. DR. TIM HOFFMANN, DR. AARON MONTAG

WS 2020/2021

Mathematik für Physiker 1 (Lineare Algebra) — Übungsblatt 1

02.11.2020– 06.11.2020

Lösungsvorschläge

Wir werden für den Übungsbetrieb einige Definitionen zu Matrizen, Vektoren der Vorlesung (leicht informell) vorziehen, damit Sie sich bereits mit der für die Lineare Algebra wichtigen Maschinerie vertraut machen können. Die theoretische Herleitung und Motivation zu diesen Definitionen folgt später in der Vorlesung.

Definition (Matrix, Vektor, Matrix-Vektor-Produkt): Sei K ein Körper (Wenn Ihnen der Begriff “Körper” nicht geläufig ist, denken Sie sich einfach $K = \mathbb{R}$). Es seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ zwei positive natürliche Zahlen. Eine $m \times n$-*Matrix* ist eine “rechteckige Anordnung”

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

mit $a_{i,j} \in K$. Man schreibt auch $A \in K^{m \times n}$. Ein *Vektor* $v \in K^n$ ist eine “senkrechte Anordnung”

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

mit jeweils $v_i \in K$. Das *Matrix-Vektor-Produkt* von $A \in K^{m \times n}$ und $x \in K^n$ ist definiert als

$$\begin{aligned} A \cdot v &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} + \cdots + v_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1} \cdot v_1 + a_{1,2} \cdot v_2 + \cdots + a_{1,n} \cdot v_n \\ a_{2,1} \cdot v_1 + a_{2,2} \cdot v_2 + \cdots + a_{2,n} \cdot v_n \\ \vdots \\ a_{m,1} \cdot v_1 + a_{1,2} \cdot v_2 + \cdots + a_{m,n} \cdot v_n \end{pmatrix} \in K^m \end{aligned}$$

Zentralübung (asynchron online, Fragestunde am Donnerstag, 05.11.2020, ab 09:00 in BBB)

Z 1 (Matrix-Vektor-Produkte)

a) Berechnen Sie mithilfe obiger Definition die folgenden Matrix-Vektorprodukte

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \\ 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 49 \end{pmatrix}.$$

b) Erklären Sie, woran man an der Definition des Matrix-Vektor-Produktes sieht, dass die Breite der Matrix mit der Höhe des Vektors übereinstimmen muss. Was kann man über die Höhe des Ergebnisvektores sagen?

Lösung: Nach der Definition des Matriz-Vektorproduktes $A \cdot v$ liegt $A \in K^{m \times n}$ und $v \in K^n$. Die Matrix muss also genau so breit sein, wie der Vektor hoch. Das Ergebnis liegt im K^m, d.h. der Ergebnisvektor ist so hoch wie die Matrix A.

c) Mit welcher Matrix muss ein Vektor $v \in K^n$ von links multipliziert werden, damit das Ergebnis wieder v ist?

Lösung: Damit die Definition des Matrix-Vektorproduktes anwendbar ist, suchen wir also eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ sodass

$$A \cdot v = v.$$

Nach Definition des Matrix-Vektorproduktes steht auf der linken Seite ein Vektor der Höhe m. Auf der rechten Seite steht ein Vektor der Höhe n. Also ist $n = m$. Wir suchen also eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$.

Der k-te Eintrag des Ergebnis-Vektors ist

$$a_{k,1}v_1 + a_{k,2}v_2 + \cdots + a_{k,n}v_n = v_k.$$

Wir suchen also Belegungen für die $a_{k,i}$, sodass hier für beliebige v_i gilt. Eine Lösung (und auch die einzige Lösung), ist dass $a_{k,k} = 1$ und $a_{k,i} = 0$ für $k \neq i$. Wir erhalten insgesamt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}.$$

Diese Matrix wird auch $n \times n$-*Einheitsmatrix (identity matrix)* oder knapp mit E_n (bzw. I_n) bezeichnet.

d) Mit welcher Matrix muss ein Vektor $v \in K^n$ von links multipliziert werden, damit das Ergebnis $2 \cdot v$ (d.h. jeder Eintrag ist doppelt so groß) ist?

Lösung: Hier kann $2 \cdot E_n$ gewählt werden. Die Argumentation ist ähnlich wie oben.

e) Geben Sie eine Matrix A an sodass $A \cdot \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} v_2 \\ v_1 \end{smallmatrix} \right)$? (d.h. die beiden Zeilen des Vektors sollen vertauscht werden)

Lösung: Wegen den Dimensionsanforderungen ist klar, dass $A \in K^{2 \times 2}$. Durch nachrechnen sieht man dass

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

genau die Zeilen des Vektors vertauscht.

Z 2 (De-Morgansche Regeln)

(a) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, dass die folgende Aussage stets wahr ist:

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

Lösung: Eine Auswertung der Wahrheitstafel ergibt:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	f	w	f	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Die behauptete Äquivalenz $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ ist also unabhängig von den Wahrheitswerten von A und B stets wahr, sie ist also ein logisches Gesetz.

(b) Zeigen Sie (möglichst ohne Wahrheitstafel), dass

$$\neg(A \wedge B \wedge C \wedge D) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg D).$$

Sie können hierfür annehmen, dass $\wedge$ und $\vee$ assoziativ sind.

(c) Zeigen Sie ebenso ohne Verwendung einer Wahrheitstafel, dass

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B).$$

Hierfür können Sie annehmen dass $\neg\neg V \Leftrightarrow V$.

Disskussionaufgaben (in den Übungsgruppen vom 02.11.2020bis zum 06.11.2020)

D 1 **(Kontraposition)** Zeigen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, dass die folgende Aussage stets wahr ist:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Die Folgerung auf der rechten Seite der Äquivalenz nennt man die Kontraposition zur Folgerung auf der linken Seite. Wie lautet die Kontraposition zu der Aussage "Wenn es regnet, ist die Straße nass"?

Lösung: Eine Auswertung der Wahrheitstafel ergibt:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
w	w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w	w

Die behauptete Aussage $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ ist also unabhängig von den Wahrheitswerten von A und B stets wahr, sie ist also ein logisches Gesetz.

Die Kontraposition zu

"Wenn es regnet, ist die Straßen nass" (Regen $\Rightarrow$ nass)

ist

"Wenn die Straße nicht nass ist, dann regnet es nicht". ($\neg$ nass $\Rightarrow$ $\neg$ Regen).

Die beiden Sätze sind im aussagenlogischen Sinne äquivalent.

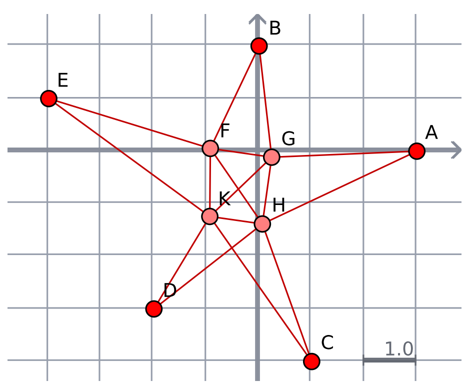
D 2 **(Federnetzwerke: Matrix-Vektor-Produkte zur Beschreibung der Gleichungssysteme)**

Wir betrachten ein ebenes Netzwerk, welches aus (idealen) Federn und (Masse-)Punkten aufgebaut ist (vergleiche Beispiel 1.1 aus der Vorlesung bzw. dessen interaktive Version auf mathe-vital.de).

Gegeben seien fünf (fixierte) Punkte in der Ebene mit folgenden Koordinaten.

$$A = (3, 0), \quad B = (0, 2), \quad C = (1, -4), \quad D = (-2, -3) \quad \text{und} \quad E = (-4, 1)$$

Diese Punkte seien durch elastische Federn mit vier (beweglichen) Knotenpunkten F, G, H und K verbunden, wie im Bild dargestellt.



Wir bezeichnen die x- und y-Koordinaten eines Punktes P mit x_P bzw. y_P (z.B. $x_A = 3$). Die Koordinaten der beweglichen Knotenpunkte F, G, H und K des Systems Gleichgewichtsposition sind gesucht.

Stellen Sie hierfür ein lineares Gleichungssystem auf, das für jeden beweglichen Knotenpunkt mittels der Krafteinwirkung durch benachbarte Punkte mit Federkonstante $h = 1$ die Ruhelage des Systems beschreibt.

Formulieren Sie dieses aus mehreren Gleichungen bestehende Gleichungssystem zu zwei Gleichungen der Form $M \cdot x = a$ und $M \cdot y = b$ mit einer geeigneten Matrix M und Vektoren a, b um. Der Vektor x soll hierbei die unbekannten Variablen x_F, x_G, x_H und x_K in seinen Komponenten enthalten. Der Vektor y soll die unbekannten y_F, y_G, y_H und y_K in seinen Komponenten enthalten.

Lösung:

In der Ruhelage des Systems addieren sich die Kräfte die durch die Federn auf die Knotenpunkte einwirken zu Null. Ist die Federkonstante durchgehend $h = 1$, ergibt sich z.B. für die Koordinaten des Knotenpunktes F das folgende Paar von Gleichungen:

$$\begin{aligned}&(x_B - x_F) + (x_G - x_F) + (x_H - x_F) + (x_K - x_F) + (x_E - x_F) = 0 \quad \text{und}\\&(y_B - y_F) + (y_G - y_F) + (y_H - y_F) + (y_K - y_F) + (y_E - y_F) = 0\end{aligned}$$

Transformation und Einsetzen der bekannten Werte ergibt die Gleichungen:

$$\begin{aligned}-5x_F + x_G + x_H + x_K &= -x_B - x_E = 0 + 4 = 4\\-5y_F + y_G + y_H + y_K &= -y_B - y_E = -2 - 1 = -3\end{aligned}$$

Analog dazu ergeben sich für die übrigen drei Knotenpunkte folgende sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned}&x_F - 5x_G + x_H + x_K = -x_A - x_B = -3 - 0 = -3\\&y_F - 5y_G + y_H + y_K = -y_A - y_B = -0 - 2 = -2\\&x_F + x_G - 6x_H + x_K = -x_A - x_C - x_D = -3 - 1 + 2 = -2\\&y_F + y_G - 6y_H + y_K = -y_A - y_C - y_D = -0 + 4 + 3 = 7\\&x_F + x_G + x_H - 6x_K = -x_C - x_D - x_E = -1 + 2 + 4 = 5\\&y_F + y_G + y_H - 6y_K = -y_C - y_D - y_E = 4 + 3 - 1 = 6\end{aligned}$$

Dies sind zwar acht Gleichungen mit acht Unbekannten, aber die zwei Gruppen der unbekannten x - und y -Koordinaten sind offenbar voneinander unabhängig, entkoppelt, es ergeben sich also zwei Gleichungssysteme mit jeweils vier Gleichungen und vier Unbekannten:

$$\begin{array}{rrrrl}-5x_F & +\ x_G & +\ x_H & +\ x_K & = 4\\x_F & -5x_G & +\ x_H & +\ x_K & = -3\\x_F & +\ x_G & -6x_H & +\ x_K & = -2\\x_F & +\ x_G & +\ x_H & -6x_K & = 5\end{array}\qquad\begin{array}{rrrrl}-5y_F & +\ y_G & +\ y_H & +\ y_K & = -3\\y_F & -5y_G & +\ y_H & +\ y_K & = -2\\y_F & +\ y_G & -6y_H & +\ y_K & = 7\\y_F & +\ y_G & +\ y_H & -6y_K & = 6\end{array}$$

Eine weitere Erleichterung die wir bei dem Lösen dieser Gleichungssysteme benutzen können ist, dass sie sich nur in ihren rechten Seiten unterscheiden.

Diese Gleichungssysteme sind Äquivalent zu folgenden Matrix-Vektor-Produkten:

$$\begin{pmatrix}-5 & 1 & 1 & 1\\1 & -5 & 1 & 1\\1 & 1 & -6 & 1\\1 & 1 & 1 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_F\\x_G\\x_H\\x_K\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\\-2\\5\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\begin{pmatrix}-5 & 1 & 1 & 1\\1 & -5 & 1 & 1\\1 & 1 & -6 & 1\\1 & 1 & 1 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_F\\y_G\\y_H\\y_K\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\7\\6\end{pmatrix}$$

Wir setzen also

$$M=\begin{pmatrix}-5 & 1 & 1 & 1\\1 & -5 & 1 & 1\\1 & 1 & -6 & 1\\1 & 1 & 1 & -6\end{pmatrix},\quad a=\begin{pmatrix}4\\-3\\-2\\5\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}-3\\-2\\7\\6\end{pmatrix},$$

und erhalten die beiden zu lösenden Gleichungen $M \cdot x = a$ und $M \cdot y = b$.

Hausaufgaben (Abgabe im Moodle bis 09.11.2020um 12:00 Uhr)

H 1 (Matrix-Vektor Produkte)

Gegeben seien die folgende Matrizen

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

$$F=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, G=\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

und die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\ e = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix}12\\2\end{pmatrix},\ g = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix},$$

Geben Sie alle Kombinationen bestehend aus einer Matrix und einem Vektor an, sodass deren Produkt jeweils wohldefiniert ist. Berechnen Sie auch die jeweiligen Produkte.

Lösung: Damit das Matrix-Vektor-Produkt wohldefiniert ist, muss die Breite der Matrix mit der Höehe des Vektors üebereinstimmen.

$$A \cdot a = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix},\ A \cdot f = \begin{pmatrix}14\\-2\end{pmatrix},\ B \cdot d = \begin{pmatrix}55\end{pmatrix} = 55,\ C \cdot a = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-1\\3\end{pmatrix},\ C \cdot f = \begin{pmatrix}7\\10\\14\end{pmatrix},\ D \cdot b = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix},$$

$$D \cdot e = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ D \cdot g = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ E \cdot d = \begin{pmatrix}2\\4\\6\\8\\10\end{pmatrix},\ F \cdot b = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ F \cdot e = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ F \cdot g = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ G \cdot a = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$G \cdot f = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$$

H 2 (Aussagelogik)

A, B und C bezeichnen Aussagen. Beweisen Sie, mithilfe einer Wahrheitstafel dass die folgende Aussage ein logisches Gesetz ist:

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

.

Lösung: Wir stellen die Wahrheitstafel für diese Implikation auf:

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$	$A \Rightarrow C$	$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	w
w	f	w	f	w	f	w	w
w	f	f	f	w	f	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Die behauptete Implikation $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ ist also unabhängig von den Wahrheitswerten von A, B und C stets wahr, sie ist also ein logisches Gesetz.