VUIBERT PRÉPAS

Réussir son entrée en prépa

MATHS

Tle S → prépas scientifiques

MPSI • PCSI • PTSI • BCPST

UNE PASSERELLE VERS LA PRÉPA !

- L'essentiel du cours de lycée à maîtriser et des passerelles vers la prépa
- Des objectifs pour réussir sa rentrée et sa 1re année
- Des Vrai/Faux pour tester ses connaissances
- Des exercices corrigés pour s'entraîner
- Des problèmes pour aller plus loin

Vuibert

Paul Milan

VUIBERT PRÉPAS

Paul Milan

Réussir son entrée en prépa

MATHS

Tle S → prépas scientifiques

MPSI • PCSI • PTSI • BCPST

Vuibert

Dans la même collection :

MATHÉMATIQUES MPSI, *R. Mansuy*

MATHÉMATIQUES PCSI-PTSI, *X. Oudot & V. Queffelec*

MATHÉMATIQUES BCPST 1re ANNÉE, *O. Coulaud & J. Verliat*

OPTION INFORMATIQUE MPSI-MP/MP*, *R. Mansuy*

INFORMATIQUE POUR TOUS - 1re ET 2e ANNÉES, *A. Caignot, M. Dérumaux, L. Moisan & J. Labasque*

PHYSIQUE MPSI-PCSI-PTSI, *M. Cavelier, J. Cubizolles, G. Delannoy, E. Jahier & C. Jorssen*

SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR MPSI-PCSI-PTSI, *A. Caignot, V. Crespel, M. Dérumaux, C. Garreau, P. Kaszinski, B. Martin & S. Roux*

BIOLOGIE-GÉOLOGIE BCPST 1re ANNÉE, *O. Dautel, A. Proust, M. Algrain, C. Bordi, A. Helme-Guizon, F. Saintpierre, M. Vabre & C. Boggio*

MÉMENTO BIOLOGIE 1re ET 2e ANNÉES, *F. Saintpierre, C. Bordi, M. Algrain, H. Clauce, Y. Krauss & I. Mollière*

Pour s'entraîner :

MATHÉMATIQUES MPSI, *A. Bechata & N. de Granrut*

PHYSIQUE MPSI-PCSI-PTSI, *F. Bruneau, M. Cavelier, Y. Lozier & M. Strubel*

CHIMIE PCSI, *J. Appenzeller, J.-L. Dormieux, A. Morland & C. Vilain*

CHIMIE MPSI-PTSI, *J. Appenzeller, A. Morland & C. Vilain*

SCIENCES INDUSTRIELLES DE L'INGÉNIEUR MPSI-PCSI-PTSI, *A. Caignot, F. Golanski, F. Hospital, D. Iceta, X. Pessoles & D. Violeau*

Photo de couverture : infinite numbers/tostphoto©AdobeStock
Pages de parties : kim©AdobeStock, tostphoto©AdobeStock, WestPic©AdobeStock
Maquette et mise en page : Sébastien Mengin / Édilibre
Couverture et liminaires : Les PAOistes

ISBN : 978-2-311-40575-0

Table des matières

Avant-propos

La première année de classe préparatoire scientifique peut être déstabilisante pour les élèves. De **nouvelles notions** sont à apprendre, mais il est surtout indispensable de maîtriser parfaitement celles acquises au lycée. Cet ouvrage de Mathématiques assure une passerelle efficace entre le programme du lycée et celui des classes préparatoires scientifiques.

Il propose des rappels de cours de terminale pour pouvoir commencer son année de prépa dans de bonnes conditions. Tous les sujets abordés sont compréhensibles par des élèves voulant approfondir et compléter leur culture mathématique.

L'ouvrage aide aussi à consolider ses **méthodes de travail.**

Il est composé de sept chapitres suivis d'exercices de niveaux de difficulté progressifs et de problèmes donnés en début de prépa.

Le contenu, dont l'objectif est de permettre une assimilation optimale des notions, est organisé de la manière suivante :

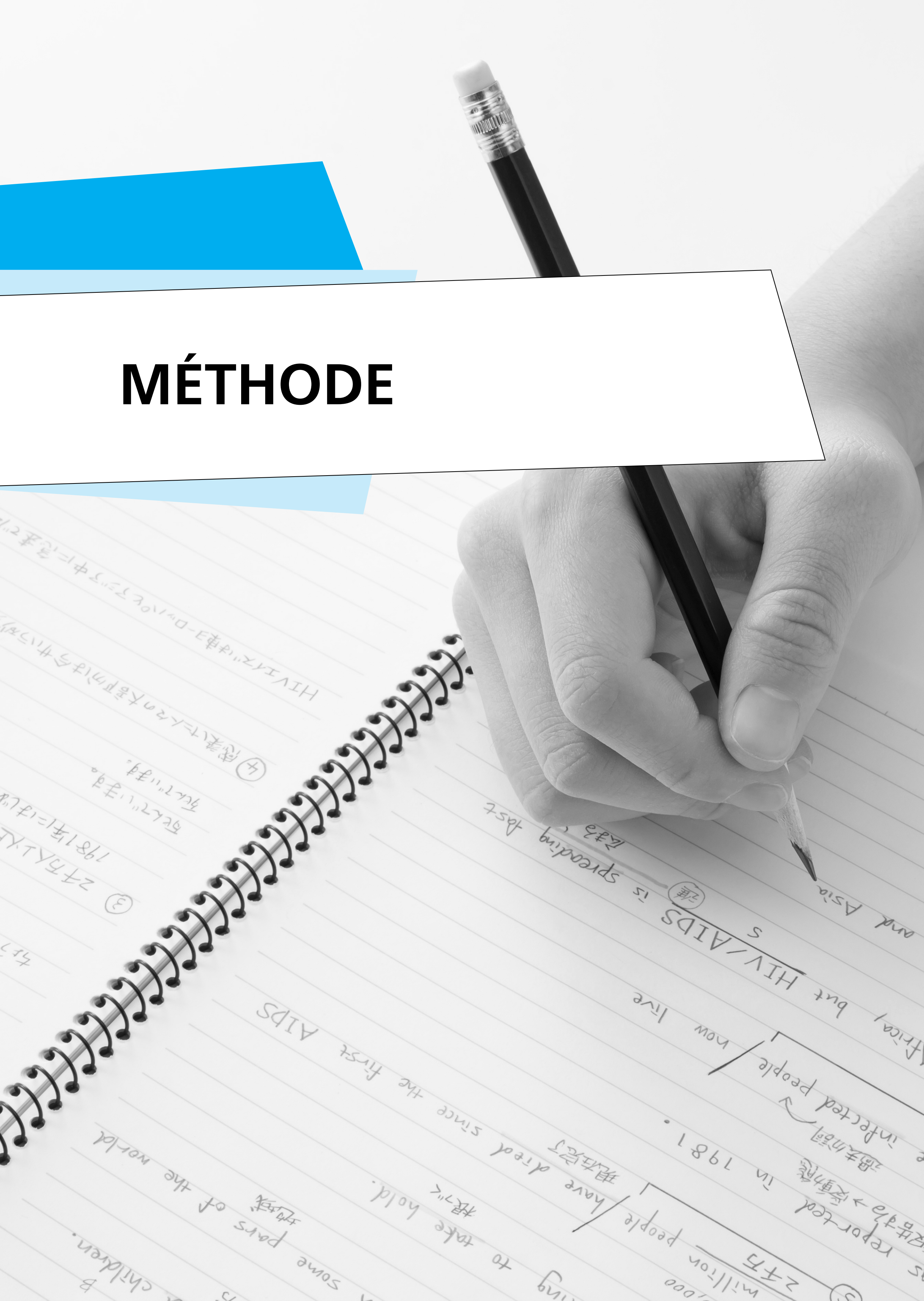
- Quelques rappels de raisonnements mathématiques de base suivis d'une introduction à la logique.
- Un chapitre sur le calcul, tant numérique qu'algébrique, revient sur des pratiques qui font souvent défaut aux nouveaux bacheliers, notamment en raison de l'utilisation des calculatrices et du niveau d'aptitude calculatoire exigé au Bac.
- Un complément sur les nombres complexes, qui jouent un rôle très important dans la formation d'ingénieur, ainsi que quelques applications géométriques et la notion de barycentre sont également développés.
- Deux chapitres sont consacrés à l'analyse : complément sur les fonctions et intégration.
  Il s'agit surtout de parties de cours qu'il faut maîtriser pour être en phase avec les attentes du programme de classe préparatoire et qui sont aperçues au lycée.
- Un chapitre sur la convergence des suites, où sont rappelés les théorèmes de terminale ainsi que quelques autres, bien utiles, est aussi proposé.
- Enfin une dernière partie, consacrée au dénombrement et à l'arithmétique, permet une première approche des structures algébriques et des probabilités.

L'ouvrage a été conçu comme un outil de révision agréable pour l'élève. Des rubriques, agrémentées de pictogrammes, permettent une lecture non linéaire et des points de repères visuels.

-  : **À retenir** revient sur les notions et les définitions essentielles du programme. Celles qu'il faut maîtriser par cœur.
-  : **Objectif Prépa – J'approfondis** permet une projection directe dans le programme de prépa. Un avant-goût des exigences de première année.
- D'autres rubriques, **Remarques, Attention, Méthode, Exemple,** viennent enrichir les rappels de cours et donnent des astuces pour mieux comprendre et réussir.

Bonne lecture !

MÉTHODE



Méthodologie de travail

1. L'entrée en classe préparatoire aux grandes écoles

· Présentation générale

Les CPGE, qu'elles soient scientifiques (comme cela va nous intéresser dans cet ouvrage), littéraires ou économiques, font l'objet de nombreuses idées préconçues. Certains s'accordent à dire que la quantité de travail à fournir est colossale, que les cours vont à toute vitesse, que les professeurs sont sévères et ne se soucient pas de leurs étudiants, que les notes sont forcément mauvaises, même pour les meilleurs élèves de lycée ou encore que les mauvais élèves sont parfois humiliés. Ces idées sont passéistes et en aucun cas le reflet des changements et des évolutions qui ont été entreprises en classe prépa. Les enseignants sont très attentifs et à l'écoute de leurs étudiants, la camaraderie est forte entre membres d'une même classe et avec beaucoup de motivation et d'investissement, on peut très bien, et réussir, et bien vivre ses deux années.

- Un premier point rassurant : si votre dossier est sélectionné et que vous êtes pris, c'est déjà bon signe. Cela signifie que les enseignants expérimentés de prépa ont inspecté votre dossier et qu'il leur semble possible que vous réussissiez.
- Ainsi, la légende des prépas peut faire peur mais si la montagne paraît grande elle n'en reste pas moins surmontable. Trop de travail, les cours qui vont très vite : vous trouverez dans les lignes qui suivent des conseils pour bien s'en sortir ?

2. Conseils pour bien démarrer son année

Avant de présenter quelques conseils pour travailler les mathématiques, sachez que tous le monde étudie différemment et qu'il n'y a pas **une seule façon** d'étudier un programme de mathématiques. Vous serez peut-être en désaccord avec certains d'entre eux. Rien de grave. Le but de ces conseils est seulement de vous aider à faire le maximum en fonction du temps que vous pouvez y consacrer.

On peut distinguer deux types de personnes, celles qui sont satisfaites de leur méthode de travail mais qui sont toujours intéressées d'en savoir davantage et celles qui ne sont pas satisfaites et qui veulent des idées pour améliorer leur méthode de travail.

Si vous êtes satisfait(e) de votre méthode de travail et que vous obtenez les résultats souhaités, il n'y a aucune raison de changer vos habitudes. Vous pouvez cependant confronter votre méthode aux conseils présentés ici.

Si vous n'êtes pas satisfait(s) de votre méthode de travail et que vous êtes à la recherche de moyens pour améliorer vos résultats, soit parce que vous ne savez pas comment travailler, soit parce que vous passez des heures et des heures à étudier sans les résultats espérés, la majorité de ces conseils vous seront utiles et vous permettront d'améliorer votre compétence en mathématiques sans perte de temps.

Ces conseils sont regroupés dans les rubriques : conseils généraux, prendre des notes, exercices et devoirs, préparer un contrôle, une colle, etc.

3. Trois incontournables

Il y a trois grands domaines généraux incontournables.

· Les mathématiques ne sont pas un sport de spectateurs

Vous ne pouvez pas apprendre les mathématiques simplement en allant en classe et écouter, comme dans une conférence, l'enseignant faire son cours. Afin d'apprendre les mathématiques vous devez être activement impliqué dans le processus d'apprentissage. Vous devez prêter attention en cours et prendre des notes détaillées. Vous devez faire des exercices même ceux que le professeur ne donnent pas. Vous devez travailler régulièrement et pas seulement la nuit précédant les contrôles.

La régularité est la qualité essentielle pour réussir son année. Si vous travaillez uniquement quelques heures avant un contrôle, votre année sera bien difficile.

· Travailler pour comprendre les principes mathématiques

Mémoriser simplement un ensemble de formules n'est pas suffisant. Certes, il y a des formules à mémoriser, mais vous avez besoin de comprendre comment les utiliser ce qui est très différent de simplement les mémoriser.

Certaines formules ont des restrictions que vous devez savoir afin de les utiliser à bon escient. Par exemple, vous devez déterminer l'ensemble de définition d'une équation avant de la résoudre. Vous devez vous rappeler ceci ou cela sinon votre réponse sera entachée par ce manque de rigueur !

D'autres formules sont très générales et vous obligent à identifier les différentes variables qui correspondent à un problème donné. Si vous ne comprenez pas comment la formule fonctionne et son principe latent, il peut souvent être très difficile de l'utiliser.

Si vous ne pouvez identifier les variables d'une formule pour un problème donné, celle-ci se trouve alors sans valeur.

· Les mathématiques sont une science cumulative

Vous devez toujours avoir conscience que les mathématiques sont une science cumulative. Presque tout ce que vous étudiez dans un cours de mathématiques en prépa dépendra de notions que vous avez déjà apprises : en terminale, en première ou en seconde. Par exemple, dans le cours des nombres complexes en prépa, on rappelle les notions de base, mais on ne peut jamais tout rappeler et, de plus, cela se fait rapidement. De même pour le calcul algébrique, la factorisation, les propriétés des fonctions exp et ln, ...

Vous ne pouvez pas calculer une intégrale, sans connaître les primitives des fonctions élémentaires, étudier les polynômes formels sans savoir factoriser, étudier une suite sans connaître les résultats des suites arithmétiques ou géométriques, et étudier une isométrie vectorielle sans connaître les transformations élémentaires dans le plan ...

Ainsi, avec ces trois principes généraux présents à l'esprit, nous allons procéder à des conseils plus spécifiques apparaissant dans les différentes rubriques. Notez que plusieurs de ces conseils incontournables apparaissent dans plusieurs sections car ce sont des conseils *grave importants* !

4. Conseils généraux

Voici quelques conseils généraux qui sont assez primordiaux pour être isolés et qu'il ne faut pas dénigrer.

· Aller en cours

Rappelez-vous que les mathématiques sont une science cumulative. Ne pas aller en cours c'est se priver d'un matériel important qui sera utilisé dans les chapitres suivants et/ou se priver de remarques importantes.

· Arriver à l'heure

Parfois certaines remarques importantes sont données en début de cours.

· Écouter en classe

Afin de pouvoir retravailler votre cours vous avez besoin de tout écouter en classe. Souvent l'attention est difficile, mais cela a son importance. Parfois des idées importantes ne seront pas écrites au tableau mais juste signalées oralement par l'enseignant. Si l'enseignant souligne oralement telle chose, il est alors probable que cela apparaîtra au cours d'un contrôle.

· Prendre bien en note

En cours vous pouvez avoir l'impression de tout comprendre mais ce n'est pas toujours le cas quand vient le temps de faire vous-même un exercice. Des notes bien prises vous aideront à vous rappeler comment résoudre un exercice. Parfois tout écrire s'avère impossible, dans ce cas notez-en le maximum le plus clairement possible.

Ce conseil semble contredire le précédent. Il est souvent difficile à la fois d'écouter et de prendre des notes. Cela se gagne par la pratique. Vous devez être en mesure d'écouter pendant que vous prenez des notes sur les parties importantes du cours. Certains professeurs proposent sur leur site des notes de cours, vous n'aurez alors qu'à les annoter et cela vous permettra de vous décharger d'une tâche importante et d'écouter plus attentivement. Sachez que prendre des notes sans comprendre vous fera perdre énormément de temps lorsque vous reverrez votre cours chez vous.

· Poser des questions

Si vous ne comprenez pas quelque chose, demandez à votre professeur. Il y a des chances que vous ne soyez pas le/la seul(e) dans ce cas.

· Écouter quand les autres posent des questions

Lorsque d'autres étudiants(es) posent des questions, assurez-vous d'avoir écouté la question et la réponse. Il se peut qu'il ou elle pensait à quelque chose auquel vous ne pensiez pas du tout.

· Voir ses notes après le cours

Après chaque cours, vous devez revoir vos notes pendant que le cours est encore *frais* dans votre tête. Cela ne prend pas énormément de temps mais vous permettra de formuler ce que vous avez trouvé de déroutant et de poser des questions au prochain cours.

· Faire des fiches

Faire un ensemble de fiches avec les formules, les définitions et les théorèmes importants ainsi que quelques exemples permettant d'illustrer ces principes. Elles doivent être concises (un ou deux bristols recto-verso pour un chapitre). Ne mettez pas ce que vous êtes sûr de savoir. Utiliser ces fiches pour mémoriser les formules et les concepts importants. Pensez que ces fiches vous permettront, par la suite, de réviser les concours !

· Savoir utiliser les notations correctes

Sachez que vous pouvez perdre des points pour des notations incorrectes. Le correcteur n'est pas nécessairement votre professeur et celui-ci suppose que vous connaissez les notations correctes.

· Travailler à plusieurs

Il est souvent utile d'étudier en groupe de trois ou quatre. Cela permet de vous donner une dynamique, un éclairage différent et surtout à ne pas vous décourager. La première année de prépa, par son rythme et son exigence est souvent rude et l'entraide est souvent la solution.

· Prévoir suffisamment de temps pour réviser un contrôle

Il faut souvent plus de temps que vous ne pensez pour revoir le cours et préparer un contrôle. En effet, les exercices ou devoirs à faire prennent souvent plus de temps que vous ne le pensiez. Gardez cela à l'esprit lorsque vous programmez votre temps.

· Faire les exercices après chaque cours

Prévoyez un peu de temps après chaque cours pour faire les exercices demandés. Cela vous permettra de mieux comprendre le cours et si vous n'arrivez pas à faire un exercice, sa correction au cours suivant sera plus instructive.

Ne pas trouver une solution d'exercice, même en y passant du temps, ne préjuge en rien de votre future réussite aux concours. *Sécher* fait partie de l'activité mathématique.

· Faire des devoirs sans notes ni livres

Après les premiers exercices, mettez vos notes et vos livres de côté et essayez de faire les exercices restants. Cela vous permettra de vous entraîner pour les contrôles où les notes sont interdites.

· Faites d'autres exercices

Ne vous limitez pas aux exercices donnés par le professeur. Plus vous ferez d'exercices différents mieux vous serez préparé.

Posséder des ouvrages dédiés est souvent utile pour réviser et s'entraîner.

· Pratiquez, pratiquez, pratiquez

Pratiquez autant que possible. La seule façon de vraiment apprendre à résoudre des problèmes est d'en faire !

· Persévérez

La seule façon de vraiment saisir un sujet est de rentrer à la maison et d'y réfléchir. Vous découvrirez qu'avec un peu de travail, un exercice d'abord déroutant vous apparaîtra ensuite plus simple ou même évident. Ce que l'on trouve évident est ce que l'on sait faire.

· Gardez vos anciens contrôles

Ne jetez pas vos anciens contrôles et leurs corrections. Ces contrôles sont une bonne source de matériel pour corriger des maladresses et des fautes de raisonnement.

· Ne pas oublier les cours en ligne

Si vous êtes coincé sur un sujet qui a été vu en classe ou que vous n'avez pu être présent, ne pas oublier que, souvent, les enseignants mettent des notes de cours ainsi que des compléments en ligne. De plus, les sites d'autres enseignants ou des ouvrages vous donneront un éclairage différent et des exemples non vus en classe.

· Demander de l'aide en cas de besoin

Si vous rencontrez des problèmes, n'hésitez pas à demander de l'aide à d'autres étudiants de votre classe. N'attendez pas ! Cela peut être peu de chose.

· Avoir la bonne attitude

Ne faites pas juste que ce qui est demandé. Travailler en profondeur les notions permet d'avoir du recul pour aborder la suite.

5. Prendre des notes

Voici quelques conseils pour prendre des notes en classe.

· Écoutez en cours

Ne vous contentez pas d'écrire ce que vous voyez au tableau. Aucun professeur n'écrit tout ce qu'il dit au tableau et parfois les idées importantes ne seront pas écrites.

· Écrivez des remarques explicatives

Assurez-vous que vous écrivez les remarques explicatives que le professeur donne. Celles-ci ne seront pas souvent écrites au tableau, mais peuvent vous dire comment travailler un type particulier de problème ou pourquoi le professeur a utilisé telle formule plutôt que telle autre pour un problème donné.

· Remettre en cause ce qui est écrit

Si vous pensez qu'il y a une erreur au tableau, n'hésitez pas à poser une question.

· Remarque sur des sujets que vous ne comprenez pas

Si vous éprouvez des difficultés à comprendre quelque chose vu en classe, notez cela dans la marge ainsi que les mots clés. Laissez quelques lignes afin de pouvoir noter les détails manquants plus tard, une fois compris ce que vous ne compreniez pas.

· Examiner/revoir vos notes

Dès que vous pouvez après le cours, relisez vos notes, recherchez les erreurs ou omissions. Remplissez les informations que vous n'avez pas eu le temps d'écrire.

· Revoir régulièrement vos notes

À intervalle régulier, revoyez vos notes afin de les mémorisées. Si vous avez un doute ou une question n'hésitez pas à prendre un post-it pour la noter tout de suite afin de ne pas l'oublier. Les questions que l'on se posent sont très *volatiles* et l'on ne s'en souvient plus lorsqu'on a l'occasion de les poser.

6. Obtenir de l'aide

Obtenir de l'aide lorsque vous êtes en difficulté est important. Voici quelques idées pour obtenir de l'aide.

· Obtenir de l'aide quand vous en avez besoin

Ne pas attendre la dernière minute pour obtenir de l'aide. Lorsque vous commencez à avoir des difficultés, il est temps d'obtenir de l'aide. Rappelez-vous que les mathématiques sont une science cumulative. Si l'on ne vous aide pas tout de suite vous serez d'autant plus pénalisé par la suite.

· Poser des questions en classe

Poser des questions est la façon la plus sûre d'obtenir l'aide dont vous avez besoin et de rester activement impliqué dans la classe.

· Former un groupe de travail

Beaucoup de gens trouvent très motivant de travailler en groupe. Différentes personnes vont voir les choses différemment et peuvent trouver une façon de résoudre un problème que vous n'aviez pas vu.

· Poser les bonnes questions

Dire « *je ne comprends pas* » ou « *je ne comprends rien* » n'est pas la meilleure façon de demander de l'aide. Soyez précis(e) dans vos questions. Quel est exactement le point que vous ne comprenez pas. Plus la question est précise plus la réponse vous aidera.

Lorsque vous venez voir quelqu'un pour obtenir de l'aide, assurez la personne de vos tentatives pour résoudre le problème. Encore une fois de nombreux professeurs ne pourront vous aider si vous n'avez tenté quelque chose. Car cela montre que vous avez travaillé et cela permet d'aiguiller le professeur à comprendre où cela « *coince* ».

7. Exercices et devoirs

Cette partie contient quelques conseils généraux pour tirer le meilleur parti de vos devoirs.

· Comprendre l'objectif des exercices et des devoirs

Les professeurs ne donnent pas des exercices à rendre pour le plaisir. Les devoirs sont donnés pour vous aider à apprendre et à développer les bons raisonnements, procéder avec méthode dans la résolution de problèmes. Les mathématiques ne sont pas comprises instantanément après avoir assisté à un cours. Vous avez besoin de travailler à l'aide d'exercices pour comprendre en profondeur le cours. Tel est le but des devoirs. Ils apportent un ensemble de difficultés qui vous aideront à comprendre la notion. Rappelez-vous qu'un problème semble toujours plus facile s'il est résolu par le professeur. Vous saurez si vous comprenez vraiment le cours qu'en étant confronté seul à un exercice.

· Ne remettez pas à plus tard

Il est bien plus facile de faire le plus tôt possible un exercice ou un devoir lorsque le cours est encore *frais* dans sa tête plutôt que d'attendre la dernière minute pour faire le devoir intégralement. Souvent les petits apartés d'un professeur ne semblent pas importants sur le moment mais prendra tout son sens lorsque l'on planchera sur le devoir.

· Être organisé

Assurez-vous lorsque vous commencez à travailler sur un devoir que vous avez le cours, les notes et fiches qui vont avec.

· Erreurs et notes de cours

Prenez notes de toutes les erreurs courantes que votre professeur a mentionnées.
Souvent, il existe un problème similaire fait en cours qui peut aider à démarrer.

· Lire/suivre les instructions

Lisez attentivement le sujet et n'hésitez pas à *stabiloter* les éléments importants de l'énoncé. Cela vous préparera à le faire durant les concours et être ainsi efficace. On n'a jamais assez de temps lors d'un contrôle !

· Soyez propre

Écrivez proprement et clairement. Souvent le correcteur qui a du mal à vous déchiffrer va passer à côté d'une idée intéressante.

· Détailler tout votre travail

Assurez-vous que vous montrez tout votre travail et pas uniquement des éléments de réponse. On doit, en effet, beaucoup écrire en mathématique pour que la rédaction soit rigoureuse. On ne vous donnera pas tous les points si votre solution possède des implications non prouvées. Ne sautez pas les étapes de calculs. Si vous avez fait une erreur mais que votre raisonnement est juste, vous aurez une partie des points de la question.

· Vérifiez-vous !

Toujours revenir sur votre travail, une fois une question terminée, pour vous assurer que vous n'avez pas fait d'erreurs de calcul, de signe ou omis une condition.

8. Résolution d'une question, d'un problème

Dans la partie précédente, nous avons donné des conseils généraux. Voici maintenant quelques conseils pour vous aider à travailler les problèmes en eux-mêmes. Certains conseils importants apparaissent dans les deux parties.

· Lire la question

Lire attentivement la question pour avoir une idée de ce que l'on vous demande. Trop souvent les étudiants(es) n'ont pas lu correctement la question.

· Lire à nouveau la question

Maintenant que vous savez ce que l'on vous demande, relisez la question. Cette fois-ci prenez en note ce que l'on vous donne et ce que vous devez trouver. Assurez-vous également que vous comprenez tout ce que l'on vous demande.

· Noter clairement ce que vous devez trouver

Écrivez clairement quelque part ce que l'on vous demande de trouver.

· Noter clairement ce que vous savez

Écrivez quelque part toutes les informations que vous avez reçu.

· Faire un bilan

Le cas échéant faites un schéma et étiquetez ce que vous savez et ce que vous devez trouver. Parfois en partant de la fin, on peut trouver une amorce pour trouver le début. Ne pas se censurer, car une idée est volatile.

· Concevoir un plan

Essayer de comprendre les différentes étapes nécessaires pour résoudre la question. Identifiez les formules qui peuvent vous aider. Voir s'il y a des étapes intermédiaires qui seront nécessaires pour arriver à la réponse finale. Parfois, la réponse est donnée implicitement plus loin dans le sujet.

· Trouver un problème similaire

Si vous ne comprenez pas comment fonctionne la question, trouver un problème semblable qui est plus simple et que vous savez résoudre. Essayez ensuite de revenir à votre question et déterminez ce que l'on doit modifier pour la résoudre.

· Vérifier votre réponse

La réponse est-elle sous la bonne forme ? Est-ce que votre réponse est cohérente ?

9. Réviser pour les contrôles

Voici quelques conseils pour préparer un contrôle.

· Commencer le plus tôt possible

Faites les révisions un peu chaque jour ou, tout au moins, deux, trois jours avant le contrôle. Ne pas commencer la nuit précédant le contrôle. La nuit est faite pour dormir !

· Bien dormir

Passer une bonne nuit avant le contrôle. Il est important d'être bien reposé et mentalement en forme avant un contrôle de mathématiques. Ne vous endormez pas sur un exercice, car il vous trottera dans la tête pendant votre sommeil. Endormez-vous avec un livre qui vous détendra.

· Faire une liste de ce qu'il faut savoir

Relisez vos notes et faites une liste concise de ce qu'il faut savoir. Assurez-vous que vous connaissez vos formules et que surtout vous savez les utiliser !

· Identifier et rechercher les caractéristiques des exercices

Tout en faisant vos exercices, identifiez à quelle partie du cours ils se rattachent. Cela fournit quelques indices sur le processus de solution. Lors d'un contrôle, vous n'aurez rien pour vous aider, ainsi, si vous avez identifié les caractéristiques de chaque type d'exercice qu'il faut savoir faire, cela vous permettra de trouver rapidement la méthode pour résoudre la question et être efficace.

10. Passer une colle

La colle (parfois écrit également « khôlle ») est une des spécificités de la prépa. Durant une heure, vous êtes interrogé par groupe de trois, par un « colleur ». En général, après vous avoir posé une question de cours, celui-ci vous donne un exercice à résoudre. L'objectif des colles est de vous préparer aux oraux des concours.

Chaque semaine les colleurs reçoivent un programme par votre enseignant, sur les chapitres qui ont été abordés durant la semaine, sur lequel ils doivent interroger les élèves.

· Présentation de la question de cours

Il faut, bien sûr, revoir le cours avec les définitions, les propriétés, les théorèmes et les démonstrations du chapitre. Il faut être capable de les restituer sur une feuille blanche rapidement. Les fiches prennent alors toute leur importance.

C'est un oral donc l'attitude et la clarté d'exposé est très importante. En plus de l'exposé des éléments du cours, il est utile de signaler, le rôle d'un théorème ou d'une propriété dans la résolution d'un exercice classique.

· Présentation de l'exercice

Après votre question de cours, votre interrogateur vous donnera un exercice, vous laissera réfléchir quelques minutes, puis vous demandera si vous avez avancé dans la résolution.

· Être clair

Si vous pensez avoir résolu l'exercice, exposez clairement votre démarche. N'hésitez pas à faire un dessin ou un schéma ! Montrez que votre résolution est le fruit d'une démarche « scientifique ». Si c'était un exercice que vous aviez déjà fait, faites en sorte que la démonstration semble « naturelle » et si toutefois votre colleur vous demande si vous aviez déjà vu l'exercice, soyez honnête, et dîtes que vous aviez effectivement traité un exercice similaire. Les colleurs ne sont pas idiots, ils connaissent parfaitement la difficulté des exercices qu'ils donnent.

· Être actif

Si toutefois vous n'avez pas trouvé la solution, exposez leur votre réflexion. Il y a toujours des choses à dire. Si c'est un résultat à montrer « pour tout entier n », montrez que le résultat est vrai pour $n = 0$, 1 ou 2, s'il faut décrire un ensemble qui vérifie des propriétés, montrez que l'ensemble est non vide en trouvant un exemple simple, etc. À ce moment le colleur vous donnera des indications, et c'est votre réaction à ces indications qui lui permettront de vous évaluer. Éviter de dire des choses grossièrement fausses…

On ne vous en voudra jamais de ne pas trouver seul une astuce complexe, ou de ne pas penser à une démarche originale. Mais on vous reprochera vos erreurs de raisonnement, ou pire encore, d'essayer de « bluffer » votre interrogateur.

Soyez honnête, et dialoguez avec lui. Expliquez où vous bloquez, et il vous aidera. Profitez-en pour poser des questions ou échanger le plus possible sur les notions en jeu.

Le plus important est d'être **actif** même si l'exercice vous échappe. Une attitude passive ne donne pas envie à l'examinateur de vous aider.

Si la colle ne s'est pas bien passée, notez les exercices que vous avez eus, et vérifiez que vous savez les refaire. Cette démarche s'avérera payante, car les exercices que l'on vous donne en colle sont très souvent des exercices classiques qu'il faut savoir faire.

11. Passer une épreuve de concours

Passer un concours est probablement l'une des chose les plus importantes que vous ferez en mathématiques, il est donc important de faire du mieux que vous pouvez. Voici quelques idées qui vous aideront pour passer un examen.

· Détendez-vous !!!

Ceci est la première étape pour réussir un examen. Malheureusement, c'est facile à dire mais difficile à faire. Plus vous êtes nerveux au cours d'un concours et plus vous êtes susceptible d'oublier quelque chose. La pire des choses au cours d'un concours est la panique.

· Allez à la chasse aux points

Traitez d'abord toutes les questions que vous savez faire.
Puis travaillez les questions que vous pensez que vous pouvez faire sans en être sûr.
Enfin revenez en arrière et travaillez les questions restantes.
Vous obtiendrez ainsi le maximum des points que vous êtes en mesure d'obtenir.

· Gérez votre temps

Regarder l'horloge. Ne pas passer trop de temps à essayer de résoudre une question qui ne rapportera peut-être même pas 1 point. Vous ne serez pas en mesure après de terminer le sujet et obtiendrez moins de points en prenant tout ce temps pour une question que vous savez résoudre.

· Si vous êtes en mode « *coincé* »

Si vous êtes coincé par une question, passez à une autre question pour revenir plus tard sur celle-ci. Ne perdez pas de temps à faire une question qui ne rapportera qu'1 point pour ne pas être en mesure après de terminer une question sur 2 points que vous auriez su faire. Notez que c'est le même conseil que le précédent mais comme cela est très important, il n'était pas inutile de le signaler deux fois.

· Montrez tout votre travail

Rendez facile la tâche à votre correcteur en lui permettant de savoir rapidement que vous savez traiter cette question. Détaillez votre rédaction de manière à ce que même si la réponse est fausse mais le raisonnement juste, la question vous rapporte des points. Ne laissez pas le correcteur essayer de comprendre si ce que vous faites est juste ou non. Il faut toujours avoir présent à l'esprit que le correcteur n'a pas que votre copie à corriger et que plus vite il corrige votre copie plus il sera enclin à laisser passer certaines maladresses.

· Ne laissez pas une question en blanc

Vous ne devriez jamais laisser un vide dans une question. Même si vous ne savez pas comment résoudre la question, écrivez au moins une idée pour la résoudre. Le correcteur peut être amené à vous attribuer une partie des points tandis que s'il n'y a rien, pas de points. Écrire quelque chose n'est bien évidemment pas une garantie de points mais ne rien écrire est une garantie d'en avoir aucun.

· Lire attentivement les questions

Lisez attentivement et complètement les questions avant d'y répondre. Si l'on demande une certaine précision pour un calcul assurez-vous que votre précision est celle demandée. N'hésitez pas à « *stabiloter* » les données d'une question.

· Votre réponse a t-elle un sens ?

Assurez-vous que votre réponse est **cohérente** par rapport au problème posé.

· Relisez-vous

Après la rédaction de chaque question, relisez-vous afin de voir si vous n'avez pas fait de faute de calcul ou oublié une solution. N'hésitez pas à confronter votre solution avec des données qui apparaissent ensuite dans l'énoncé.

N'attendez pas la fin du contrôle pour relire toute votre copie car si vous vous apercevez d'une erreur il ne sera peut-être plus temps de pouvoir la rectifier surtout si elle implique les résultats suivants dans l'exercice.

12. Apprendre de ses erreurs

Ceci est probablement l'une des parties les plus importantes. Apprendre de ses erreurs ne peut que vous aider.

· Contrôle, devoir

Lorsqu'on vous rend un contrôle ou un devoir, **passez en revue toutes les erreurs** que vous avez commises.

· Comprendre votre erreur

Ne pensez pas tout de suite qu'il s'agit d'une faute d'étourderie. S'il s'agit d'une erreur de raisonnement, il suffit de rétablir le bon raisonnement et la faute ne sera plus commise.

Regardez pour cela le corrigé qui vous est fourni avec la copie et analysez-le précisément.

Si vous ne comprenez pas une erreur, n'hésitez pas à chercher de l'aide pour la comprendre.

· Erreur d'inattention

Si vous constatez que vous faites des erreurs d'inattention, de notation, pensez à aller moins vite pour rédiger les questions. La majorité de ces erreurs sont la plupart du temps liées à une précipitation dans la résolution d'une question.

· Erreurs répétées

Si vous vous apercevez qu'un type d'erreur précis revient régulièrement dans votre copie. Interrogez-vous sur ces erreurs plutôt que de les mettre sur le compte de la fatigue. Essayez d'analyser les causes de ces erreurs à répétition.

· Faire une liste de vos erreurs

Mettez les erreurs que vous continuez à faire dans une « *liste d'erreurs* ». À chaque erreur notez la méthode/solution correcte. Examinez cette liste après avoir terminé un problème et voyez si vous avez fait l'une de vos erreurs « *classique* ».

Il peut être bon de relire cette liste avant de passer une épreuve afin d'être plus vigilant sur ce type d'erreur.

Principes de la rédaction mathématique

1. Ce qui se conçoit bien, s'énonce clairement

Pour mieux comprendre cet adage dû à Boileau, il faut comprendre sa négation : ce qui est mal compris s'exprime mal c'est-à-dire « *non clairement* » de manière confuse.

La rédaction mathématique a pour but de faire comprendre clairement au lecteur un problème mathématique. Cependant la rédaction, contrairement aux mathématiques, n'est pas une sciences exacte, c'est-à-dire que plusieurs rédactions sont possibles pour un même problème ou suivant le niveau mathématique, en effet ce qui était important pour un niveau terminale pourra être rapidement énoncé pour un niveau prépa.

Un premier test pour savoir si une rédaction est bonne ou pas, consiste à faire lire votre copie par une personne de même niveau que vous. Si cette personne a le sentiment que c'est sa propre capacité de compréhension qui est en cause, votre rédaction doit être confuse. C'est, en effet, paradoxal mais une copie mal rédigée induit parfois chez le lecteur ce sentiment de ne pas être à la hauteur en mathématique. Par contre, si la personne à laquelle vous faites lire votre copie trouve que finalement la question n'était pas si compliquée que cela, votre rédaction est certainement précise et rigoureuse. Ne dit-on pas que « *le génie est la capacité de rendre simple ce qui est compliqué* ».

La rédaction est toujours un compromis, car une épreuve de mathématique a toujours une certaine durée et que toutes choses n'ont pas nécessité à être auscultées dans les moindres détails. Il s'agit, la plupart du temps, de mettre en évidence un passage particulier, important, de la résolution de la question. Une démonstration est comme une plaidoirie d'avocat, il faut argumenter, apporter les preuves, et ménager ses effets pour mettre en évidence la vérité. En général, la résolution d'une question, peut être séparée en deux parties, une suite de calculs et l'utilisation d'un théorème dont on contrôlera que les hypothèses sont bien vérifiées. Suivant votre niveau et celui du lecteur, on détaillera plus ou moins les calculs mais lorsque l'on utilise un théorème, il faudra toujours être scrupuleux sur les hypothèses d'application.

Une suite de calculs, sans aucune phrase en français, sera pour le moins indigeste et le lecteur se découragera vite, car aucun lien de raisonnement ne permet de comprendre où mènent tous ces calculs. Cette rédaction, qui en réalité n'en est pas une, n'aide aucunement le lecteur à comprendre ce que vous faites. Le correcteur aura le sentiment que vous ne comprenez pas la question et que cette suite de calculs n'est qu'un artifice, voire du bluff, pour cacher vos doutes et incertitudes.

Une rédaction minimaliste aura un effet un peu similaire. Car si le lecteur ne voit que le résultat d'un calcul, sans détails, il aura le sentiment qu'on veut lui faire croire quelque chose sans preuve. Il faut trouver le juste milieu, le temps étant limité, en détaillant les moments importants du calcul.

Enfin, une rédaction ne s'improvise pas, il faut s'y être préparé, car elle mêle des automatismes qui ne s'acquièrent que par la pratique et des définitions et théorèmes qu'il faut savoir citer au bon moment et précisément.

« *La critique est aisée et l'art est difficile* », mais comme dans la rédaction vous devez être votre propre critique, l'art ne sera que du plaisir.

Voici quelques indications pour améliorer votre rédaction et apprendre quelques automatismes qu'il est bon de connaître.

D'une manière générale, la rédaction d'une question doit comporter **trois parties** : l'introduction, le raisonnement et la conclusion.

2. Introduire ce dont on parle

Introduire toutes les variables utilisées, même si elles sont définies dans l'énoncé.

Par exemple pour introduire un entier naturel non nul quelconque, on peut écrire :

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$
- Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$

Ainsi n'écrivez pas, hors de tout contexte : « *Ils sont colinéaires* » qui ça ? « les vecteurs », quels vecteurs ?

On peut, en cours de raisonnement, introduire une variable personnelle par souci de concision. Par exemple, dans l'étude d'une fonction lorsque les zéros de la dérivée ont une expression un peu longue et que l'on doit dresser le tableau de variation :

Posons $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{21}}{2}$.

Attention. Admettons que vous ayez déjà introduit un certain réel positif y. Dans ce cas vous ne pouvez écrire, pour introduire la lettre x : soit $y = x^2$.

Car cette formulation sous-entend que c'est y qui est introduit et non x. Le nouveau nom doit apparaître à gauche tandis qu'à droite figure le nom déjà introduit. On écrira alors soit $x = \sqrt{y}$ ou soit $x = -\sqrt{y}$.

3. Mettre en évidence les articulations logiques

Quelques petits mots bien utiles dans la rédaction :

- *donc, alors, il vient, d'où, par conséquent, ainsi,*
- *or, on sait que, de plus, en outre, ensuite, enfin,*
- *mais, cependant, toutefois, puisque, comme, car,*
- ...

Ces petits mots vous permettent de mettre du liant dans votre raisonnement et rend la lecture plus claire. Attention toutefois à la signification logique de ces petits mots, ils ont en effet une implication dans votre raisonnement.

Montrer que : $\forall x \in [0\,;\,1],\quad \sqrt{1-x^2} \in [0\,;\,1]$.

Soit $x \in [0\,;\,1]$

- Par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, on a : $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$;
  en conséquence $0 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1$:
- Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$: $0 \leqslant \sqrt{1-x^2} \leqslant 1$.

Conclusion : $\forall x \in [0\,;\,1],\quad \sqrt{1-x^2} \in [0\,;\,1]$.

Éviter les termes « *forcément* » et « *obligatoirement* » et les remplacer par « *nécessairement* » plus mathématique. Cela évite ainsi un passage en « *force* ».

4. Annoncer ce que l'on fait

Rédiger correctement une question, c'est aussi expliquer ce que l'on fait.

Annoncer la méthode de résolution au début de la question :

« *Montrons que...* », « *Démontrons par récurrence ...* », « *Montrons par l'absurde que ...* », « *Il ne reste plus qu'à montrer que...* », etc.

Votre travail n'en sera que plus compréhensible.

5. Citer une définition ou un théorème

Citer une définition ou un théorème doit se faire avec précision . Il faut donner, clairement et sans faute, les hypothèses, les notations et la conclusion. Un théorème mal rédigé, imprécis, une hypothèse omise..., tout cela donne une impression de manque de rigueur et peut mener à une conclusion erronée.

1. Définir le nombre dérivé d'une fonction en un point.

   Réponse incorrecte : Le nombre dérivé de f en a est : $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Manque de précision. Qui sont f et a ?
Pourquoi la limite du taux d'accroissement existe-t-elle ?
Réponse correcte : Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$.
f est dérivable en a si, et seulement si, la limite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie. On appelle alors, nombre dérivé de f en a cette limite, que l'on note :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x - 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
   Réponse incorrecte : $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ donc la fonction f change de signe, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   Quelles sont les hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires ? Pourquoi cette solution est-elle unique ?
   Réponse correcte : La fonction cube et la fonction affine $x \mapsto x-1$ sont deux fonctions définies et croissantes sur $\mathbb{R}$.
   La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car f est un polynôme.
   $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ donc la fonction f change de signe sur $\mathbb{R}$.
   La fonction f est continue, monotone, et change de signe sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0\,;\,1]$ sur $\mathbb{R}$.

6. Pas de mélange des genres

Écrire en français ou en mathématique mais pas les deux à la fois.
Ne pas remplacer, dans une phrase en français, les expressions :
« *il existe* » par le symbole $\exists$ et « *pour tout* » par le symbole $\forall$.
Écrire « *la somme de deux entiers est un entier* » ou $\forall m, n \in \mathbb{Z}, m+n \in \mathbb{Z}$
mais pas « $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, *la somme de m et n est un entier* »
Le mélange autorisé le plus courant concerne le symbole $\in$, comme dans « Soit $x \in E$ » qui peut remplacer « *Soit x un élément de E* ».
Les connecteurs « *et* », « *ou* » sont tolérés dans le langage mathématique :
$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -2.$

7. Faire la différence entre *f* et *f(x)*

Rédaction incorrecte : « La fonction $\dfrac{x}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ».
Rédaction correcte : « La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ».
En effet $\dfrac{x}{x^2+1}$ n'est pas une fonction mais une expression algébrique.
Une fonction est une relation qui à une quantité x associe la quantité $f(x)$.
On la note alors : $x \mapsto f(x)$.
Parfois la fonction a un nom comme f, g, fonctions carrée, cube et racine carrée, exp, ln, cos, sin. On pourra alors écrire « La fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$ ».

8. Dériver une fonction

Les notations de la forme $\big(f(x)\big)'$ ou $\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)'$ sont incorrectes.

Il faut noter $f'(x)$ ou u' avec $x \overset{u}{\mapsto} \dfrac{1}{1+x^2}$.

TOUT CE QU'IL FAUT SAVOIR POUR RÉUSSIR

Raisonnement et logique

▶ Le but de cette partie est de rappeler les différentes façons de démontrer une proposition et d'approfondir les premiers aspects de la logique mathématique vus jusqu'en terminale uniquement en probabilité.

La capacité d'élargir les possibilités de résolution d'un problème est un élément important pour apprendre à chercher et ne pas rester bloqué sur une unique façon de concevoir une démonstration. Les exercices étant moins guidés en classes préparatoires, il est important d'explorer le champ des possibles et d'avoir un jugement plus sûr du résultat apporté.

Objectifs et compétences

- Différentiation entre une implication et une équivalence.
- Compréhension des différents types démonstrations et leur utilisation.
- Utilisation des quantificateurs et leurs relations entre eux.
- Connaissance des principaux connecteurs logiques.
- Définitions d'un ensemble et règles opératoires sur les ensembles.

Vrai ou faux ?

	Vrai	Faux
a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x > 2 \ \Rightarrow\ x \geqslant 3$	☐	☐
b) $\forall x, y \in \mathbb{R}^*,\ \ x < y \ \Rightarrow\ \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$	☐	☐
c) $\exists x \in \mathbb{R}_+,\ \ x < \sqrt{x}$	☐	☐
d) $\forall x, x' \in \mathbb{R} - \{1\},\ \ x \neq x' \ \Rightarrow\ \dfrac{x+1}{x-1} \neq \dfrac{x'+1}{x'-1}$	☐	☐
e) $\forall M \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \ 1+2+\cdots+n \geqslant M$	☐	☐

Chapitre 1

Comment je raisonne ?

1. Raisonnement

1.1. Montrer une implication ou une équivalence

À retenir.

Pour montrer que $p \Rightarrow q$, on procède par l'un des deux procédés suivants :

- on suppose que p est vraie et l'on montre qu'alors q est vraie.
- on suppose que non q est vraie et l'on montre qu'alors non p est vraie (contraposée)

- En probabilité, soient A et B deux événements montrer que :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \Rightarrow \overline{A} \text{ et } B \text{ indépendants.}$$

Soient A et B deux événements indépendants alors : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

D'après les probabilités totales :
$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A)P(B) + P(\overline{A} \cap B)$ (1)

D'après la probabilité de l'événement contraire : $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ (2)

(2) dans (1) : $P(B) = [1 - P(\overline{A})]P(B) + P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(\overline{A})P(B) + P(\overline{A} \cap B)$

On a alors : $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A})P(B)$. Les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

- En arithmétique : montrer que 109 est un nombre premier.

Test de primalité : si un entier n, avec $n \geqslant 2$, n'est pas premier alors il admet un diviseur premier p tel que $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$.

On vérifie que 109 n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7. De plus $10 < \sqrt{109} < 11$.

109 n'admet pas de diviseur premier p tel que $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{109}$, d'après la contraposée du test de primalité, 109 est premier.

À retenir.

Pour montrer que l'implication $p \Rightarrow q$ est fausse, il suffit de trouver un contre exemple où la proposition p est vraie et la proposition q fausse.

Montrer que l'implication : « (u_n) croissante $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ » est fausse.

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.

- La fonction inverse étant décroissante sur $]0\,;+\infty[$, la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est croissante sur $]0\,;+\infty[$. Il en résulte que la suite (u_n) est croissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$, par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. La suite (u_n) est donc convergente vers 1.

Conclusion : on a trouvé une suite croissante convergente, donc l'implication est fausse.

À retenir.

Pour montrer que : $p \Leftrightarrow q$, on peut procéder de deux façons :

- Soit on raisonne par équivalence, comme c'est le cas dans la résolution d'équations.
- Soit on raisonne par double implication lorsque le raisonnement par équivalence s'avère périlleux :
  $\Rightarrow$ On suppose que p est vraie et l'on montre alors que q est vraie.
  $\Leftarrow$ Réciproquement, on suppose que q est vraie et l'on montre alors que p est vraie.

Montrer le théorème de Bézout à l'aide de l'identité de Bézout :

$$\mathrm{pgcd}(a,b) = 1 \Leftrightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z},\ au + bv = 1$$

Raisonner par équivalence s'avère ici impossible car l'identité de Bézout est une implication. On raisonne alors par double implication.

Rappelons l'identité de Bézout : $\mathrm{pgcd}(a,b) = d \Rightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z},\ au + bv = d$

- Supposons que $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$, d'après l'identité de Bézout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$, tels que $au + bv = 1$.
- Réciproquement, a et b étant deux entiers, supposons qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$, tels que $au + bv = 1$. Soit d le $\mathrm{pgcd}(a,b)$, d divise a et b donc d divise toute combinaison linéaire de a et de b soit $au + bv$. En conséquence d divise 1, et donc $d = 1$.

1.2. Raisonnement par l'absurde

À retenir.

Quand on veut montrer qu'une propriété p est vraie, on peut raisonner par l'absurde, c'est-à-dire supposer p fausse et arriver à une contradiction.

Montrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Il existe donc deux entiers p et q premiers entre eux tels que : $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.

On élève au carré, on obtient alors : $\dfrac{p^2}{q^2}=2 \iff p^2=2q^2$

- On en déduit que p^2 est pair. Comme un nombre et son carré ont même parité, p est pair. On peut donc écrire : $p=2p'$.
- On a alors $p^2=2q^2 \iff 4p'^2=2q^2 \iff q^2=2p'^2$. On en déduit que q^2 est pair et par suite q est pair.
- p et q sont pairs. Il ne sont donc pas premiers entre eux. Contradiction

Conclusion : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

1.3. Démonstration par récurrence

La rédaction par récurrence doit être précise faute de quoi sa validité peut être contestée.

Soit $\mathscr{P}_n$ une proposition qui dépend d'un entier naturel n.

À retenir.

Si $\mathscr{P}_0$ est vraie et si : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n \Rightarrow \mathscr{P}_{n+1}$, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$ est vraie.

Remarque

Parfois la proposition n'est vrai qu'à partir d'un certain rang.

Démontrer $\mathscr{P}_n$: $\forall n \geqslant 4,\ 2^n \geqslant n^2$.

Initialisation : Pour $n=4$. $2^4=16 \geqslant 4^2=16$. La proposition $\mathscr{P}_4$ est vraie.
La proposition $\mathscr{P}_n$ est initialisée pour $n=4$.

Hérédité : Soit $n \geqslant 4$. Supposons que : $2^n \geqslant n^2$ (HR) montrons que $2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$.

On a la suite des inégalités suivantes :

- HR : $2^n \geqslant n^2 \overset{\times 2}{\Rightarrow} 2\times 2^n \geqslant 2n^2$ (1)
  or, $n \geqslant 4 \Rightarrow n \geqslant 3 \overset{\times n}{\Rightarrow} n^2 \geqslant 3n \overset{n\geqslant 1}{\Rightarrow} n^2 \geqslant 2n+1 \overset{+n^2}{\Rightarrow} 2n^2 \geqslant (n+1)^2$
- en remplaçant dans (1), on a : $2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$.

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, $\forall n \geqslant 4,\ 2^n \geqslant n^2$.

À retenir.

Parfois on ne peut déduire $\mathscr{P}_{n+1}$ de $\mathscr{P}_n$, mais seulement $\mathscr{P}_{n+2}$ de $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$. Une telle récurrence est appelée une récurrence **double**.
Le principe du raisonnement par récurrence double est de la forme suivante :

Si $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vraies et si : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1} \Rightarrow \mathscr{P}_{n+2}$ alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$ est vraie.

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = 2^n$.

Initialisation : $u_0 = 1 = 2^0$ et $u_1 = 2 = 2^1$. Les propositions $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vraies.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $u_n = 2^n$ et $u_{n+1} = 2^{n+1}$, montrons que $u_{n+2} = 2^{n+2}$

- $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ d'après HR, $u_{n+1} = 2^{n+1}$ et $u_n = 2^n$, donc
- $u_{n+2} = 5 \times 2^{n+1} - 6 \times 2^n = 2^n(5 \times 2 - 6) = 2^n \times 4 = 2^{n+2}$

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = 2^n$.

OBJECTIF PRÉPA – J'APPROFONDIS

Parfois, on ne peut déduire $\mathscr{P}_{n+1}$ que de toutes les propositions $\mathscr{P}_0, \mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \ldots, \mathscr{P}_n$.
Une telle récurrence est appelée récurrence **forte**.
Le principe du raisonnement par récurrence forte est de la forme suivante :

Si $\mathscr{P}_0$ est vraie et si : $\forall n \in \mathbb{N}, \ (\forall k \in [\![0, n]\!], \mathscr{P}_k) \Rightarrow \mathscr{P}_{n+1}$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathscr{P}_n$ est vraie.

On montre ainsi que tout entier $n \geqslant 2$ est le produit de nombres premiers.

1.4. Raisonnement par analyse synthèse

Parfois, pour déterminer les éléments d'un ensemble qui vérifie une propriété ou pour trouver une accroche afin de commencer une démonstration, on peut raisonner par analyse-synthèse.

À retenir.

Le raisonnement par analyse-synthèse se fait en deux parties :

- L'analyse : on suppose qu'il existe un élément x d'un ensemble E qui vérifie la propriété $\mathscr{P}$. Par implication, on détermine un critère que doit vérifier x. On réduit « le champs des possibles » pour x.
- La synthèse : on vérifie alors les valeurs de x, parmi celles déterminées pendant l'analyse, qui vérifient la propriété $\mathscr{P}$.

Montrer que la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{3\,u_n}$ est majorée.

La difficulté est qu'on ne donne pas de majorant. L'analyse va permettre d'en trouver un.

Analyse : Supposons que la suite (u_n) est majorée. Appelons $M_{\min}$ le plus petit majorant.
On a alors la suite des inégalités pour tout entier naturel n :

$$u_n \leqslant M_{\min} \overset{\times 3}{\Rightarrow} 3u_n \leqslant 3M_{\min} \overset{\sqrt{\ }}{\Rightarrow} \sqrt{3u_n} \leqslant \sqrt{3M_{\min}} \Rightarrow u_{n+1} \leqslant \sqrt{3M_{\min}}$$

Donc $\sqrt{3M_{\min}}$ est un majorant, comme $M_{\min}$ est le plus petit :

$$M_{\min} \leqslant \sqrt{3M_{\min}} \overset{\uparrow 2}{\Rightarrow} M_{\min}^2 \leqslant 3M_{\min} \overset{\div M_{\min}}{\Rightarrow} M_{\min} \leqslant 3$$

Synthèse : On montre ensuite par récurrence que 3 est un majorant de la suite (u_n).

2. Les quantificateurs

2.1. Les deux quantificateurs

À retenir.

Soit $\mathscr{P}(x)$ une proposition dont la valeur de vérité dépend d'un argument x (prédicat).

- **Quantificateur universel** : $\forall$ « pour tout » ou « quelque soit »

  La proposition : $\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ signifie que
  « pour tout élément x de E, la proposition $\mathscr{P}(x)$ est vraie ».
- **Quantificateur existentiel** : $\exists$ « il existe au moins »

  La proposition : $\exists x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ signifie que
  « il existe au moins un élément x de E pour lequel la proposition $\mathscr{P}(x)$ est vraie ».
- **Quantificateur existentiel et unicité** : $\exists\,!$ « il existe un unique »

  La proposition : $\exists! x \in E,\ \mathscr{P}(x)$ signifie que
  « il existe un unique élément x de E pour lequel la proposition $\mathscr{P}(x)$ est vraie ».

Remarque

La virgule qui suit le quantificateur existentiel $\exists$ peut être traduite par « tel que » ou « pour lequel ». Certains auteurs, au lieu de mettre une virgule, mettent un « slash » \, ainsi ils écrivent $\exists x \in E \backslash\ \mathscr{P}(x)$.

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$ « Pour tous réel x, x^2 est positif ou nul »
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 1$ « Il existe au moins un réel x tel que $x^2 = 1$ »
- $\exists! x \in [0;1],\ x^2 + 4x + 1 = 0$

  « Il existe un unique réel x appartenant à l'intervalle $[0;1]$ tel que $x^2 + 4x + 1 = 0$ »

2.2. Négation d'un quantificateur

À retenir.

La négation d'une proposition universelle est une proposition existentielle et réciproquement. Ainsi :

- $\overline{\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)} \Leftrightarrow \exists x \in E,\ \overline{\mathscr{P}(x)}$
- $\overline{\exists x \in E,\ \mathscr{P}(x)} \Leftrightarrow \forall x \in E,\ \overline{\mathscr{P}(x)}$

- La proposition : « Tous les lecteurs de ce chapitre comprennent tout ce qui est écrit » a pour négation « Il existe au moins un lecteur qui ne comprend pas ce chapitre ».
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la négation de : $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x)=0$ est $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$.

Pour démontrer qu'une proposition universelle n'est pas vraie, il suffit donc de trouver un seul x qui ne vérifie pas la proposition $\mathscr{P}(x)$. C'est ce qu'on nomme un « **contre-exemple** ».

2.3. Ordre des quantificateurs

À retenir.

Soit une proposition possédant deux quantificateurs.

- On peut permuter les quantificateurs s'ils sont de même nature, ainsi :

$$\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \mathscr{P}(x,y) \Leftrightarrow \forall y \in E,\ \forall x \in E,\ \mathscr{P}(x,y)$$
$$\exists x \in E,\ \exists y \in E,\ \mathscr{P}(x,y) \Leftrightarrow \exists y \in E,\ \exists x \in E,\ \mathscr{P}(x,y)$$

- On ne peut permuter les quantificateurs s'ils sont de natures différentes, ainsi :

$$\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ \mathscr{P}(x,y) \not\Leftrightarrow \exists y \in E,\ \forall x \in E,\ \mathscr{P}(x,y)$$
$$\exists x \in E,\ \forall y \in E,\ \mathscr{P}(x,y) \not\Leftrightarrow \forall y \in E,\ \exists x \in E,\ \mathscr{P}(x,y)$$

Deux propositions équivalentes qui définissent la décroissance d'une fonction f sur $\mathbb{R}$.

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
- $\forall y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Deux propositions différentes :

- $\forall\, M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > M$ signifie :
  « Pour tout réel M, il existe un réel x tel que $f(x)$ soit supérieur M ».
  Si la proposition est vraie, la fonction f n'est pas majorée.
- $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall M \in \mathbb{R},\ f(x) > M$ signifie :
  « Il existe un réel x tel que $f(x)$ soit supérieur à tous réels M ».
  Cette proposition est, de toute évidence, toujours fausse.

3. Logique et opérations sur les ensembles

3.1. Logique mathématique

▶ Le raisonnement mathématique obéit à une logique. À la limite de la philosophie, la logique est une branche des mathématiques qui permet d'établir la valeur de vérité de propositions et de construire des raisonnements mathématiques. Depuis les recherches sur la logique du XIX^e siècle sont apparus des nouveaux symboles, qu'un mathématicien utilise maintenant couramment, comme :

$$\Rightarrow\ ,\ \Leftrightarrow\ ,\ \forall\ ,\ \exists$$

Attention !

Ces symboles sont souvent utilisés comme abréviation, sans connaissance de leur véritable signification. Il faut éviter d'employer ces symboles comme de simples signes permettant d'écrire plus vite. On retiendra que si l'on rédige en français, l'usage des ces symboles est une faute.

3.2. Vocabulaire usuel

À retenir.

Expression Ensemble de signes (lettres, chiffres, symboles, mots, etc.) possédant une signification dans un contexte donné.

Prédicat Relation entre plusieurs variables, par exemple l'inégalité « $\geqslant$ » est un prédicat reliant deux variables.

Proposition ou insertion ou affirmation Propose l'expression d'un fait qui peut être vrai ou faux. Une proposition logique est synonyme d'énoncé.

Principe de non contradiction Une proposition ne peut être à la fois vraie et fausse.

Principe du tiers exclus (dualité) Une proposition est soit vraie, soit fausse.

Axiome Proposition supposée vraie et que l'on ne cherche pas à démontrer.

Théorème Proposition dont il faut établir la véracité. Un théorème est donc vrai s'il se déduit logiquement d'axiomes.

Corollaire Bonus qu'offre un théorème. C'est une conséquence directe d'un théorème.

Lemme Théorème préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus grande importance.

Conjecture Proposition que l'on suppose vraie sans parvenir à la démontrer. C'est une hypothèse plausible au vu de quelques exemples.

3.3. Exemples

▸ **Propositions :**

- p_1 : l'équation $3x^2+4x+5=0$ admet deux solutions réelles.
  p_1 est vraie car $\Delta=16+60=76>0$.
- p_2 : le carré d'un nombre réel est strictement positif.
  p_2 est fausse car un carré peut être nul : $0^2=0$.

▸ **Axiomes :**

- Euclide a énoncé 5 axiomes (à l'époque appelés postulats) qui sont à la base de la géométrie élémentaire (géométrie euclidienne). Le cinquième postulat est particulièrement célèbre :

  « Par un point extérieur à une droite, on ne peut tracer qu'une parallèle. »

Les mathématiciens se sont demandés s'il ne pouvait pas être démontré à partir des 4 autres. Après de nombreux essais, les mathématiciens ont dû admettre qu'il était essentiel à la géométrie puis Riemann et Lobatchevski franchirent le pas énorme de développer une autre géométrie en changeant ce cinquième postulat (géométrie non euclidienne).

- Un autre exemple sont les 5 axiomes de Peano. Ceux-ci définissent l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. Le cinquième axiome affirme :

  « Si $\mathbb{P}$ est une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0 et telle que le successeur de chaque élément de $\mathbb{P}$ est dans $\mathbb{P}$ $(n \in \mathbb{P} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{P})$, alors $\mathbb{P} = \mathbb{N}$ ».

  Cet axiome est appelé « l'axiome d'induction » ou encore « l'axiome de récurrence » qui permet la démonstration par récurrence.

▸ **Théorèmes :**

On réserve le mot « théorème » aux propositions particulièrement importantes. Pour les autres propositions démontrées, on les appelle propriété, conséquence ou simplement proposition qui, en dehors de la logique mathématique, peut être un synonyme de théorème.

- Tout le monde connaît les théorèmes de Thalès (que Thalès semble ne jamais avoir énoncé) et Pythagore (qui semble n'avoir jamais rien écrit) qui sont la base de la géométrie dans le secondaire.
- En terminale, on peut citer le théorème des valeurs intermédiaires en analyse ou les théorèmes de Gauss et de Bézout en arithmétique.
- Enfin on peut citer le célébrissime grand théorème de Fermat :

  « Il n'existe pas de nombres entiers non nuls x, y et z, dès que la puissance n est strictement supérieure à 2, à l'équation : $x^n + y^n = z^n$ »,

  qui est resté à l'état de conjecture pendant 350 ans avant d'être enfin entièrement démontré par Andrew Wiles en 1994.

▸ **Corollaires :**

- Le corollaire du théorème Bézout qui permet de connaître l'existence de solutions dans une équation diophantienne linéaire du premier degré.
- Le corollaire du théorème de Gauss qui permet d'affirmer que si deux entiers premiers entre eux divisent un troisième, leur produit divise ce dernier.

▸ **Lemme :**

Le lemme d'Abel, qui sera vu en 2e année de prépa, sur la convergence d'une série entière.

▸ **Conjectures :**

Les conjectures sont le moteur du progrès des mathématiques. Tel ou tel mathématicien a eu l'impression que tel ou tel résultat important était vrai et l'a énoncé sans pouvoir le démontrer, laissant à l'ensemble de la communauté mathématique le soin de le confirmer par une démonstration convaincante ou de l'infirmer.

- Une conjecture célèbre liée au grand théorème de Fermat, la conjecture STW de Taniyama-Shimura-Weil. Cette conjecture établit un lien entre un objet géométrique et l'arithmétique. C'est cette conjecture que Andrew Wiles démontra.
- En arithmétique, la conjecture de Gauss (qu'il n'a pas écrit par prudence) est la suivante :

Le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x, $\pi(x)$, et le logarithme intégral de x, $\mathrm{Li}(x)$, sont tels que pour tout $x \geqslant 2$, $\pi(x) < \mathrm{Li}(x)$.

On a longtemps pensé que ce résultat était vrai, grâce à un grand nombre de calculs numériques, mais un mathématicien du nom de Skewes a démontré un jour que ce résultat était faux pour au moins un réel x (nombre de Skewes). Plus tard, on a montré que ce résultat était faux pour une infinité de valeurs de x.

3.4. Table de vérité

OBJECTIF PRÉPA – J'APPROFONDIS

Une table de vérité est un tableau définissant la valeur d'une fonction logique pour chacune des combinaisons possibles des entrées.
Par convention et pour faciliter la lecture de grandes tables, on écrit 0 pour la valeur faux et 1 pour la valeur vrai.
La logique des propositions est dite « vérifonctionnelle » car elle obéit à une table de vérité.

On définit les symboles des connecteurs logiques : « NON », « ET », « OU »

- NON p : $\overline{p}$
- p ET q : $p \wedge q$
- p OU q : $p \vee q$

et leurs tables de vérité correspondantes :

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

Attention !

Dans la langue usuelle, implicitement, on oppose souvent les termes qui relient la disjonction OU (**ou exclusif**), ainsi dans la phrase « je vais au cinéma ou au théâtre », on comprend que la personne va soit au cinéma, soit au théâtre mais pas aux deux.

En mathématique le OU est **non exclusif**, si x est un réel qui vérifie $x < 5$ ou $x > 3$ peut vérifier $3 < x < 5$.

VUIBERT PRÉPAS

Réussir son entrée en Prépa – MATHS

MPSI • PCSI • PTSI • BCPST

VUIBERT PRÉPAS, des ouvrages pour faire la différence.

Le Bac en poche, vous vous apprêtez à entrer en classe préparatoire ?

Cet ouvrage **passerelle** pour bien débuter sa première année de prépa est la **clé d'une rentrée et d'une première année de classe préparatoire réussies.** Il propose :

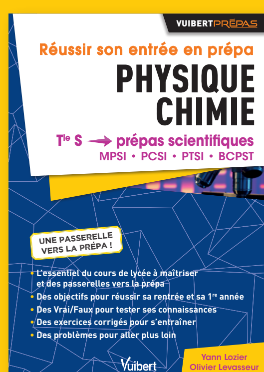
- Des conseils et des méthodes de travail pour bien intégrer « l'esprit prépa » ;
- De revoir ses acquis et réviser les notions essentielles du programme de lycée ;
- Des encarts « Objectifs Prépa » pour s'immerger dans le programme de première année ;
- Des Vrai/Faux pour tester ses connaissances ;
- Plus de 150 exercices et problèmes corrigés de difficulté progressive pour s'entraîner efficacement.

L'ouvrage indispensable pour assurer sa rentrée !

SOMMAIRE

L'auteur

Paul Milan, diplômé de l'école Centrale, a une longue expérience de l'enseignement des mathématiques notamment au CRPF (centre régional de formation professionnelle). Il enseigne, entre autres, à la CCIP (Chambre de commerce et d'industrie de Paris) et au LMA (Lycée d'Adultes de la ville de Paris).



Également disponible

ISBN : 978-2-311-40575-0

9 782311 405750

www.Vuibert.fr