1506
UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI URBINO
CARLO BO

Relazione relativa al progetto d'esame di Programmazione Logica e Funzionale

sessione estiva — a.a. 2023/2024

Corso di Laurea in Informatica Applicata
Università di Urbino

Studenti:

Barzotti Nicolas
matricola: 313687
Ramagnano Gabriele
matricola: 315439

docente:

Marco Bernardo

Indice

1 Specifica del Problema

Scrivere un programma Haskell e un programma Prolog che, per ogni simulazione numerica da effettuare, acquisiscono da tastiera un insieme finito di parametri numerici e poi stampano su schermo il risultato del calcolo numerico. Le simulazioni numeriche sono quattro: integrazione di equazioni differenziali di moto fugoide senza attrito, di moto fugoide con attrito, di convezione lineare a una dimensione ed di Burgers a una dimensione.

2 Analisi del Problema

2.1 Dati di Ingresso del Problema

I dati in ingresso al problema sono stati suddivisi in base all'equazione da integrare numericamente, ne segue quindi la loro descrizione.

Fugoide Senza Attrito

Il dato in ingresso è un numero reale maggiore di zero. Questo rappresenta il passo temporale per l'integrazione dell'equazione del moto fugoide senza attrito.

Fugoide Con Attrito

Il dato in ingresso è un numero reale maggiore di zero. Questo rappresenta il passo temporale per l'integrazione dell'equazione del moto fugoide con attrito.

Convezione

I dati in ingresso per l'integrazione dell'equazione di convezione sono:

1. un numero intero naturale, rappresenta il numero di punti della funzione d'onda;
2. un numero reale maggiore di zero, rappresenta la lunghezza del passo temporale.

Burgers

Il dato in ingresso per l'integrazione dell'equazione di Burgers è un numero intero naturale. Questo rappresenta il numero di punti della funzione d'onda.

2.2 Dati di Uscita del Problema

Fugoide Senza Attrito

Il dato in uscita dell'integrazione dell'equazione del moto fugoide senza attrito è una sequenza di numeri reali che rappresentano la funzione di traiettoria dell'areomobile.

Fugoide Con Attrito

Il dato in uscita dell'integrazione dell'equazione del moto fugoide con attrito è una sequenza di numeri reali che rappresentano la funzione di traiettoria dell'areomobile.

Convezione

Il dato in uscita dell'integrazione dell'equazione di convezione lineare a una dimensione è una sequenza di numeri reali che rappresentano i valori finali della funzione d'onda quadra.

Burgers

Il dato in uscita all'integrazione dell'equazione di Burgers a una dimensione è una sequenza di numeri reali che rappresentano i valori finali della la funzione a dente di sega.

2.3 Relazioni Intercorrenti tra i Dati del Problema

Fugoide Senza Attrito

L'equazione per il moto di fugoide senza attrito è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine:

$$z(t)'' = g - \frac{g\, z(t)}{z_t} = g\left(1 - \frac{z(t)}{z_t}\right). \tag{1}$$

Possiamo trasformare questa equazione del secondo ordine in un sistema di equazioni del primo ordine:

$$z'(t) = b(t) \tag{2}$$

$$b'(t) = g\left(1 - \frac{z(t)}{z_t}\right). \tag{3}$$

Un altro modo di considerare un sistema di due equazioni ordinarie del primo ordine è scrivere il sistema differenziale come un'unica equazione vettoriale:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} z \\ b \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\vec{u}'(t) = \begin{pmatrix} b \\ g - g\frac{z(t)}{z_t} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

La soluzione approssimativa al tempo t_n è u_n e la soluzione numerica dell'equazione differenziale consiste nel calcolare una sequenza di soluzioni con la seguente equazione:

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t\, f(u_n) + O(\Delta t)^2. \tag{6}$$

Questa formula è chiamata metodo di Eulero. Per le equazioni di moto fugoide, il metodo di Eulero fornisce il seguente algoritmo:

$$z_{n+1} = z_n + \Delta t\, b_n \tag{7}$$

$$b_{n+1} = b_n + \Delta t\left(g - \frac{g}{z_t} z_n\right) \tag{8}$$

dove:

- Δt è la lunghezza del passo temporale;
- g è la forza gravitazionale terrestre;
- z_n è l'altitudine del velivolo al passo n;
- z_t è l'altitudine centrale del velivolo;
- b_n è la velocità del velivolo al passo n.

Il numero di passi di simulazione n viene calcolato $n = \frac{T}{\Delta t}$, dove T è il tempo totale di simulazione.
La condizione iniziale è il valore della derivata al tempo $t = 0$ ed è l'altitudine iniziale del velivolo z_0.

Fugoide Con Attrito

L'equazione per il moto fugoide con attrito è un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine:

$$m\frac{dv}{dt} = -W\sin\theta - D \tag{9}$$

$$mv\,\frac{d\theta}{dt} = -W\cos\theta + L. \tag{10}$$

Per visualizzare le traiettorie di volo previste da questo modello, che dipendono sia dalla velocità di avanzamento v sia dall'angolo della traiettoria θ, occorre calcolare la posizione dell'aliante ad ogni istante di tempo t. La posizione dell'aliante su un piano verticale sarà determinata dalle coordinate (x, y):

$$x'(t) = v\cos(\theta) \tag{11}$$

$$y'(t) = v\sin(\theta). \tag{12}$$

L'intero sistema di equazioni discretizzate con il metodo di Eulero è:

$$v^{n+1} = v^n + \Delta t \left(-g \, \sin\theta^n - \frac{C_D}{C_L} \frac{g}{v_t^2} (v^n)^2 \right) \tag{13}$$

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \Delta t \left(-\frac{g}{v^n} \, \cos\theta^n + \frac{g}{v_t^2} \, v^n \right) \tag{14}$$

$$x^{n+1} = x^n + \Delta t \, v^n \cos\theta^n \tag{15}$$

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t \, v^n \sin\theta^n. \tag{16}$$

Scritto in forma vettoriale risulta:

$$u'(t) = f(u)$$

$$u = \begin{pmatrix} v \\ \theta \\ x \\ y \end{pmatrix} \qquad f(u) = \begin{pmatrix} -g \, \sin\theta - \frac{C_D}{C_L} \frac{g}{v_t^2} v^2 \\ -\frac{g}{v} \, \cos\theta + \frac{g}{v_t^2} \, v \\ v \cos\theta \\ v \sin\theta \end{pmatrix} \tag{17}$$

dove:

- Δt è la lunghezza del passo temporale;
- g è la forza gravitazionale terrestre;
- x è lo spostamento orizzontale del velivolo;
- y è l'altitudine del velivolo;
- v è la velocità del velivolo;
- v_t è la velocità di trim;
- θ è l'angolo d'inclinazione del velivolo;
- C_D è il coefficiente di resistenza dell'aria;
- C_L è il coefficiente di portanza.

Il numero di passi di simulazione n viene calcolato $n = \frac{T}{\Delta t}$, dove T è il tempo totale di simulazione.
Le condizioni iniziali sono rappresentate dalle costanti di integrazione definite dal valore della derivata al tempo $t = 0$:

$$v(0) = v_0 \quad \text{and} \quad \theta(0) = \theta_0$$
$$x(0) = x_0 \quad \text{and} \quad y(0) = y_0.$$

Convezione

L'equazione di convezione lineare unidimensionale è un'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{18}$$

Per la soluzione numerica di $u(x,t)$ si sono utilizzati i pedici per denotare la posizione spaziale, come in u_i, e gli apici per denotare l'istante temporale, come in u^n :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ u_{i-1}^{n+1} & u_i^{n+1} & u_{i+1}^{n+1} \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ u_{i-1}^{n} & u_i^{n} & u_{i+1}^{n} \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ u_{i-1}^{n-1} & u_i^{n-1} & u_{i+1}^{n-1}. \end{array}$$

L'equazione per fornire la soluzione numerica del problema è data da:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - c\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n) \tag{19}$$

dove:

- Δt è la lunghezza del passo temporale;
- Δx è la lunghezza del passo spaziale;
- c è la velocità dell'onda.

Le condizioni iniziali per una funzione d'onda quadra sono definite così:

$$u(x,0) = \begin{cases} 2 & \text{dove } 0.5 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{20}$$

dove il dominio della soluzione numerica è definito in $x \in (0,2)$. In questo modo la lunghezza del passo spaziale viene calcolata come $\Delta x = \frac{d}{n-1}$, dove d è la distanza tra il limite inferiore e il limite superiore del dominio della soluzione numerica, n il numero di punti della funzione d'onda discretizzata. Il numero totale di passi temporali i è invece costante. Poniamo inoltre delle condizioni al contorno su x in modo tale da ottenere il primo punto della funzione invariato per tutto il calcolo:

$$u(0,t) = c \tag{21}$$

dove c è una costante e il suo valore è pari al valore del primo punto della funzione.

Burgers

L'equazione di Burgers unidimensionale è un'equazione differenziale alle derivate parziali:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{22}$$

L'equazione per fornire la soluzione numerica del problema è data da:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - u_i^n\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n) + \nu\frac{\Delta t}{\Delta x^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \tag{23}$$

dove:

- ν è il coefficiente di diffusione dell'onda;
- u:

$$-\frac{2\nu\left(-\frac{(-8t+2x)e^{-\frac{(-4t+x)^2}{4\nu(t+1)}}}{4\nu(t+1)} - \frac{(-8t+2x-4\pi)e^{-\frac{(-4t+x-2\pi)^2}{4\nu(t+1)}}}{4\nu(t+1)}\right)}{e^{-\frac{(-4t+x-2\pi)^2}{4\nu(t+1)}} + e^{-\frac{(-4t+x)^2}{4\nu(t+1)}}} + 4 \tag{24}$$

.

Il passo spaziale Δx viene calcolato come precedentemente mostrato per l'equazione di convezione. Il passo temporale Δt viene invece calcolato come $\Delta t = \frac{\sigma \Delta x^2}{n-1}$, dove σ è la costante di Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) e n il numero di punti della funzione d'onda discretizzata. Il numero di passi temporali totali è $\frac{T}{\Delta t}$, dove T è il tempo totale di simulazione.
Le condizioni iniziali sono definite:

$$u(x,0). \tag{25}$$

Le condizioni al contorno sono:

$$u(0) = u(2\pi). \tag{26}$$

3 Progettazione dell'Algoritmo

3.1 Scelte di Progetto

3.1.1 Dati del problema

Gli insiemi finiti di numeri reali si prestano in modo naturale ad essere implementati mediante strutture dati lineari. Queste verranno allocate dinamicamente in quanto non si conosce a priori il numero di punti di ciascuna funzione, in maniera da non imporre limitazioni rispetto alla specifica del problema.

3.1.2 Stampa a schermo

Per guidare al meglio l'utente durante la fase di acquisizione dei dati, si è scelto di stampare a schermo una descrizione dei parametri utilizzati da ciascun modello di simulazione. Questi sono stati divisi in:

- parametri iniziali: sono dei valori costanti che vengono utilizzati per impostare le condizioni iniziali di ciascuna simulazione numerica;
- parametri di simulazione: sono dei valori costanti fissati a priori che limitano l'esperienza di personalizzazione della simulazione numerica dell'utente ai soli dati richiesti in ingresso;
- parametri richiesti all'utente: sono i dati che l'utente può inserire per ciascuna simulazione. Per ciascun dato viene fornita un'indicazione sui valori più appropriati da fornire.

3.2 Passi dell'Algoritmo

I passi dell'algoritmo per risolvere il problema sono i seguenti:

1. Acquisire la lunghezza del passo temporale per l'equazione di moto fugoide senza attrito: **v1.**
2. Calcolare e stampare l'integrazione numerica dell'equazione di moto fugoide senza attrito: **2.1**.
3. Acquisire la lunghezza del passo temporale per l'equazione di moto fugoide con attrito: **v1.**
4. Calcolare e stampare l'integrazione numerica dell'equazione di moto fugoide con attrito: **4.1**.
5. Acquisire il numero di punti totali della funzione d'onda per l'equazione di convezione lineare unidimensionale: **v2.** e **5.1**.
6. Calcolare e stampare l'integrazione numerica dell'equazione di convezione lineare unidimensionale: **6.1**.
7. Acquisire il numero di punti totali della funzione d'onda per l'equazione di Burgers unidimensionale: **v2.**
8. Calcolare e stampare l'integrazione numerica dell'equazione di Burgers unidimensionale: **8.1**.

2.1 Calcolo del moto fugoide senza attrito

- Alla condizione iniziale z_0 si aggiunge il resto del calcolo per l'integrazione numerica dell'equazione:
  - Caso base: se il numero di passi temporali è pari a zero, si effettua un passo di integrazione numerica (vedi metodo di Eulero, in 2.3, 6).
  - Caso generale: se il numero di passi temporali è maggiore di zero, si effettua un passo di integrazione numerica e poi, una volta decrementato di uno il numero di passi temporali, si procede ricorsivamente sul numero di passi rimanenti.

4.1 Calcolo del moto fugoide con attrito

- Alla condizione iniziale y_0 si aggiunge il resto del calcolo per l'integrazione numerica dell'equazione:
  - Caso base: se il numero di passi temporali è pari a zero, si effettua un passo di integrazione numerica (vedi metodo di Eulero, in 2.3, 17).
  - Caso generale: se il numero di passi temporali è maggiore di zero, si effettua un passo di integrazione numerica e poi, una volta decrementato di uno il numero di passi temporali, si procede ricorsivamente sul numero di passi rimanenti.

5.1 Acquisizione dati di convezione

- Se il numero di punti è pari a zero o uno, viene calcolata solamente la condizione iniziale: **6.1**
- Se il numero di punti è maggiore di uno, si acquisisce la lunghezza del passo temporale (**v1.**), si calcola la condizione iniziale (**6.1**) e si procede con l'integrazione numerica: **6.2**

6.1 Calcolo della condizione iniziale per l'equazione di convezione

- Si genera una lista di punti equidistanti fra loro rappresentante il dominio della funzione d'onda quadra: **a.**
- Si calcola su ogni punto del dominio la funzione d'onda quadra (vedi onda u, in 2.3, 20).

6.2 Calcolo dell'integrazione numerica per l'equazione di convezione

- Si calcola numericamente l'integrazione della funzione rispetto al tempo:
  - Caso base: se il numero di passi temporali è uguale a zero, viene restituita la funzione d'onda quadra.
  - Caso generale: se il numero di passi temporali è maggiore di zero, si decrementa di uno il numero di passi temporali, si calcola la condizione al contorno (vedi 2.3, 21) e la si aggiunge in testa al calcolo numerico dell'integrazione della funzione rispetto allo spazio. Quest'ultima viene effettuata come segue:
    * Caso base: se si raggiunge il numero di passi spaziali totale, si effettua un passo di integrazione numerica (vedi metodo di Eulero, in 2.3, 19).
    * Caso generale: se il numero di passi spaziali complessivo non è stato ancora raggiunto, si effettua un passo di integrazione numerica e poi, una volta incrementato di uno il numero di passi spaziali effettuati, si procede ricorsivamente sul numero di passi rimanenti.

8.1 Calcolo dell'equazione di Burgers

- Se il numero di punti è zero o uno, l'integrazione numerica dell'equazione è uguale al calcolo della condizione iniziale: **8.2**.
- Se il numero di punti è maggiore di uno, si calcola la condizione iniziale dell'equazione (**8.2**) e si procede con la sua integrazione numerica: **8.3**.

8.2 Calcolo della condizione iniziale per l'equazione di Burgers

- Si genera una lista di punti equidistanti fra loro rappresentante il dominio della funzione d'onda a dente di sega: **a.**
- Si applica la condizione iniziale (vedi 2.3, 25) alla funzione d'onda a dente di sega (vedi onda u, in 2.3, 24).

8.3 Calcolo dell'integrazione numerica per l'equazione di Burgers

- Si calcola numericamente l'integrazione della funzione rispetto al tempo:
  - Caso base: se il numero di passi temporali è uguale a zero, viene restituita la funzione d'onda a dente di sega.
  - Caso generale: se il numero di passi temporali è maggiore di zero, si decrementa di uno il numero di passi temporali, si calcola la condizione al contorno (vedi 2.3, 26) e la si aggiunge in testa al calcolo numerico dell'integrazione della funzione rispetto allo spazio. Quest'ultima viene effettuata come segue:
    * Caso base: se si raggiunge il numero di passi spaziali totale, si calcola la condizione di bordo (vedi 2.3, 26).

    * Caso generale: se il numero di passi spaziali complessivo non è stato ancora raggiunto, si effettua un passo di integrazione numerica (vedi metodo di Eulero, in 2.3, 23) e poi, una volta incrementato di uno il numero di passi spaziali effettuati, si procede ricorsivamente sul numero di passi rimanenti.

a. Generazione di punti equidistanti

- Se il numero di punti da generare è zero, si restituisce una lista vuota.
- Se il numero di punti da generare è maggiore di zero, si calcola la distanza tra il bordo superiore e quello inferiore del dominio, si decrementa di uno il numero di punti totali e partendo dal bordo inferiore del dominio:
  - Caso base: se si è raggiunto il numero massimo di punti da generare, nella lista verrà aggiunto il bordo inferiore del dominio.
  - Caso generale: se il numero massimo di punti da generare non è stato ancora raggiunto, si aggiunge il punto del bordo inferiore del dominio alla lista, si incrementa di uno il numero di punti calcolati, si calcola il punto successivo della lista sostituendolo al precedente bordo inferiore del dominio e si procede ricorsivamente sul numero di punti da generare rimasti.

v1. Validazione dell'acquisizione della lunghezza del passo temporale

- Caso base: se il valore del passo temporale è maggiore di zero, allora il dato viene acquisito.
- Caso generale: altrimenti si stampa su schermo un messaggio di errore e viene ripetuta l'acquisizione.

v2. Validazione dell'acquisizione del numero di punti di una funzione

- Caso base: se il numero di punti è un intero positivo, il valore viene acquisito.
- Caso generale: altrimenti si stampa su schermo un messaggio di errore e viene ripetuta l'acquisizione.

4 Implementazione dell'algoritmo

4.1 Haskell

4.2 Prolog

5 Testing

5.1 Haskell

5.2 Prolog