Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

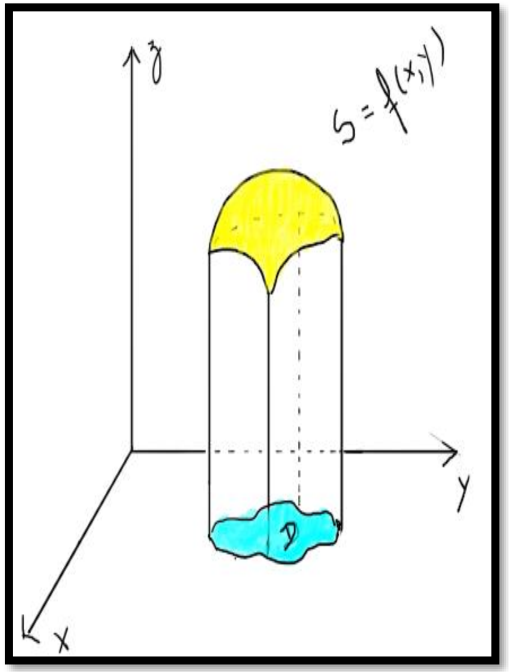
Integrais Triplas

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 do dia 27 de novembro de 2024.

Introdução à Integral Tripla

Vimos que o volume de um sólido cuja lateral é cilíndrica pode ser calculado por meio da integral dupla



$$V = \iint\limits_D f(x,y)\,dA$$

onde $z = f(x,y)$ corresponde ao topo do sólido e D a sua base, dada pela projeção do sobre o plano xy.

Frente a essas restrições, algumas questões surgem naturalmente:

- Como calcular o volume de um **sólido cuja lateral não for cilíndrica**?
- Como calcular o volume de um **sólido cuja base não estiver situada sobre o plano xy**?
- Como calcular o volume de um **sólido delimitado por duas superfícies**, que correspondem ao gráfico de duas funções distintas?

Para contornar tais limitações, precisamos de um novo conceito: o de integral tripla!

Integral Tripla

Definição: Seja S qualquer sólido tridimensional, descrito algebricamente por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ \ a \leq x \leq b,\ \ y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\ \ e\ \ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}.$$

Para um função contínua $f: S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a integral tripla de f sobre S é definida por

$$\iiint_S f(x, y, z) dzdydx = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dzdydx.$$

Observações:

- A resolução de uma integral tripla deve ser efetuada de "dentro para fora".
- No caso da definição acima, a primeira integral a ser resolvida é a em relação a z, e para obter tal primitiva parcial, basta considerar y e x como constantes.
- Depois resolve-se a integral dupla conforme já estudamos.
- Veja que, na definição acima, x é a variável independente (tem variação numérica), y é a variável parcialmente dependente (varia em relação a duas curvas planas, escritas apenas em função de x) e z é a variável que chamaremos de totalmente dependente, pois varia em relação a duas superfícies, escritas em função de x e y.

Integral Tripla

Observações:

- Para encontrar a limitação de z, basta interpretar geometricamente o sólido em $\mathbb{R}^3$, identificando a superfície $z_1(x,y)$ que delimita inferiormente o sólido S e a superfície $z_2(x,y)$ que delimita superiormente o sólido S.
- Da mesma forma como tínhamos duas ordens de integração para uma integral dupla em coordenadas cartesianas (obtidas com a troca da variável independente), para uma integral tripla teremos

  seis ordens de integração

  que podem ser obtidas definindo quem é a variável totalmente dependente (sempre começamos com tal escolha), quem é a variável parcialmente dependente (segunda escolha a ser efetuada) e quem é a variável independente.
- Tais ordens de integração são dadas por:

$$dzdydx; \quad dzdxdy; \qquad dydzdx; \quad dydxdz; \qquad dxdzdy; \quad dxdydz$$

- No caso geral, em que o integrando é uma função $f(x,y,z)$ o que a integral tripla calcula?
- Veremos a interpretação geral a seguir:

Interpretação de um Integral Tripla

Para interpretar o significado de uma integral tripla, vamos considerar o caso particular em que o sólido S é um paralelepípedo dado por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ \ a \leq x \leq b \quad c \leq y \leq d \quad \text{e} \quad h \leq z \leq l\}$$

onde $a, b, c, d, h, l \ \in \mathbb{R}$ e supor que $f: S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função contínua tal que

$$f(x, y, z) \geq 0$$

represente a densidade de massa de S, mensurada em um ponto qualquer $P(x, y, z) \in S$.

Questão: Qual a massa M do sólido S?

Como a densidade de massa é variável ao longo de S, não podemos utilizar diretamente a clássica relação entre massa, volume e densidade, dada por

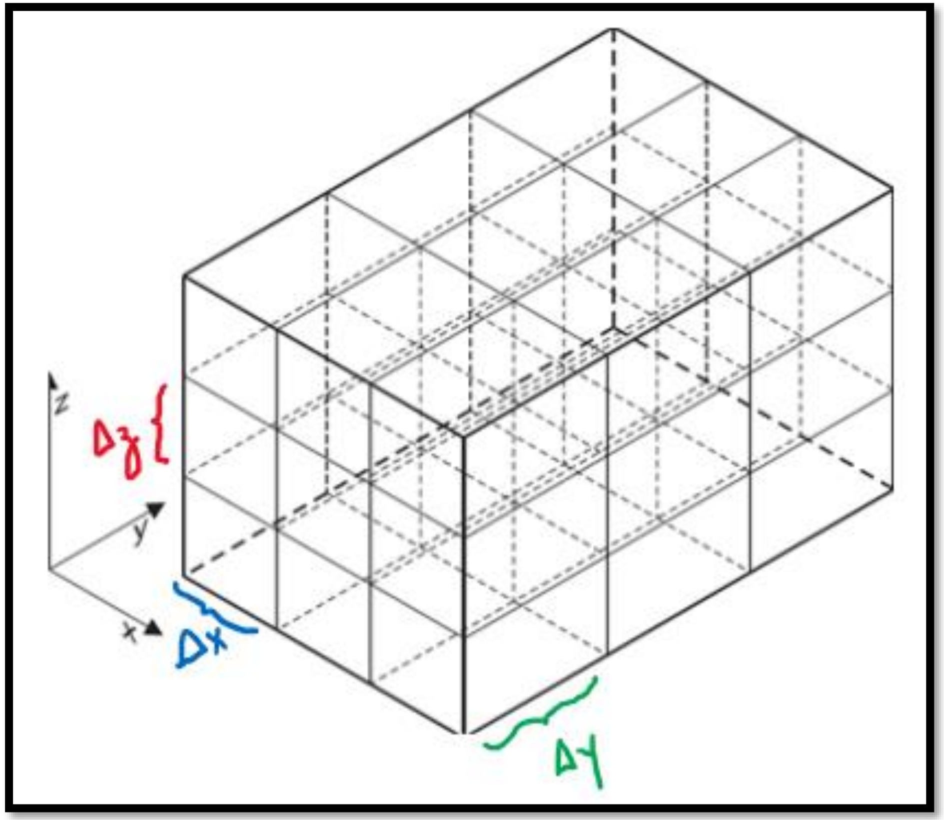
$$f = \frac{M}{V} \qquad \text{ou seja} \qquad M = f.V$$

que é válida se e somente se a densidade f for constante.

Por isso, vamos particionar S em $m.n.t$ “pedaços”, tomando

$$\Delta x = \frac{b-a}{m} \qquad \Delta y = \frac{d-c}{n} \qquad \Delta z = \frac{l-h}{t}$$

Interpretação de um Integral Tripla



Veja que a divisão do sólido S é efetuada por meio de secções paralelas aos planos coordenados e, com isso, cada "pedaço" é um paralelepípedo de dimensões Δx, Δy e Δz e o volume de cada "pedaço" é dado por

$$\Delta V = \Delta z . \Delta y . \Delta x .$$

Interpretação de um Integral Tripla

Tomando os "pedaços" suficientemente pequenos (basta fazer $m \to +\infty, n \to +\infty$ e $t \to +\infty$) podemos supor que a densidade de massa f em cada pedaço é aproximadamente constante (pois como f é contínua, ela praticamente não varia em um pequeno pedaço de S).

Com isso, podemos supor que a densidade de massa em um pequeno pedaço é dada por

$$f \approx f(x_i, y_j, z_k),$$

onde (x_i, y_j, z_k) é um ponto pertencente ao $ijk - ésimo$ pedaço.

Dessa forma, a relação fundamental entre massa, densidade e volume está satisfeita e obtemos que a massa m_{ijk} do $ijk - ésimo$ pedaço pode ser aproximada por

$$m_{ijk} \approx f.\Delta V = f(x_i, y_j, z_k).\Delta z.\Delta y.\Delta x.$$

Como a massa de S é dada pela soma das massas de todos os pedaços, temos que

$$M = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{t} m_{ijk} \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{t} f(x_i, y_j, z_k).\Delta z.\Delta y.\Delta x$$

Interpretação de um Integral Tripla

Por fim, melhoramos a aproximação aumentando a quantidade de pedaços, ou seja, tomando $m \to +\infty, n \to +\infty$ e $t \to +\infty$. Assim, obtemos

$$M = \lim_{\substack{m\to+\infty \\ n\to+\infty \\ t\to+\infty}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{t} f\left(x_i, y_j, z_k\right). \Delta z. \Delta y. \Delta x$$

Portanto, pela definição de integral definida, obtemos que a massa de S é dada por

$$M = \int_a^b \int_c^d \int_h^l f(x, y, z)\, dzdydx = \iiint_S f(x, y, z) dzdydx$$

Assim, a integral tripla de uma função calcula a massa de um sólido, desde que o integrando represente a densidade de massa.

Notação: Como $\Delta V = \Delta z \cdot \Delta y \cdot \Delta x$ dizemos que $dV = dzdydx$ é o elemento infinitesimal de volume em coordenadas cartesianas. Devido a isso, é possível denotar

$$M = \iiint_S f dV.$$

Interpretação de um Integral Tripla

Observação: Se a densidade de massa do sólido S for constante e igual a 1, ou seja, se

$$f(x,y,z) = 1 \quad \forall (x,y,z) \in S,$$

a relação fundamental entre densidade, volume e massa pode ser aplicada diretamente. Nesse caso, obtêm-se que

$$1 = f = \frac{M}{V} \qquad \text{ou seja} \qquad M = 1.V = V.$$

Com isso, o volume V e a massa M do sólido são numericamente iguais.

Assim, conseguimos escrever o volume do sólido S, em termos de integrais triplas, como

$$V = M = \iiint_S 1\, dzdydx = \iiint_S 1 dV\,.$$

Portanto, uma integral tripla cujo integrando é igual a 1 fornece o volume de S.

Ainda que tenhamos utilizado S como um paralelepípedo, os resultados obtidos para a massa e para o volume são válidos para um sólido qualquer.

Exemplo

Exercício 1) Escreva, de seis formas distintas, as integrais triplas em coordenadas cartesianas que permitem calcular a massa do sólido S situado no primeiro octante e delimitado simultaneamente pelas superfícies cilíndricas

$$9y^2 + z^2 = 36, \qquad x = 4 - y^2,$$

sabendo que a densidade de massa do sólido é dada por

$$f(x, y, z) = 8xyz.$$

A seguir, escolha uma das formas obtidas para calcular o valor numérico da massa do sólido.

Exercício 2) Calcule o volume do sólido delimitado simultaneamente pelas superfícies

$$z = 6 - x^2, \quad z = 2x^2, \quad 3y - 2z = 6 \quad \text{e} \quad y = 0.$$

Exemplo

Exemplo 1) Escreva, de seis formas distintas, as integrais triplas em coordenadas cartesianas que permitem calcular a massa do sólido S situado no primeiro octante e delimitado simultaneamente pelas superfícies

$$y^2 + 4z^2 = 16 \text{ e } 2x + 3z = 6,$$

sabendo que a densidade de massa do sólido é dada por $f(x, y, z) = xyz$.
A seguir, escolha uma das formas obtidas para calcular o valor numérico da massa do sólido.

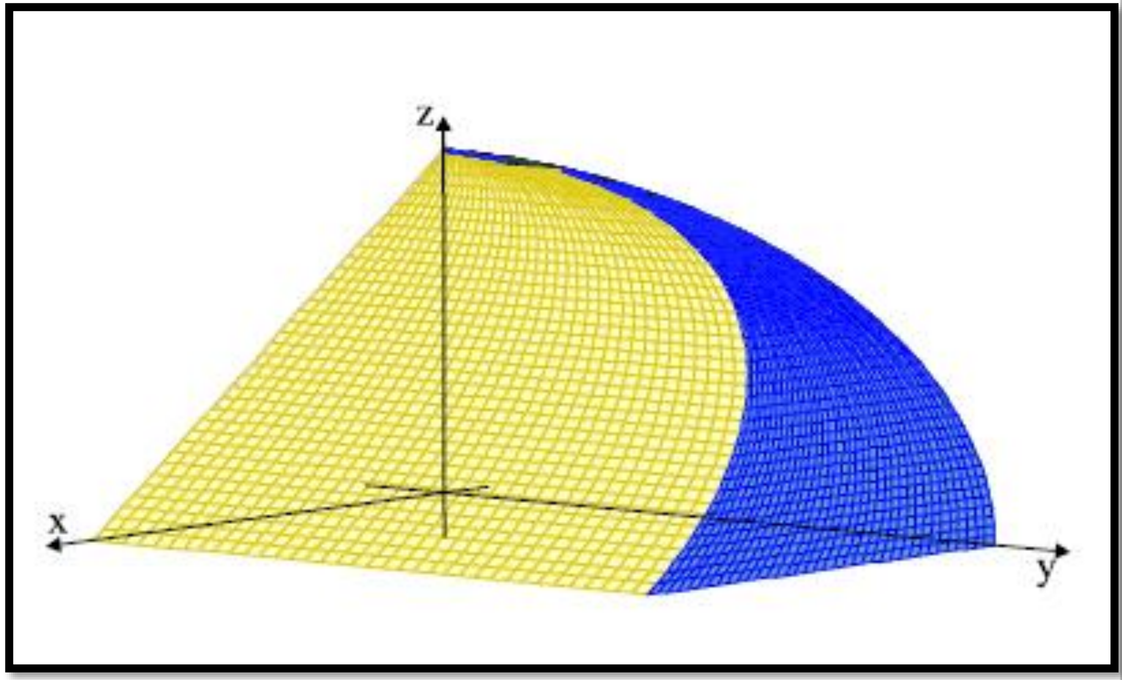
Solução: Iniciamos com a representação geométrica do sólido. Para isso, é útil identificar as superfícies dadas:

$$y^2 + 4z^2 = 16$$

é um cilindro elíptico com geratriz paralela a x.
e

$$2x + 3z = 6$$

é um plano paralelo ao eixo y.

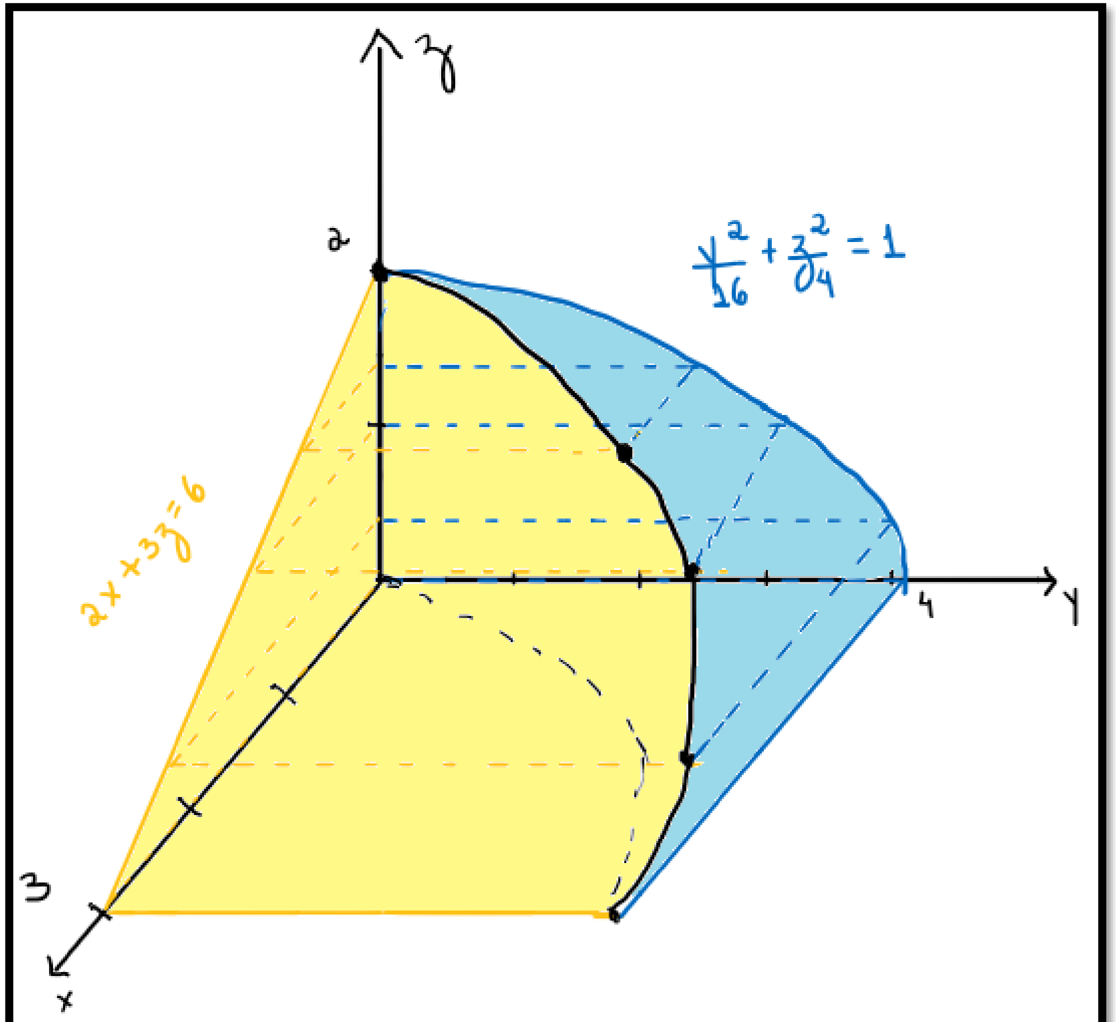


Logo o sólido é dado por

Exemplo

Como ambas as superfícies se propagam paralelamente a um dos eixos coordenados, podemos desenhar à mão livre o sólido utilizando o conceito de "Cilindros Projetantes"

Para isso, basta desenhar (no primeiro octante) as curvas diretrizes dos cilindros e efetuar o procedimento "curva – eixo comum – curva".



Como o eixo comum entre às curvas é o eixo z, projetamos um ponto qualquer da reta diretriz do plano (em amarelo) até encontrarmos o eixo z.

A seguir, partimos desse ponto no eixo z e o projetamos até encontrar a curva diretriz do cilindro elíptico (em azul).

Feito isso, completamos um paralelogramo e destacamos seu vértice. Esse vértice (em preto) é um ponto de intersecção entre as superfícies.

Após repetir o processo até obter um número suficiente de pontos de interseção, basta "ligar os pontos" para gerar a curva de interseção entre as superfícies, que nos permite identificar o sólido formado.

Montando as integrais triplas

Interpretamos o sólido formado para obter os limitantes das integrais triplas:

Tomando z como variável totalmente dependente:

Note que a superfície inferior é o plano xy $(z=0)$ e que temos duas superfícies superiores: o plano para a parte em amarelo e o cilindro elíptico para a parte em azul.

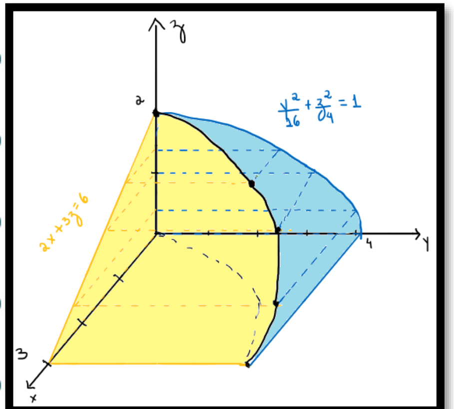
Como há troca na superfície superior (em relação a z), precisaremos usar uma **soma** de integrais triplas:

Para a parte I (em amarelo) isolando z na equação do plano, obtemos $z \in \left[0, \dfrac{6-2x}{3}\right]$.

Para a parte II (em azul) isolando z na equação do cilindro, obtemos $z \in \left[0, \dfrac{\sqrt{16-y^2}}{2}\right]$.

E para obter as limitações de x e y precisamos projetar o sólido sobre o plano xy.

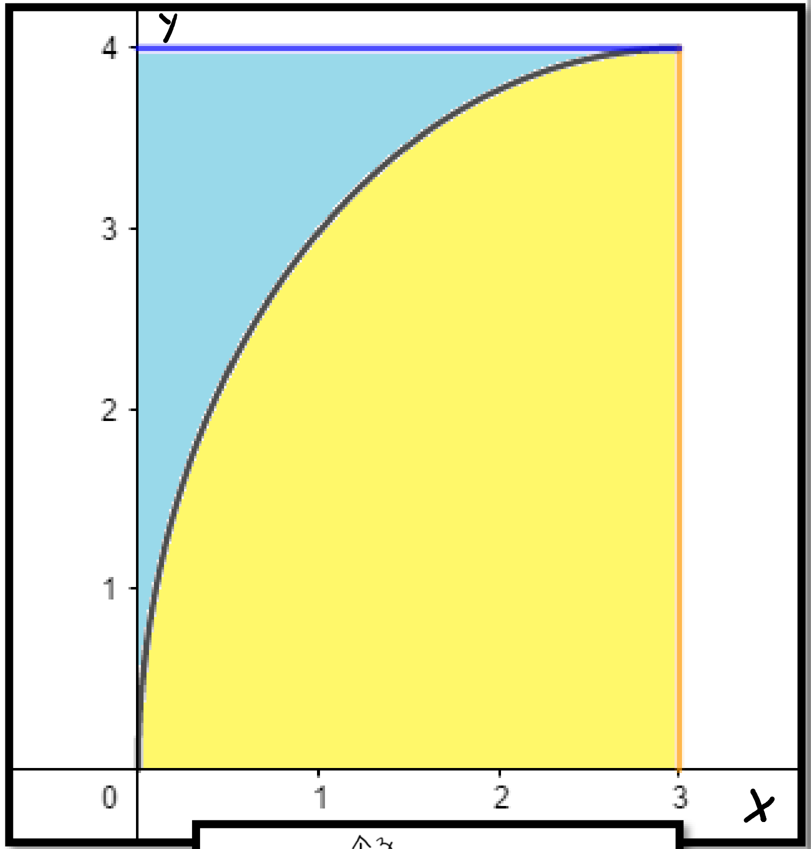
Para isso, devemos eliminar o z no cálculo das interseções entre as equações que delimitam o sólido:



$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ 2x+3z=6 \\ y^2+4z^2=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 2x=6 \\ y^2=16 \\ y^2+4\left(\dfrac{6-2x}{3}\right)^2=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x=3 \\ y=4 \\ y^2=\dfrac{32}{3}x-\dfrac{16}{9}x^2 \end{cases}$$

Montando as integrais triplas

Representado geometricamente as equações obtidas, obtemos a **base** ***D*** (que corresponde à projeção do sólido no plano xy):



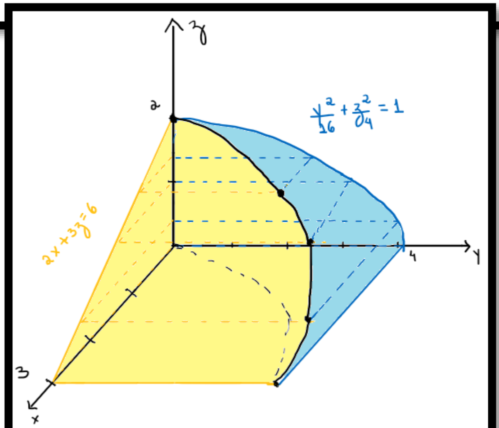
A curva a representada é interseção obtida:

$$y^2 = \frac{32}{3}x - \frac{16}{9}x^2 \qquad 9y^2 = 32.3x - 16x^2$$

$$9y^2 = -16(x^2 - 6x) \qquad 9y^2 = -16[(x-3)^2 - 9\,]$$

$$16(x-3)^2 + 9y^2 = 16.9 \qquad \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Tente visualizar essa base no desenho em três dimensões!



1ª Forma: Se x é a variável independente, temos que:

Parte I (em amarelo): $x \in [0,3]$ $y \in \left[0, \sqrt{\frac{32}{3}x - \frac{16}{9}x^2}\right]$

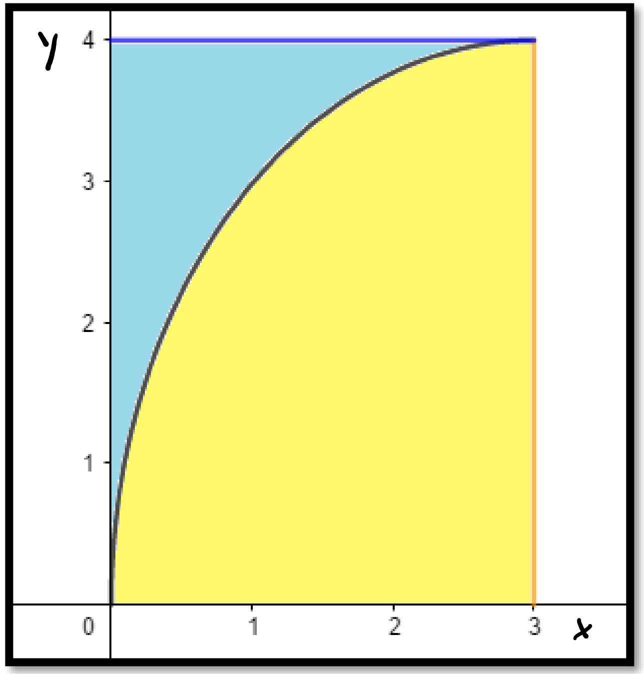
Parte II (em azul): $x \in [0,3]$ e $y \in \left[\sqrt{\frac{32}{3}x - \frac{16}{9}x^2}, 4\right]$

Montando as integrais triplas

Portanto:

$$M=\int_0^3\int_0^{\sqrt{\frac{32}{3}x-\frac{16}{9}x^2}}\int_0^{\frac{6-2x}{3}} xyz\ dzdydx+\int_0^3\int_{\sqrt{\frac{32}{3}x-\frac{16}{9}x^2}}^4\int_0^{\frac{\sqrt{16-y^2}}{2}} xyz\ dzdydx$$

2ª Forma: Se y é a variável independente, temos que:



Parte I (em amarelo): $y\in[0,4]$ e $x\in\left[3-\sqrt{9-\frac{9}{16}y^2},3\right]$

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1 \qquad (x-3)^2=9-\frac{9y^2}{16}$$

Parte II (em azul): $y\in[0,4]$ e $x\in\left[0,3-\sqrt{9-\frac{9}{16}y^2}\right]$

Portanto:

$$M=\int_0^4\int_{3-\sqrt{9-\frac{9}{16}y^2}}^3\int_0^{\frac{6-2x}{3}} xyz\ dzdxdy+\int_0^4\int_0^{3-\sqrt{9-\frac{9}{16}y^2}}\int_0^{\frac{\sqrt{16-y^2}}{2}} xyz\ dzdxdy$$

Montando as integrais triplas

Tomando y como variável totalmente dependente:

Nesse caso, devemos tomar como referencial o eixo y.

Veja na representação em 3D do sólido que a superfície à esquerda é o plano xz (dado por $y = 0$) e a superfície à direita (em relação a y), é o cilindro elíptico.

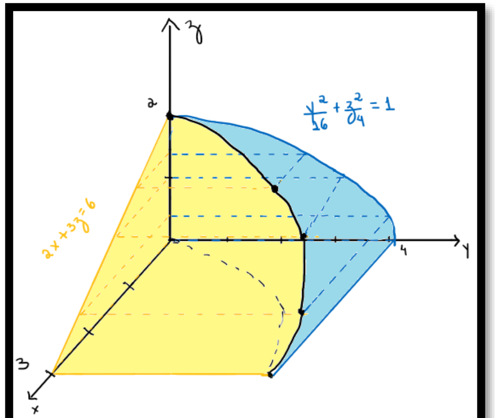
Não há troca de limitação. Com isso, basta tomar uma única integral tripla.

Isolando y na equação $y^2 + 4z^2 = 16$ obtemos

$$y \in \left[0, \sqrt{16 - 4z^2}\right].$$

E para obter as limitações de x e z precisamos projetar o sólido sobre o plano xz.

Para isso, devemos eliminar o y no cálculo das interseções entre as equações que delimitam o sólido:



$$\begin{cases} x = 0 \\ {\color{red} y = 0} \\ z = 0 \\ 2x + 3z = 6 \\ {\color{red} y^2} + 4z^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ \\ 2x + 3z = 6 \\ 4z^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ \\ 2x + 3z = 6 \\ z = 2 \end{cases}$$

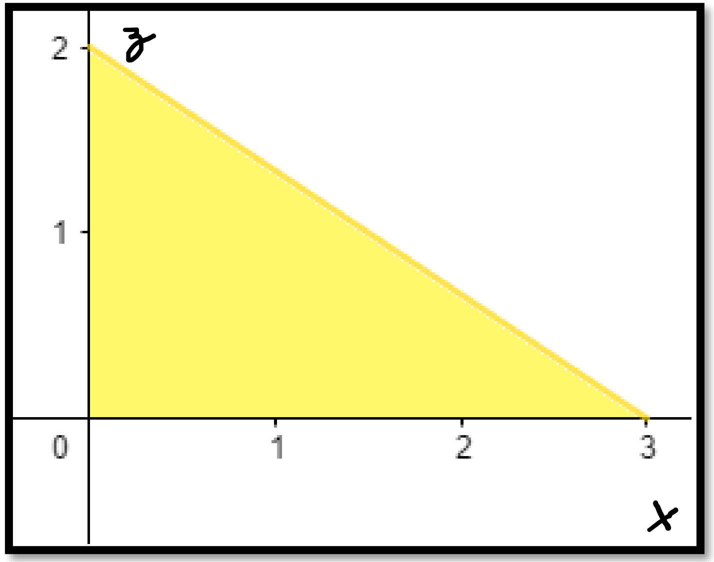
Montando as integrais triplas

Representado geometricamente as equações obtidas, obtemos a "base" D (que corresponde à projeção do sólido no plano xz):

A curva representada é:

$$2x + 3z = 6$$

Tente visualizar essa base no desenho em três dimensões!



3ª Forma: Se x é a variável independente, temos que $x \in [0, 3]$ e $z \in \left[0, \frac{6-2x}{3}\right]$ e a massa é

$$M = \int_0^3 \int_0^{\frac{6-2x}{3}} \int_0^{\sqrt{16-4z^2}} xyz \; dydzdx \, .$$

4ª Forma: Se z é a variável independente, temos que $z \in [0, 2]$ e $x \in \left[0, \frac{6-3z}{2}\right]$ e a massa é

$$M = \int_0^2 \int_0^{\frac{6-3z}{2}} \int_0^{\sqrt{16-4z^2}} xyz \; dydxdz.$$

Montando as integrais triplas

Tomando x como variável totalmente dependente:

Nesse caso, devemos tomar como referencial o eixo x.

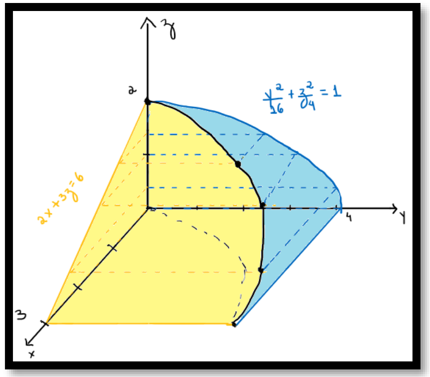
Veja na representação em 3D do sólido que a superfície “de trás” é o plano yz $(x = 0)$ e a superfície “da frente” (em relação a x), é o plano. Não há troca de limitação.

Com isso, basta tomar uma única integral tripla. Isolando x em $2x + 3z = 6$ obtemos

$$x \in \left[0, \frac{6 - 3z}{2}\right].$$

E para obter as limitações de y e z precisamos projetar o sólido sobre o plano yz.

Para isso, devemos eliminar o x no cálculo das interseções entre as equações que delimitam o sólido:



$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ 2x + 3z = 6 \\ y^2 + 4z^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 3z = 6 \\ y^2 + 4z^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ z = 2 \\ y^2 + 4z^2 = 16 \end{cases}$$

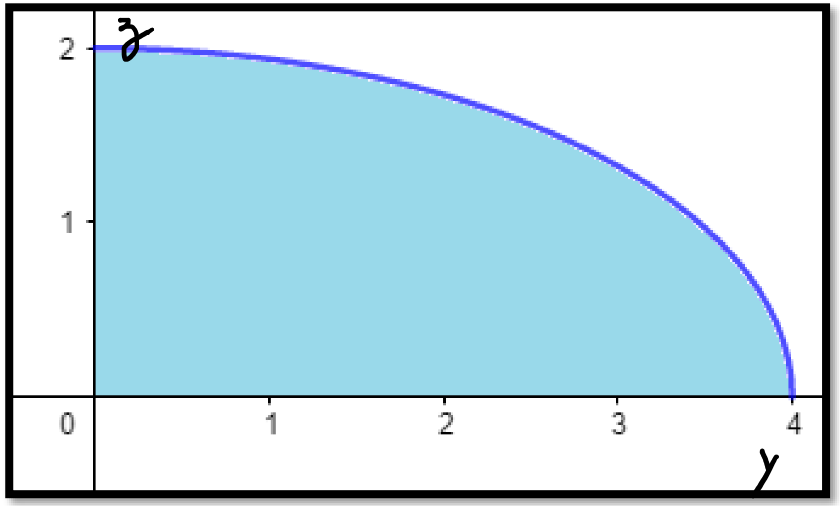
Montando as integrais triplas

Representado geometricamente as equações obtidas, obtemos a “base” D (que corresponde à projeção do sólido no plano yz):

A curva representada é:

$$y^2 + 4z^2 = 16$$

Tente visualizar essa base no desenho em três dimensões!



5ª Forma: Se y é a variável independente, temos que $y \in [0, 4]$ e $z \in \left[0, \frac{\sqrt{16-y^2}}{2}\right]$ e a massa é

$$M = \int_0^4 \int_0^{\frac{\sqrt{16-y^2}}{2}} \int_0^{\frac{6-3z}{2}} xyz \; dxdzdy$$

6ª Forma: Se z é a variável independente, temos que

$z \in [0, 2]$ e $y \in \left[0, \sqrt{16 - 4z^2}\right]$ e a massa é

$$M = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{16-4z^2}} \int_0^{\frac{6-3z}{2}} xyz \; dxdydz$$

Exemplo

Para calcular o valor da massa, tomaremos a 3ª forma para ser resolvida:

$$M = \int_0^3 \int_0^{\frac{6-2x}{3}} \int_0^{\sqrt{16-4z^2}} xyz \; dydzdx = \int_0^3 \int_0^{\frac{6-2x}{3}} \left.\frac{xy^2z}{2}\right|_{y=0}^{y=\sqrt{16-4z^2}} dzdx$$

$$= \int_0^3 \int_0^{\frac{6-2x}{3}} \frac{x(16-4z^2)z}{2} dzdx \quad = \int_0^3 \int_0^{\frac{6-2x}{3}} (8xz - 2xz^3)\, dzdx$$

$$= \int_0^3 4xz^2 - \left.\frac{xz^4}{2}\right|_{z=0}^{z=\frac{6-2x}{3}} dx \quad = \int_0^3 4x\left(\frac{6-2x}{3}\right)^2 - \frac{x}{2}\left(\frac{6-2x}{3}\right)^4 dx$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{-8}{81}x^5 + \frac{32}{27}x^4 - \frac{32}{9}x^3 + 8x\right) dx$$

$$= \frac{-4}{243}x^6 + \frac{32}{135}x^5 - \frac{8}{9}x^4 + 4x^2\Big|_0^3 = \frac{48}{5} \; unidades\ de\ massa$$

Exemplo

Exemplo 2) Calcule o volume do sólido que é delimitado simultaneamente pelas superfícies

$$x = 6y^2, \quad x = 4 - 2y^2, \quad z = 0 \quad \text{e} \quad 2z - x = 4,$$

utilizando a ordem de integração que julgar mais apropriada.

Solução: Iniciamos com a representação geométrica do sólido.
Para isso, é útil identificar as superfícies dadas:

$x = 6y^2$ é um cilindro parabólico que se propaga paralelamente a z.

$x = 4 - 2y^2$ é outro cilindro parabólico que se propaga paralelamente a y.

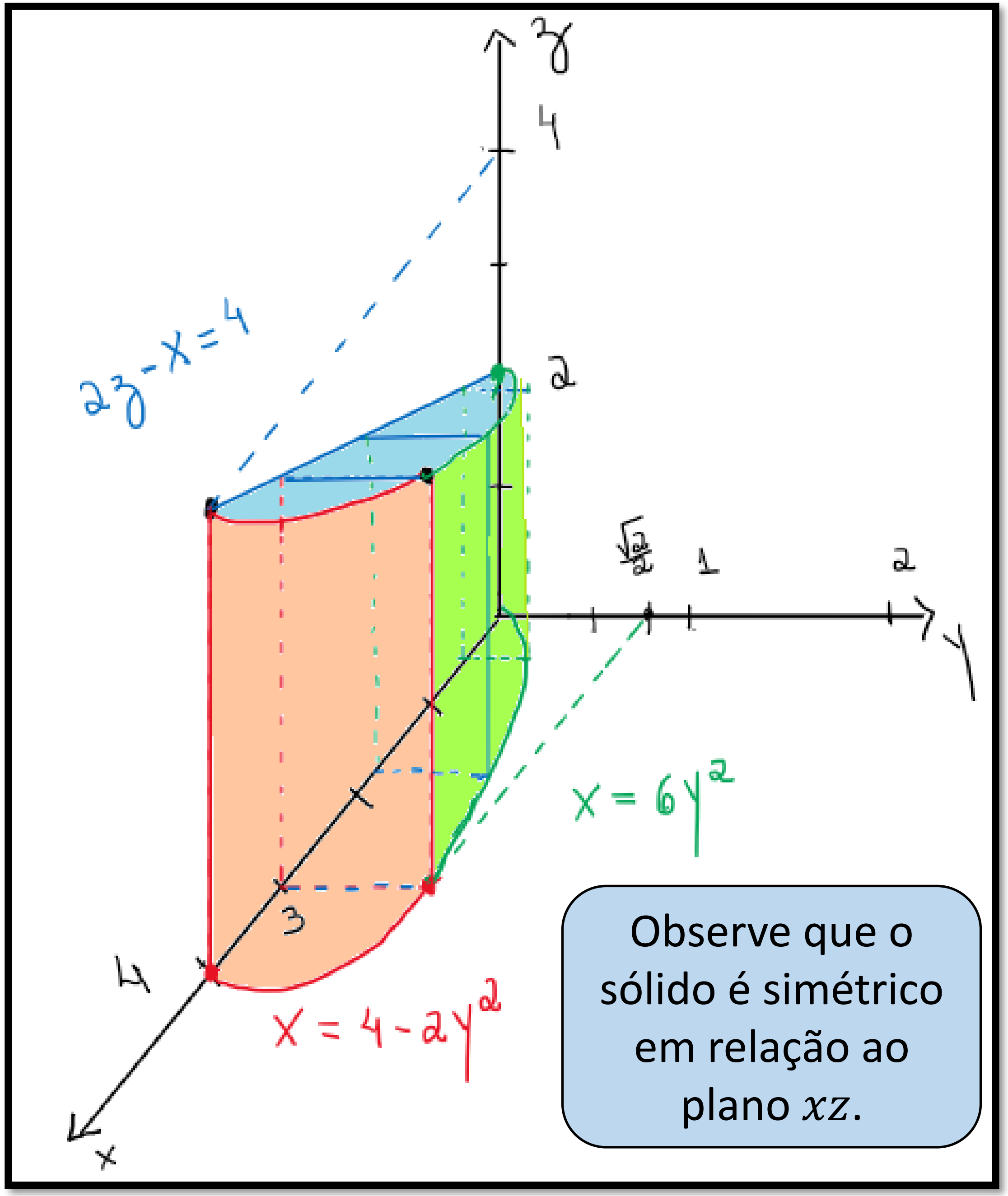
$z = 0$ é o plano xy

$2z - x = 4$ é um plano paralelo ao eixo y

Representando geometricamente (no primeiro octante) os curvas diretrizes dos cilindros parabólicos e a reta diretriz do plano paralelo ao eixo x, podemos utilizar o processo "curva – eixo comum – curva" de Cilindros Projetantes.

Veja que o eixo comum a todas as curvas é o eixo x. Fazendo as projeções sobre o eixo x, completando o paralelogramo e marcando o ponto de interseção entre as superfícies, obtemos o sólido:

Exemplo



Observe que o sólido é simétrico em relação ao plano xz.

Veja que para esse sólido é útil tomar z como variável totalmente dependente, pois não há troca de limitação entre a superfície inferior (que corresponde ao plano $z = 0$) e a superfícies superior, que corresponde ao plano

$$z = \frac{4+x}{2}$$

Portanto, temos que $z \in \left[0, \frac{4+x}{2}\right]$.

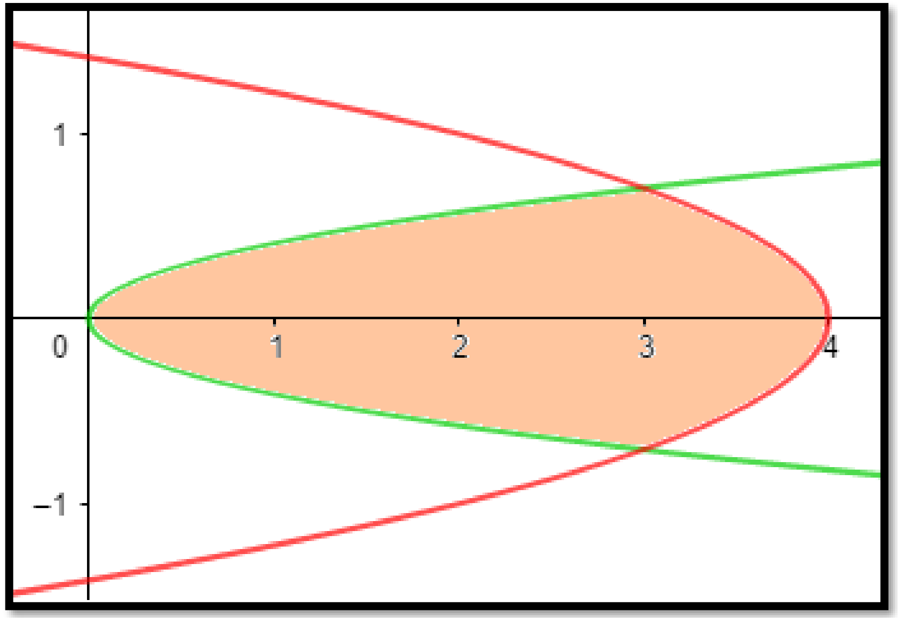
Para encontrar a limitação de x, y, fazemos a projeção do sólido sobre o plano xy, que corresponde às equações, $z = 0$ e

$$\begin{cases} x = 6y^2 \\ x = 4 - 2y^2 \\ z = 0 \\ 2z - x = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6y^2 \\ x = 4 - 2y^2 \\ x = -4 \end{cases}$$

Montando as integrais triplas

Representado as equações obtidas, obtemos a "base" D (que corresponde à projeção do sólido no plano xy):

Visualize essa projeção no desenho em três dimensões!



Interseção:

$$6y^2 = x = 4 - 2y^2$$

$$8y^2 = 4$$

$$y^2 = \frac{1}{2}$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad x = 3$$

É vantajoso tomar y como variável independente. Assim

$$y \in \left[\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \qquad \text{e} \qquad x \in [6y^2, 4 - 2y^2].$$

E o volume do sólido é dado por

$$V(S) = \int_{\frac{-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{6y^2}^{4-2y^2} \int_0^{\frac{4+x}{2}} 1.\,dzdxdy$$

Exemplo

E calculando a integral tripla:

$$V(S) = \int_{\frac{-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{6y^2}^{4-2y^2} \int_0^{\frac{4+x}{2}} 1.\, dz dx dy = \int_{\frac{-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{6y^2}^{4-2y^2} z \Big|_{z=0}^{z=\frac{4+x}{2}} dx dy$$

$$= \int_{\frac{-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_{6y^2}^{4-2y^2} \frac{4+x}{2}\, dx dy = \int_{\frac{-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2x + \frac{x^2}{4} \Big|_{x=6y^2}^{x=4-2y^2} dy$$

$$= \int_{\frac{-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 2(4-2y^2) + \frac{(4-2y^2)^2}{4} - 2.6y^2 - \frac{(6y^2)^2}{4}\, dy$$

$$= \int_{\frac{-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (12 - 20y^2 - 8y^4)\, dy = 12y - \frac{20}{3}y^3 - \frac{8}{5}y^5 \Big|_{\frac{-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{124}{15}\sqrt{2} \quad \textit{unidades de volume}$$

Como exercício, tente montar as integrais em outras ordens e calcule o valor de pelo menos uma delas!

Exemplo

Exemplo 3) Calcule o volume do sólido S delimitado pelas superfícies

$$z = 5 - 4x^2 - 4y^2 \quad \text{e} \quad z = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}.$$

Solução: Iniciamos com a representação geométrica do sólido S cujo volume é desejado. Para tal, vamos identificar as superfícies envolvidas. Veja que

$$z = 5 - 4x^2 - 4y^2$$

é um paraboloide circular, com concavidade voltada para baixo.

Manipulando a equação

$$z = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$$

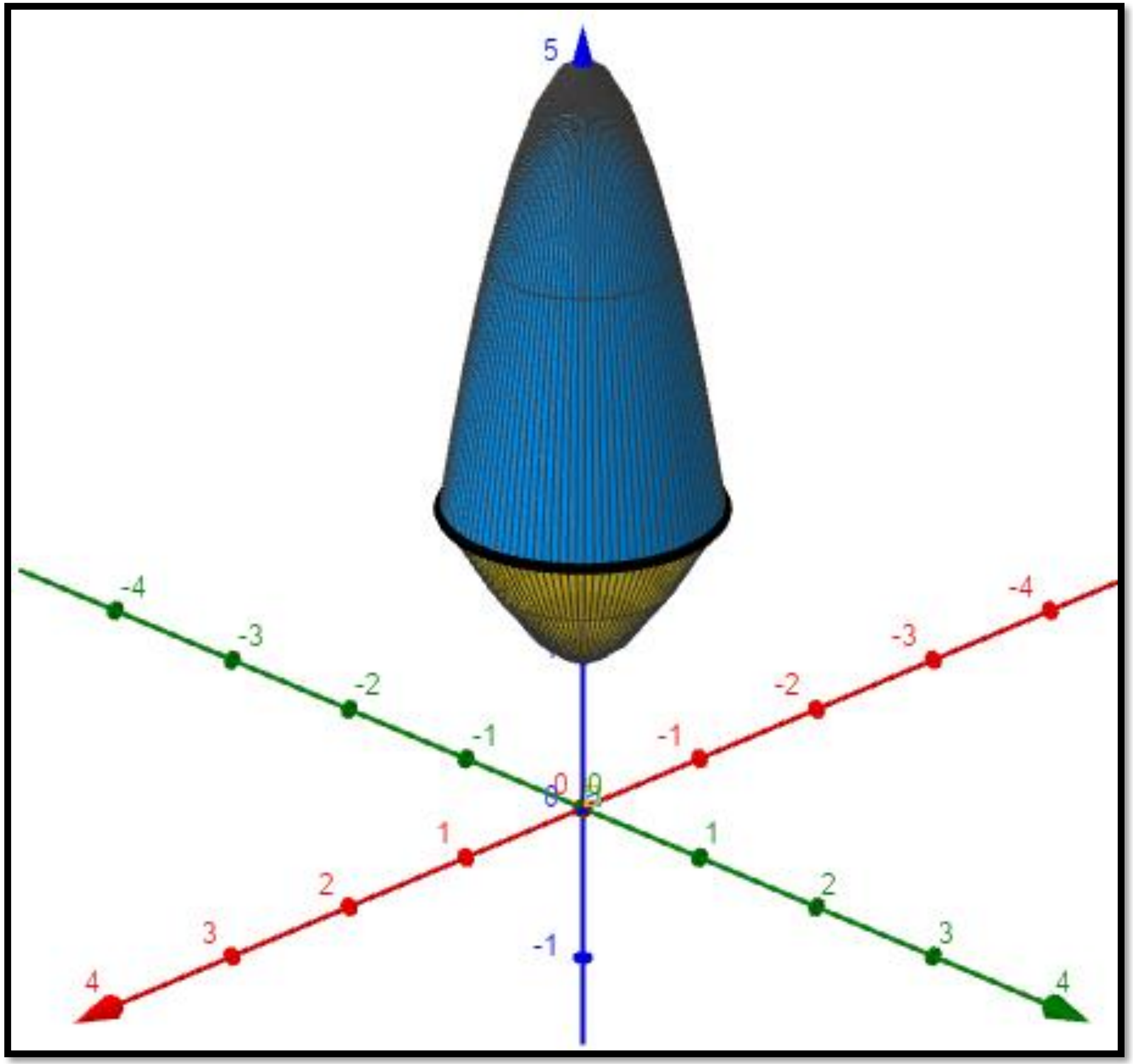
obtemos que

$$z^2 = 1 + 4x^2 + 4y^2 \quad \Rightarrow \quad -4x^2 - 4y^2 + z^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{x^2}{1/4} - \frac{y^2}{1/4} + z^2 = 1$$

e a segunda superfície é a folha positiva (pois $z \geq 0$) de um hiperboloide de duas folhas.

Exemplo

Representando o sólido S, obtemos:



Veja que S é delimitado superiormente pelo paraboloide e inferiormente pela folha do hiperboloide.

Note que S não possui lateral cilíndrica, nem base sob o plano xy.

Exemplo

Para poder utilizar uma integral dupla para calcular o volume de S, vamos decompor o sólido como uma “diferença” entre dois sólidos que possuem lateral cilíndrica e base no plano xy.

Para obter tais elementos, vamos projetar o sólido no plano xy.

Fazemos isso eliminando a variável z das equações, ou seja, calculando a interseção entre as superfícies:

$$\begin{cases} z = 5 - 4x^2 - 4y^2 \\ z = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 + 4y^2 = 5 - z \\ 4x^2 + 4y^2 = z^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow 5 - z = z^2 - 1$$

$$\Rightarrow z^2 + z - 6 = 0 \qquad \Rightarrow z = 2 \text{ ou } z = -3$$

Como $z \geq 0$ (devido à equação do hiperboloide) desprezamos a solução negativa (que corresponde à interseção do paraboloide com a folha “negativa” do hiperboloide.

Portanto, obtemos que $z = 2$ e substituindo em qualquer uma das equações, encontramos que

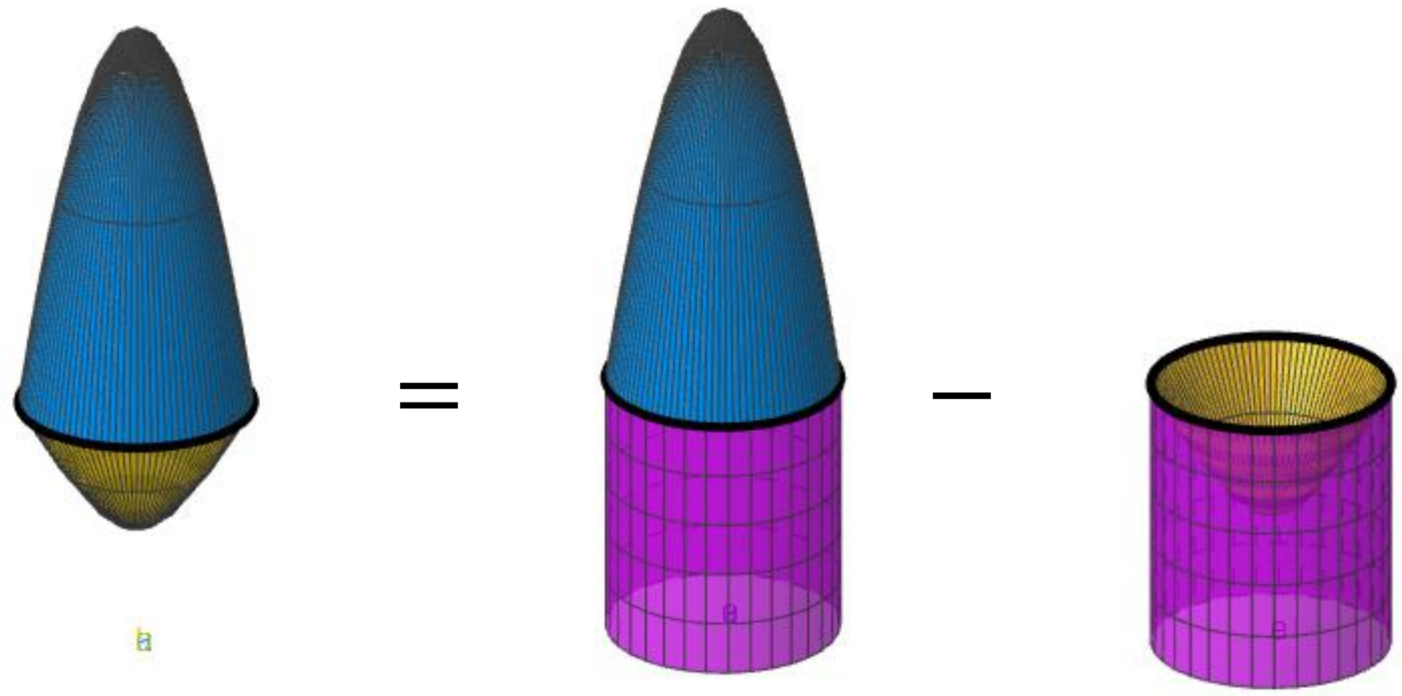
$$4x^2 + 4y^2 = 2^2 - 1 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + y^2 = \frac{3}{4}.$$

Exemplo

Os cálculos efetuados significam que a intersecção entre as superfícies corresponde a uma circunferência (de raio $\sqrt{3}/_2$) situada no plano $z = 2$.

A partir da equação da circunferência, obtemos um **cilindro circular** com geratriz paralela ao eixo z.

Usando o **cilindro** como superfícies auxiliar, podemos decompor S como uma diferença entre dois sólidos que possuem lateral cilíndrica e bases situada sob o plano xy:



Veja que os dois sólidos de lateral cilíndrica possuem a mesma base circular plana.

Exemplo

Com isso, o volume desejado pode ser calculado por meio da diferença entre o volume de dois sólidos de lateral cilíndrica, que por sua vez podem ser calculados com o uso de integrais duplas:

$$V(S) = V_{sup} - V_{inf}$$

onde V_{sup} é o volume do sólido superior, cujo topo corresponde ao paraboloide, dado por $z = f(x, y) = 5 - 4x^2 - 4y^2$ e V_{inf} é o volume do sólido inferior, delimitado pelo hiperboloide, dado por $z = f(x, y) = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$. Logo

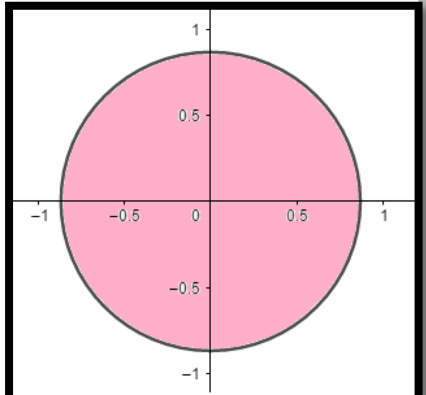
$$V(S) = \iint_D (5 - 4x^2 - 4y^2)\,dA - \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dA$$

onde a base D é projeção de ambos os sólidos no plano xy, delimitada pela circunferência

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{4}.$$

Tomando x como variável independente,

$$x \in \left[\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad \text{e} \quad y \in \left[-\sqrt{\frac{3}{4} - x^2}, \sqrt{\frac{3}{4} - x^2}\right].$$



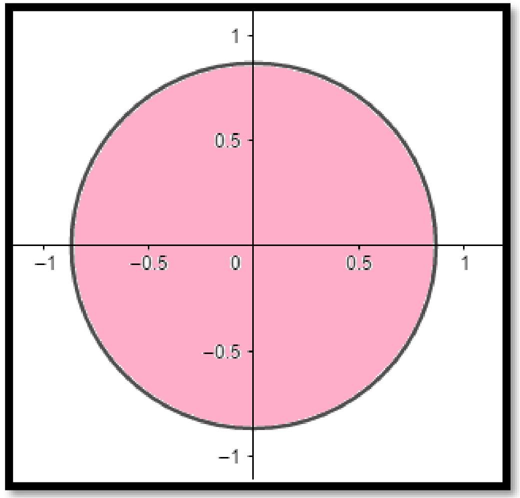
Exemplo

Portanto

$$V(S)=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{-\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}(5-4x^2-4y^2)\,dydx-\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{-\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dydx.$$

Para calcular o volume, é vantajoso transformar tais integrais para coordenadas polares:

$$\theta\in[0,2\pi]\quad \text{e} \quad r\in\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$



pois a região está situada nos quatro quadrantes e r varia do polo ($r=0$) até a circunferência $x^2+y^2=\frac{3}{4}$ ou seja, $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Transformando o integrando e usando que $dydx=rdrd\theta$, obtemos

$$V(S)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(5-4r^2)\,rdrd\theta-\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1+4r^2}\,rdrd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(5r-4r^3)\,drd\theta\quad-\int_0^{2\pi}\int_1^4\sqrt{u}\,\frac{du}{8}\,d\theta$$

Substituição:
$u=1+4r^2$
$du=8rdr$

Exemplo

$$V(S)=\int_0^{2\pi}\frac{5}{2}r^2-r^4\Big|_{r=0}^{r=\frac{\sqrt{3}}{2}}d\theta-\int_0^{2\pi}\frac{1}{8}.\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{u=1}^{u=4}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{5}{2}.\frac{3}{4}-\frac{9}{16}\,d\theta-\int_0^{2\pi}\frac{1}{12}.\left(4^{\frac{3}{2}}-1\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{21}{16}\,d\theta-\int_0^{2\pi}\frac{7}{12}d\theta$$

$$=\frac{21}{16}\,\theta\Big|_0^{2\pi}+\frac{7}{12}\theta\Big|_0^{2\pi}=\frac{21}{16}.2\pi+\frac{7}{12}.2\pi=\frac{21}{8}\pi+\frac{7}{6}\pi=\frac{91}{24}\pi\quad unid.volume$$

Observação: Veja que a primeira expressão obtida para o volume de S, dada por uma diferença de integrais duplas cujos limitantes de integração são iguais, pode ser escrita como uma integral dupla de uma diferença de funções:

$$V(S)=\int_{\frac{-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{-\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}(5-4x^2-4y^2)\,dydx-\int_{\frac{-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{-\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dydx$$

$$=\int_{\frac{-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{-\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}}(5-4x^2-4y^2)-\sqrt{1+4x^2+4y^2}\;\;dydx$$

Observação Importante

Observação: Veja que o integrando dessa última integral dupla pode ser visto como uma diferença entre duas funções $z = z(x, y)$:

$$5 - 4x^2 - 4y^2 - \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} = z_2(x, y) - z_1(x, y)$$

onde $z_2(x, y) = 5 - 4x^2 - 4y^2$ é a função cujo gráfico descreve o paraboloide (superfície que delimita superiormente o sólido) e $z_1(x, y) = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$ é a função que descreve a folha do hiperboloide (superfície que delimita inferiormente o sólido).

Usando a notação do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) podemos escrever

$$z_2(x, y) - z_1(x, y) = z\Big|_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} 1.dz$$

pois z é uma primitiva para a função $1.dz$. Com isso, obtemos que

$$5 - 4x^2 - 4y^2 - \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} = \int_{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}^{5-4x^2-4y^2} 1.dz$$

E substituindo na expressão anterior obtemos:

$$V(S) = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{-\sqrt{\frac{3}{4} - x^2}}^{\sqrt{\frac{3}{4} - x^2}} \int_{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}^{5-4x^2-4y^2} 1.dz\,dy\,dx$$

Chegamos em uma integral tripla, que fornece uma expressão mais simples para o volume de S, sem que seja necessário decompor o sólido!