Gabarito 1 - apresentacaoTEG_2022_1_v6.pdf

3 de abril de 2025

Resumo

Gabarito requerido pelo professor orientador Gilmario Barbosa do Santos e feito pelo monitor de Grafos Gustavo Michels de Camargo entre março e abril de 2023.

1 Faça um desenho de um grafo da predação entre algumas espécies, no qual: cada vértice é uma espécie animal (cavalo, urso, koala, coelho, mosquito, etc.) ou vegetal (cenoura, palmeira, eucalipto, alga, etc.). Há um arco de x para y se a espécie x se alimenta da espécie y.

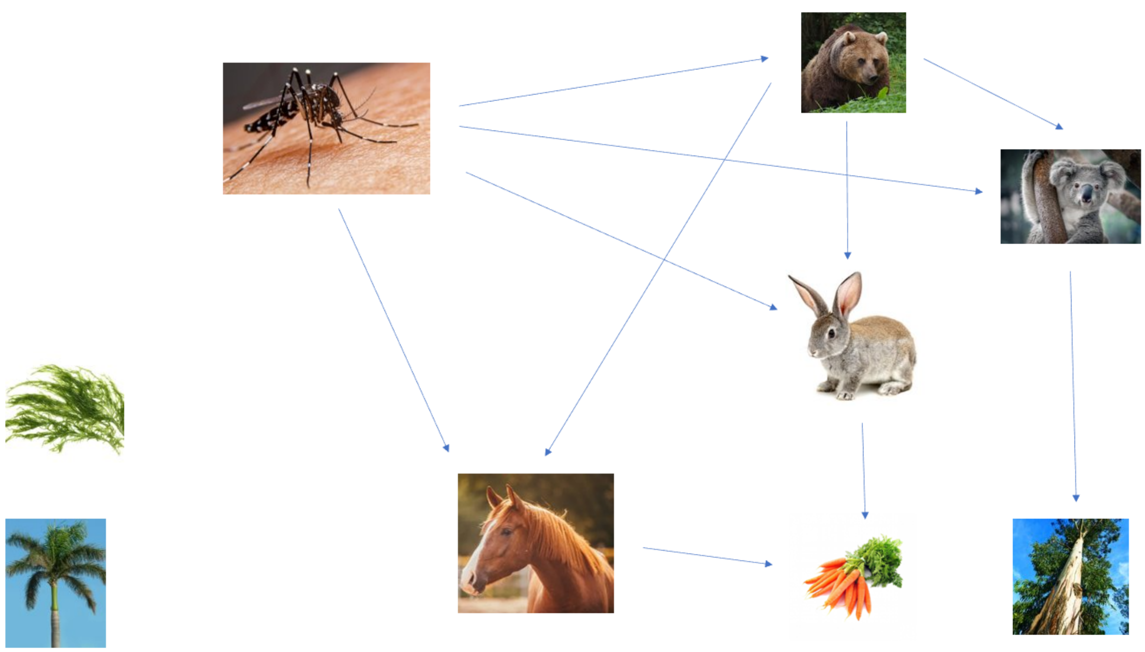


Figura 1: Exemplo de Imagem para o Grafo

2 Tente redesenhar os grafos G2 e G3, sem cruzar linhas. Calcule o número de regiões para cada grafo planar obtido.

G2: trata-se de um 3-cubo, podendo ser redesenhado na forma planar veja em http://www.mat.ufrgs.br/ trevisan/class/grafos3.pdf

$$G2 : R = |12| - |8| + 2 = 6 \tag{1}$$

O grafo G3 é um exemplo clássico de grafo não planar, também conhecido como $K_{3,3}$ (abordaremos mais tarde)

3 Considerando que os vértices são as casas de um tabuleiro de xadrez, há um arco de x para y se um cavalo do jogo pode ir de x a y em um só movimento.

3.1 Construa o grafo que representa os movimentos de um cavalo sobre um tabuleiro de xadrez 3x3

O grafo é um ciclo que visita todas as casas execeto a casa central do tabuleiro 3x3. Veja em: https://www.geeksforgeeks.org/puzzle-four-alternating-knights/

3.2 Construa o grafo que representa os movimentos de um cavalo sobre um tabuleiro de xadrez 4x4

(https://tex.stackexchange.com/questions/97632/generating-loops-to-produce-edges-for-network-graph-of-4x4-knights-problem)

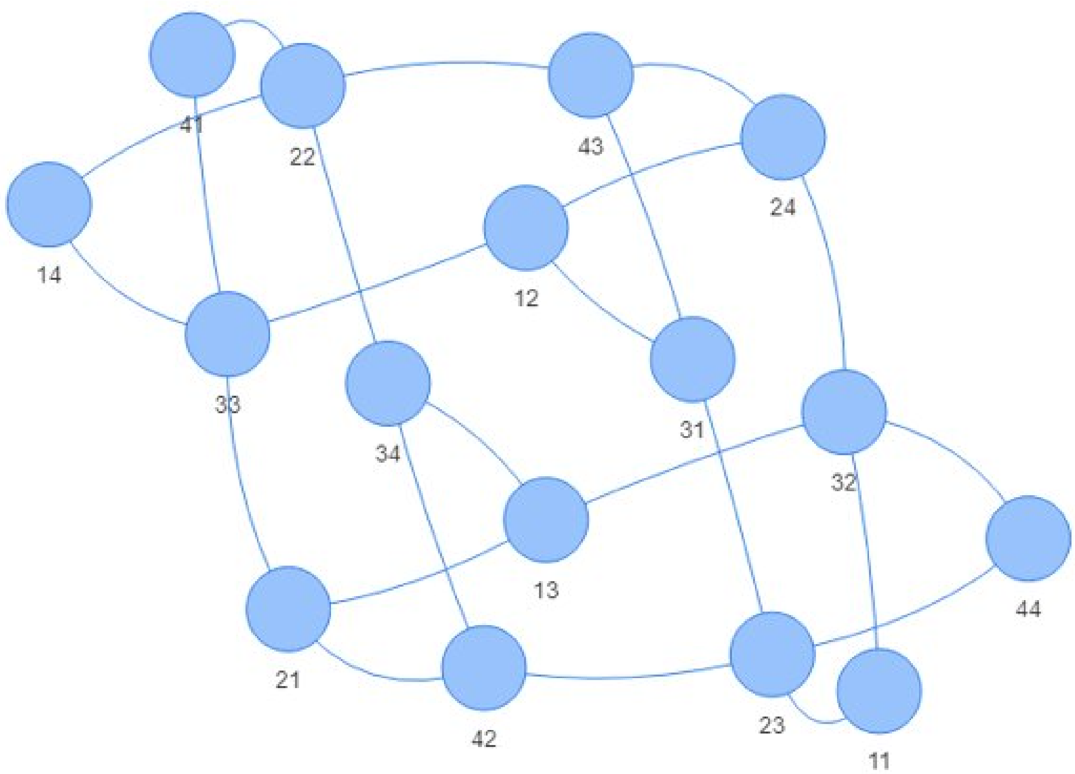


Figura 2: Cavalo em tabuleiro 4x4

Conforme pode ser verificado por meio do grafo, há um caminho que pode percorrer todos os vértices, portanto, é possível visitar todas as posições do tabuleiro.

4 O grafo das palavras é definido assim: cada vértice é uma palavra da língua portuguesa e duas palavras são adjacentes se diferem em exatamente uma posição. Por exemplo, rato e ralo são adjacentes, enquanto ralo e rota não são. Faça uma figura da parte do grafo definida pelas palavras abaixo:

caiado cavado cavalo girafa girava ralo ramo rata rato remo reta reto rota vaiado varado virada virado virava

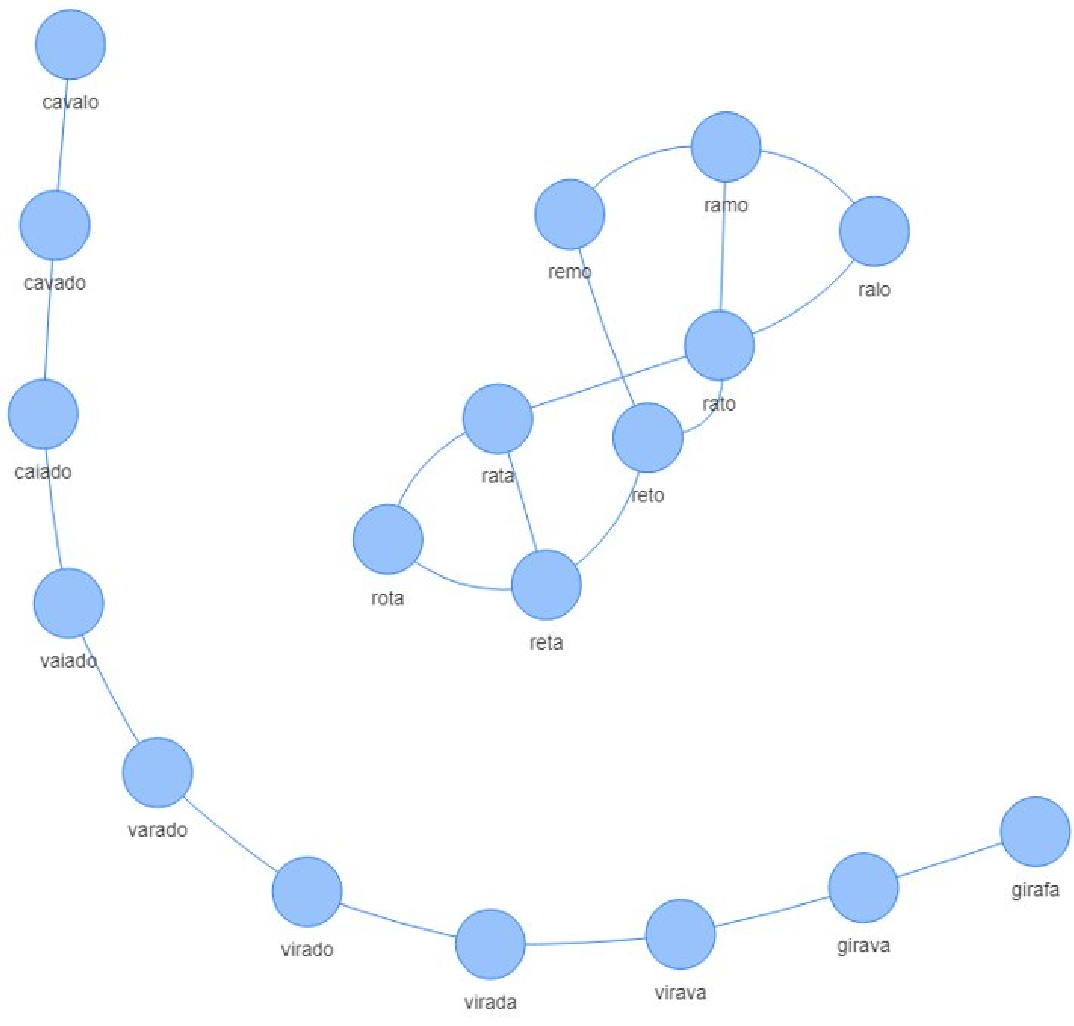


Figura 3: Grafo das Palavras

5 O k-cubo, denotado Qk, é o grafo (simples) cujos vértices são todas as sequências de 0's e 1's com k dígitos, de tal modo que dois vértices são adjacentes se e somente se as sequências correspondentes diferem em exatamente uma posição. Ex: 001— 101—111

5.1 Desenhe os grafos Q1, Q2, Q3 e Q4

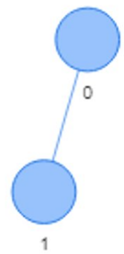


Figura 4: Q1

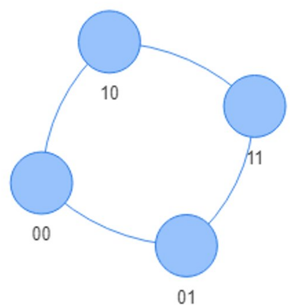


Figura 5: Q2

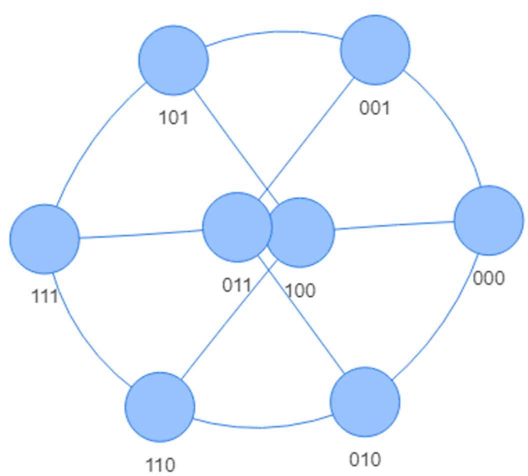


Figura 6: Q3

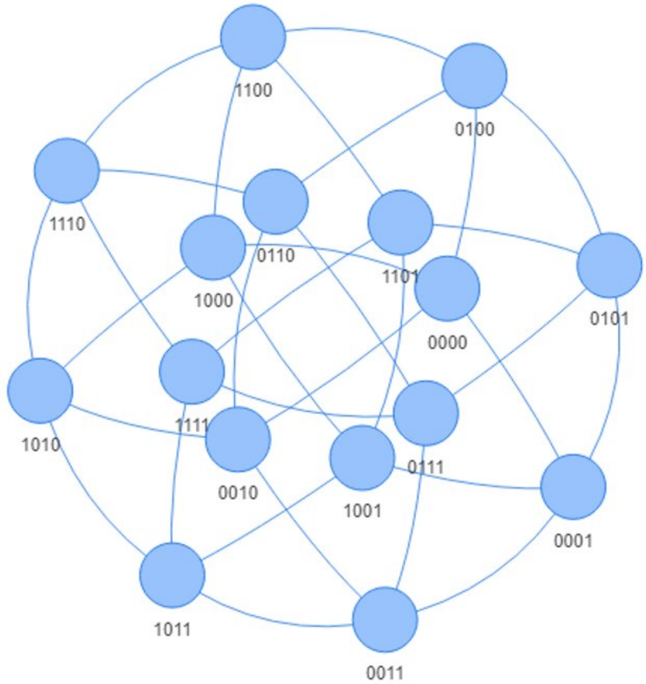


Figura 7: Q4

5.2 Quantos vértices e arestas tem um k-cubo?

$$NumeroVertices = 2^k \tag{2}$$

$$NumeroArestas = k * 2^{k-1} \tag{3}$$

5.3 Quais são os valores de Δ e δ para um grafo cubo? Mostre que um k-cubo é um grafo regular;

$$\Delta = \delta = k \tag{4}$$

Num grafo k-cubo todos os vértices têm o mesmo grau igual a k, logo, o grafo é regular.

Prova:

Conceito de notação posicional de números: É um modo de representação numérica na qual o valor de cada algarismo depende da sua posição relativa na composição do número.

Um grafo k-cubo apresenta 2^k números binários e cada número é composto de k bits posicionados do menos significativo ao mais significativo. Há uma relação 1-pra-1 entre cada vértice do k-cubo e um desses números binários.

A regra de formação de adjacência diz que dados $u, v \in V$ existe $(u, v) \in E$ se e só se esses vértices apresentarem diferença de exatamente uma posição de bit. Para um k-cubo há 2^k vértices representados pelos respectivos binários de comprimento igual a k bits. Dessa forma, para cada vértice v_i representado por uma sequência posicional de k bits há exatamente k outros vértices que diferem exatamente em uma das k posições de bit de v_i, portanto, v_i possu grau = k. Sendo v_i qualquer vértice do k-cubo, temos que k-cubo é k-regular

6 Seja G(V,E) um grafo simples, onde V é o conjunto de todos os subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que têm exatamente 2 elementos. Uma aresta de G conecta apenas os subconjuntos (de dois elementos) disjuntos. Ou seja, v e w são adjacentes se $v \cap w = \emptyset$. Essa relação de adjacência sobre V define um grafo clássico. Pede-se:

6.1 Desenhe G.

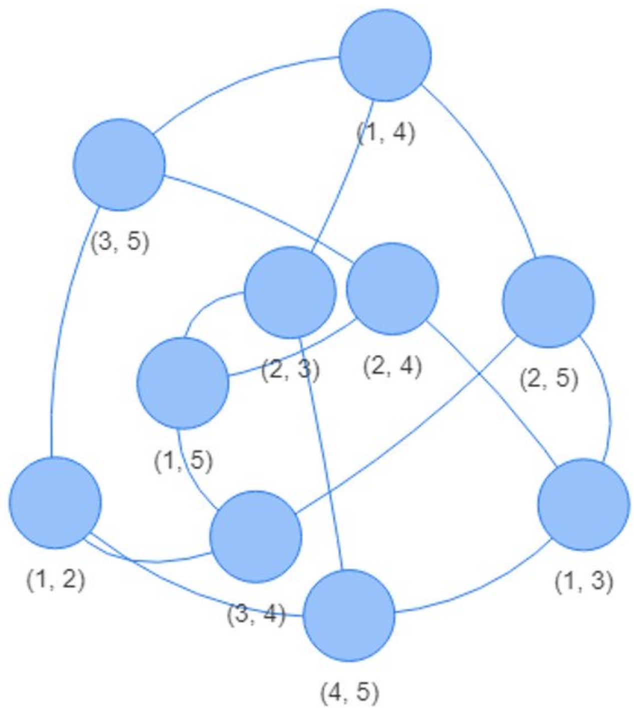


Figura 8: Grafo de G

6.2 Qual é o número de vértices e arestas de de G?

Número de Vértices: 10
Número de Arestas: 15

7 Dado um grafo $G(V, A)$ e seu complementar $G'(W, E)$. Sabendo que $|A| = 15$ e $|E| = 13$, qual é a cardinalidade do conjunto de vértices ($|V|$) de G

Seja $G(V, A)$ um grafo e seu complementar $G'(W, E)$. Sabendo que $|A| = 15$ e $|E| = 13$, queremos encontrar a cardinalidade do conjunto de vértices $|V|$ de G.

Usamos a fórmula para o número máximo de arestas em um grafo simples com n vértices, que é $\frac{n*(n-1)}{2}$. Como G e G' são complementares, a soma do número de arestas em ambos os grafos é igual ao número máximo de arestas:

$$|A| + |E| = \frac{n * (n - 1)}{2} \tag{5}$$

Substituindo os valores conhecidos:

$$15 + 13 = \frac{n * (n-1)}{2} \tag{6}$$

Simplificando:

$$28 = \frac{n * (n-1)}{2} \tag{7}$$

Multiplicando os dois lados por 2:

$$56 = n * (n-1) \tag{8}$$

Observamos que $n = 8$ satisfaz a equação, já que $8 \times 7 = 56$. Portanto, a cardinalidade do conjunto de vértices de G é:

$$|V| = n = 8 \tag{9}$$

8 Demonstre que o maior número de arestas (m) de um grafo em um conjunto de $n = |N|$ vértices é igual a:

$$\binom{n}{2} = \frac{n * (n-1)}{2} \tag{10}$$

Queremos demonstrar que o maior número de arestas m em um grafo simples com um conjunto de $n = |N|$ vértices é dado por:

$$m = \binom{n}{2} = \frac{n * (n-1)}{2}$$

Considere um grafo simples com n vértices. Para cada vértice v_i, podemos conectar até $n-1$ arestas a ele, uma para cada um dos outros $n-1$ vértices no grafo. Então, o total de arestas possíveis seria:

$$n * (n-1)$$

No entanto, estamos contando cada aresta duas vezes (uma vez para cada par de vértices v_i e v_j). Portanto, devemos dividir o resultado por 2 para obter o número correto de arestas:

$$m = \frac{n * (n-1)}{2}$$

Além disso, podemos representar o número de combinações possíveis de escolher 2 vértices a partir de um conjunto de n vértices como um coeficiente binomial:

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

Simplificando a expressão:

$$\binom{n}{2} = \frac{n * (n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}$$

Cancelando os termos $(n-2)!$:

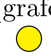
$$\binom{n}{2} = \frac{n * (n-1)}{2}$$

Portanto, demonstramos que o maior número de arestas m em um grafo simples com um conjunto de $n = |N|$ vértices é igual a:

$$m = \binom{n}{2} = \frac{n * (n-1)}{2}$$

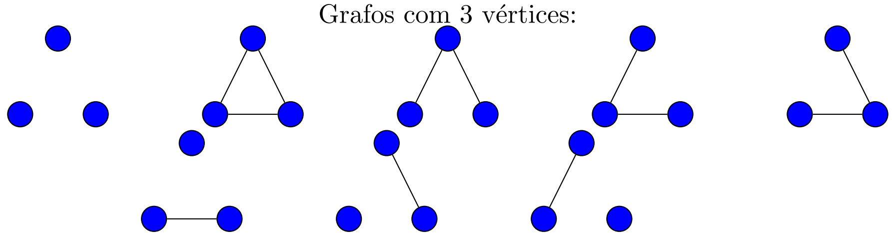
9 Desenhe todos os grafos (simples) com: 1, 2, 3 e 4 vértices

Grafo com 1 vértice (grafo nulo de um vértice):

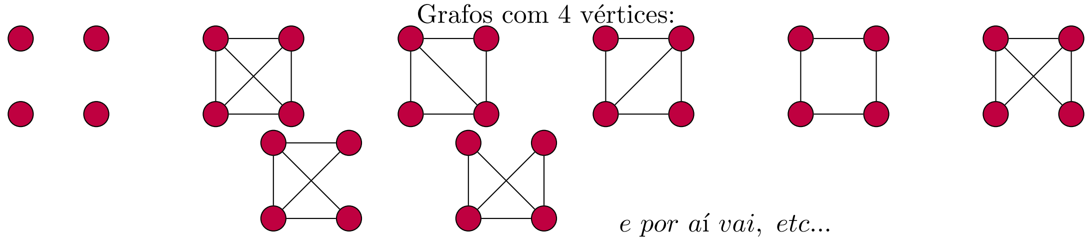


Grafos com 2 vértices:

Grafos com 3 vértices:



Grafos com 4 vértices:



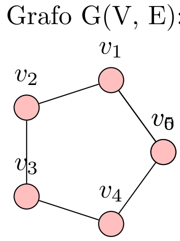
e por aí vai, etc...

10 Desenhe o grafo $G(V, E)$, onde $V = v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$, $|V| >= 3$. Existe aresta (vi, vj) quando $j = (i+1)\%|V|$ (% representa o resto da divisão inteira) $i \in Z+$, $j \in Z+$.

A "DICA" APRESENTADA É PARA 5 VÉRTICES, RESOLVA PARA N VÉRTICES

Seja G(V, E) um grafo onde $V = v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$, com $|V| = 2$. Existe uma aresta entre v_i e v_j quando $j = (i+1) \bmod |V|$.

Grafo G(V, E):



10.1 Quais são os valores de Δ e δ para esse grafo?

- Δ (Delta maiúsculo) representa o grau máximo de um vértice no grafo, ou seja, o maior número de arestas conectadas a um único vértice.
- δ (delta minúsculo) representa o grau mínimo de um vértice no grafo, ou seja, o menor número de arestas conectadas a um único vértice.

Neste grafo, cada vértice está conectado a exatamente dois outros vértices: o vértice anterior e o vértice seguinte na sequência. Portanto, tanto Δ quanto δ são iguais a 2 independente do número de vértices.

10.2 Qual é o número de arestas desse grafo?

Existem 5 arestas no Grafo com n=5 vértices, para k vértices teremos k arestas.

11 Desenhe o grafo $G(V, E)$, onde $V = v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ no qual há $n - 1$ vértices de grau 1 e um vértice vi com grau $n - 1$.

.

A "DICA" APRESENTADA É PARA 5 VÉRTICES, RESOLVA PARA N VÉRTICES

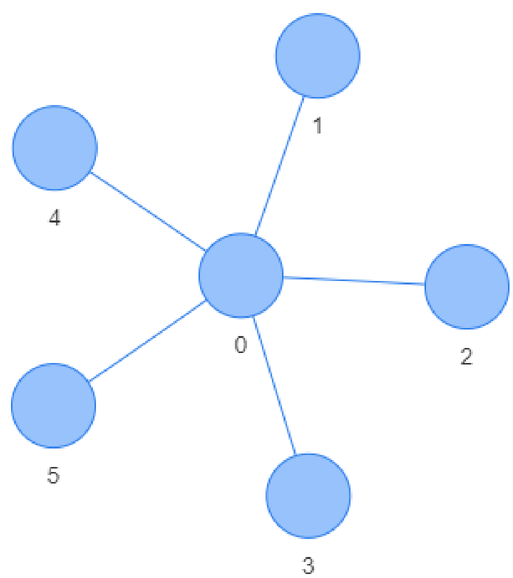


Figura 9: Grafo de G

11.1 Quais são os valores de Δ e δ para esse grafo?

- O valor de Δ (delta maiúsculo), que representa o maior grau de vértice no grafo, é $n - 1$. Isso ocorre porque o vértice v_i tem grau $n - 1$, que é o maior grau possível neste grafo específico.
- O valor de δ (delta minúsculo), que representa o menor grau de vértice no grafo, é 1. Isso ocorre porque todos os outros vértices, exceto v_i, têm grau 1.

Portanto, para esse grafo, $\Delta = 5$ e $\delta = 1$. Para k vértices teremos $\Delta = k - 1$ e $\delta = 1$

11.2 Qual é o número de arestas desse grafo?

O numero de arestas é 5, para um grafo com n=6 vértices, para k vértices teremos k-1 arestas.

12 Desenhe e descreva o número de arestas, o grau máximo, o grau mínimo, cintura/Girth (comprimento do menor ciclo contido no grafo) e a planaridade dos seguintes grafos:

a) **Roda (wheel-graph): Wn**

b) **Estrela (star-graph): Sn**

c) **Petersen**

d) **Ciclo: Cn**

e) **Caminho: Pn**

12.1 Respostas:

AS "DICAS"APRESENTADAS PARA A RODA, ESTRELA, CICLO E CAMINHO SÃO PARA N=9 VÉRTICES, RESOLVA PARA N QUALQUER

Roda com $n = 9$

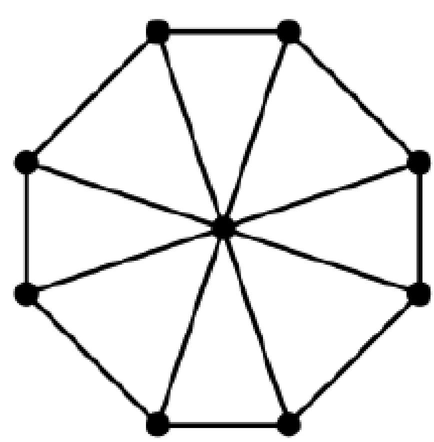


Figura 10: Grafo Roda

- Número de Arestas: 9
- Δ (Grau máximo): 8
- δ (Grau mínimo): 3
- Cintura (Girth): 3
- Planaridade: Planar

Estrela com $n = 9$

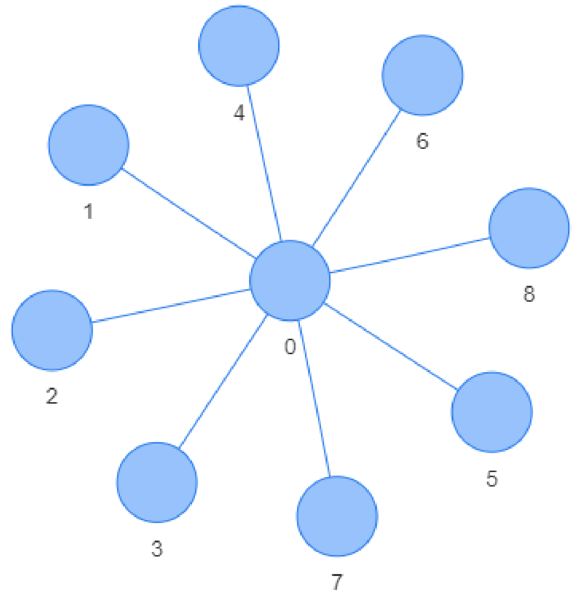


Figura 11: Grafo estrela

- Número de Arestas: 8
- Δ (Grau máximo): 8
- δ (Grau mínimo): 1
- Cintura (Girth): $\emptyset$
- Planaridade: Planar

Petersen

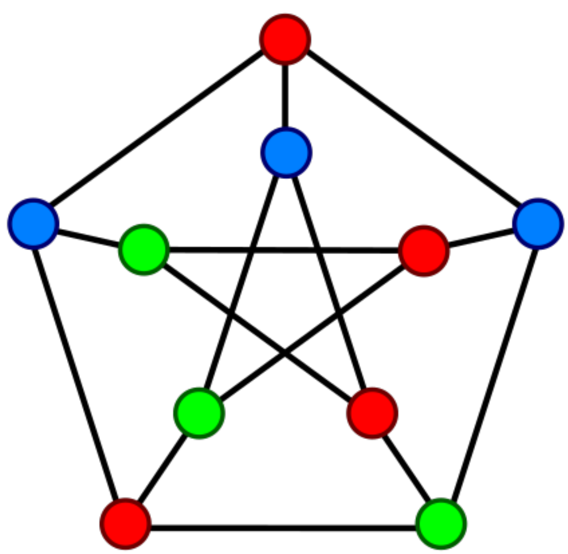


Figura 12: Grafo de Petersen

- Número de Arestas: 14

- Δ (Grau máximo): 3
- δ (Grau mínimo): 3
- Cintura (Girth): 4
- Planaridade: Não planar

Ciclo com $n = 9$

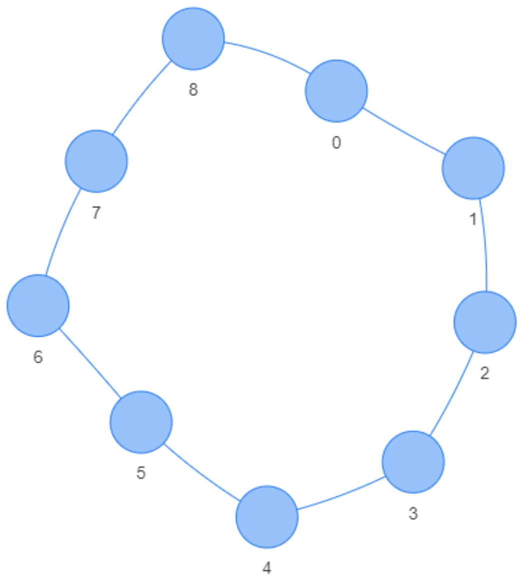


Figura 13: Grafo ciclo

- Número de Arestas: 9
- Δ (Grau máximo): 2
- δ (Grau mínimo): 2
- Cintura (Girth): 9
- Planaridade: Planar

Caminho com $n = 9$

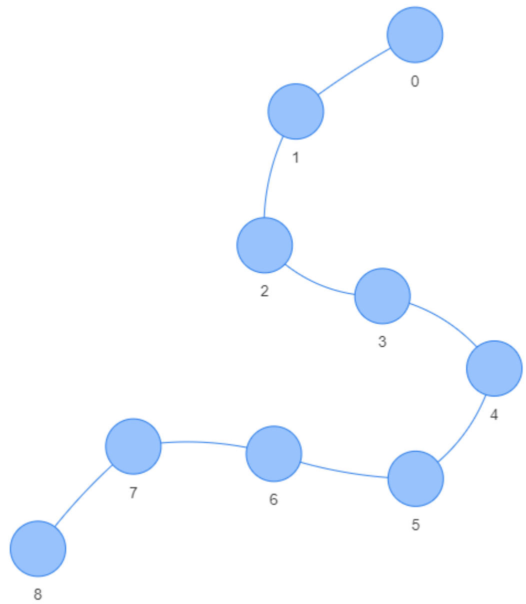


Figura 14: Grafo caminho

- Número de Arestas:
- Δ (Grau máximo): 2
- δ (Grau mínimo): 1
- Cintura (Girth): $\emptyset$
- Planaridade: Planar

13 Desenhe o grafo desconexo $G(V, E)$ com $|V| = 2n$, no qual haja:

A "DICA"APRESENTADA É PARA N=6 VÉRTICES, RESOLVA PARA N QUALQUER

a) **2 vértices de grau 1 e n-2 vértices de grau 2 (esse grafo é desconexo, ou seja, há subconjuntos de vértices sem arestas conectando esses subconjuntos);**

b) **1 vértice de grau n-1 e n-1 vértices de grau 3.**

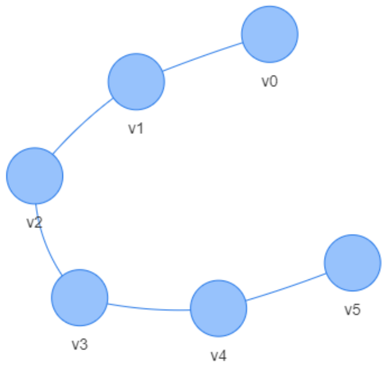


Figura 15: Grafo A

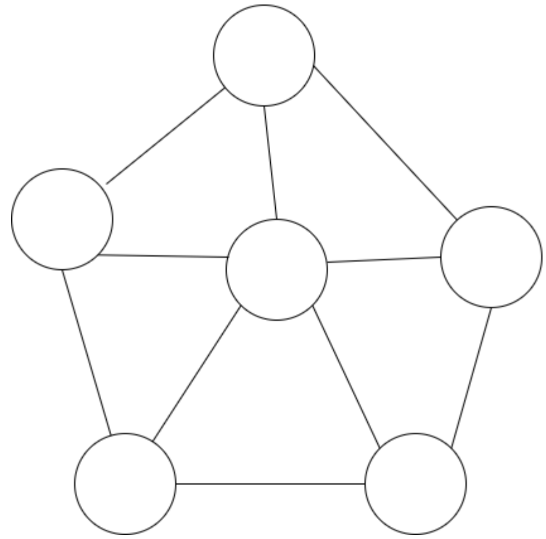


Figura 16: Grafo B

13.1 Quais são os valores de Δ e δ paras esses grafos?

1. Grafo A:
   - Δ: 2 (pois há n-2 vértices de grau 2).
   - δ: 1 (pois há 2 vértices de grau 1).
2. Grafo B:
   - Δ: 4 (pois há 1 vértice de grau 4).
   - δ: 3 (pois há n-1 vértices de grau 3).

13.2 Qual é o número de arestas desses grafo?

1. Grafo A: 5
2. Grafo B: 9

14 É possível obter os grafos simples $G(V, E)$ com os respectivos conjuntos de vértices $V = v_1, v_2, \ldots, v_n$ a partir das respectivas sequências de graus$\{g(v_1), g(v_2), g(v_3), \ldots, g(v_n)\}$, abaixo listadas? (verifique as propriedades referentes a graus e se necessário aplique procedimento de seq. gráfica)

a) $3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6$

b) $1, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 8, 9$

c) $3, 3, 2, 2, 1, 1$

d) $7, 6, 4, 3, 3, 2$

e) $3, 3, 1, 1$

f) $5, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1$

14.1 Resposta:

a) Não

b) Não

c) Sim

d) Não

e) Não

f) Sim

15 Um grafo G é regular se todos os seus vértices apresentam o mesmo grau. Se $\delta(G)$ é o grau mínimo em G e $\Delta(G)$ o seu grau máximo, prove ou forneça contraexemplo: se $\delta(G) = \Delta(G)$ então G é regular. Prove ou forneça contraexemplo: se G é regular então $\delta(G) = \Delta(G)$

e vice-versa.

Primeiro, vamos provar que se $\delta(G) = \Delta(G)$, então G é regular.

Prova: Seja G um grafo tal que $\delta(G) = \Delta(G)$. Isso significa que todos os vértices de G têm o mesmo grau mínimo e máximo. Como todos os vértices apresentam o mesmo grau, podemos concluir que G é um grafo regular.

Agora, vamos provar que se G é regular, então $\delta(G) = \Delta(G)$.

Prova: Seja G um grafo regular, o que significa que todos os vértices têm o mesmo grau. Como todos os vértices têm o mesmo grau, o grau mínimo e o grau máximo são iguais para todos os vértices. Portanto, podemos concluir que $\delta(G) = \Delta(G)$.

Em suma, temos provas para ambas as afirmações:

1. Se $\delta(G) = \Delta(G)$, então G é regular.
2. Se G é regular, então $\delta(G) = \Delta(G)$.

Referências