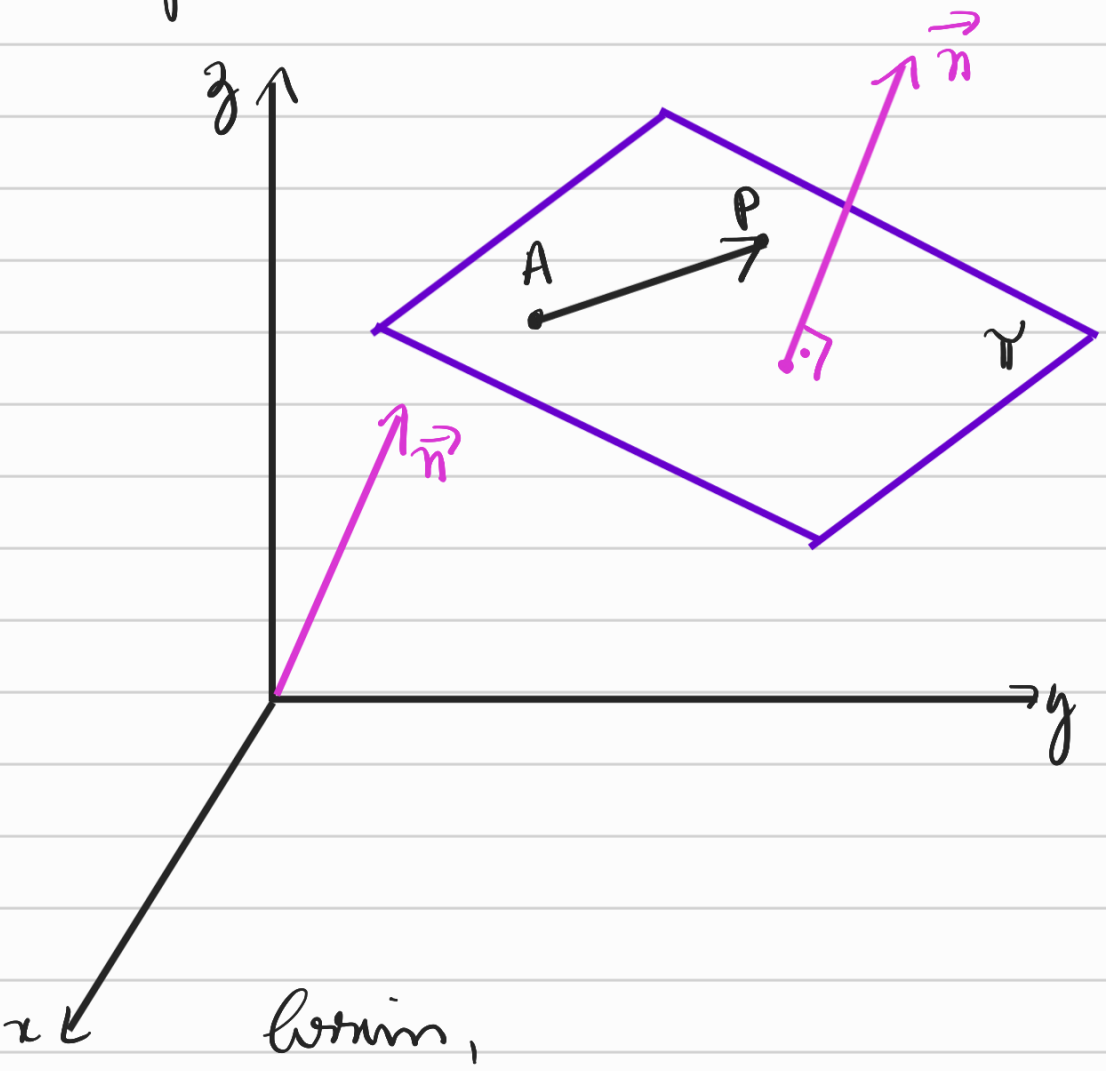
Equação geral do plano

Seja $A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{n} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ um vetor normal (ortogonal) ao plano.

O plano π pode ser definido como o conjunto de todos os pontos $P(x, y, z)$ do espaço tais que o vetor $\vec{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$.



Assim,

$$P \text{ pertence ao plano} \iff \vec{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\iff (x - x_1, y - y_1, z - z_1) \cdot (a, b, c) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad (x-x_1)a + (y-y_1)b + (z-z_1)c = 0$

ou

$$\boxed{a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-1) = 0}$$

ou ainda,

$$ax - ax_1 + by - by_1 + cz - c = 0$$

$$\Rightarrow \quad ax + by + cz + \underbrace{(-ax_1 - by_1 - c)}_{d} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

(equação geral ou cartesiana do plano π)

Exemplo: um plano que passa por $(0,1,-2)$ e tem vetor normal $\vec{n} = (-1,4,10)$ tem eq ...

$\boxed{\text{OBS}}$ (1) O plano é perfeitamente identificado por um vetor normal $\vec{n} \neq \vec{0}$ e um ponto P.

(2) $\vec{n}$ é ortogonal a qualquer vetor contido em π.

(3) O vetor normal $\vec{n}$ é também normal a qualquer plano paralelo a π.

Como exemplo, o vetor normal $\vec{n} = (-1,3,4)$ é um vetor normal de qualquer plano da forma

$$-x+3y+4z+d=0 .$$

O que diferencia um plano de outro paralelo é o d.

Exemplo: Encontre a eq cartesiana do plano π que passa pelo ponto $A(3,1,-4)$ e é paralelo ao plano

$$\pi_1: \ 2x-3y+z-6=0 .$$

Qualquer ponto do plano π deve satisfazer

$$2(x-3)-3(y-1)+(z+4)=0$$

$$\Rightarrow 2x-6-3y+3+z+4=0$$

$$\Rightarrow \boxed{2x-3y+z+1=0} \quad : \pi$$

ou podemos usar

$$\pi : 2x-3y+z+d=0$$

e encontrar o valor de d substituindo $x=3$, $y=1$ e $z=-4$:

$$2\cdot 3-3\cdot 1+(-4)+d=0$$

$$\Rightarrow 6-3-4+d=0$$

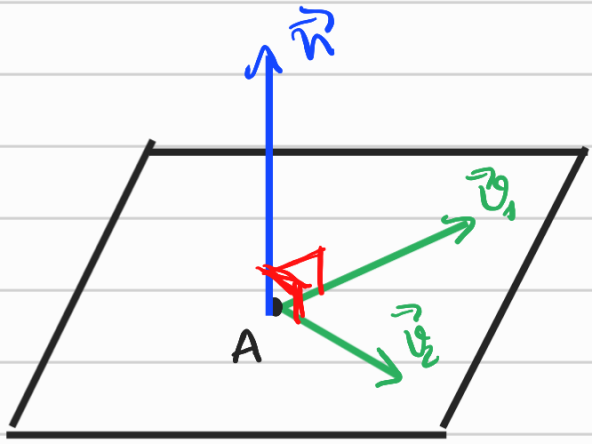
$$\Rightarrow \boxed{d=1}$$

$\boxed{\text{OBS}}$ Para obtermos pontos do plano, basta fixar valores aleatórios a duas das variáveis e encontrar a outra na equação do plano.

Determinação de um plano

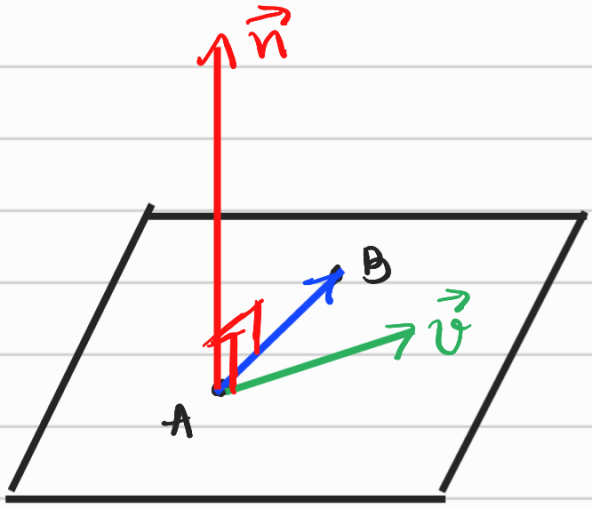
Apenas um plano é determinado nas seguintes situações:

(1) passa por um ponto A e é paralelo a dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não colineares



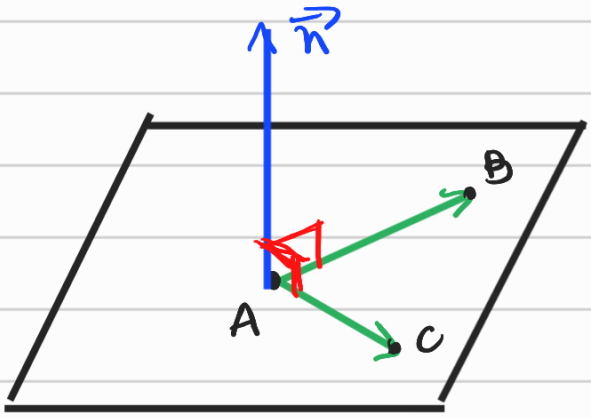
onde $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.

(2) Passa por dois pontos A e B e é paralelo a um vetor $\vec{v}$ não colinear ao vetor $\vec{AB}$.



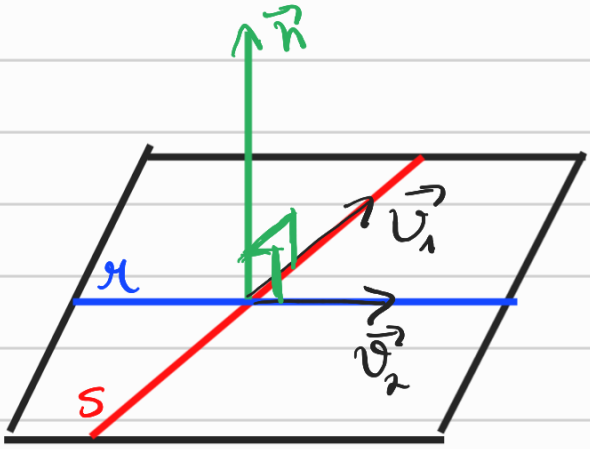
onde $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{v}$

(3) Passa por três pontos não colineares.



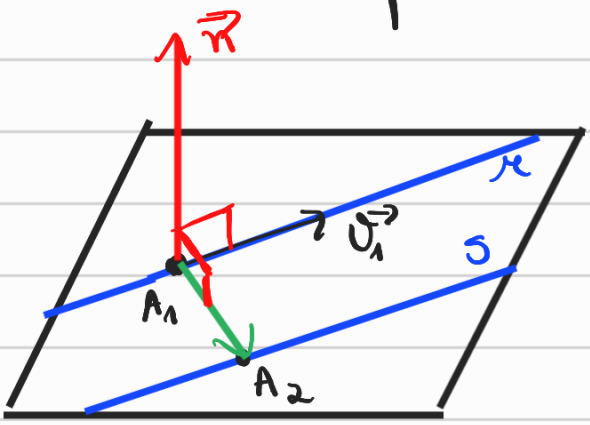
onde $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$.

(4) Contém duas retas concorrentes:



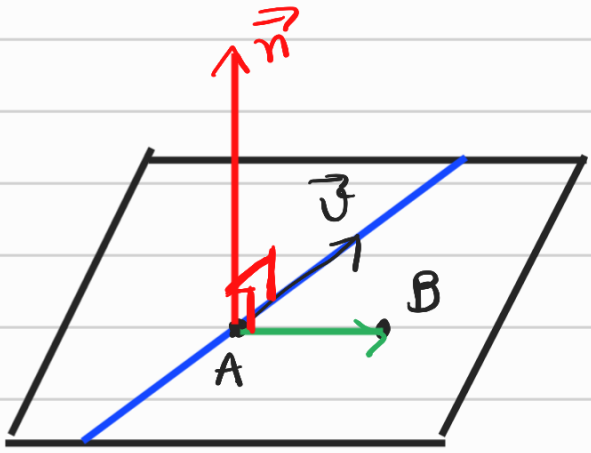
onde $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.

(5) Contém duas retas paralelas:



onde $\vec{n} = \vec{v}_1 \times \overrightarrow{A_1A_2}$

(6) Contém uma reta r e um ponto $B \notin r$:



onde $\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{AB}$.

$\boxed{\text{Exemplo:}}$ Encontre a equação do plano que passa pelo ponto $A(1,-3,4)$ e é paralelo aos vetores $\vec{v}_1 = (3,1,-2)$ e $\vec{v}_2 = (1,-1,1)$.

Temos que

$\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não são paralelos, pois

$$\frac{3}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{-2}.$$

Logo, juntamente com o ponto A, definem um plano com vetor diretor

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

$$= \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} - (\vec{k} + 2\vec{i} + 3\vec{j})$$
$$= -\vec{i} - 5\vec{j} - 4\vec{k}$$
$$= (-1, -5, -4).$$

Logo, a eq geral do plano é

$$-(x-1) - 5(y+3) - 4(z-4) = 0$$

$$\Rightarrow -x + 1 - 5y - 15 - 4z + 16 = 0$$
$$\Rightarrow -x - 5y - 4z + 2 = 0$$

ou $\boxed{\pi : x + 5y + 4z - 2 = 0.}$

Note que ambos os vetores $\vec{n} = (-1, -5, -4)$ e $-\vec{n} = (1, 5, 4)$ são vetores normais ao plano π.

Exemplo: Determine a equação geral do plano que contém as retas

28109
TADS

$$r_1: \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = -3x - 2 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4t \\ z = 3 - 6t \end{cases}$$

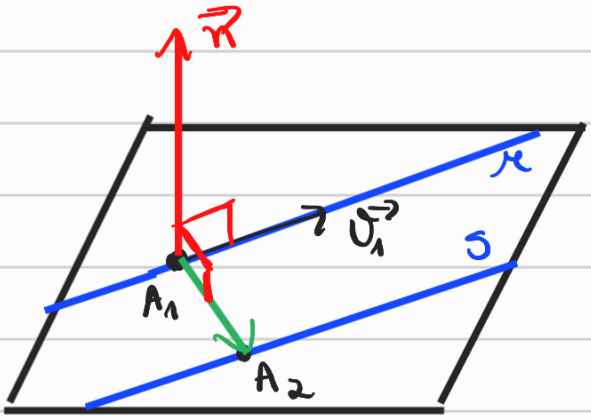
Note que

$\vec{v}_1 = (1, 2, -3)$ é vetor diretor de r_1.
$A_1(0, 1, -2)$ é um ponto de r_1

e $\vec{v}_2 = (2, 4, -6)$ é vetor diretor de r_2.
$A_2(-1, 0, 3)$ é um ponto de r_2.

Observe que $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$, pois $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1$.
Ainda r_1 e r_2 não são coincidentes, pois o ponto $A_2(-1, 0, 3)$ não está em r_1.

Assim, temos o caso



onde o vetor normal do plano é dado por

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \overrightarrow{A_1A_2},$$

com $\vec{A_1A_2} = (-1, -1, 5)$.

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{matrix}$$

$$= 10\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} - (-2\vec{k} + 3\vec{i} + 5\vec{j})$$
$$= 7\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$
$$= (7, -2, 1)$$

Portanto, a eq do plano é

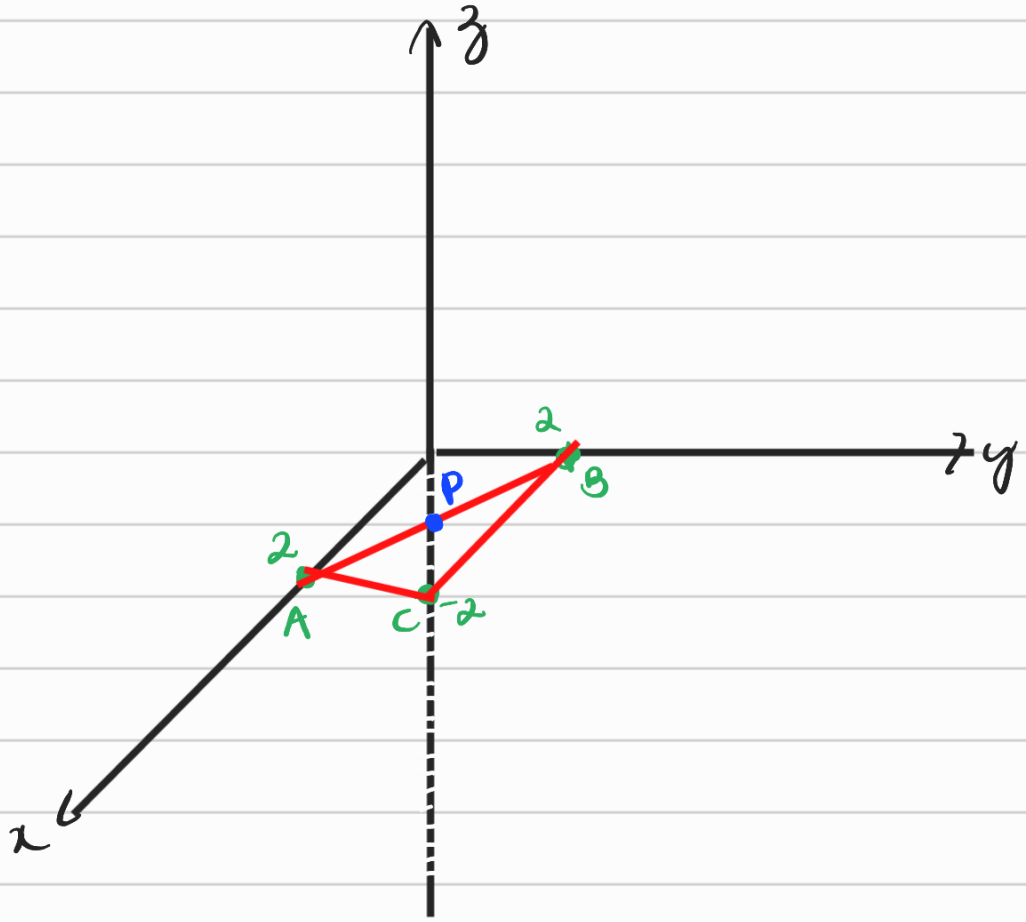
$$7(x-0) - 2(y-1) + (z+2) = 0$$

$$\Rightarrow 7x - 2y + 2 + z + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi : 7x - 2y + z + 4 = 0}$$

(20) lista $\quad x+y-z-2=0$

$A(2,0,0) \quad B(0,2,0) \quad C(0,0,-2)$



A área do triângulo é dada por $\dfrac{|\vec{AB}\times\vec{AC}|}{2}$.

Para encontrar a altura, precisamos do ponto P.
Temos

$$2\,\vec{AP} = \vec{AB}$$

$$\Rightarrow \quad 2(x-2,\ y-0,\ z-0) = (-2,2,0)$$

$$\Rightarrow \quad x-2=-1$$

$$y=1 \qquad \Rightarrow P(1,1,0)$$

$$z=0$$

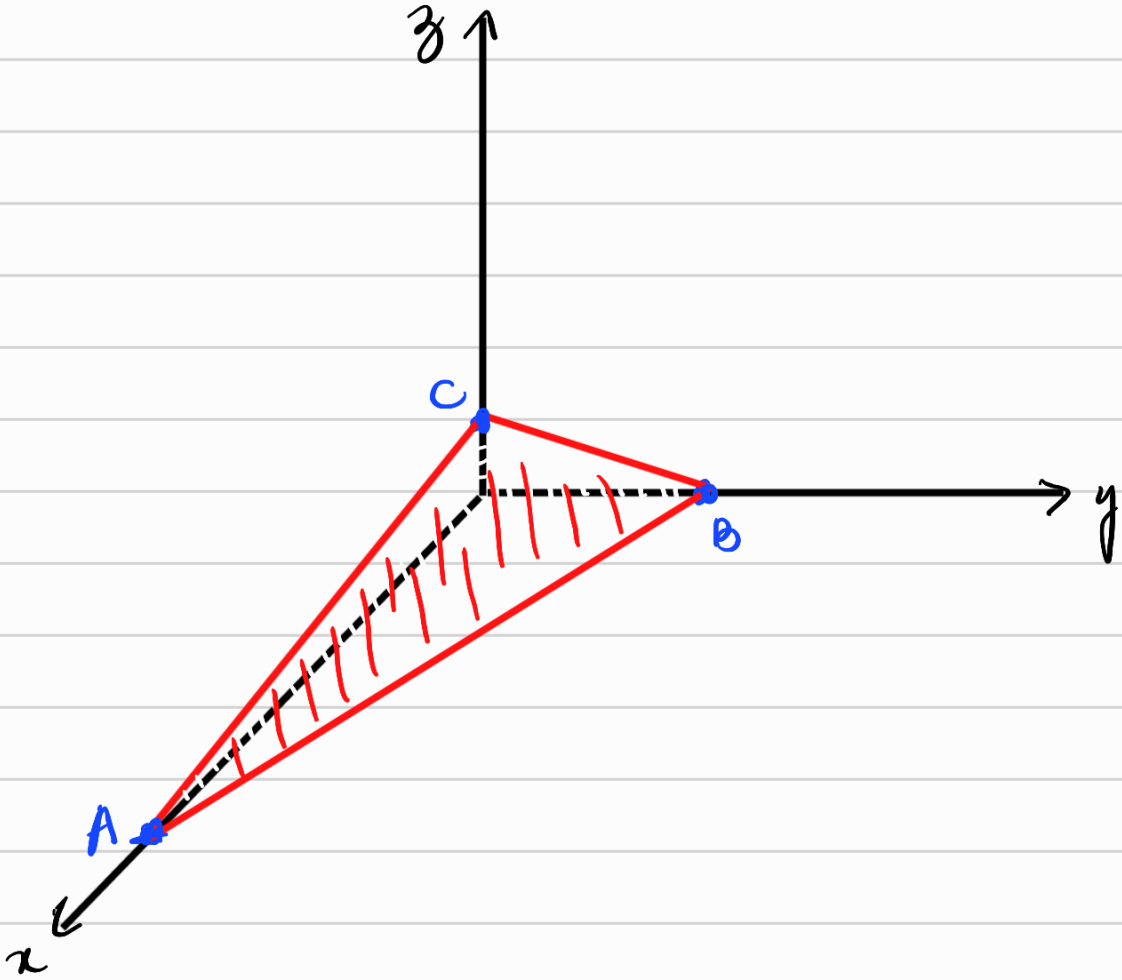
$$\Rightarrow h = |\vec{PC}| = |(-1,-1,-2)| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

(mostrar no geogebra)

$\boxed{\text{Exemplo}}$ Quando $a, b, c > 0$ e $d < 0$, a representação do plano $\pi: ax+by+cz+d=0$ no 1º octante é um triângulo: por exemplo, para

$$\pi: x+2y+6z-6=0,$$

temos



$A(6,0,0)$, $B(0,3,0)$ e $C(0,0,1)$ pertencem a π.