Operações Binárias

Definição: Sejam A, B e C conjuntos quaisquers. Então tem-se que:

(I) Uma Operação binária interna é uma função parcial do tipo $\oplus: A \times B \rightarrow C$;

(II) Uma operação Interna ao conjunto A é uma operação cujos operandos e contra-~~domínio são~~ definidos em A. Em particular, uma operação binário interna sobre A é uma função parcial do tipo $\otimes: A^2 \rightarrow A$

(III) Uma operação fechada é uma função total.

Propriedades: Seja $\oplus: A^2 \rightarrow A$ uma operação binária interna. Então $\oplus$ satisfaz a propriedade:

(I) Comutativa, quando $\forall a, b \in A \; (a \oplus b = b \oplus a)$

(II) Associativa, quando $\forall a, b, c \in A \; (a \oplus (b \oplus c)) = (a \oplus b) \oplus c)$

(III) Elemento Neutro, quando $\exists e \in A \; \forall a \in A \; (a \oplus e = a = e \oplus a)$

(IV) Elemento Absorvente, quando $\exists z \in A \; \forall a \in A \; (a \oplus z = z = z \oplus a)$

(V) Elemento Inverso, quando possui elemento neutro e e $\forall a \in A \; \exists \bar{a} \in A \; (a \oplus \bar{a} = e = \bar{a} \oplus a)$

Tipos de Algebra

- Grupoide: Fechado
- Semi-Grupo: Fechada, Associativa
- Monoide: Fechada, Associativa, Elemento Neutro
- Grupo: Fechada, Associativa, Elemento Neutro, Elemento Inverso.

obs: Se a operação for comutativa tem-se algebra abeliana, grupoide abeliano, monoide abeliano, ...

Supremo: $(x \uparrow y) \in A$

- $x R (x \uparrow y) \wedge y R (x \uparrow y)$
- $\forall d \in A \; (x R d \wedge y R d \rightarrow (x \uparrow y) R d)$

Tipos de Reticulados

- Distributivo: $\forall a, b, c \in A$; $a \downarrow (b \uparrow c) = (a \downarrow b) \uparrow (a \downarrow c)$ e $a \uparrow (b \downarrow c) = (a \uparrow b) \downarrow (a \uparrow c)$
- Limitado: Dado reticulado $\langle A, R \rangle$
  1. Elemento inicial: (caso exista); $0 \in A \; \forall a \in A \; (0 R a)$
  2. Elemento Terminal: (caso exista); $1 \in A \; \forall a \in A \; (a R 1)$
- Complementado: Um reticulado $\langle A, R \rangle$ com $\downarrow$ e $\uparrow$ como suas operações é complementado, se e somente se, $\forall a \in A, \exists \bar{a} \in A$ $(a \downarrow \bar{a} = 0 \wedge a \uparrow \bar{a} = 1)$

Teorema: Seja $\langle A, \oplus, e \rangle$ um monoide. Então $e \in A$ é o único elemento neutro do monóide.

Teorema: Seja $\langle A, \oplus, e \rangle$ um grupo. Então a propriedade do Cancelamento é satisfeito. Ou seja simultaneamente

(I) Cancelamento à direita

$\forall a, x, y \in A \; (x \oplus a = y \oplus a \rightarrow x = y)$

(II) Cancelamento à esquerda

$\forall a, x, y \in A \; (a \oplus x = a \oplus y \rightarrow x = y)$

Conjunto Parcialmente ordenado $\langle A, R \rangle$

- $R \subseteq A^2$
  - reflexiva;
  - transitiva;
  - antissimetrica;

Dado $\langle A, R \rangle$ relações de ordem parcial $x, y \in A$

- Limitantes Inferiores: $c \in A$ é um limitante inferior de x e y caso $(c R x \wedge c R y)$
- Limitantes Superiores: $d \in A$ é um limitante superior de x e y caso $(x R d \wedge y R d)$

- Ínfimo $(x \downarrow y) \in A$
  - $(x \downarrow y) R x \wedge (x \downarrow y) R y$
  - $\forall c \in A \; (c R x \wedge c R y \rightarrow c R (x \downarrow y))$