Correção Exercícios Grafos

Para os exercícios sobre “partições” do bipartido e multipartido contidos no arquivo “Bipartido.pdf”

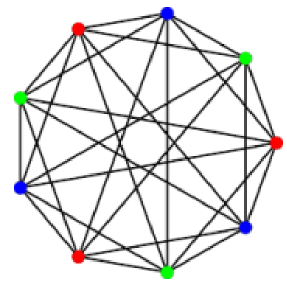
Grafo bipartido

- Qual é a condição para um grafo bipartido completo K_{p_1,p_2} ser regular?
- Qual é o menor grau e o maior grau de um grafo bipartido completo K_{p_1,p_2}?
- Qual é o maior número de arestas possível para um K_{p_1,p_2} completo e regular?
- Seja G(V,A) um grafo bipartido completo com:
  1. $|V|=|V1|+|V2| = t$ vértices;
  2. $|V1| = |V2|$.

  Prove que G tem a seguinte quantidade de arestas: $t^2/4$

Grafo bipartido

Na verdade, você pode ampliar ainda mais a aplicação do conceito e chegar ao grafo "multipartido" completo $K_{m,\ n,\ p,\ q\ \ldots,\ldots}$ Onde cada partição apresenta vértices com o grau máximo possível, porém, com adjacências apenas entre partições diferentes;



$K_{3,3,3}$

- Qual é a condição para um grafo multipartido completo $K_{p\_1,p\_2,p\_3,\ldots p\_i}$ ser regular?

- Qual é o menor grau e o maior grau de um grafo "multipartido" completo $K_{p\_1,p\_2,p\_3,\ldots p\_i}$, considerando que as partições têm tamanhos diferentes entre si?

- Qual é o maior número de arestas possível para um $K_{p\_1,p\_2,p\_3,\ldots p\_i}$ completo e regular?

Respostas

- Qual é a condição para um grafo bipartido completo $K_{p1,p2}$ ser regular?

- Seja G(V,E) um grafo bipartido completo:
    - V= V1 U V2, V1 ∩ V2 = ∅, |V1|= p1, |V2|=p2,
    - (vi,vj) ∈ E ⇔ vi ∈ V1 e vj ∈ V2 ou o contrário vj ∈ V1 e vi ∈ V2,
    - Sendo um grafo completo:
        - Cada vi ∈ V1 apresenta o maior grau possível grau(vi) = |V2| (1) e
        - Cada vj ∈ V2 apresenta o maior grau possível grau(vj) = |V1| (2);

Além disso, para G ser regular teremos que:

grau(vi) = grau(vj)=constante;

Substituindo em (1) e (2) tem-se

grau(vi) = |V2| =grau(vj) = |V1| ⇒ |V2| = |V1|.

Outra forma:

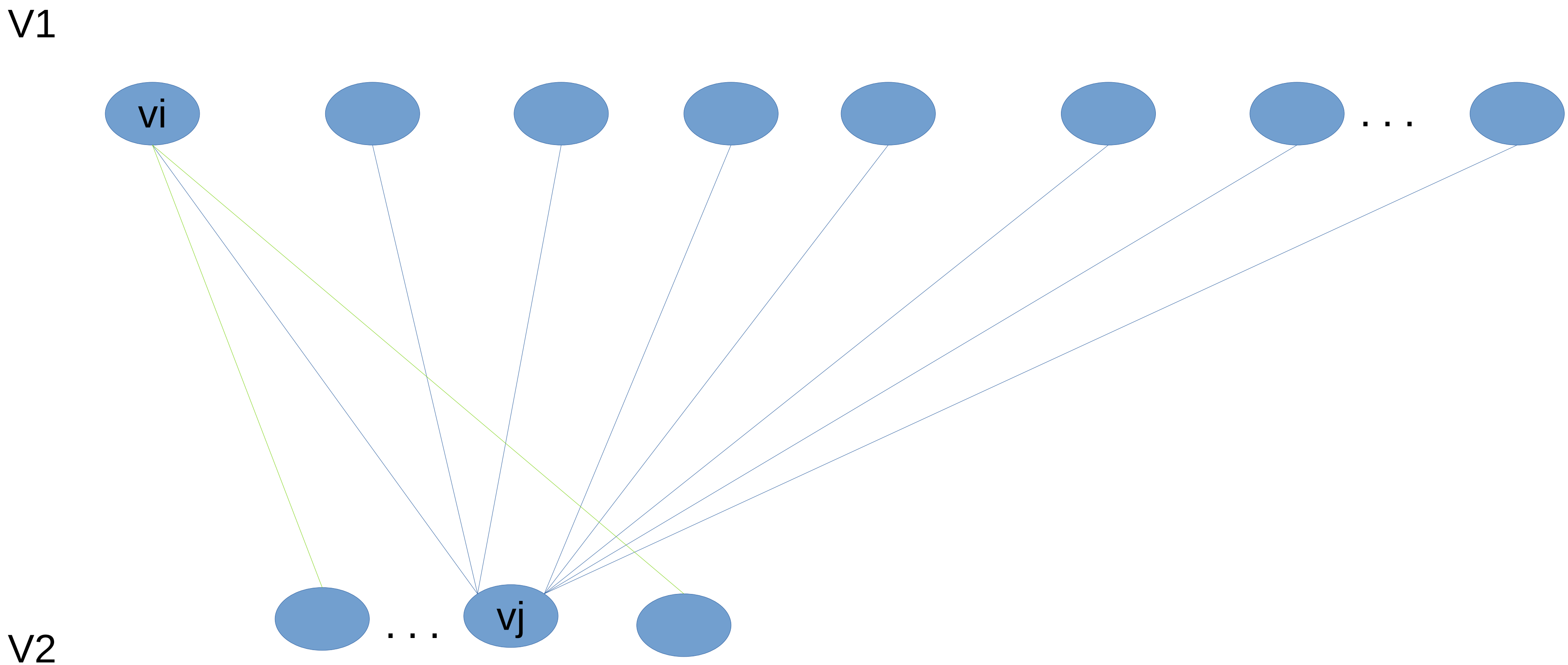
considere G como bipartido completo e regular com |V1| !=|V2|, por exemplo, |V1| > |V2|. Nessa hipótese, os vértices da partição menor possuiriam grau maior do que os vértices da participação maior, o que seria um absurdo pois considerou-se o grafo como regular. Portanto, |V2| = |V1|.

- Qual é o menor e o maior grau de um grafo bipartido completo $K_{p1,p2}$?
- Seja G(V,E) um grafo bipartido completo:
  - V= V1 U V2, V1∩V2 = ∅, |V1|= p1, |V2|=p2,
  - (vi,vj) ∈ E ⇔ vi ∈ V1 e vj ∈ V2 ou o contrário vj ∈ V1 e vi ∈ V2,
  - Trata-se de um grafo bipartido completo:
    - Cada vi ∈ V1 apresenta o maior grau possível grau(vi) = |V2| (1) e
    - Cada vj ∈ V2 apresenta o maior grau possível grau(vj) = |V1| (2);

1. Caso G seja regular, teremos que Δ(Grau máximo) = δ (Grau mínimo) conforme deduzido no exercício anterior;

2. Caso não seja regular: |V1| ≠ |V2|:
  - Seja vi ∈ V1 e |V1| > |V2|:
    - Conforme (1) grau(vi) = |V2| e δ (Grau mínimo) equivaleria a |V2| (tamanho da menor partição);
    - Conforme (2) grau(vj) = |V1| e Δ(Grau máximo) equivaleria a |V1| (tamanho da maior partição).
  - Raciocínio similar ocorre para vj ∈ V2 e |V2| > |V1|

- Conclusão:
  - Δ(Grau máximo) = tamanho da Maior partição
  - δ (Grau mínimo) = Tamanho da Menor partição



|V1| > |V2|

- Qual é o maior número de arestas possível para um $K_{p1,p2}$ completo e regular?

Vimos anteriormente que:

- Grau(vi) = |V1|= |V2|
- O grafo é regular, todos os vértices possuem o mesmo grau e o tamanho das duas partições são iguais.

$$\sum_{v \in V} grau(v) = 2|A| \Rightarrow \sum_{v_i \in V1} grau(v_i) + \sum_{v_j \in V2} grau(v_j) = 2|A| \Rightarrow$$
$$|V1| * |V2| + |V2| * |V1| = 2|A| \Rightarrow$$
$$2 * |V1| * |V2| = 2|A| \Rightarrow$$
$$|A| = |V1| * |V2|$$

- Seja G(V,A) um grafo bipartido completo com:

  I. $|V|=|V1|+|V2| = t$ vértices;

  II. $|V1| = |V2|$.

  Prove que G tem $t^2/4$ arestas

Como $|V1| = |V2|$ temos: $|V1| + |V1| = t$,
assim: $2|V1| = t$, e $|V1| = t/2$

O mesmo pode ser feito para $|V2|$, repetindo o mesmo processo temos $|V2| = t/2$

- Do exercício anterior $|A| = |V1| * |V2|$, então:
- $|A| = t/2 * t/2 = t^2/4$

- Qual é a condição para um grafo multipartido completo $K_{p1,p2,p3,\ldots pm}$ ser regular?

Sendo G(V,A) um grafo multipartido completo com *m* partições, V=V1 U V2 U V3 U…U Vm, V1∩V2∩V3∩Vm = ∅, onde cada vértice apresenta o maior número de adjacências possível (maior grau possível), ou seja, dado um vi ∈ Vi o grau(vi) = soma dos tamanhos das demais partições:

$$grau(v_i) = \sum_{V_j \in V - V_i} |V_j|$$

Suponha G seja regular e que Vi seja a única partição de tamanho diferente das *m-1* demais partições de tamanho igual a *t*. Seja Vi a partição de tamanho menor do que as demais |Vi|<*t*:

1. Tomando-se um vértice vi ∈ Vi, cujo grau(vi) corresponde à soma dos tamanhos das m-1 partições de tamanho *t* e maiores do que Vi.

$$grau(v_i) = \sum_{V_j \in V - V_i} |V_j| = (m-1)*t$$

2. Agora tomando vj ∈ V-Vi o grau(vj) corresponde à soma dos tamanhos das m-1 partições de tamanho *t* e maiores do que Vi.

$$grau(v_j) = \sum_{V_w \in V - V_j} |V_w| = (m-2)*t + |Vi|$$

Para G ser regular grau(vi)=grau(vj) → (m-1)t=(m-2)t+|Vi| → |Vi|=t, porém |Vi| < *t* e, portanto, grau(vi) será maior do que o grau(Vj) uma contradição, pois G foi tomado como regular. Conclusão similar é encontrada fazendo |Vi| > *t.* Dessa forma, para G ser regular as partições todas têm que apresentar o mesmo tamanho.

- Qual é o menor grau e o maior grau de um grafo "multipartido" completo $K_{p1,p2,p3,\ldots,pm}$, considerando que as partições têm tamanhos diferentes entre si?

Seja G(V,A) um grafo multipartido completo com *m* partições, onde:

V=V1 U V2 U V3 U…U Vm, V1∩V2∩V3∩Vm = ∅,

V1< V2< V3< … < Vm

a) Seja um v1 ∈ V1 o grau(v1) = soma dos tamanhos das partições maiores;

$$grau(v_1) = \sum_{V_j \in V - V_1} |V_j| = T1$$

b) Seja vm ∈ Vm, o grau(vm) = soma dos tamanhos das demais partições

$$grau(v_m) = \sum_{V_j \in V - V_m} |V_j| = T2$$

De fato T1 > T2

- pois grau(vi) é calculado sobre os tamanhos das maiores partições V-V1, ao passo que o grau(vm) exclui a própria Vm, a maior partição, no cômputo de T2, pois grau(vm) á calculado em vj ∈ V-Vm, portanto exclui a maior partição

- Qual é o menor grau e o maior grau de um grafo "multipartido" completo $K_{p1,p2,p3,\ldots pm}$, considerando que as partições têm tamanhos diferentes entre si?
- Ordenando-se das *m* partições pelos seus tamanhos:

1) O vértice de maior grau ocorre na partição de menor tamanho; o menor grau equivale à soma dos tamanhos das demais partições;

Δ(Grau máximo) = T1

2) O vértice de menor grau ocorre na partição de maior tamanho; o maior grau equivale à soma dos tamanhos das demais partições;

δ (Grau mínimo) = T2

- Qual é o maior número de arestas possível para um $K_{p1,p2,p3,\ldots pm}$ completo e regular?

$$\sum_{v \in V} grau(v) = 2|A| \quad \Rightarrow$$

$$|V1| * \sum_{V_i \in V - V1} |Vi| \quad + \quad |V2| * \sum_{V_i \in V - V2} |Vi| \quad + \ldots + \quad |Vm| * \sum_{V_i \in V - Vm} |Vi| = 2|A|$$

Como o grafo é regular,sabemos que as *m* partições têm o mesmo tamanho N, então teremos :

$$\sum_{v \in V} grau(v) = 2|A| \; \Rightarrow$$

$$N * \sum_{V_i \in V - V1} N \; + \; N * \sum_{V_i \in V - V2} N \quad + \ldots + \quad N * \sum_{V_i \in V - Vm} N = 2|A|$$

$$\Rightarrow N \left(\sum_{V_i \in V - V1} N \; + \; \sum_{V_i \in V - V2} N \quad + \ldots + \quad \sum_{V_i \in V - Vm} N \right) = 2|A| \Rightarrow$$

$$N \left(\sum^{m} \sum^{m-1} N \right) = 2|A| \Rightarrow N\left(m(m-1)N\right) = 2|A| \Rightarrow |A| = \frac{N^2(m^2 - m)}{2}$$

- $\beta * [\beta * (M-1)] \quad + \quad \beta * [\beta * (M-1)] \quad + \dots = 2|A|$
-
- $\beta(M * (M-1) * \beta) = 2|A|$
- $\beta^2 M * (M-1) = 2|A|$
- $\beta^2 M^2 - \beta^2 M = 2|A|$
-
- $|A| = (\beta^2 * (M^2 - M))/2$