LMA0001 – Lógica Matemática
Aula 08
Equivalência Lógica

Karina Girardi Roggia
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

2020

Com base na relação de consequência, podemos definir agora quando duas fórmulas são **logicamente equivalentes**.

Escrevemos

$$A \equiv B$$

se, e somente se,

$$A \vDash B \quad \text{e} \quad B \vDash A$$

Intuitivamente: A e B possuem a mesma tabela-verdade.

Equivalências notáveis

Dupla negação: $\neg\neg p \equiv p$

Implicação como disjunção: $p \to q \equiv \neg p \vee q$

Associatividade de $\wedge$: $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

Associatividade de $\vee$: $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

De Morgan (1): $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$

De Morgan (2): $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$

Distributividade de $\wedge$ sobre $\vee$: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Distributividade de $\vee$ sobre $\wedge$: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Equivalências entre conectivos

Considerando a equivalência lógica, existe certa *redundância* no conjunto de conectivos básicos.

Podemos representar $\vee$ e $\rightarrow$ somente utilizando $\wedge$ e $\neg$:

- $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$

Portanto, podemos definir o cálculo proposicional utilizando somente $\wedge$ e $\neg$, *sem perder poder de expressão*.

Algumas versões do cálculo proposicional introduzem conectivos adicionais como o *ou exclusivo* e a *dupla implicação*.

Ou exclusivo

O **ou exclusivo**, denotado

$$A \oplus B$$

difere do *ou inclusivo* por retornar falso quando ambas as afirmações são verdadeiras.

Tabela-verdade:

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Equivalência:

$$A \oplus B \quad \equiv \quad (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

Dupla implicação

A **dupla implicação**, denotada

$$A \leftrightarrow B$$

é verdade quando A e B são ambos verdadeiros ou ambos falsos.

Tabela-verdade:

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Equivalência:

$$A \leftrightarrow B \quad \equiv \quad (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \quad \equiv \quad (A \to B) \wedge (B \to A)$$

Exercícios

1. Defina os conectivos $\rightarrow$ e $\wedge$ utilizando somente $\vee$ e $\neg$, e mostre que as equivalências valem através de tabelas-verdade.
2. Considere o conectivo representado pela tabela-verdade a seguir:

A	B	$A \uparrow$ B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

   Descreva os operadores $\wedge$ e $\neg$ utilizando somente $\uparrow$, e mostre a validade das equivalências através de tabelas-verdade.