TEG

Gilmário B. Santos

gilmario.santos@udesc.br

http://www.joinville.udesc.br/portal/pagina/gilmario

Automorfismo

Um automorfismo de um grafo G é um isomorfismo de G para si próprio.

Dessa forma, um automorfismo é um mapeamento dos vértices do grafo G de volta aos vértices dele mesmo de modo que o grafo resultante seja isomórfico com G.

https://mathworld.wolfram.com/GraphAutomorphism.html

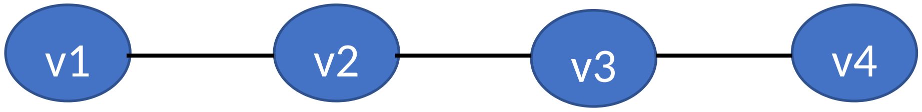
Automorfismo

As matrizes de adjacências entre dois grafos G e G' são iguais se houver automorfismo entre eles.

Verifique via matriz de adjacências, se os mapeamentos são automorfismos para o grafo abaixo:

a) v1 → v4; v4 → v1; v2 → v2; v3 → v3

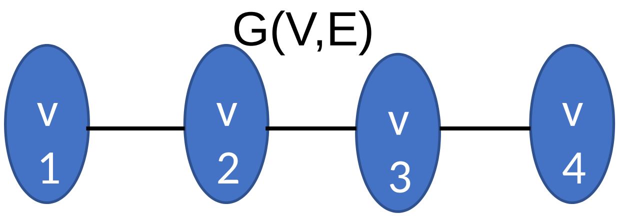
b) v1 → v4; v4 → v1; v2 → v3; v3 → v2



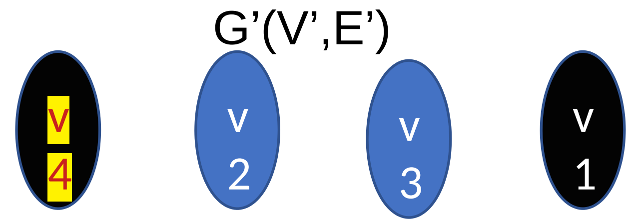
(Prestes, Edson UFRGS):

Automorfismo

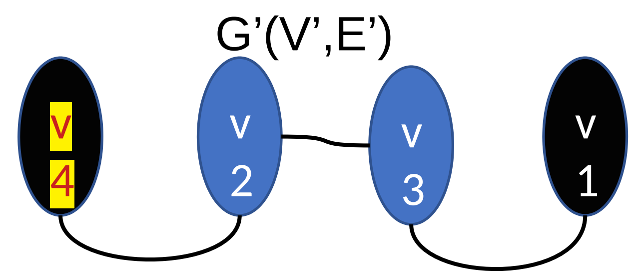
a) G’ é um automorfismo de G, considerando o mapeamento:
v1 → v4;   v4 → v1;   v2 → v2;   v3 → v3 ?



v	f(v)
v1	v4
v4	v1
v2	v2
v3	v3



Em termos das arestas sabemos que:
(v1,v2) ∈ E → (f(v1),f(v2))=(v4,v2) ∈ E’
(v2,v3) ∈ E → (f(v2),f(v3))=(v2,v3) ∈ E’
(v3,v4) ∈ E → (f(v3),f(v4))=(v3,v1) ∈ E’

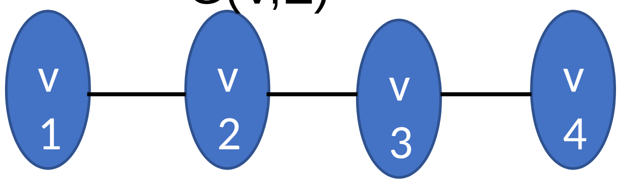


(Prestes, Edson UFRGS):

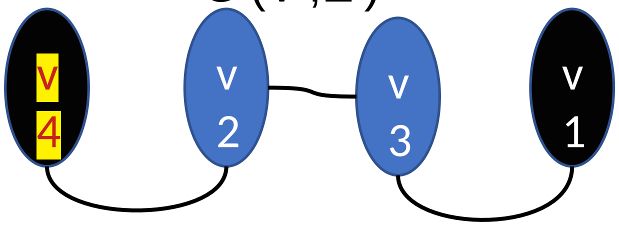
Automorfismo

a) G’ é um automorfismo de G?

G(V,E)



G’(V’,E’)



	v1	v2	v3	v4
v1		1		
v2	1		1	
v3		1		1
v4			1	

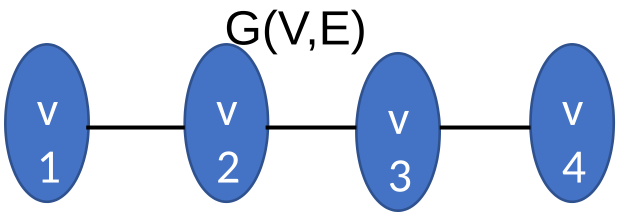
	v1	v2	v3	v4
v1			1	
v2			1	1
v3	1	1		
v4		1		

As matrizes de adjacências não são iguais, não existe um automorfismo da bijeção proposta

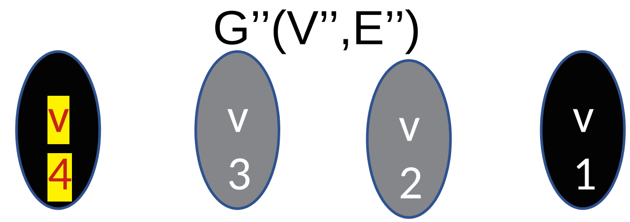
(Prestes, Edson UFRGS):

Automorfismo

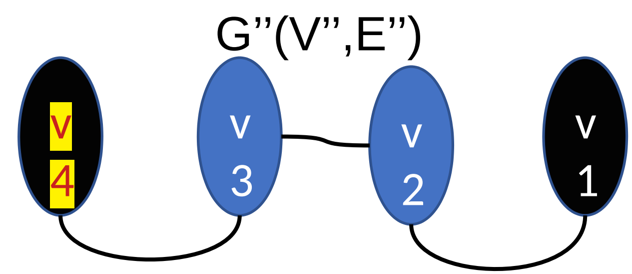
b) G’ é um automorfismo de G, considerando o mapeamento:
v1 → v4; v4 → v1; v2 → v3; v3 → v2 ?



v	f(v)
v1	v4
v4	v1
v2	v3
v3	v2



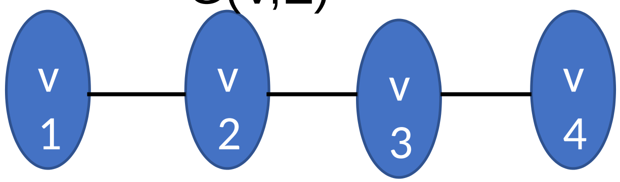
Em termos das arestas sabemos que:
(v1,v2) ∈ E → (f(v1),f(v2))=(v4,v3) ∈ E’’
(v2,v3) ∈ E → (f(v2),f(v3))=(v3,v2) ∈ E’’
(v3,v4) ∈ E → (f(v3),f(v4))=(v2,v1) ∈ E’’



Automorfismo

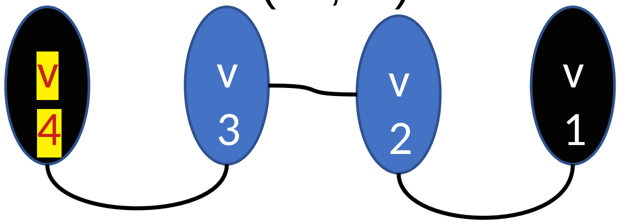
b) G’’ é um automorfismo de G?

G(V,E)



	v1	v2	v3	v4
v1		1		
v2	1		1	
v3		1		1
v4			1	

G’’(V’’,E’’)



	v1	v2	v3	v4
v1		1		
v2	1		1	
v3		1		1
v4			1	

As matrizes de adjacências são iguais, existe um automorfismo da bijeção proposta

(Prestes, Edson UFRGS):

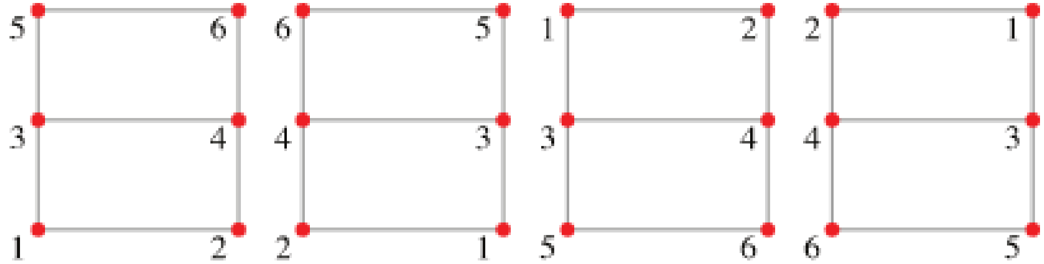
Grupo de Automorfismo

O conjunto de automorfismos define um grupo de permutação conhecido como o grupo de automorfismo do grafo.

Os grupos de automorfismo de um grafo caracterizam suas simetrias e são muito úteis na determinação de algumas de suas propriedades.

Por exemplo, o grafo do tipo grade $G_{2,3}$ tem quatro automorfismos: (1, 2, 3, 4, 5, 6), (2, 1, 4, 3, 6, 5), (5, 6, 3 , 4, 1, 2) e (6, 5, 4, 3, 2, 1). Eles correspondem: ao próprio G, G invertido da esquerda para a direita, G invertido de cima para baixo e G invertido da esquerda para a direita e de cima para baixo.

https://mathworld.wolfram.com/GraphAutomorphism.html



Grupo de Automorfismo

Não existe nenhum algoritmo polinomial conhecido para teste de isomorfismo entre grafos.

A determinação de automorfismos é um problema de complexidade equivalente ao problema de isomorfismo de grafos.

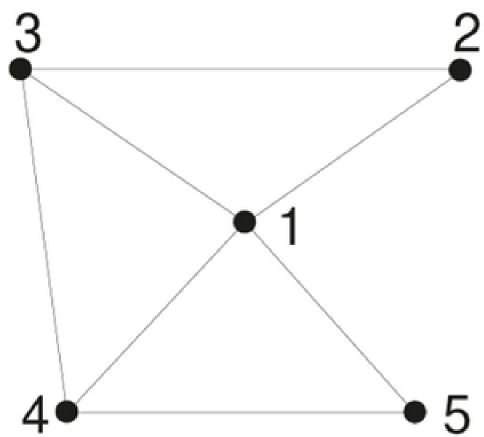
Na verdade, o problema de identificação de grafos isomórficos parece cair numa fenda entre P e NP-completo[1].

1 https://mathworld.wolfram.com/GraphIsomorphismComplete.html

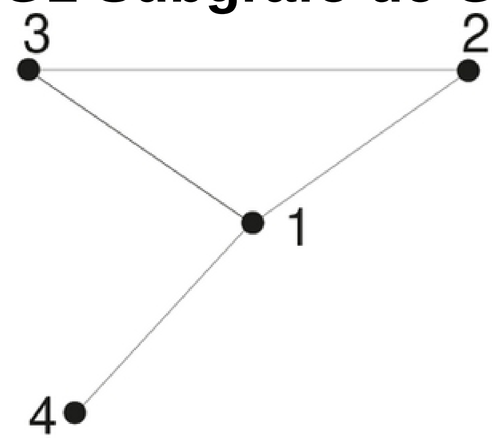
Subgrafo

- Um subgrafo G1(V1,E1) de um grafo G(V,E) é um grafo tal que V1 $\subseteq$ V e E1 $\subseteq$ E (Netto, 2017).

G



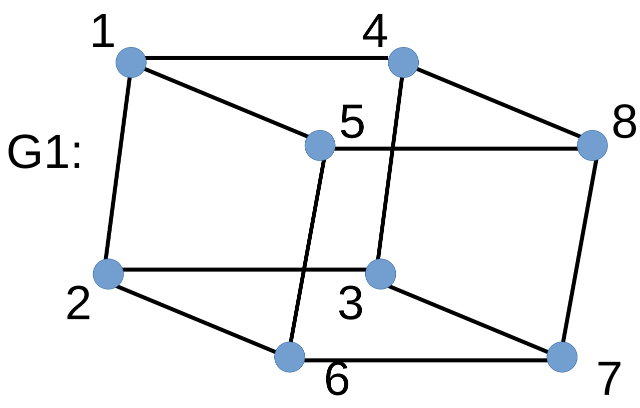
G1 Subgrafo de G

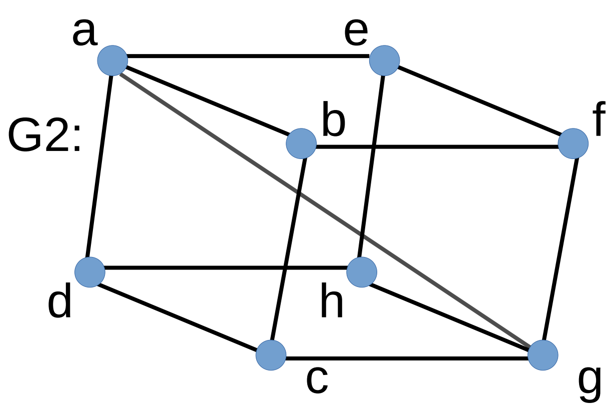


Subgrafo

- Um subgrafo G1(V1,E1) de um grafo G(V,E) é um grafo tal que V1 $\subseteq$ V e E1 $\subseteq$ E (Netto, 2017);
- Dois grafos não são isomorfos se um deles contém um subgrafo que não pertence ao outro (Goldbarg,2012)

O subgrafo de G2, com vértices {a,g}, não está contido em G1. Portanto, G2 não pode ser um isomorfo de G1

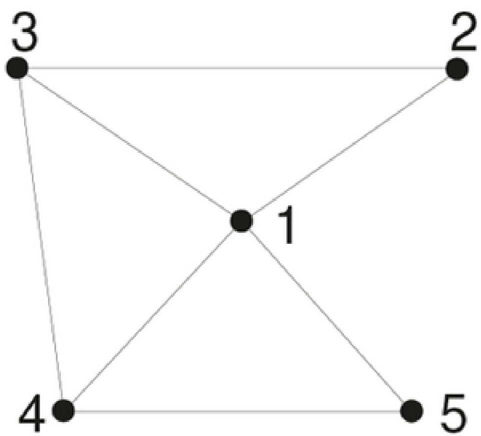




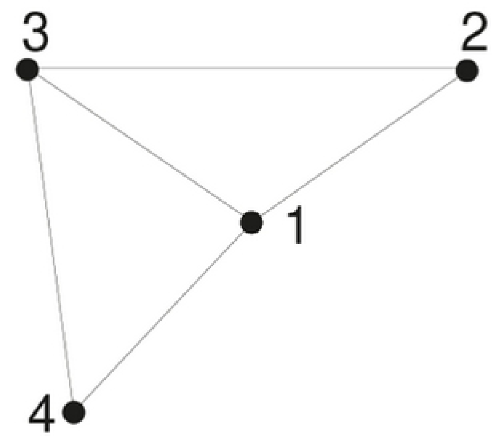
Subgrafo Induzido

- Um subgrafo G1(V1,E1) de um grafo G(V,E) é um grafo tal que $V1 \subseteq V$ e $E1 \subseteq E$. Além disso, se para cada vértice $v \in V1$ e $w \in V1$, temos que a aresta $(v,w) \in E$ e $(v,w) \in E1$, então o subgrafo G1 é induzido por G.
- Informalmente, um subgrafo induzido por um conjunto de vértices W mantém todas as arestas originais de G que possuem seus dois extremos em W.

G

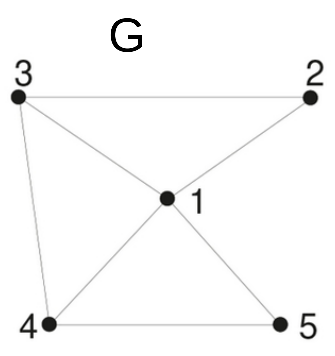


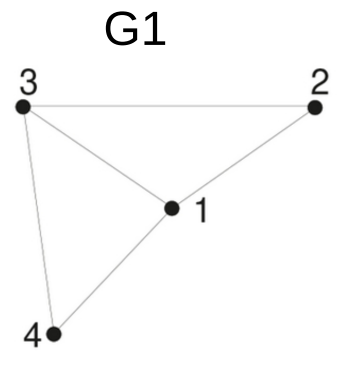
G1 subgrafo induzido de G:
Todo par de vértices de G1 que tenha aresta em G, este par também terá aresta em G1



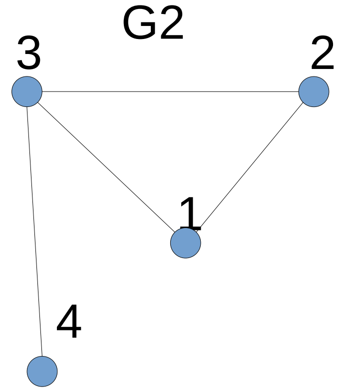
Subgrafo Induzido

- G1 subgrafo induzido de G: todo par de vértices de G1 que tenha aresta em G, este par também terá aresta em G1.





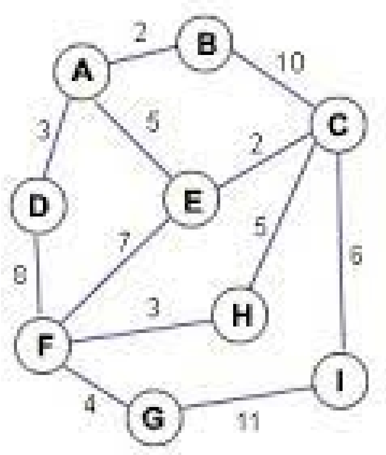
Todo par (u,v) de G1 tem arestas em G e em G1, portanto, G1 é subgrafo induzido de G.

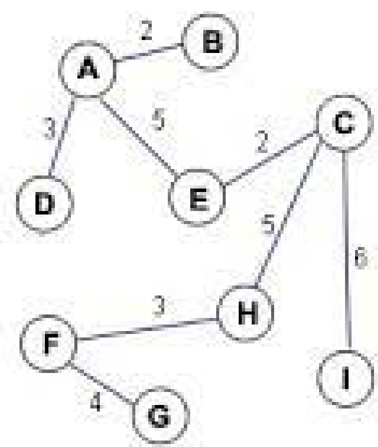


(1,4) é um vértice de G2 que possui aresta em G mas não em G2, desa forma, G2 não é subgrafo induzido de G.

Subgrafo Gerador

- Um subgrafo gerador ("spanning subgraph") de G é um subgrafo H de G tal que V (H) = V (G). Em outras palavras, H tem os mesmos vértices de G, mas não necessariamente todas as arestas de G.
- Exemplo: G (esquerda) e uma árvore geradora de G (direita)





Goldbarg, Marco. Grafos. Disponível em: Minha Biblioteca, Grupo GEN, 2012.

Netto, P.O.B. e Jurkiewicz, S.. Grafos: introdução e prática. Disponível em: Minha Biblioteca, (2nd edição). Editora Blucher, 2017.

Prestes, Edson. https://www.inf.ufrgs.br/~prestes/Courses/Graph%20Theory/Livro/LivroGrafos.pdf

Szwarcfiter, J.L. Teoria computacional de grafos: Os algoritmos

Wilson, R.J. Introduction to Graph Theory