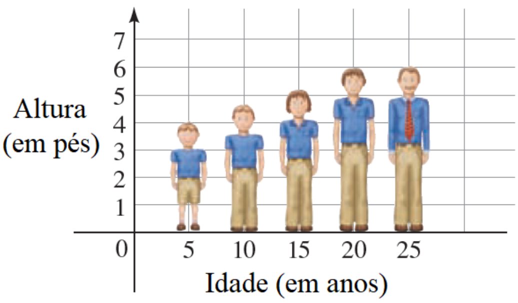
Universidade do Estado de Santa Catarina
Centro de Ciências Tecnológicas
Departamento de Matemática

Projeto Pré-Cálculo
Funções

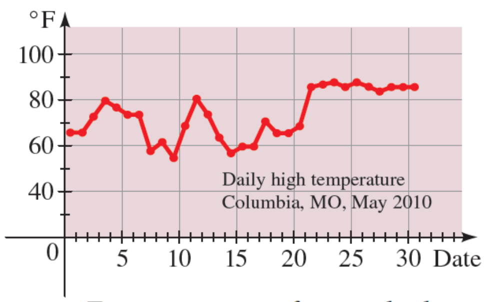
1. Videoaula

Em quase todos os fenômenos físicos, observamos que uma quantidade depende de outra. Por exemplo, sua altura depende da sua idade, a temperatura depende da data, o custo de envio de uma carta depende do seu peso.

Figura 1. Fenômenos físicos.



Altura em função da idade



Temperatura em função da data

Carta e Cartão Postal (2020)

Gramas	Preços (reais)
$0 < g \leq 20$	2,05
$20 < g \leq 50$	2,85
$50 < g \leq 100$	3,95
$100 < g \leq 150$	4,80
$150 < g \leq 200$	5,65
$200 < g \leq 250$	6,55
$250 < g \leq 300$	7,50

Postagem em função do peso

DEFINIÇÃO DE FUNÇÕES

Uma **função** $f : A \to B$ é uma regra que atribui a cada elemento x em um conjunto A exatamente um elemento, chamado $f(x)$, em um conjunto B.

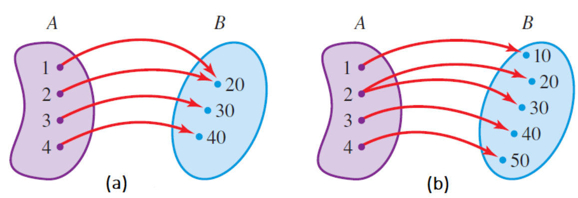
- O símbolo $f(x)$ é lido como "f de x" ou "f em x" e é chamado de valor de f em x, ou a imagem de x em f.
- O conjunto A é chamado de domínio da função.
- A imagem de f é o conjunto de todos os valores possíveis de $f(x)$, para os quais x varia em todo o domínio, isto é,

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

- O símbolo que representa um número arbitrário no domínio de uma função f é chamado de variável independente. O símbolo que representa um número na imagem de f é chamado de variável dependente. Portanto, se escrevermos $y = f(x)$, x é a variável independente e y é a variável dependente.

Outra maneira de visualizar uma função f é através de um diagrama de flechas. Cada seta associa uma entrada de A à uma saída correspondente em B.

Figura 2. Diagramas.



Como uma função associa *exatamente uma saída a cada entrada*, apenas o diagrama do item (a) representa uma função.

Se a função for dada por uma expressão algébrica e o domínio não for declarado explicitamente, então por convenção é o conjunto de todos os números reais para os quais a expressão é definida. Denotamos o domínio de f por $\mathrm{Dom}(f)$.

Exemplo 1. Uma função é definida pela fórmula $f(x) = x^2 + 4$.

(a) Calcule $f(-2), f(0), f(\sqrt{2}), f(2)$ e $f(5)$.
Temos que
- $f(-2) = (-2)^2 + 4 = 8$,
- $f(0) = 0^2 + 4 = 4$,
- $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + 6 = 6$,
- $f(2) = 2^2 + 4 = 8$ e
- $f(5) = 5^2 + 4 = 29$.

(b) Determine o domínio e a imagem de f.
$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(f) = [4, +\infty)$.

Exemplo 2. Um plano de telefone celular custa R$ 39 por mês. O plano inclui 4 gigabytes (GB) de dados gratuitos e cobra R$ 15 por gigabyte de dados adicionais usados. As cobranças mensais são uma função do número de gigabytes de dados usados, fornecidos por

$$C(x) = \begin{cases} 39 & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ 39 + 15(x-4) & \text{se } x > 4. \end{cases}$$

Encontre $C(2.5)$, $C(4)$ e $C(6)$.
- Desde que $2.5 \leq 4$, temos $C(2.5) = 39$.
- Desde que $4 \leq 4$, temos $C(4) = 39$.
- Desde que $6 > 4$, temos $C(6) = 39 + 15(6-4) = 69$.

Exemplo 3. Um tanque contém 50 galões de água, que drena de um vazamento no fundo, fazendo com que o tanque esvazie em 20 minutos. O tanque drena mais rápido quando está quase cheio, porque a pressão no vazamento é maior. A **lei de Torricelli** fornece o volume de água restante no tanque após t minutos, conforme

$$V(t) = 50\left(1 - \frac{t}{20}\right)^2 \qquad 0 \leq t \leq 20.$$

(a) Encontre $V(0)$ e $V(20)$.
$V(0) = 50$ e $V(20) = 0$.

(b) O que suas respostas à parte (a) representam?
$V(0)$ é o volume do tanque cheio e $V(20)$ é o volume do tanque vazio, 20 minutos depois.

(c) Faça uma tabela de valores de $V(t)$ para $t = 0,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20$.

x	$V(x)$
0	50
5	28.125
10	12.5
15	3.125
20	0

(d) Encontre a variação líquida no volume V à medida que t muda de 0 min à 20 min.
-50 galões.

Exemplo 4. Se $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ determine:

(a) $f(1) = 4$

(b) $f(a) = 2a^2 + 3a - 1$

(c) $f(-a) = 2(-a)^2 + 3(-a) - 1 = 2a^2 - 3a - 1$

(d) $f(a+h) = 2(a+h)^2 + 3(a+h) - 1$
$= 2(a^2 + 2ah + h^2) + 3a + 3h - 1$
$= 2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a - 3h - 1$

(e) $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} =$
$= \dfrac{2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a - 3h - 1 - (2a^2 + 3a - 1)}{h}$
$= \dfrac{4ah + 2h^2 - 3h}{h}$
$= 4a - 3 - 2h$

Exemplo 5. Calcule o valor da função no valor indicado.

(a) $g(t) = \dfrac{t+2}{t-2}$;
$g(2), \quad g(-2), \quad g(0) \quad$ e $\quad g(a^2 - 2)$.

Temos que $g(2)$ não está definido, $g(-2) = 0$, $g(0) = -1$ e $g(a^2 - 2) = \dfrac{a^2 - 2 + 2}{a^2 - 2 - 2} = \dfrac{a^2}{a^2 - 4}$.

(b) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x < 0 \\ x + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ (x-2)^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$;
$f(-5), \quad f(0), \quad f(1), \quad f(2)$ e $f(5)$.

Temos $f(-5) = 3(-5) = -15$, $f(0) = 0 + 1 = 1$, $f(1) = 1 + 1 = 2$, $f(2) = 2 + 1$ e $f(5) = (5-2)^2 = 9$.

Exemplo 6. Determine o domínio de cada função.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$
$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

(b) $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$
$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 9 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$.

(c) $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt[4]{9-x^2}}$
$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 9 - x^2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\} = (-3, 3)$.

(d) $m(x) = \sqrt[3]{x-10}$
$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Exemplo 7. Determine se a equação define y como uma função de x.

(a) $x^2 + y^2 = 1$
Não, pois não é possível isolar y na equação.

(b) $3x^2 - y = 5$
Sim, a equação $3x^2 - y = 5$ é equivalente a $y = 3x^3 + 5$, ou seja, y depende de x.

(c) $\sqrt{y} - x = 5$
Não, pois não é possível isolar y na equação.

(d) $x = y^3$
Sim, a equação $x = y^3$ é equivalente a $y = \sqrt[3]{x}$, ou seja, y depende de x.

(e) $2x + |y| = 5$
Não, pois não é possível isolar y na equação.