LMA0001 – Lógica Matemática
Aula 13
Sintaxe da Lógica de Predicados

Karina Girardi Roggia
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

2020

Componentes da Lógica de Predicados

Para podermos representar *objetos* e suas *propriedades*, precisamos introduzir novos conceitos à nossa linguagem lógica.

- **termos**: representam formalmente os objetos
- **variáveis**: ocorrem em termos, tomando o lugar de um sub-termo desconhecido.
- **predicados**: representam formalmente as propriedades dos objetos
- **quantificadores**: permitem expressar ideias como *todo* e *algum*, através de variáveis.

Termos

A construção dos termos é baseada em três conjuntos:

- conjunto $\mathbf{Con}$ de **constantes**
- conjunto $\mathbf{Fun}$ de **funções** (cada função possui aridade positiva fixa, indicada por sobreescrito)
- conjunto $\mathbf{Var}$ de **variáveis** (infinito e enumerável)

Termos

A construção dos termos é baseada em três conjuntos:

- conjunto $\mathbf{Con}$ de **constantes**
- conjunto $\mathbf{Fun}$ de **funções** (cada função possui aridade positiva fixa, indicada por sobreescrito)
- conjunto $\mathbf{Var}$ de **variáveis** (infinito e enumerável)

Conjunto de termos: $\mathbf{Term}$ é formado por indução como o menor conjunto tal que

1. $\mathbf{Con} \subseteq \mathbf{Term}$
2. $\mathbf{Var} \subseteq \mathbf{Term}$
3. se $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{Term}$ e $f^n \in \mathbf{Fun}$, então $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{Term}$

Termos: exemplo (1)

Suponha $\mathbf{Con} = \{a, b\}$, $\mathbf{Fun} = \{\}$, e $\mathbf{Var} = \{x, y, z, \ldots\}$.

Suponha $\mathbf{Con} = \{a, b\}$, $\mathbf{Fun} = \{\}$, e $\mathbf{Var} = \{x, y, z, \ldots\}$.

Conjunto de termos:

$$\mathbf{Term} = \{\ a,\ \ b,\ \ x,\ \ y,\ \ \ldots\ \}$$

Termos: exemplo (2)

Suponha $\mathbf{Con} = \{a, b\}$, $\mathbf{Fun} = \{f^1\}$, e $\mathbf{Var} = \{x, y, z, \ldots\}$.

Termos: exemplo (2)

Suponha $\mathbf{Con} = \{a, b\}$, $\mathbf{Fun} = \{f^1\}$, e $\mathbf{Var} = \{x, y, z, \ldots\}$.

Conjunto de termos:

$$\mathbf{Term} = \{\ a,\ b,\ x,\ y,\ f(a)\ ,\ f(b),\ f(x),\ f(y),\ f(f(a)),\ f(f(b)),\ f(f(x)),\ f(f(f(x))),\ \ldots\ \}$$

Termos: exemplo (3)

Suponha $\mathbf{Con} = \{a, b\}$, $\mathbf{Fun} = \{f^1, g^2, h^3\}$, e $\mathbf{Var} = \{x, y, z, \ldots\}$.

Termos: exemplo (3)

Suponha $\mathbf{Con} = \{a, b\}$, $\mathbf{Fun} = \{f^1, g^2, h^3\}$, e $\mathbf{Var} = \{x, y, z, \ldots\}$.

Conjunto de termos:

$$\mathbf{Term} = \{\ a,\ \ b,\ \ x,\ \ f(a)\ \ ,\ \ g(a,a),\ \ g(a,b),\ \ g(a,x),\ \ g(x,y)$$
$$f(x),\ \ h(a,b,b),\ \ g(f(x),f(a)),\ \ h(a,x,y),\ \ \ldots\ \}$$

Predicados

Predicados representam *propriedades* de termos.

Cada predicado possui uma aridade positiva fixa (também indicada por sobreescrito).

Exemplos: $\texttt{Par}^1$, $\texttt{Impar}^1$, $\texttt{CapitalDoBrasil}^1$, $\texttt{CapitalDo}^2$.

Predicados

Predicados representam *propriedades* de termos.

Cada predicado possui uma aridade positiva fixa (também indicada por sobreescrito).

Exemplos: $\texttt{Par}^1$, $\texttt{Impar}^1$, $\texttt{CapitalDoBrasil}^1$, $\texttt{CapitalDo}^2$.

Assumimos um conjunto $\mathbf{Pred}$ de predicados com suas respectivas aridades.

Assinatura e fórmulas atômicas

Uma **assinatura** $\Sigma = (\mathbf{Con}, \mathbf{Fun}, \mathbf{Pred})$ consiste de conjuntos de constantes, funções e predicados a serem utilizadas na lógica de predicados.

Assinatura e fórmulas atômicas

Uma **assinatura** $\Sigma = (\mathbf{Con}, \mathbf{Fun}, \mathbf{Pred})$ consiste de conjuntos de constantes, funções e predicados a serem utilizadas na lógica de predicados.

Denotamos $\mathbf{Term}_{(\Sigma, \mathbf{Var})}$ para indicar que $\mathbf{Term}$ é construído com base na especificação Σ e no conjunto de variáveis $\mathbf{Var}$ (quando possível, omitimos os subscritos).

Uma **assinatura** $\Sigma = (\mathbf{Con}, \mathbf{Fun}, \mathbf{Pred})$ consiste de conjuntos de constantes, funções e predicados a serem utilizadas na lógica de predicados.

Denotamos $\mathbf{Term}_{(\Sigma,\mathbf{Var})}$ para indicar que $\mathbf{Term}$ é construído com base na especificação Σ e no conjunto de variáveis $\mathbf{Var}$ (quando possível, omitimos os subscritos).

O conjunto de **fórmulas atômicas** $\mathfrak{F}_{0\ (\Sigma,\mathbf{Var})}$ é definido como o menor conjunto tal que:

- se $t_1, t_2 \in \mathbf{Term}$, então $t_1 = t_2 \in \mathfrak{F}_0$
- se $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{Term}$ e $P^n \in \mathrm{Pred}$, então $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathfrak{F}_0$

Fórmulas atômicas: exemplo

Suponha $\Sigma = (\{0, 1\}, \{\}, \{\mathtt{Impar}^1, \mathtt{Par}^1\})$

Fórmulas atômicas: exemplo

Suponha $\Sigma = (\{0, 1\}, \{\}, \{\mathtt{Impar}^1, \mathtt{Par}^1\})$

Termos:

$$\mathbf{Term} = \{0, 1, x, y, \ldots\}$$

Fórmulas atômicas: exemplo

Suponha $\Sigma = (\{0, 1\}, \{\}, \{\mathtt{Impar}^1, \mathtt{Par}^1\})$

Termos:

$$\mathbf{Term} = \{0, 1, x, y, \ldots\}$$

Fórmulas atômicas:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_0 = \{&\mathtt{Impar}(0),\ \mathtt{Impar}(1), \mathtt{Impar}(x), \mathtt{Impar}(y), \ldots\\ &\mathtt{Par}(0),\ \mathtt{Par}(1), \mathtt{Par}(x), \mathtt{Par}(y), \ldots\\ &0 = 0,\ 0 = 1,\ 1 = 0,\ x = 0,\ x = y, \ldots\}\end{aligned}$$

O **conjunto de fórmulas** $\mathfrak{F}$ (da lógica de predicados) é o menor conjunto tal que:

1. $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}$

Fórmulas

O **conjunto de fórmulas** $\mathfrak{F}$ (da lógica de predicados) é o menor conjunto tal que:

1. $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}$
2. se $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$, então $\neg\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$

O **conjunto de fórmulas** $\mathfrak{F}$ (da lógica de predicados) é o menor conjunto tal que:

1. $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}$
2. se $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$, então $\neg\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$
3. se $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{F}$, então $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \quad \in \quad \mathfrak{F}$.

O **conjunto de fórmulas** $\mathfrak{F}$ (da lógica de predicados) é o menor conjunto tal que:

1. $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}$
2. se $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$, então $\neg\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$
3. se $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{F}$, então $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} \to \mathcal{B} \quad \in \quad \mathfrak{F}$.
4. se $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$ e $x \in \mathbf{Var}$, então $\forall x.\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$

(quantificação universal do x)

O **conjunto de fórmulas** $\mathfrak{F}$ (da lógica de predicados) é o menor conjunto tal que:

1. $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}$
2. se $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$, então $\neg\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$
3. se $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{F}$, então $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} \to \mathcal{B} \quad \in \quad \mathfrak{F}$.
4. se $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$ e $x \in \mathbf{Var}$, então $\forall x.\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$
   (quantificação universal do x)
5. se $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$ e $x \in \mathbf{Var}$, então $\exists x.\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$
   (quantificação existencial do x)

Fórmulas: exemplo

Suponha $\Sigma = (\{0, 1\}, \{succ^1, soma^2\}, \{\mathtt{Impar}^1, \mathtt{Par}^1, \mathtt{Maior}^2\})$

Exemplos de fórmulas em $\mathfrak{F}_{(\Sigma,\mathbf{Var})}$:

$0 = 1$

Fórmulas: exemplo

Suponha $\Sigma = (\{0, 1\}, \{succ^1, soma^2\}, \{\mathtt{Impar}^1, \mathtt{Par}^1, \mathtt{Maior}^2\})$

Exemplos de fórmulas em $\mathfrak{F}_{(\Sigma, \mathbf{Var})}$:

$0 = 1$
$\mathtt{Par}(x)$

Fórmulas: exemplo

Suponha $\Sigma = (\{0,1\}, \{succ^1, soma^2\}, \{\texttt{Impar}^1, \texttt{Par}^1, \texttt{Maior}^2\})$

Exemplos de fórmulas em $\mathfrak{F}_{(\Sigma,\mathbf{Var})}$:

$0 = 1$
$\texttt{Par}(x)$
$\texttt{Par}(1) \wedge \texttt{Impar}(0)$

Fórmulas: exemplo

Suponha $\Sigma = (\{0, 1\}, \{succ^1, soma^2\}, \{\mathtt{Impar}^1, \mathtt{Par}^1, \mathtt{Maior}^2\})$

Exemplos de fórmulas em $\mathfrak{F}_{(\Sigma,\mathbf{Var})}$:

$0 = 1$
$\mathtt{Par}(x)$
$\mathtt{Par}(1) \wedge \mathtt{Impar}(0)$
$\mathtt{Impar}(succ(0))$

Fórmulas: exemplo

Suponha $\Sigma = (\{0,1\}, \{succ^1, soma^2\}, \{\mathtt{Impar}^1, \mathtt{Par}^1, \mathtt{Maior}^2\})$

Exemplos de fórmulas em $\mathfrak{F}_{(\Sigma, \mathbf{Var})}$:

$0 = 1$
$\mathtt{Par}(x)$
$\mathtt{Par}(1) \wedge \mathtt{Impar}(0)$
$\mathtt{Impar}(succ(0))$
$\mathtt{Impar}(succ(x))$

Fórmulas: exemplo

Suponha $\Sigma = (\{0, 1\}, \{succ^1, soma^2\}, \{\mathtt{Impar}^1, \mathtt{Par}^1, \mathtt{Maior}^2\})$

Exemplos de fórmulas em $\mathfrak{F}_{(\Sigma,\mathbf{Var})}$:

$0 = 1$
$\mathtt{Par}(x)$
$\mathtt{Par}(1) \wedge \mathtt{Impar}(0)$
$\mathtt{Impar}(succ(0))$
$\mathtt{Impar}(succ(x))$
$\forall x.\mathtt{Par}(x)$

Fórmulas: exemplo

Suponha $\Sigma = (\{0, 1\}, \{succ^1, soma^2\}, \{\mathtt{Impar}^1, \mathtt{Par}^1, \mathtt{Maior}^2\})$

Exemplos de fórmulas em $\mathfrak{F}_{(\Sigma, \mathbf{Var})}$:

$0 = 1$
$\mathtt{Par}(x)$
$\mathtt{Par}(1) \wedge \mathtt{Impar}(0)$
$\mathtt{Impar}(succ(0))$
$\mathtt{Impar}(succ(x))$
$\forall x.\mathtt{Par}(x)$
$\exists x.\mathtt{Par}(x)$

Fórmulas: exemplo

Suponha $\Sigma = (\{0,1\}, \{succ^1, soma^2\}, \{\mathtt{Impar}^1, \mathtt{Par}^1, \mathtt{Maior}^2\})$

Exemplos de fórmulas em $\mathfrak{F}_{(\Sigma,\mathbf{Var})}$:

$0 = 1$
$\mathtt{Par}(x)$
$\mathtt{Par}(1) \wedge \mathtt{Impar}(0)$
$\mathtt{Impar}(succ(0))$
$\mathtt{Impar}(succ(x))$
$\forall x.\mathtt{Par}(x)$
$\exists x.\mathtt{Par}(x)$
$\forall x.(\mathtt{Par}(x) \rightarrow \mathtt{Impar}(succ(x)))$

Fórmulas: exemplo

Suponha $\Sigma = (\{0, 1\}, \{\mathtt{succ}^1, \mathtt{soma}^2\}, \{\mathtt{Impar}^1, \mathtt{Par}^1, \mathtt{Maior}^2\})$

Exemplos de fórmulas em $\mathfrak{F}_{(\Sigma,\mathbf{Var})}$:

$0 = 1$
$\mathtt{Par}(x)$
$\mathtt{Par}(1) \wedge \mathtt{Impar}(0)$
$\mathtt{Impar}(\mathtt{succ}(0))$
$\mathtt{Impar}(\mathtt{succ}(x))$
$\forall x.\mathtt{Par}(x)$
$\exists x.\mathtt{Par}(x)$
$\forall x.(\mathtt{Par}(x) \to \mathtt{Impar}(\mathtt{succ}(x)))$
$\forall x.((x = 0) \vee \mathtt{Maior}(\mathtt{soma}(x, x), x))$

Fórmulas: exemplo

Suponha $\Sigma = (\{0, 1\}, \{\mathit{succ}^1, \mathit{soma}^2\}, \{\mathtt{Impar}^1, \mathtt{Par}^1, \mathtt{Maior}^2\})$

Exemplos de fórmulas em $\mathfrak{F}_{(\Sigma, \mathbf{Var})}$:

$0 = 1$
$\mathtt{Par}(x)$
$\mathtt{Par}(1) \wedge \mathtt{Impar}(0)$
$\mathtt{Impar}(\mathit{succ}(0))$
$\mathtt{Impar}(\mathit{succ}(x))$
$\forall x.\mathtt{Par}(x)$
$\exists x.\mathtt{Par}(x)$
$\forall x.(\mathtt{Par}(x) \rightarrow \mathtt{Impar}(\mathit{succ}(x)))$
$\forall x.((x = 0) \vee \mathtt{Maior}(\mathit{soma}(x, x), x))$
$\neg(x = y) \rightarrow \neg(\mathit{succ}(x) = \mathit{succ}(y))$

Como há diversos elementos dentro de fórmulas, seguiremos a seguinte convenção para evitar confusões:

- constantes arbitrárias: $a, b, c, d, a_1, a_2, \ldots$ (início do alfabeto)
- funções arbitrárias: $f, g, h, f_1, f_2, \ldots$ (meio do alfabeto)
- variáveis: $x, y, z, v, w, x_1, x_2, \ldots$ (final do alfabeto)
- termos: $t, t_1, t_2, \ldots$
- predicados: $A, B, C, \ldots, F, G, \ldots X, Y, Z \ldots$ (maiúsculas)
- fórmulas: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots$ (maiúsculas caligráficas)

Os quantificadores são operadores unários, e possuem a mesma precedência que a negação.

1º	$\neg$, $\forall$, $\exists$
2º	$\wedge$
3º	$\vee$
4º	$\rightarrow$

Exemplo:

$$\forall x.P(x,x) \rightarrow \neg\exists y.P(x,y) \wedge \forall z.Q(z)$$

Os quantificadores são operadores unários, e possuem a mesma precedência que a negação.

1º	$\neg$, $\forall$, $\exists$
2º	$\wedge$
3º	$\vee$
4º	$\rightarrow$

Exemplo:

$$\forall x.P(x,x) \rightarrow \neg\exists y.P(x,y) \wedge \forall z.Q(z)$$

$=$

$$(\forall x.P(x,x)) \rightarrow ((\neg(\exists y.P(x,y))) \wedge (\forall z.Q(z)))$$

Árvore sintática de uma fórmula

Fórmula

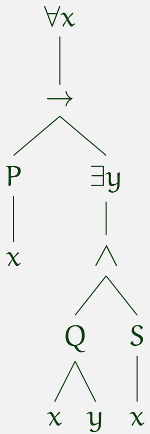
$$\forall x.(P(x) \rightarrow \exists y.(Q(x,y) \wedge S(x)))$$

Árvore sintática de uma fórmula

Fórmula

$$\forall x.(P(x) \to \exists y.(Q(x,y) \wedge S(x)))$$

Árvore correspondente $\Rightarrow$



Variáveis livres e ligadas

Uma fórmula em lógica de predicados pode conter nenhuma, uma ou diversas variáveis.

Dependendo de onde ocorrem em uma fórmula, cada **ocorrência** de uma variável pode estar *livre* ou *ligada*.

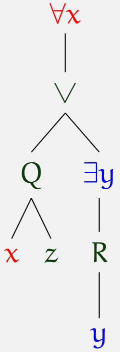
Ocorrência de variável x em fórmula $\mathcal{A}$:

- *Ligada:* se está abaixo de um $\exists x$ ou $\forall x$ na árvore sintática de $\mathcal{A}$
- *Livre:* caso contrário

Variáveis livres e ligadas: exemplo

$\forall x.(Q(x,z) \vee \exists y.R(y))$

- x e y ligados
- z livre.



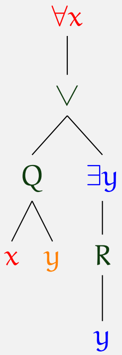
Variáveis livres e ligadas: exemplo

$\forall x.(Q(x, y) \vee \exists y.R(y))$

- x e y ligados
- y livre.

Observações:

1. Uma mesma variável pode ter ocorrências livres e ligadas, se ocorrer em mais de um ponto na fórmula.



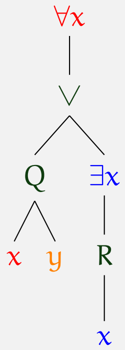
Variáveis livres e ligadas: exemplo

$\forall x.(Q(x,y) \vee \exists x.R(x))$

- x e x ligados
- y livre.

Observações:

1. Uma mesma variável pode ter ocorrências livres e ligadas, se ocorrer em mais de um ponto na fórmula.
2. Se houver mais de um quantificador acima da ocorrência da variável, a ligação é com o mais *interno*.



Um termo é dito **fechado** se não contém variáveis, ou **aberto** caso contrário.

Uma fórmula é dita **fechada** se não possui *variáveis livres*, ou **aberta** caso contrário.

Podemos obter uma fórmula fechada a partir de uma fórmula aberta $\mathcal{A}$ cujo conjunto de variáveis livres é $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ através de duas operações de *fecho*:

- **fecho universal:** $FU(\mathcal{A}) = \forall x_1.\forall x_2.\ldots,\forall x_n.\mathcal{A}$
- **fecho existencial:** $FE(\mathcal{A}) = \exists x_1.\exists x_2.\ldots,\exists x_n.\mathcal{A}$

Exercícios

1. Considerando $\Sigma = (\{a, b, c\}, \{f^2\}, \{\mathtt{Vogal}^1, \mathtt{Consoante}^1\})$ e $\mathbf{Var} = \{x, y, z, \ldots\}$, determine se as seguintes fórmulas pertencem a $\mathcal{F}_{(\Sigma, \mathbf{Var})}$ ou não:
   - $a = x \vee \exists x.\mathtt{Vogal}(x)$
   - $\mathtt{Vogal}(f(a)) \to \forall y.\mathtt{Consoante}(y)$
   - $\forall x.\exists x.\mathtt{Vogal}(x \to y)$
   - $\forall x.\mathtt{Numero}(x) \wedge \neg\exists y.f(y, b)$
2. Apresente a árvore sintática correspondente às seguintes fórmulas, e identifique as variáveis que ocorrem livres.
   - $\forall x.z \to \neg\exists y.P(x, y) \wedge \forall z.Q(a)$
   - $\forall x.P(x, y) \to \neg\exists y.(Q(y) \wedge x = y)$