Limites Notáveis ou Fundamentais

$$\lim_{u \to 0} \frac{\mathrm{sen}(u)}{u} = 1$$

$$\lim_{u \to 0} \frac{1 - \cos(u)}{u} = 0$$

$$\lim_{u \to \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u} = e$$

$$\lim_{u \to 0} \frac{a^{u} - 1}{u} = \ln(a)$$

Exemplo. Calcule os limites, usando limite notável, se possível.

$$L = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{2x} = 1^{\infty}$$

$$L = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-1+3}{x+1}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+1}+\frac{2}{x+1}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{2x}$$

Definindo $\frac{1}{u} = \frac{2}{x+1}$, temos que: $2u = x+1 \Rightarrow x = 2u-1$

$$\boxed{\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = e}$$

$$L = \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{2(2u-1)} = \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{4u-2} = \lim_{u\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{u}\right)^{4u}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{-2}\right) = \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{4u}\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{-2}$$

$$L = \lim_{u\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right)^{4}\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{-2} = \left(\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right)^{4}.1 = e^{4}.1 = e^{4}$$

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\left(1 - \sqrt{2}\cos(x)\right) cossec\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\left(1 - \sqrt{2}\ \cos(x)\right) \frac{1}{sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \right] = 0.\infty$$

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2}\ \cos(x)}{sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Definindo $u = x - \frac{\pi}{4}$, temos que:

$$L = \lim_{u \to 0} \frac{1 - \sqrt{2}\ \cos\left(u + \frac{\pi}{4}\right)}{sen(u)} = \lim_{u \to 0} \frac{1 - \sqrt{2}\left(\cos(u)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \mathrm{sen}(u)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{sen(u)}$$

$$L = \lim_{u \to 0} \frac{1 - \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(u) - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{sen}(u)\right)}{sen(u)} = \lim_{u \to 0} \frac{1 - \cos(u) + sen(u)}{sen(u)}$$

$$L = \lim_{u \to 0} \left(\frac{1 - \cos(u)}{sen(u)} + \frac{sen(u)}{sen(u)} \right)$$

$$L = \lim_{u\to 0}\left(\frac{1-\cos(u)}{sen(u)}\right) + \lim_{u\to 0}(1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = L_1 + 1}$$

$$L_1 = \lim_{u\to 0}\left(\frac{1-\cos(u)}{sen(u)}\right) = \lim_{u\to 0}\frac{\frac{1-\cos(u)}{u}}{\frac{sen(u)}{u}} = \frac{\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos(u)}{u}}{\lim_{u\to 0}\frac{sen(u)}{u}} = \frac{0}{1} = 0$$

Conclusão: $\boxed{L = 1}$

2. Use a definição de continuidade para investigar se a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{3\,sen(x-1)}}{sen(2x-2)}, se\ x > 1 \\ \dfrac{3}{2}, \qquad se\ x = 1 \\ \dfrac{|1 - x^3|}{sen(x-1)}, se\ x < 1 \end{cases}$$

é contínua em $x = 1$. Caso não seja contínua em 1, classifique a descontinuidade nesse ponto.

<u>Objetivo</u>: Verificar se $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

$i)\ f(1) = \dfrac{3}{2}$

$ii)\ \lim_{x \to 1} f(x)$ existe?

Limites laterais:

$$L_1 = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1 - e^{3sen(x-1)}}{sen(2x-2)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1 - e^{3sen(x-1)}}{sen(2(x-1))}$$

Definindo $\mathrm{u} = x - 1$, temos que:

$$L_1 = \lim_{u \to 0^+} \frac{1 - e^{3sen(u)}}{sen(2u)} = \lim_{u \to 0^+} \frac{1 - e^{3sen(u)}}{2sen(u)\cos(u)} = \lim_{u \to 0^+} \frac{1 - e^{3sen(u)}}{sen(u)} \lim_{u \to 0^+} \frac{1}{2\cos(u)}$$

Definindo $t = sen(u)$, temos que:

$$L_1 = \lim_{t \to 0^+} \frac{1 - e^{3t}}{t} \lim_{u \to 0^+} \frac{1}{2\cos(u)} = -\left(\lim_{t \to 0^+} \frac{e^{3t} - 1}{t}\right) . \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \lim_{t \to 0^+} \frac{(e^3)^t - 1}{t} = -\frac{1}{2} \ln(e^3) = -\frac{3}{2}$$

Observe que: $L_1 \neq f(1)$ $\Longrightarrow$ $\boxed{f \text{ não é contínua em } x = 1}$

Para classificar a descontinuidade, precisamos determinar o limite lateral pela esquerda.

$$L_2 = \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{|1-x^3|}{sen(x-1)} = \lim_{x\to1^+} \frac{|(x-1)(-x^2-x-1)|}{sen(x-1)} = \lim_{x\to1^+} \frac{|x-1|\,|-x^2-x-1|}{sen(x-1)}$$

$$L_2 = \lim_{x\to1^-} \frac{|x-1|\,|-x^2-x-1|}{sen(x-1)} = \lim_{x\to1^-} \frac{|x-1|}{sen(x-1)} \lim_{x\to1^-} |-x^2-x-1| = 3\lim_{x\to1^-} \frac{|x-1|}{sen(x-1)} = 3\lim_{x\to1^-} \frac{-(x-1)}{sen(x-1)}$$

Definindo $\mathrm{u} = x-1$, temos que:

$$L_2 = -3\lim_{u\to0^-} \frac{u}{sen(u)} = -3\lim_{u\to0^-} \frac{1}{\frac{sen(u)}{u}} = -3\,\frac{\lim_{u\to0^-} 1}{\lim_{u\to0^-} \frac{sen(u)}{u}} = -3$$

<u>Conclusão:</u>

Como os limites laterais existem, mas tem valores diferentes, então a descontinuidade em $x = 1$ é do tipo salto.