Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Critério da Razão
Critério da Raiz
Séries Alternadas e o Critério de Leibnitz

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 do dia 02 de outubro de 2024.

UDESC

Critério da Comparação

Exercício 1) Verifique se é convergente ou divergente:

e) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9n^4 - 6n^2 - 1}{8n^5 + 2n^3 + 3}$$

Critério da Razão

Teste da Razão (ou Critério de D'Alembert):

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série tal que $u_n \geq 0$ e considere $L = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

i) Se $0 \leq L < 1$ então a série converge.

ii) Se $L > 1$ então a série diverge.

iii) Se $L = 1$, nada pode ser afirmado sobre a série.

Exercício 2) Verifique se são convergentes ou divergentes:

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5}{2^{3n}}$

$b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n - n^3}{n! + 5n^6}$

$c)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n + 4^n + n^3}{(n+1)! - \sqrt{n}}$

Critério da Raiz

Teste da Raiz (ou Critério de Cauchy):

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série tal que $u_n \geq 0$ e considere $L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$.

i) Se $0 \leq L < 1$ então a série converge.

ii) Se $L > 1$ então a série diverge.

iii) Se $L = 1$, nada pode ser afirmado sobre a série.

Exercício 1) Verifique se são convergentes ou divergentes:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{7n-3}}{9n^{2n}}$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\frac{5n}{8}} + 3n^9 + 1}{2^{3n} - 5n}$$

Séries Alternadas

Todos os critérios de convergência vistos até agora são exclusivos para séries de termos positivos (em que $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}*$). No entanto, existem séries com a presença de termos negativos e para essas, tais critérios não podem ser aplicados.

Dentre as séries que assumem valores negativos, estão as séries que possuem termos de sinais ordenadamente alternados:

Definição: Uma série alternada possui uma das duas formas a seguir:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \cdots$$

ou

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - u_5 + u_6 + \cdots$$

em que $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Note que a diferença entre as duas opções ocorre apenas nos sinais dos termos.

Como a segunda é o oposto da primeira, ambas possuem o mesmo padrão de convergência ou divergência.

Séries Alternadas

Teste de Leibnitz (exclusivo para Alternadas): Sejam

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}u_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}u_n$$

séries alternadas tais que

$$u_n \geq 0, \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*; \qquad u_{n+1} \leq u_n \ \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

então ambas as alternadas convergem.

Observações:

- O critério de Leibnitz é exclusivo para Séries Alternadas. Não pode ser aplicado para outros tipos de séries.
- Para uma justificativa para o Critério de Leibnitz, assista os vídeos do canal MeSalva: youtube.com/watch?v=0HDjdHYq_xs e da Khan Academy youtube.com/watch?v=wbFGLqL7fCE

Exemplo) Um exemplo clássico de série alternada é a Série Harmônica Alternada, dada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

Séries Alternadas

Exercício 2) Verifique se são convergentes ou divergentes:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} =$$

Exemplos Resolvidos

Exemplo 1) Verifique se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{5^{2n}}$ é convergente ou divergente.

Solução: Veja que $u_n = \frac{n^2}{5^{2n}} \geq 0$ e não seria fácil resolver a integral imprópria de $f(x) = \frac{x^2}{5^{2x}}$ nem há termos que possam ser descartados pelo critério da comparação.
Assim, os Critérios estudados na aula passada não são úteis.
Por isso, usamos o critério da Razão:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{5^{2(n+1)}} \cdot \frac{5^{2n}}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n+1}{5^{2n+2}} \cdot \frac{5^{2n}}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n+1}{5^{2n}5^2} \cdot \frac{5^{2n}}{n^2}$$

$$= \frac{1}{25} \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2} = \frac{1}{25} \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{25}(1+0+0) = \frac{1}{25}.$$

Como $0 \leq L = \frac{1}{25} < 1$, a série dada é convergente.

Exemplos Resolvidos

Exemplo 2) Verifique se é convergente ou divergente a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n - n^2}{n! + n^3}$

Solução: Veja que $u_n = \frac{7^n - n^2}{n!+n^3} \geq 0$ e não seria fácil resolver uma integral imprópria dessa função. Mas aqui há termos que podem ser descartados. Assim, primeiro usamos uma comparação para reduzir o número de termos. Como

$7^n - n^2 < 7^n$ e $n! + n^3 > n!$ implicam que $\dfrac{1}{n! + n^3} \leq \dfrac{1}{n!}$.

Com isso:

$$0 \leq u_n = \frac{7^n - n^2}{n! + n^3} \leq \frac{7^n}{n!} = y_n.$$

Agora, usamos o critério da Razão para y_n:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{7^{n+1}}{(n+1)!} . \frac{n!}{7^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{7^n . 7}{(n+1). n!} . \frac{n!}{7^n} = 7 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)} = 7.0 = 0.$$

Como $0 \leq L < 1$, a série dos y_n converge e a série dada também converge, por comparação, visto que ela é menor do que uma série convergente.

Exemplos Resolvidos

Exemplo 3) Verifique se é convergente ou divergente a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n + 3^n}{(n+1)! - n^2}$

Solução: Veja que $u_n = \frac{n^n+3^n}{(n+1)!-n^2} \geq 0$ e não seria fácil resolver uma integral imprópria dessa função. Aqui também há termos que podem ser descartados.
Assim, primeiro usamos uma comparação para reduzir o número de termos. Como

$$n^n + 3^n \geq n^n \quad \text{e} \quad (n+1)! - n^2 \leq (n+1)! \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(n+1)! - n^2} \geq \frac{1}{(n+1)!}$$

temos que:

$$0 \leq y_n = \frac{n^n}{(n+1)!} \leq \frac{n^n + 3^n}{(n+1)! - n^2} = u_n$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a}$$

Agora, usamos o critério da Razão para y_n:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1+1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n(n+1)}{(n+2).(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n(n+1)}{(n+2).n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)}{(n+2)} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = e.1 = e.$$

Como $L = e > 1$, a série dos y_n diverge e a série dada também diverge, por comparação, visto que ela é maior do que uma série divergente.

Exemplos Resolvidos

Exemplo 4) Verifique se é convergente ou divergente a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{4n+5}}{n^{7n}}$.

Solução: Veja que $u_n = \frac{3^{4n+5}}{n^{7n}} \geq 0$ e não seria fácil resolver uma integral imprópria dessa função, nem há termos que possam ser descartados.

Como os todos os termos possuem expoente envolvendo n, pode ser útil usarmos o critério da Raiz n-ésima:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{4n+5}}{n^{7n}}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3^{4n+5}}{n^{7n}}\right)^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3^{\frac{4n+5}{n}}}{n^{\frac{7n}{n}}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3^{4+\frac{5}{n}}}{n^7}\right) = 0\,.$$

Como $0 = L < 1$, a série converge pelo Critério da Raiz.

Exemplos Resolvidos

Exemplo 5) Verifique se é convergente ou divergente a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\frac{n}{2}} + n^{10}}{3^{5n} - n}$

Solução: Veja que $u_n = \frac{n^{\frac{n}{2}}+n^{10}}{3^{5n}-n} \geq 0$ e não seria fácil resolver uma integral imprópria dessa função. Aqui, há termos que podem ser descartados. Assim, primeiro usamos uma comparação para reduzir o número de termos. Como

$$n^{\frac{n}{2}} + n^{10} \geq n^{\frac{n}{2}} \quad \text{e} \quad 3^{5n} - n \leq 3^{5n} \quad \text{implicam que} \quad \frac{1}{3^{5n-n}} \geq \frac{1}{3^{5n}}$$

temos que

$$0 \leq y_n = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{3^{5n}} \leq \frac{n^{\frac{n}{2}} + n^{10}}{3^{5n} - n} = u_n.$$

Como os todos os termos restantes em y_n possuem expoente envolvendo n, pode ser útil usarmos o critério da Raiz n-ésima:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{\frac{n}{2}}}{3^{5n}}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^{\frac{n}{2}}}{3^{5n}}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^{\frac{n}{2n}}}{3^{\frac{5n}{n}}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^{\frac{1}{2}}}{3^{5}}\right) = +\infty.$$

Como $L \geq 1$, a série dos y_n diverge. E por comparação, a série dada também diverge, pois ela é maior do que uma série divergente.

Séries Alternadas

Exemplo 6) Mostre que a série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

é convergente.

Solução: Para aplicar o Critério de Leibnitz, podemos desconsiderar a alternância de sinal e tomar apenas

$$u_n = \frac{1}{n}.$$

Temos que

- $u_n = \frac{1}{n} \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*;$
- u_n é decrescente, pois $$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = u_n,$$
- $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Dessa forma, a Série Harmônica Alternada é convergente, pelo Critério de Leibnitz.