Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

Professor: Marnei Luis Mandler

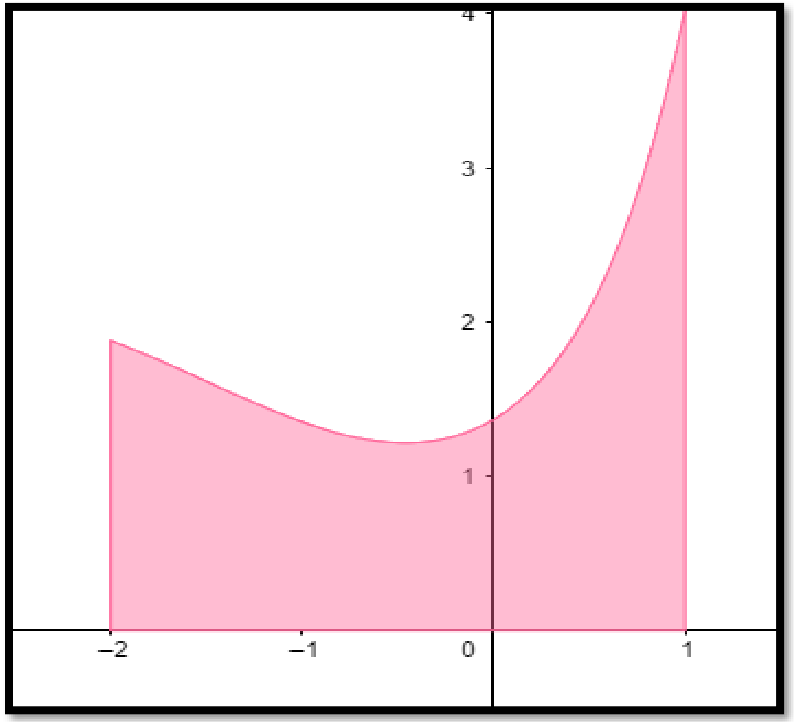
Aula de CDI-2 de 26 de agosto de 2024.

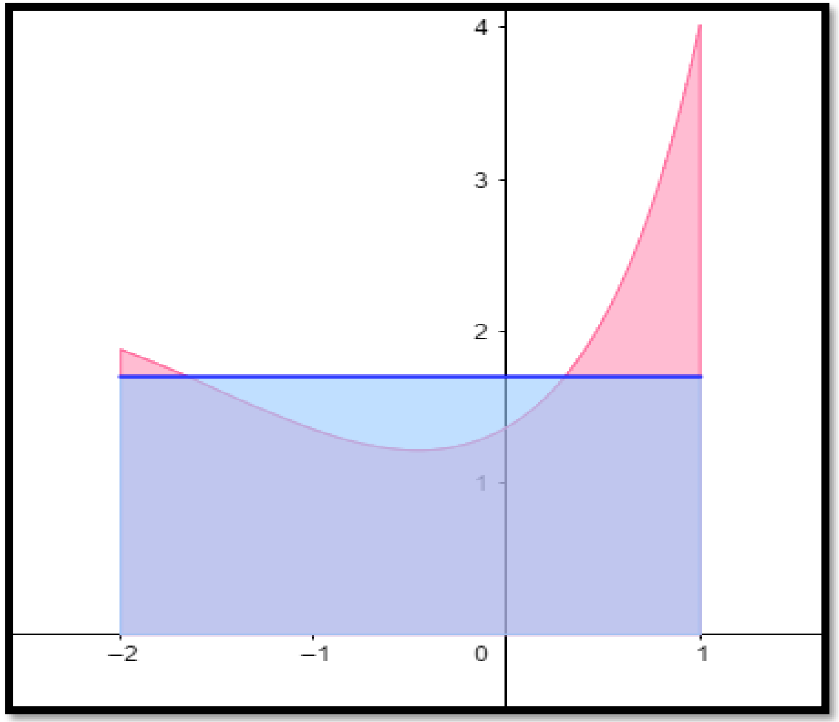
Revisão: TVI

- Revisão: Na última aula estudamos o Teorema do Valor Intermediário (TVI) para integrais definidas:

  Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$





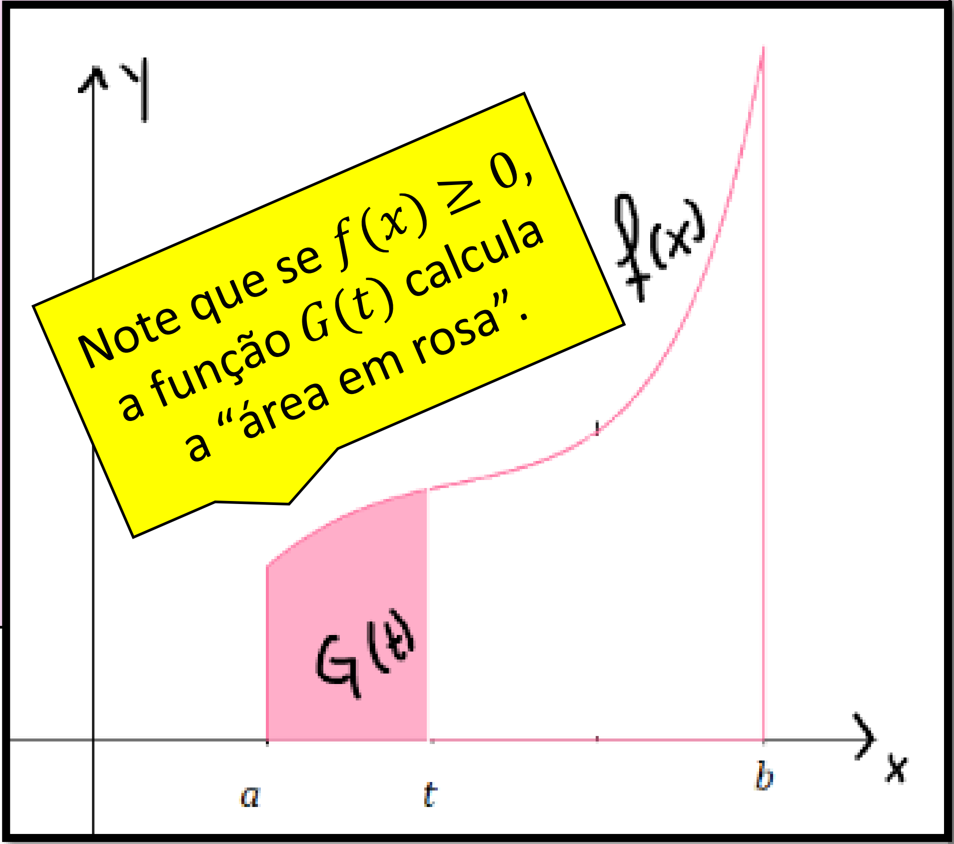
Na aula de hoje iremos estudar um novo teorema, que estabelecerá a relação entre integrais definidas e indefinidas e fornecerá uma nova expressão para a integral definida.

Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO (TFC):

Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere a função $G: [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$G(t) = \int_a^t f(x)dx\,.$$



Então:

PARTE 1: G é uma primitiva (anti-derivada) de f.

PARTE 2: Se F é uma primitiva qualquer de f, então

$$\int_a^b f(x)dx = \;???$$

- Justificativa da PARTE 1: Vamos verificar que

$$G'(t) = f(t) \quad \text{para todo } t \in [a, b],$$

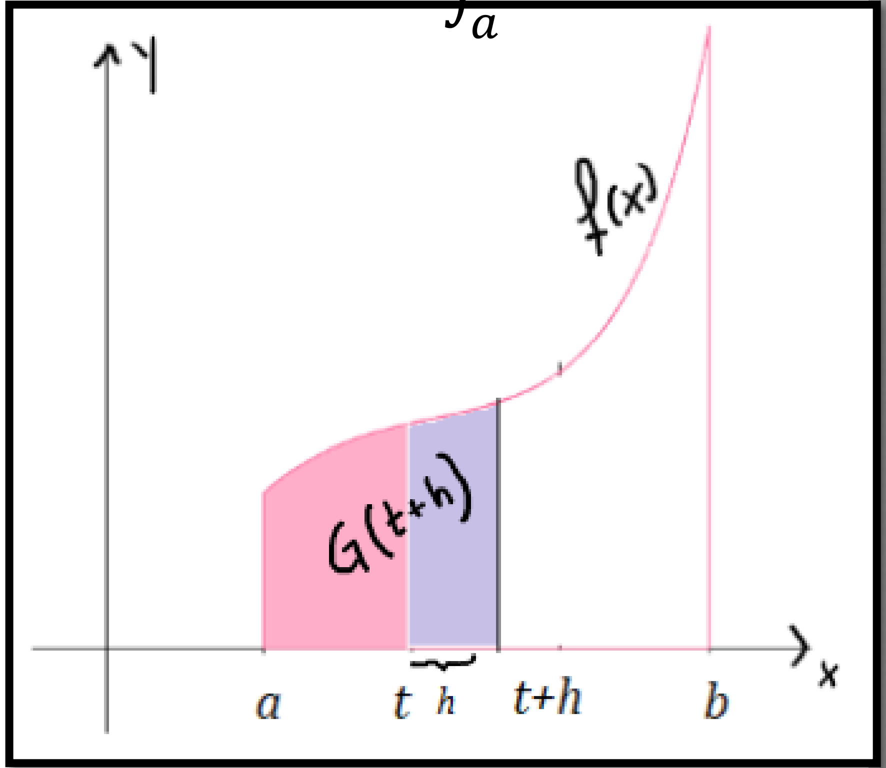
para provar que G é uma primitiva de f. De fato, pela definição de derivada:

$$G'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{G(t+h) - G(t)}{h}.$$

Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

Logo:

$$G(t+h) = \int_a^{t+h} f(x)dx$$



$$G'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{G(t+h) - G(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}.\left[\int_a^{t+h} f(x)dx - \int_a^{t} f(x)dx\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}.\left[\int_a^{t} f(x)dx + \int_t^{t+h} f(x)dx - \int_a^{t} f(x)dx\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}.\int_t^{t+h} f(x)dx\,.$$

Aplicando o TVI para essa última integral obtemos que existe $c \in [t, t+h]$ tal que

$$\int_t^{t+h} f(x)dx = f(c).(t+h-t) = f(c).h.$$

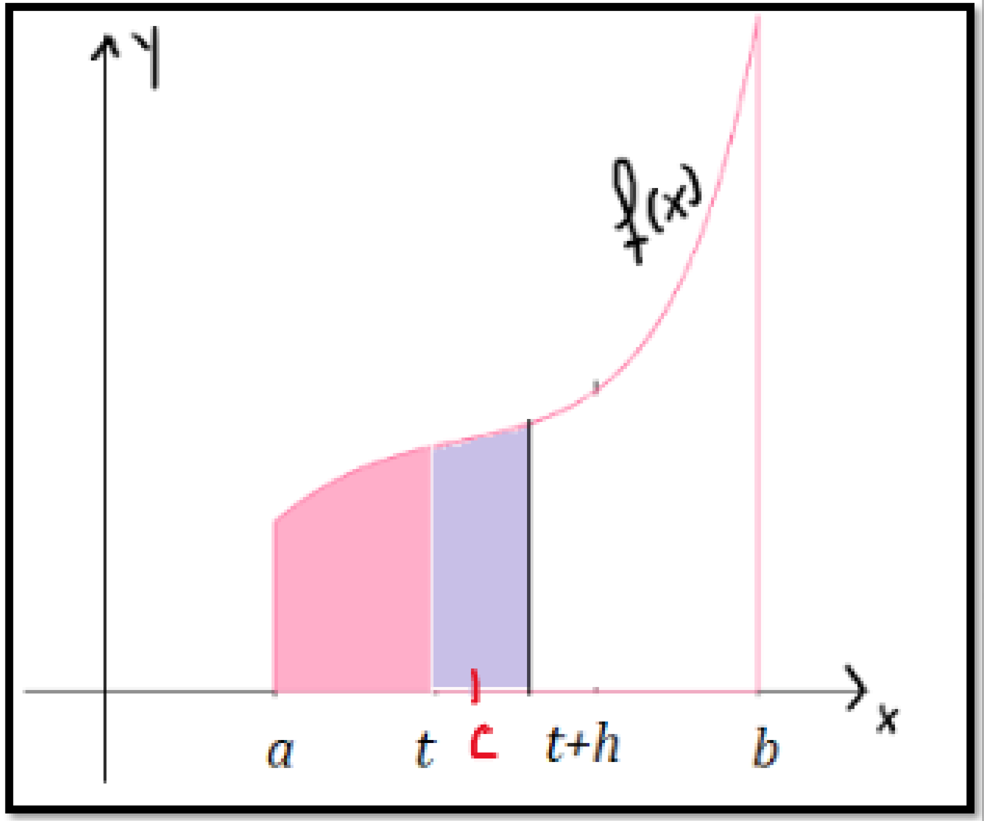
Substituindo na expressão anterior, obtemos que

Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

Logo:

$$G'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}.\int_t^{t+h} f(x)dx \;\; = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}.f(c).h$$

$$= \lim_{h\to 0} f(c).$$



Como $c \in [t, t+h]$, quando $h \to 0$ temos que $c \to t$.

Logo

$$G'(t) = \lim_{h\to 0} f(c) \; = \lim_{c\to t} f(c) \; = f(t),$$

pois f é continua.

Portanto, demonstramos que G (a integral definida de f) é uma primitiva de f, da mesma forma que ocorria para uma integral indefinida em CDI-1!

- Justificativa PARTE 2: Seja F uma primitiva qualquer de f.

Como acabamos de demonstrar que G também é uma primitiva de f, e sabemos que primitivas diferem apenas por constantes, temos que

$$G(t) - F(t) = cte \quad \text{para todo } t \in [a,b].$$

Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

Logo

$$G(t) = F(t) + cte \quad \text{para todo } t \in [a,b].$$

Assim, para todo $t \in [a,b]$:

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) + cte.$$

Aplicando em $t = a$, obtemos, pela Propriedade 1, que:

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) + cte \quad \Longrightarrow \quad 0 = F(a) + cte \quad \Longrightarrow \quad cte = -F(a).$$

Substituindo na expressão anterior, obtemos que

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a).$$

é válida para todo $t \in [a,b]$.

Aplicando em $t = b$, obtemos

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

O resultado do TFC simplifica o cálculo de uma integral definida. Se f for contínua, basta obter sua primitiva F e calcular a diferença $F(b) - F(a)$.

Notação para o TFC e exercícios

Para simplificar a utilização do TFC, se f for contínua usamos a seguinte notação:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\,,}$$

em que a barra vertical indica que deve ser efetuada uma diferença de valores funcionais na primitiva F: primeiro aplicamos a primitiva no limitante superior (em b) e depois descontamos a primitiva aplicada no limitante inferior (em a).

Como a primitiva F é obtida por meio do processo de integração indefinida, aprendido em CDI-1, vamos relembrar as principais técnicas de integração, com ênfase naquelas que utilizaremos com maior frequência em CDI-2, adaptando-as conforme necessário:

Integrais Tabeladas:

Exercício 1: Utilize o TFC para resolver as integrais:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(-x^2+4x+7)dx$

b) $\displaystyle I = \int_0^1(-x^3+3x-4)dx$

c) $\displaystyle I = \int_1^3\left(\frac{x^3-4}{x^5}\right)dx$

d) $\displaystyle I = \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(\cos(2x)+3e^{6x}-5x^4)dx$

Exercícios

- Substituição de Variáveis:
- Permite transformar uma integral em outra mais simples, por meio de uma substituição adequada de variável.
- A diferença do método para integrais definidas é que a substituição deve ser aplicada também aos limitantes de integração.

Exercício 2: Resolva as seguintes integrais definidas:

$$a)\ I = \int_{-1}^{2} x^2 \sqrt{x^3 + 1}\ dx.$$

Exemplos resolvidos

Exemplo 1: Resolva as integrais:

$a)$ $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin(2x) + e^{3x} + 10x^4)dx$

Como $f(x) = \sin(2x) + e^{3x} + 10x^4$ é contínua no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, podemos aplicar o TFC.

Resolvendo diretamente:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin(2x) + e^{3x} + 10x^4)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{3}e^{3x} + 2x^5 \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{2}} + 2\left(\frac{\pi}{6}\right)^5 - \left(-\frac{1}{2}\cos(0) + \frac{1}{3}e^0 + 2(0)^5\right)$$

$$= -\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{2}} + 2.\frac{\pi^5}{7776} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi^5}{3888} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$= -\frac{1}{12} + \frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi^5}{3888} = \frac{1}{3888}\left(-324 + 1296\, e^{\frac{\pi}{2}} + \pi^5\right).$$

Exemplos resolvidos

$b)\ I = \int_{\sqrt[5]{-7}}^{2} x^4 \sqrt{x^5 + 32}\ dx.$

Solução: Como f é contínua se e somente se $x^5 + 32 \geq 0$, ou seja, se e somente se

$$x^5 \geq -32$$

isto é, se e somente se

$$x \geq \sqrt[5]{-32} = -2.$$

Note que, embora $f(x) = x^4 \sqrt{x^5 + 32}$ não seja sempre contínua, ela é contínua no intervalo de integração.

Além disso, a primitiva de f não é imediata.

Vamos resolver a integral de duas formas distintas, usando uma substituição de variáveis apropriada.

Na primeira forma, substituiremos também os limitantes de integração.

Na segunda forma, faremos como em CDI-1: resolver primeiro a integral indefinida, retornar à variável original e posteriormente aplicar os limitantes de integração dados.

Exemplos resolvidos

1ª FORMA: Usaremos a técnica de substituição de variáveis diretamente na integral definida

$$I = \int_{\sqrt[5]{-7}}^{2} x^4\sqrt{x^5+32}\;dx.$$

Definimos a mudança de variáveis:

$$u = x^5 + 32$$

$$du = 5x^4dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{5}du = x^4dx.$$

Mudando os limitantes de integração:

$$x = \sqrt[5]{-7} \qquad \Rightarrow \qquad u = \left(\sqrt[5]{-7}\right)^5 + 32 = -7 + 32 = 25$$

$$x = 2 \qquad \Rightarrow \qquad u = 2^5 + 32 = 32 + 32 = 64.$$

Veja que a integral será resolvida na variável u, por isso, os limitantes devem dizer respeito a essa variável!

Assim, a integral fica:

$$I = \int_{\sqrt[5]{-7}}^{2} x^4\sqrt{x^5+32}\;dx = \int_{25}^{64}\frac{\sqrt{u}}{5}du = \frac{1}{5}\int_{25}^{64}u^{1/2}\,du = \frac{1}{5}.\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_{25}^{64}$$

$$= \frac{2}{15}.64^{3/2} - \frac{2}{15}.25^{3/2} = \frac{2}{15}.512 - \frac{2}{15}.125 = \frac{2}{15}.387 = \frac{258}{5}.$$

Exemplos resolvidos

1ª FORMA: Usaremos a técnica de substituição de variáveis diretamente na integral definida

$$I = \int_{\sqrt[5]{-7}}^{2} x^4 \sqrt{x^5 + 32}\; dx.$$

Definimos a mudança de variáveis:

$$u = x^5 + 32$$

$$du = 5x^4 dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{5} du = x^4 dx.$$

Mudando os limitantes de integração:

$$x = \sqrt[5]{-7} \qquad \Rightarrow \qquad u = \left(\sqrt[5]{-7}\right)^5 + 32 = -7 + 32 = 25$$

$$x = 2 \qquad \Rightarrow \qquad u = 2^5 + 32 = 32 + 32 = 64.$$

Veja que a integral será resolvida na variável u, por isso, os limitantes devem dizer respeito a essa variável!

Assim, a integral fica:

$$I = \int_{\sqrt[5]{-7}}^{2} x^4 \sqrt{x^5 + 32}\; dx = \int_{25}^{64} \frac{\sqrt{u}}{5} du = \frac{1}{5} \int_{25}^{64} u^{1/2}\, du = \frac{1}{5} . \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_{25}^{64}$$

$$= \frac{2}{15} . 64^{3/2} - \frac{2}{15} . 25^{3/2} = \frac{2}{15} . 512 - \frac{2}{15} . 125 = \frac{2}{15} . 387 = \frac{258}{5}.$$

Exemplo 4: Resolva a integral:

$$I = \int_{-1}^{4} |x| e^{-2x} dx \,.$$

Solução: A função $f(x) = |x|e^{-2x}$ é contínua para todos os reais e podemos aplicar o TFC.

No entanto, o termo $|x|$ não possui nem primitiva nem derivada. Como o módulo depende do sinal de x e, no intervalo de integração temos valores negativos e positivos, precisamos utilizar a Propriedade 3 para separá-la em duas integrais:

$$|x| = \begin{cases} x, se\ x \geq o \\ -x, se\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$I = \int_{-1}^{0} |x| e^{-2x} dx + \int_{0}^{4} |x| e^{-2x} dx.$$

Veja que a escolha do zero deu-se por esse ser o ponto em que $|x|$ altera sua expressão. Usando então a definição de módulo, obtemos

$$I = \int_{-1}^{0} -x e^{-2x} dx + \int_{0}^{4} x e^{-2x} dx \ = \ -\int_{-1}^{0} x e^{-2x} dx + \int_{0}^{4} x e^{-2x} dx$$

Podemos agora usar Partes para resolver ambas integrais. Tomamos:

$$u = x \qquad \text{e} \qquad dv = e^{-2x} dx$$

e obtemos $$du = dx \qquad \text{e} \qquad v = \frac{-1}{2} e^{-2x}$$