LMA0001 - Lógica Matemática
Exercícios Dedução Natural
Professora Karina G. Roggia
Monitor: Thiago H. Carpes
Joinville, julho de 2020

1. Demonstre, utilizando as regras básicas da Dedução Natural, os seguintes sequentes:

   (a) $J \to \neg J \vdash \neg J$
   (b) $Q \to (Q \wedge \neg Q) \vdash \neg Q$
   (c) $A \to (B \to C) \vdash (A \wedge B) \to C$
   (d) $K \wedge L \vdash K \leftrightarrow L$
   (e) $(C \wedge D) \vee E \vdash E \vee D$
   (f) $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \vdash A \leftrightarrow C$
   (g) $\neg F \to G, F \to H \vdash G \vee H$
   (h) $(Z \wedge K) \vee (K \wedge M), K \to D \vdash D$
   (i) $P \wedge (Q \vee R), P \to \neg R \vdash Q \vee E$
   (j) $S \leftrightarrow T \vdash S \leftrightarrow (T \vee S)$
   (k) $\neg(P \to Q) \vdash \neg Q$
   (l) $\neg(P \to Q) \vdash P$

2. Prove os seguintes sequentes:

   (a) $A \to B, A \to C \vdash A \to (B \wedge C)$
   (b) $(A \wedge B) \to C \vdash A \to (B \to C)$
   (c) $A \to (B \to C) \vdash (A \to B) \to (A \to C)$
   (d) $A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
   (e) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$
   (f) $A \vee B, A \to C, B \to D \vdash C \vee D$
   (g) $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$
   (h) $A \wedge \neg B \vdash \neg(A \to B)$
   (i) $\neg A \to \neg B \vdash B \to A$
   (j) $A \to B \vdash \neg A \vee B$
   (k) $A \to (B \vee C) \vdash (A \to B) \vee (A \to C)$

3. Prove os seguintes teoremas:

   (a) $\vdash \neg A \to (A \to \bot)$
   (b) $\vdash \neg(A \wedge \neg A)$
   (c) $\vdash ((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$
   (d) $\vdash \neg(A \to B) \to (A \wedge \neg B)$
   (e) $\vdash (\neg A \vee B) \to (A \to B)$

(f) $\vdash \neg\neg A \to A$

(g) $\vdash \neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$

(h) $\vdash (A \to B) \vee (B \to A)$

(i) $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

4. Os exercícios a seguir podem ser generalizados como regras derivadas para a Dedução Natural. Prove tais regras.

   (a) Silogismo Disjuntivo (1):
   $A \vee B, \neg A \vdash B$

   (b) Silogismo Disjuntivo (2):
   $A \vee B, \neg B \vdash A$

   (c) *Modus Tollens*:
   $A \to B, \neg B \vdash \neg A$

   (d) Eliminação da Dupla Negação:
   $\neg\neg A \vdash A$

   (e) Lei do Terceiro Excluído:
   $A \to B, \neg A \to B \vdash B$

   (f) De Morgan (1):
   $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$

   (g) De Morgan (2):
   $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$

   (h) De Morgan (3):
   $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$

   (i) De Morgan (4):
   $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

5. Dê uma prova de cada um dos sequentes a seguir. Pode-se utilizar as regras derivadas do exercício anterior.

   (a) $E \vee F, F \vee G, \neg F \vdash E \wedge G$

   (b) $M \vee (N \to M) \vdash \neg M \to \neg N$

   (c) $(M \vee N) \wedge (O \vee P), N \to P, \neg P \vdash M \wedge O$

   (d) $(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z), \neg(X \wedge D), D \vee M \vdash M$

   (e) $C \to (E \wedge G), \neg C \to G \vdash G$

   (f) $M \wedge (\neg N \to \neg M) \vdash (N \wedge M) \vee \neg M$

   (g) $(Z \wedge K) \leftrightarrow (Y \wedge M), D \wedge (D \to M) \vdash Y \to Z$

   (h) $(W \vee X) \vee (Y \vee Z), X \to Y, \neg Z \vdash W \vee Y$