Matrizes

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

colunas ↑ (n), ↓ linhas (m)

Matriz linha: É qualquer matriz que possua uma única linha $(m=1)$

Ex: $A_{1\times n} = [a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \cdots a_{1n}]$

Matriz Coluna: É qualquer matriz que possua uma única coluna $(n=1)$

$$A_{m\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

Matriz Nula: É qualquer matriz cujos elementos são todos iguais a zero $(a_{ij}=0, \forall i, \forall j)$

Matriz Retangular: É qualquer matriz cujo número de linhas é diferente de colunas, ou seja, $m \neq n$

Matriz Quadrada: É qualquer matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas, ou seja, em que, $m=n$. Na matriz quadrada destamos os elementos pertencentes a diagonal principal e a diagonal secundária.

- Principal é formada pelos elementos em que $i=j$.
- Secundária é formada pelos elementos em que $i+j=n+1$

Matriz Diagonal: É uma matriz quadrada $(m=n)$ em que $a_{ij}=0$ sempre que $i\neq j$. Ou seja, todos os elementos que não estão na diagonal principal são sempre nulos.

Matriz Identidade: É uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal são todos iguais a 1, isto é $a_{ij}=0$ sempre que $i\neq j$ e $a_{ij}=1$ sempre que $i=j$. É denotado por I

Matriz triangular superior: é uma matriz quadrada em que todos os elementos situados abaixo da diagonal principal são todos nulos, ou seja $a_{ij}=0$ sempre que $i>j$.

Matriz triangular inferior é uma matriz quadrada em que todos os elementos situados acima da diagonal principal são nulos, ou seja $a_{ij}=0$ sempre que $i<j$.

Igualdade de Matrizes: $A=B \Leftrightarrow [a_{ij}]_{m\times n} = [b_{ij}]_{r\times s}$ em que $m=r$, $n=s$ e $a_{ij}=b_{ij}$ $\forall i, \forall j$.

Adição de Matrizes: Só é possível somar matrizes de mesma ordem!

$$A+B = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$$

Propriedades da adição de matrizes:

1) Comutividade: $A+B = B+A$
2) Associatividade: $A+(B+C) = (A+B)+C = (A+C)+B$
3) Elemento Neutro: $A+0=A$

Multiplicação por escalar: Se $A_{m\times n}$ é uma matriz e K é um número real, então:

$$K.A_{m\times n} = K.[a_{ij}]_{m\times n} = [K.a_{ij}]_{m\times n}$$

Propriedades da multiplicação por escalar:

1) Distributividade em relação à soma de matrizes: $K(A+B) = KA+KB$.
2) Distributividade em relação a soma de escalares: $(K+t)A = KA+tA$.
3) Associatividade: $K(tA) = (Kt)A$
4) A multiplicação que qualquer matriz pelo escalar zero resulta na matriz nula: $0.A=0$

Multiplicação de matrizes: Sejam $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ e $B=[b_{ij}]_{n\times p}$, temos que $A_{m\times n}.B_{n\times p} = C_{m\times p}$

Obs: • Só é possível multiplicar matrizes se a coluna da primeira for igual a linha da segunda.

• $A.B \neq B.A$

Propriedades da multiplicação de Matrizes:

1) Se I é a matriz identidade de ordem $m\times n$ então: $I.A = A = A.I$ para qualquer matriz quadrada de $n\times n$.
2) Se A é uma matriz de ordem $m\times n$ e 0 é uma matriz nula de ordem $n\times p$ então: $A.0 = 0_{m\times p}$
3) Se 0 é uma matriz nula de ordem $m\times n$ e A é uma matriz de ordem $n\times p$ então: $0.A = 0_{m\times p}$
4) Distributividade: Se A é uma matriz de ordem $m\times n$ e B, C são ambas matrizes de ordem $n\times p$, então $A(B+C) = A.B + A.C$
5) Associatividade: Se A é uma matriz de ordem $m\times n$, B é uma matriz de ordem $n\times p$ e C uma matriz de ordem $p\times q$ então: $A.(B.C) = (A.B).C$

Potência de uma matriz: Se A é uma matriz quadrada e K é um número inteiro positivo, então a K-ésima potência de A é definida como o produto

$$A^K = \underbrace{A.A.A.\ldots.A}_{K\ \text{vezes}}$$

Transposta de uma Matriz: Dada uma matriz $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ podemos obter uma nova matriz permutando suas linhas por suas colunas de mesmo índice. $A^T=[a_{ji}]_{n\times m}$

Propriedades da Transposta:

1) $(A^T)^T = A$
2) Se A+B são matrizes de mesma ordem tais que $A=B$ então $A^T = B^T$
3) Se A+B são matrizes de mesma ordem, então $(A+B)^T = A^T + B^T$
4) Se A é uma matriz de qualquer ordem e $k \in \mathbb{R}$ então $(kA)^T = kA^T$
5) Se A é uma matriz de ordem $m\times n$ e B é uma matriz de ordem $n\times p$, então $(AB)^T = B^T A^T$ (atenção para ordem de fatores)

Como multiplicar matrizes;

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{mp}$$

iguais

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 4 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & \\ & \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2\cdot 3 + 0\cdot 2 + 1\cdot 6 \\ & \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 5\cdot 4 + 3\cdot 1 + 2\cdot 0 & \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 23 & 5\cdot 3 + 3\cdot 2 + 2\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 23 & 33 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Como fazer a Matriz Inversa: $A=\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\boxed{A\cdot A^{-1} = I_n}$$

$$A=\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -5a-3c & -5b-3d \\ 3a+2c & 3b+2d \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -5a-3c=1 & -5b-3d=0 \\ 3a+2c=0 & 3b+2d=1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5a-3c=1 & \times 2 \\ 3a+2c=0 & \times 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -10a - \cancel{6c} = 2 \\ 9a + \cancel{6c} = 0 \end{cases} \Rightarrow -a = 2 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow 3\cdot -2 + 2c = 0 \Rightarrow -6 + 2c = 0 \Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

$$\begin{cases} -5b-3d=0 & \times 2 \\ 3b+2d=1 & \times 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10b - \cancel{6d} = 0 \\ 9b + \cancel{6d} = 3 \end{cases} \Rightarrow -b = 3 \Rightarrow b = -3$$

$$\Rightarrow 3\cdot -3 + 2d = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -9 + 2d = 1 \Rightarrow 2d = 10 \Rightarrow d = 5$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$