Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Série de Taylor

Série de Mac Laurin

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 do dia 16 de outubro de 2024.

Revisão: Séries de Funções e Séries de Potências

Séries de Funções:

São séries cujos termos gerais também dependem de uma variável real x, ou seja, são da forma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + u_4(x) + u_5(x) + \cdots$$

em que $u_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, são funções reais de uma variável real x.

No caso em que $u_n(x) = c_n(x-a)^n$ a série de funções é chamada de Séries de Potências:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots +$$

em que $a \in \mathbb{R}$ é o centro da Série de Potências e c_n são os coeficientes da série.

No estudo de séries de potências, uma questão importante consiste em determinar para quais valores de x a série converge. Tal conjunto de valores de x para os quais a série converge é chamado de Intervalo de Convergência da Série e possui um dos formatos:

$$(a-R, a+R), \qquad [a-R, a+R], \qquad (a-R, a+R], \qquad ou \qquad [a-R, a+R).$$

Série de Taylor

Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função infinitamente diferenciável e $a\in\mathbb{R}$ um valor fixado. Queremos obter uma Série de Potências, com centro em a, que converge para f, pelo menos em um certo intervalo que contém a, ou seja, tal que

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

para $x\in I$, em que I representa o intervalo de convergência da Série, centrado em a.

Para obter tal Série de Potências, veja que basta determinar os coeficientes c_n (num processo que se assemelha ao efetuado em ALI para obter os coeficientes de uma combinação linear de polinômios).

Para tal, precisamos supor que possamos derivar termo a termos a igualdade acima (veja que isso faz sentido, pois o lado direito é uma soma de polinômios, que é derivável):

- Para obter c_0 basta aplicar $x=a$ em ambos os lados da igualdade acima:

$$f(a)=c_0+c_1(a-a)+c_2(a-a)^2+c_3(a-a)^3+\cdots+c_n(a-a)^n+\cdots$$

ou seja

$$f(a)=c_0+0=c_0 \qquad \text{e} \qquad c_0=f(a)$$

Série de Taylor

- Para obter c_1 primeiro derivamos a igualdade anterior em ambos os lados

$$f'(x) = c_1 \cdot 1 + 2c_2(x-a)^1 + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} + \cdots$$

e então aplicamos $x = a$ em ambos os lados:

$$f'(a) = c_1 + 0 = c_1 \qquad \text{e} \qquad c_1 = f'(a)$$

- Para obter c_2 derivamos novamente:

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-a)^1 + 4 \cdot 3c_4(x-a)^2 + \cdots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} + \cdots$$

e então aplicamos $x = a$ em ambos os lados:

$$f''(a) = 2c_2 + 0 = 2c_2 \qquad \text{e} \qquad c_2 = \frac{f''(a)}{2}$$

- Para obter c_3 derivamos novamente:

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2c_4(x-a)^1 + \cdots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2)c_n(x-a)^{n-3} + \cdots$$

e então aplicamos $x = a$ em ambos os lados:

$$f'''(a) = 3 \cdot 2 \cdot 1c_3 + 0 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_3 \qquad \text{e} \qquad c_3 = \frac{f'''(a)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{f'''(a)}{3!}$$

- Para obter c_4 repetimos o processo, derivando

$$f^{(4)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1c_4 + \cdots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2)(n-3)c_n(x-a)^{n-4} + \cdots$$

e então aplicamos $x = a$ em ambos os lados:

$$f^{(4)}(a) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1c_4 + 0 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1c_4 \qquad \text{e} \qquad c_4 = \frac{f^{(4)}(a)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{f^{(4)}(a)}{4!}$$

Série de Taylor

- Repetindo sucessivamente o raciocínio, derivando sucessivamente e aplicando a derivada em $x = a$, obtemos que

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

em que $f^{(n)}$ representa a n-ésima derivada de f.

Veja que o fatorial está presente no denominador mesmo em $c_0 = f(a) = \frac{f(a)}{1} = \frac{f(a)}{0!}$ (aqui convencionamos que $f^{(0)} = f$) e em $c_1 = f'(a) = \frac{f'(a)}{1} = \frac{f'(a)}{1!}$.

Portanto, obtemos que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Tal série é chamada de **Série de Taylor de f**.

Série de MacLaurin

Já a Série de MacLaurin de f é um caso particular da Série de Taylor, obtida tomando-se o centro como $a = 0$.

Com isso, temos que

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Como $(x - a) = (x - 0) = x$ obtemos que a Série de MacLaurin de f é dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots$$

Observação:

- A utilidade das Séries de Taylor e de MacLaurin consiste em escrever uma função que é essencialmente “mais complicada” como uma soma (infinita) de funções polinomiais.
- Veja que a classe de funções polinomiais são as funções “mais simples” possíveis de serem derivadas e integradas (por exemplo) e dependem apenas das quatro operações aritméticas básicas!

Exemplo

Exercício 1) Determine a série de MacLaurin para:

$$f(x) = e^x.$$

Exercício 2) Determine o intervalo de convergência da série de MacLaurin de $f(x) = e^x$.

Exercício 3) Determine o valor de convergência das seguintes séries numéricas;

$$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \qquad b)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n}{n!} \qquad c)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$$

Exercício 4) Determine a série de MacLaurin para:

$$a)\ f(x) = x^{10} e^{-3x^{17}}$$

$$b)\ f(x) = \int x^{10} e^{-3x^{17}} dx$$

$$c)\ f(x) = \frac{1}{1+x}$$

Exercícios

d) $f(x) = \int \dfrac{x^7}{4+9x^2}\,dx$

e) $f(x) = \ln(1+x)$

f) $f(x) = \int x^9 \ln(1-2x^{23})\,dx$

g) $f(x) = cos(x)$

h) $f(x) = \text{sen}(x)$

i) $f(x) = \int \sqrt{x^7}\,\text{sen}(5x^{19})\,dx$

Exemplo

Exemplo 1) Determine a série de MacLaurin para as seguintes funções:

$a)\ f(x) = e^x$

Solução: Para expandir a função exponencial em Série de MacLaurin, basta obter os coeficientes c_n. Como a função exponencial é tal que

$$f^{(n)}(x) = e^x \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

temos que

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{e^0}{n!} = \frac{1}{n!}$$

Com isso temos que

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

Agora, vamos determinar o intervalo de convergência da série de e^x. Pelo Critério da Razão para a convergência absoluta:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} . \frac{n!}{x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{(n+1).n!} x^n . x . \frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x}{n+1}\right| = |x| . \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = |x| . 0 = 0.$$

Como $L = 0 < 1$ é válido para todo x, o intervalo de convergência consiste em $I = \mathbb{R}$.

Exemplo

Portanto, obtemos que

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

é válido para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, tomando $x = 1$, temos que

$$e^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} 1^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}.1 + \frac{1}{3!}.1 + \frac{1}{4!}.1 + \frac{1}{5!}.1 + \cdots + \frac{1}{n!}.1 + \cdots$$

Se somarmos apenas os primeiros sete termos dessa série, obtemos que

$$e = e^1 \approx \sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2{,}718055556$$

Compare o valor aproximado acima com o valor fornecido por uma calculadora e veja que já temos uma precisão de 3 casas decimais. Podemos melhorar essa precisão somando cada vez mais termos da série obtida.

O desenvolvimento de MacLaurin para e^x que obtivemos acima é justamente a “fórmula” matemática que está programada na memória de uma calculadora. Pense que na época em que o conceito de MacLaurin foi desenvolvido ainda não existiam ferramentas tecnológicas que auxiliasse a obter tal valor.

Exemplo

$b)\ f(x) = \int x^2 e^{5x^7} dx$

Solução: Veja que não é simples obter o resultado de tal integral pelos métodos de CDI-1. Vamos então aplicar a Teoria de Séries para obter essa primitiva como uma Série de MacLaurin. Pelo exemplo anterior, podemos escrever

$$e^q = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} q^n$$

para qualquer q real. Tomando $q = 5x^7$ obtemos que

$$e^{5x^7} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (5x^7)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} 5^n x^{7n}$$

Multiplicando ambos os lados por x^2 e usando propriedades de potenciação, obtemos

$$x^2 e^{5x^7} = x^2 . \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} 5^n x^{7n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^2 . \frac{1}{n!} 5^n x^{7n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} 5^n x^{7n+2}$$

Exemplo

Agora, basta integrar em ambos os lados. Como a integral de uma soma (mesmo infinita) de polinômio é a soma das integrais dos polinômios, encontramos que

$$f(x) = \int x^2 e^{5x^7}\, dx = \int \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} 5^n x^{7n+2}\, dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int \frac{1}{n!} 5^n x^{7n+2} dx = \; k + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n x^{7n+3}}{n!\,(7n+3)}.$$

onde k é a constante da integração indefinida.

$c)$ $f(x) = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

Solução: Vamos obter os coeficientes da Série de MacLaurin de f:

$$c_0 = f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{-1}{1!} = -1$$

Exemplo

$$f''(x) = \frac{+2.1}{(1+x)^3} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{+2}{2!} = 1$$

$$f'''(x) = \frac{(-3).\,2.1}{(1+x)^4} \quad \Rightarrow \quad c_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{-3.2.1}{3!} = -1$$

$$f''''(x) = \frac{+4.3.2.1}{(1+x)^5} \quad \Rightarrow \quad c_4 = \frac{f''''(0)}{4!} = \frac{+4.3.2.1}{4!} = 1$$

Veja que obtivemos um padrão:

$$c_n = \begin{cases} 1, \text{se } n \text{ é par} \\ -1, \text{se } n \text{ é } ímpar \end{cases},$$

que pode ser escrito em termos de uma alternância de sinal como $c_n = (-1)^n$ e portanto

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

que é uma Série Alternada! Fica como exercício (a quem se interessar) obter o intervalo de convergência dessa série como $x \in (-1,1)$.

Exemplo

$d)$ $f(x) = \ln(1+x)$

Solução: É possível proceder conforme fizemos no exemplo anterior. Porém note que

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Pelo que acabamos de obter no exemplo anterior, temos que

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

Com isso, para obter a série de f, basta integrar em ambos os lados dessa igualdade:

$$f(x) = \ln(1+x) = \int f'(x)dx = \int \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int (-1)^n x^n dx$$

$$= k + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

que também é uma Série Alternada! Fica como exercício (a quem se interessar) obter o intervalo de convergência dessa série como $x \in (-1,1]$.

Além disso, aplicando $x = 0$ em ambos os lados da igualdade, encontramos que $k = 0$.

Exemplo

$e)$ $f(x) = \int x^8 \ln(1+3x^5)\,dx$

Solução: É possível proceder conforme fizemos no exemplo b. Como

$$\ln(1+q) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{q^{n+1}}{n+1}$$

Tomando $q = 3x^5$ e usando propriedades de potenciação, obtemos que

$$\ln(1+3x^5) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(3x^5)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1}x^{5n+5}}{n+1}$$

Multiplicando ambos os lados por x^8 :

$$x^8 \ln(1+3x^5) = x^8 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1}x^{5n+5}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1}x^{5n+13}}{n+1}$$

E agora integrando (em relação a x) em ambos os lados e usando propriedades:

$$f(x) = \int x^8 \ln(1+3x^5)\,dx = k + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1}x^{5n+14}}{(n+1)(5n+14)}$$

que também é uma Série Alternada! Fica como exercício (a quem se interessar) obter o intervalo de convergência dessa série.

Exemplo

$f)\ g(x) = \int y^{19}\cos(5y^3)\, dy$

Solução: Como a função é um tanto sofisticada, começamos com a expressão mais simples que não é um polinômio, dada por

$$f(x) = \cos(x)\,.$$

Para obter os coeficientes da Série de MacLaurin para $f(x) = \cos(x)$ fazemos:

$$c_0 = f(0) = 1.$$

Derivando, obtemos

$$f'(x) = -sen(x) \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{-sen(0)}{1!} = 0.$$

Derivando novamente:

$$f''(x) = -cos(x) \qquad \Rightarrow \qquad c_2 = \frac{f''(0)}{1!} = \frac{-cos(0)}{1!} = -1.$$

Derivando novamente:

$$f'''(x) = sen(x) \qquad \Rightarrow \qquad c_3 = \frac{f'''(0)}{1!} = \frac{sen(0)}{1!} = 0.$$

Derivando novamente:

$$f^{(iv)}(x) = \cos(x) \qquad \Rightarrow \qquad c_4 = \frac{f^{(iv)}(0)}{1!} = \frac{cos(0)}{1!} = 1.$$

Exemplo

Veja que, as próximas derivadas começam a se repetir, de quatro em quatro:

$$c_5 = 0, \qquad c_6 = -1, \qquad c_7 = 0, \qquad c_8 = 1, \qquad \ldots$$

Logo, podemos obter um padrão:

$$c_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \pm 1, & \text{se } n \text{ é } par \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 2k+1 \\ (-1)^k, & \text{se } n = 2k \end{cases}$$

Portanto, na série de MacLaurin do cosseno temos apenas expoentes pares de x:

$$\cos(x) = 1 + 0x - \frac{x^2}{2!} + 0x^3 + \frac{x^4}{4!} + 0x^5 - \frac{x^6}{6!} + 0x^7 + \frac{x^8}{8!} + 0x^9 + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \ldots$$

ou seja

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

Lembre que cosseno é uma função par, logo os expoentes de MacLaurin envolvem apenas potências pares!

É possível mostrar que essa série converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Voltando ao exemplo desejado, substituindo $x = 5y^3$ em ambos os lados da igualdade:

$$\cos(5y^3) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (5y^3)^{2k}}{(2k)!} == \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 5^{2k} y^{6k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 25^k y^{6k}}{(2k)!}$$

Exemplo

Como

$$\cos(5y^3) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 25^k y^{6k}}{(2k)!}$$

Multiplicando ambos os lados por y^{19} :

$$y^{19}\cos(5y^3) = x^{19}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 25^k y^{6k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 25^k y^{6k+19}}{(2k)!}.$$

Agora integrando (em relação a y) em ambos os lados e usando propriedades:

$$f(y) = \int y^{19}\cos(5y^3)\,dy = k + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k 25^k y^{6k+20}}{(6k+20).(2k)!}$$

$g)$ $g(x) = sen(x)$.

Solução: Podemos obter a série do seno integrando a série obtida para o cosseno:

$$sen(x) = \int \cos(x)\,dx = \int \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1).(2k)!} = k + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Aplicando $x = 0$, encontra-se que $k = 0$.

Lembre que seno é uma função ímpar, logo os expoentes de MacLaurin envolvem apenas potências ímpares!

Considerações Finais

- Os procedimentos que adotamos nos exemplos anteriores podem ser repetidos para qualquer função. O importante é primeiro obter a série de MacLaurin para determinada “classe” de funções (como fizemos para a exponencial, para a função racional do Exemplo 9c e para o $\ln(1+x)$ e para o $cos(x)$).
- Feito isso, para obter Séries de outras funções que pertencem a essa classe já encontrada, basta substituir apropriadamente os termos que referem-se a outras potências, multiplicar pelos termos necessários e integrar (se preciso for).
- Para a classe de $arctg(q)$, convém proceder conforme fizemos no Exemplo 9c. Se derivarmos essa função, obtemos $\frac{1}{1+q^2}$, cuja série de MacLaurin pode ser obtida a partir do exemplo b, com uma substituição apropriada, a saber $x = q^2$. Depois de fazer essa substituição, deve-se integrar em ambos os lados, para obter $arctg(q)$.
- Depois de obter a Série de MacLaurin, sempre é possível determinar seu intervalo de convergência por meio do Critério da Razão para convergência absoluta, seguido do Testes nos Extremos.