TEG

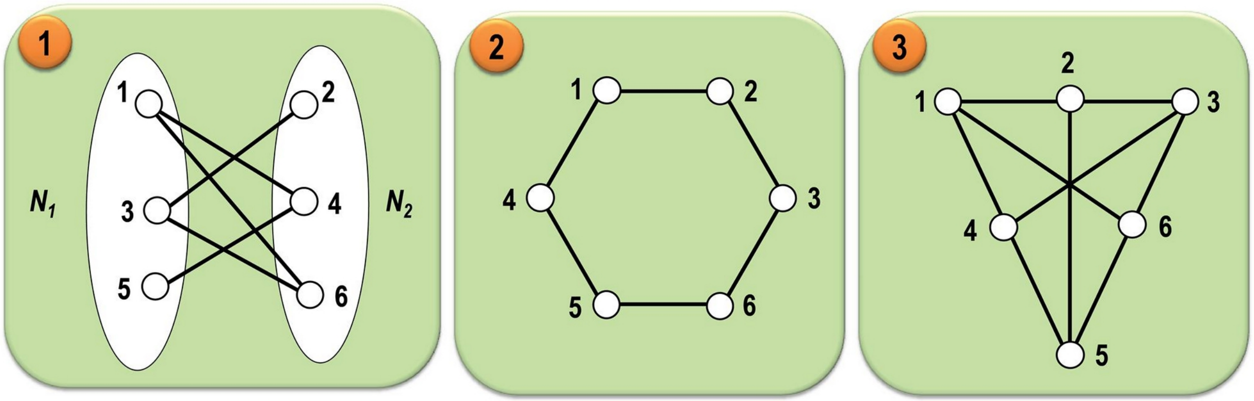
Gilmário B. Santos

gilmario.santos@udesc.br

http://www.joinville.udesc.br/portal/pagina/gilmario

Grafo bipartido

- Um grafo G(V,E) é bipartido quando o seu conjunto de vértices V puder ser particionado em dois subconjuntos disjuntos V1 e V2, tais que toda aresta de G conecta um vértice de V1 a outro de V2 e vice-versa.
  - $V = V1 \cup V2,\ V1 \cap V2 = \phi$
  - Não ocorrem arestas entre vértices de uma mesma partição.
- Exemplos de grafos bipartidos em que os conjuntos de vértices são {1,3,5} e {2,4,6}.

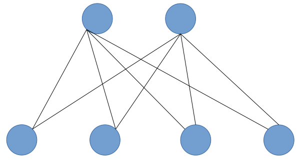


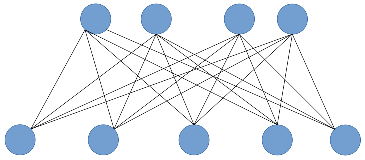
(Goldbarg,2012)

Grafo bipartido

Grafo bipartido *versus* grafo completo:

- O único grafo completo que é bipartido é o K_2.
- Existe o conceito de grafo bipartido que é completo. Nesse caso, o conjunto de vértices do grafo pode ser dividido em duas partições (subconjuntos disjuntos) de maneira que:
  - Cada partição apresenta vértices com o grau máximo possível e com adjacências apenas entre partições diferentes;
  - Os vértices de uma mesma partição são dois a dois não-adjacentes.
  - O bipartido completo é representado como $K_{m,n}$;
  - Exemplos: $K_{2,4}$ $K_{4,5}$ são grafos bipartidos completos:

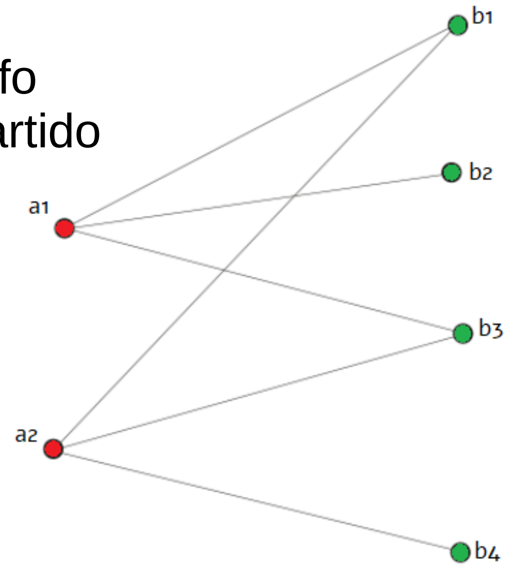




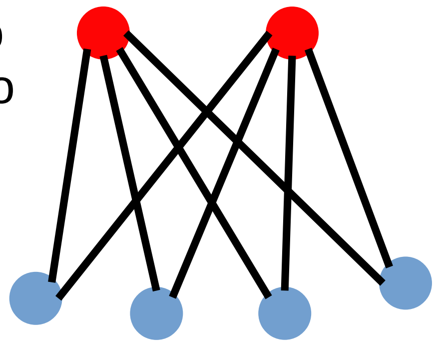
Grafo bipartido

- Um grafo bipartido completo possui uma aresta para cada par de vértices (v1,v2), onde v1 $\in$ V1 e v2 $\in$ V2.
- Um grafo bipartido completo é denotado por $K_{n1,n2}$ e possui n1*n2 arestas, onde n1 = |V1| e n2 = |V2|,

Grafo bipartido



Grafo bipartido completo



$K_{2,4}$

Grafo bipartido

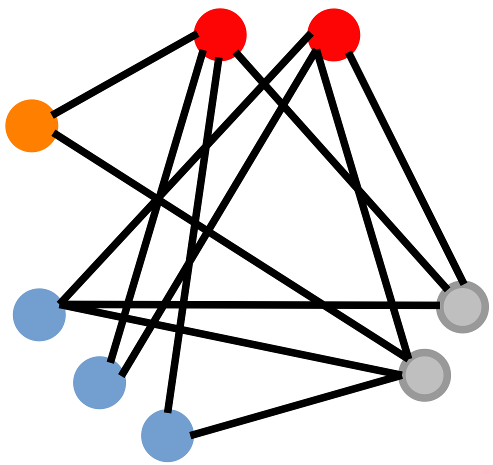
- Qual é a condição para um grafo bipartido completo K_{p_1,p_2} ser regular?
- Qual é o menor grau e o maior grau de um grafo bipartido completo K_{p_1,p_2}?
- Qual é o maior número de arestas possível para um K_{p_1,p_2} completo e regular?
- Seja G(V,A) um grafo bipartido completo com:
  1. |V|=|V1|+|V2| = t vértices;
  2. |V1| = |V2|.

  Prove que G tem a seguinte quantidade de arestas: $t^2/4$

Grafo bipartido

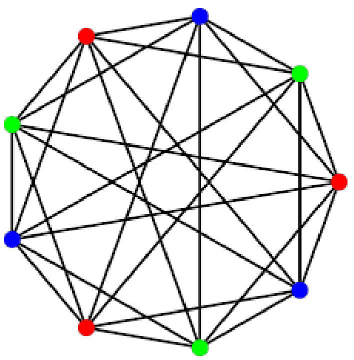
O grafo “multipartido” é uma extensão desse conceito para múltiplas partições:

- Um grafo é multipartido se seu conjunto de vértices pode ser particionado em subconjuntos (ou partições) disjuntos onde os vértices são dois a dois não-adjacentes.



Grafo bipartido

Na verdade, você pode ampliar ainda mais a aplicação do conceito e chegar ao grafo "multipartido" completo $K_{m,\ n,\ p,\ q\ \ldots,\ldots}$ Onde cada partição apresenta vértices com o grau máximo possível, porém, com adjacências apenas entre partições diferentes;

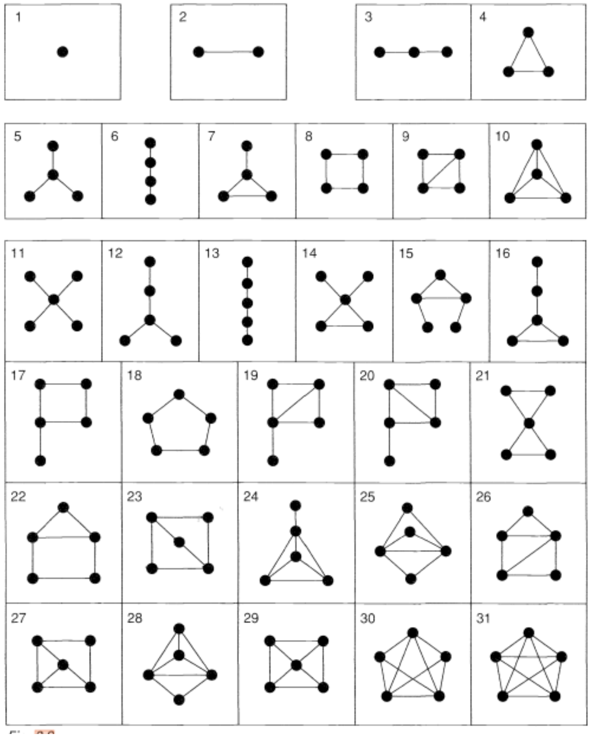


$K_{3,3,3}$

- Qual é a condição para um grafo multipartido completo $K_{p\_1,p\_2,p\_3,\ldots p\_i}$ ser regular?
- Qual é o menor grau e o maior grau de um grafo "multipartido" completo $K_{p\_1,p\_2,p\_3,\ldots p\_i}$, considerando que as partições têm tamanhos diferentes entre si?
- Qual é o maior número de arestas possível para um $K_{p\_1,p\_2,p\_3,\ldots p\_i}$ completo e regular?

Grafo bipartido

- Mostre que Q_k onde 1 <= k <= 3 são regulares e bipartidos;
- Quais grafos abaixo são bipartidos?



Dicas sobre o grafo bipartido:

Ele nunca conterá ciclos de comprimento ímpar. Qual é a razão para isso?

Ele nunca conterá K3 como subgrafo. Qual é a razão para isso?

O único grafo completo que pode ser bipartido é o K2.

Todo grafo caminho (Path – Pn) é bipartido.

König, 1936 (Teorema 1.2 em Goldbarg & Goldbar (2012)):

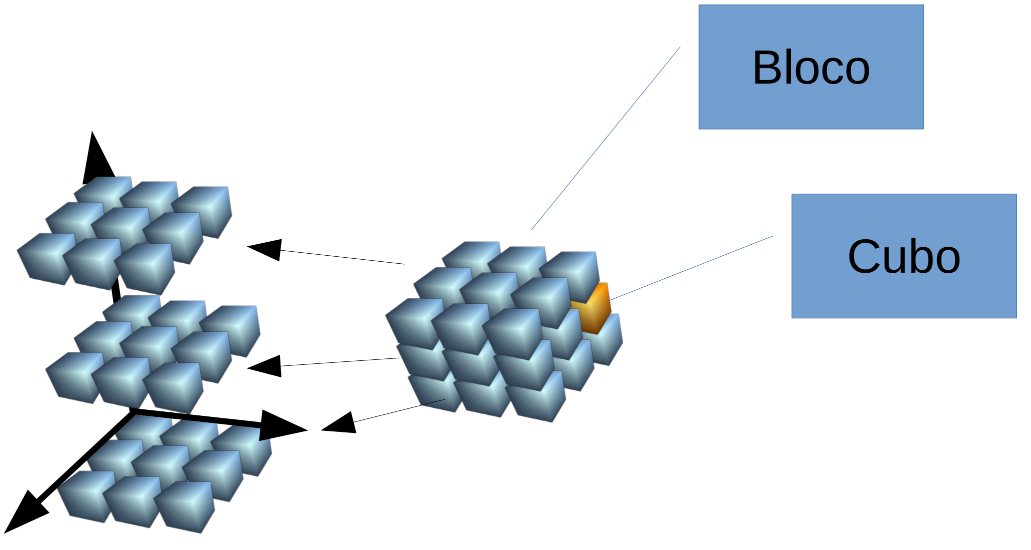
- Um grafo G é bipartido se e somente se todo ciclo em G for par.

Grafo bipartido

Um rato come um bloco de 3x3x3 de queijo comendo todo os cubos de 1x1x1 durante seu caminho. Ele começa num cubo de um canto, come-o e se move para um cubo adjacente (que divide uma face de área 1), comendo-o e se movendo para o próximo adjacente.

a) O percurso para o rato comer todos os cubos do inicial até o final (sem retornar ao primeiro) é um grafo bipartido?
b) É possível ao rato comer todos os cubos e, após o último ser comido, retornar à posição do primeiro cubo comido e o grafo (resultante desse percurso) ser bipartido?

Exiba o circuito percorrido pelo rato no processo de comer os cubos ou prove que é impossível. (Ignore a gravidade)



Grafo bipartido
Emparelhamento

- Aplicação na alocação de tarefas entre funcionário (*e*) e tarefa (*t*)

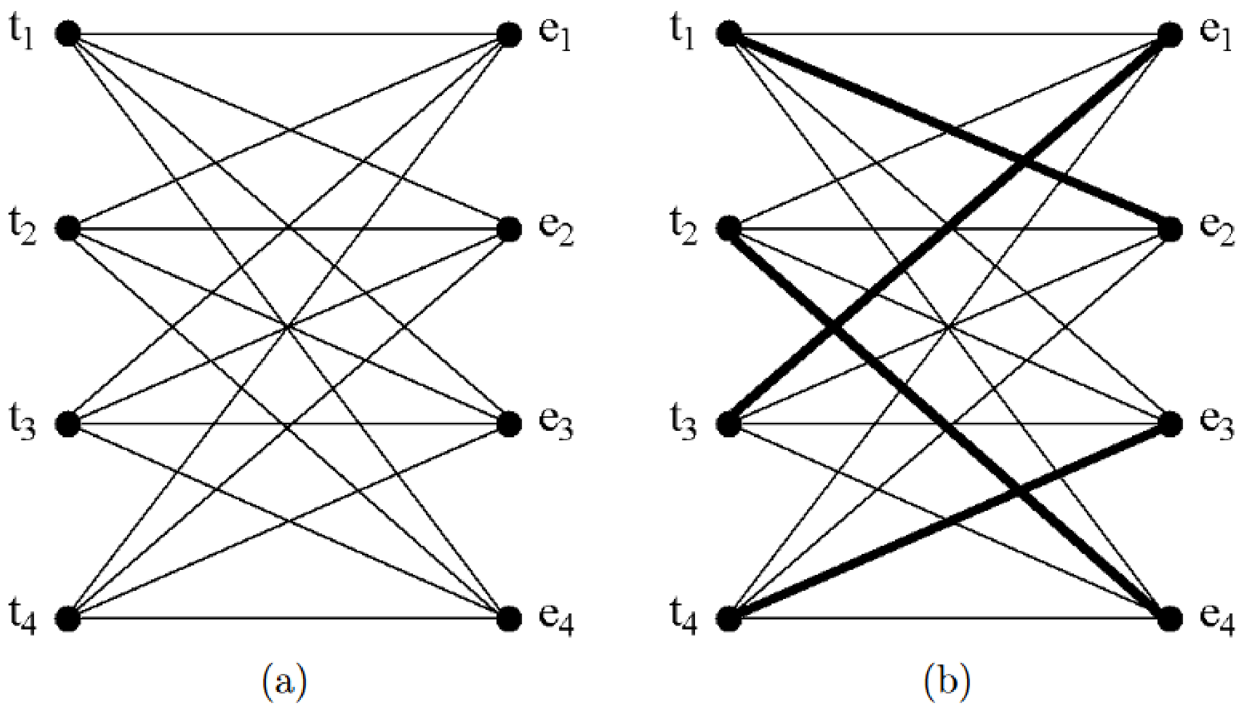


Figura 1.15: Associação de tarefas $t_i \in \mathbf{T}$ aos empregados $e_j \in \mathbf{E}$. (a) todas as associações (b) a associação escolhida, representada por arestas mais grossas.

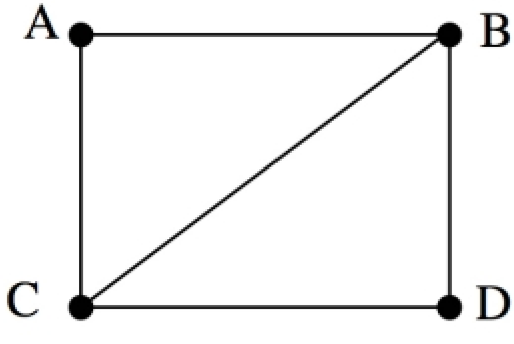
Grafo bipartido
Emparelhamento

Um emparelhamento M em um grafo G = (V, A) é um subconjunto de arestas, $M \subseteq A$, que não correspondem a laços e que não compartilham vértices entre si.

Portanto duas arestas $(a_i, a_j) \in A$, onde $a_i = \{v_i, u_i\}$ e $a_j = \{v_j, u_j\}$ e $i \neq j$, pertencem ao emparelhamento M, se $v_i \neq v_j \neq u_i \neq u_j$

Simplificando: um emparelhamento (ou *matching*, ou acoplamento) em um grafo G é um conjunto de arestas tal que não existem duas arestas adjacentes neste conjunto. Este conjunto também é chamado de conjunto independente de arestas.

Exemplos de emparelhamentos: {(B,C)} e {(A,C),(B,D)}

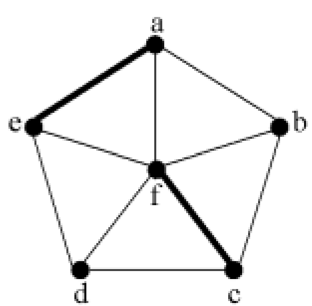


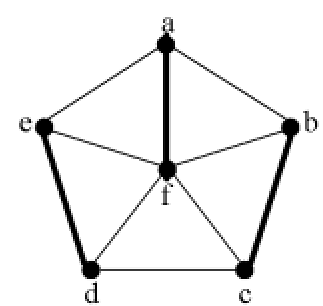
Grafo bipartido
Emparelhamento

Um emparelhamento é chamado de emparelhamento maximal se nenhuma aresta do grafo puder ser adicionada sem que a propriedade de não-adjacência entre as arestas seja destruída.

Observe que um grafo pode ter vários emparelhamentos maximais. Em geral, estamos interessados no emparelhamento maximal com o maior número possível de arestas, chamado emparelhamento máximo.

Exemplos: à esquerda temos um emparelhamento maximal de tamanho 2 e à direita um emparelhamento máximo de tamanho 3 (todo máximo é maximal mas nem todo maximal é máximo)





Grafo bipartido
Emparelhamento

Quando uma aresta do emparelhamento e M é incidente a um vértice v $\in$ V, então dizemos que v é saturado por M.

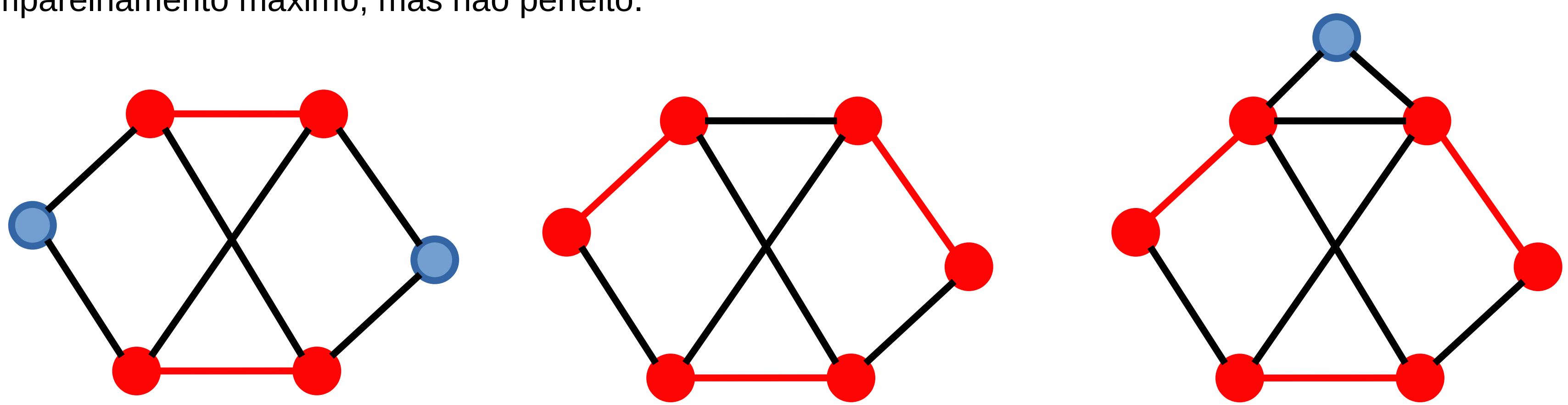
Um emparelhamento máximo é chamado de emparelhamento perfeito se todo vértice do grafo é extremidade de alguma aresta do emparelhamento.

Outra forma de definir emparelhamento perfeito é: o emparelhamento é perfeito quando satura todos os vértices do grafo.

A: emparelhamento maximal

B: emparelhamento máximo que satura todos os vértices, portanto um emparelhamento perfeito para o mesmo grafo;

C: emparelhamento máximo, mas não perfeito.



A B C

Grafo bipartido
Emparelhamento

Emparelhamentos estão definidos para **qualquer tipo de grafo**, mas são estudados mais amplamente no contexto de grafos bipartidos.

Exercício:

Suponha que existam 4 pessoas, a1, a2, a3 e a4 disponíveis para preencher 6 funções vagas, p1, ... , p6.

As pessoas a1, a2 e a4 são qualificadas para exercer a função p2 ou p5. A pessoa a3 é qualificada para exercer a função p1, p2, p3, p4 ou p6.

Desenhe o grafo que representa as qualificações para as vagas.

- Vértices: pessoas e funções vagas;
- Arestas: existe uma aresta ligando uma pessoa às funções para as quais ela esta habilitada.

Será possível empregar todas as pessoas de tal forma que cada pessoa desempenhe a função para a qual esta qualificada?

Se a resposta é não, qual é o maior número de vagas que podem ser preenchidas?

Grafo bipartido

Exercício

Dois jogadores X e Y se alternam escolhendo vértices de um grafo bipartido. Primeiro X escolhe um vértice v_0, a seguir Y escolhe um vértice v_1 adjacente v_0 e assim por diante.

A escolha de X é sempre um vértice distinto dos escolhidos anteriormente.

A escolha Y é sempre um vértice adjacente a v_i e distinto dos escolhidos anteriormente.

O jogador que não puder fazer uma escolha de vértice na sua vez, perde o jogo.

Quais as condições para que Y sempre vença?

Quais as condições para X sempre vencer?

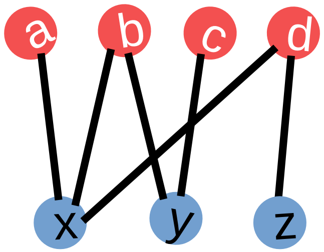
Grafo bipartido

Exercício

Grafo bipartido
Projeções

Projetando o grafo bipartido em suas partições de nós.

1) Sem Ponderação:



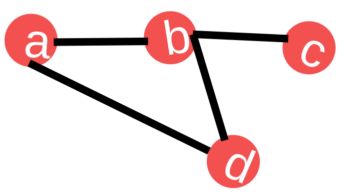
Executores: U

Tarefas: I

Projeção sobre U:

Aresta indica o par de executores que têm pelo menos uma tarefa em comum, ou seja, indica um par cooperando na execução de pelo menos uma tarefa.

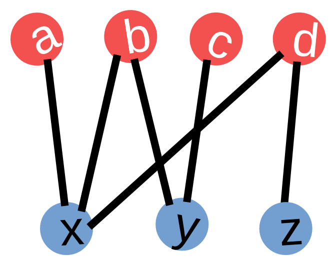
Exemplos:
a, *b* e *d* cooperaram na tarefa *x*;
b, e *c* cooperaram na tarefa *y.*



Grafo bipartido
Projeções

Projetando o grafo bipartido em suas partições de nós.

1) Sem Ponderação:



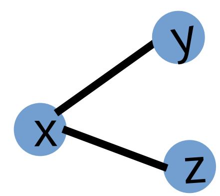
Executores: U

Tarefas: I

Projeção sobre I:

Aresta indica o par de tarefas que têm pelo menos um executor em comum.

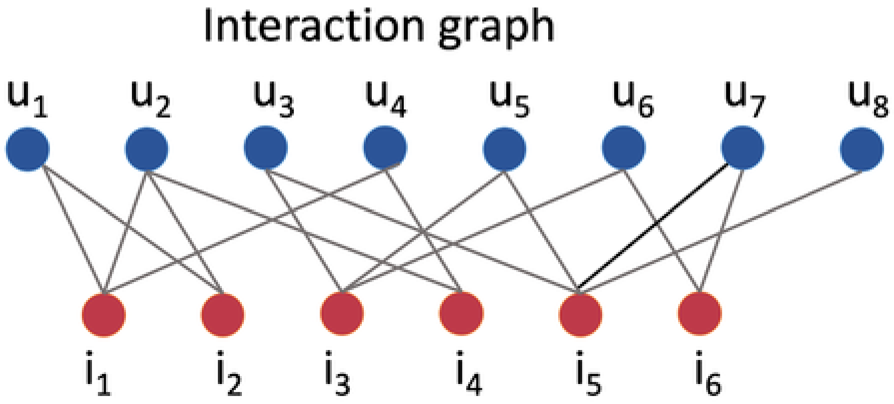
Exemplos:
x e y têm *b* em comum*;*
x e z têm *d em comum.*



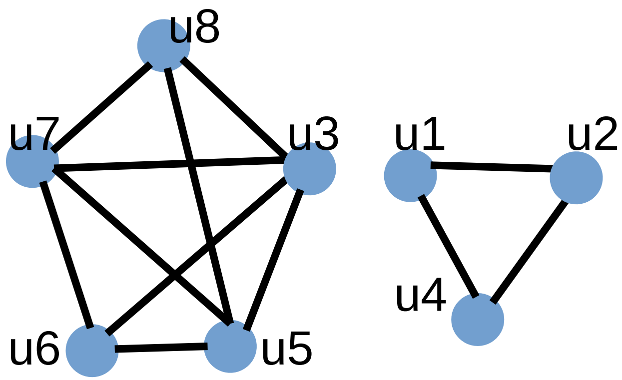
Grafo bipartido
Projeções

Projetando o grafo bipartido em suas partições de nós.

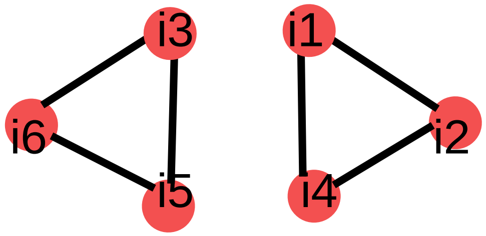
1) Sem Ponderação.



Projeção sobre U:



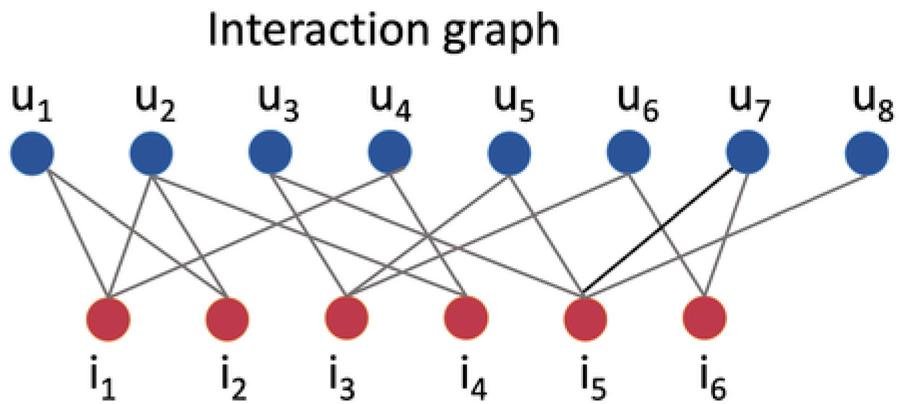
Projeção sobre I:



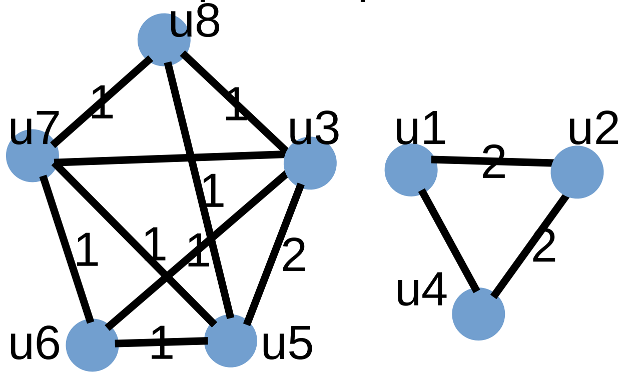
Grafo bipartido
Projeções

Projetando o grafo bipartido em um de seus conjuntos de nós.

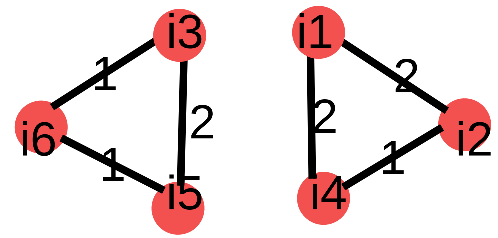
2) Com ponderação simples significa que as arestas são ponderadas diretamente pelo **número de vezes** que a associação comum é repetida.



Projeção sobre U:
Quantas vezes o par coopera



Projeção sobre I:
Quantos executores atuando no par de tarefas



Goldbarg, Marco. Grafos. Disponível em: Minha Biblioteca, Grupo GEN, 2012.

Netto, P.O.B. e Jurkiewicz, S.. Grafos: introdução e prática. Disponível em: Minha Biblioteca, (2nd edição). Editora Blucher, 2017.

Prestes, Edson. https://www.inf.ufrgs.br/~prestes/Courses/Graph%20Theory/Livro/LivroGrafos.pdf

Szwarcfiter, J.L. Teoria computacional de grafos: Os algoritmos

Wilson, R.J. Introduction to Graph Theory