UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

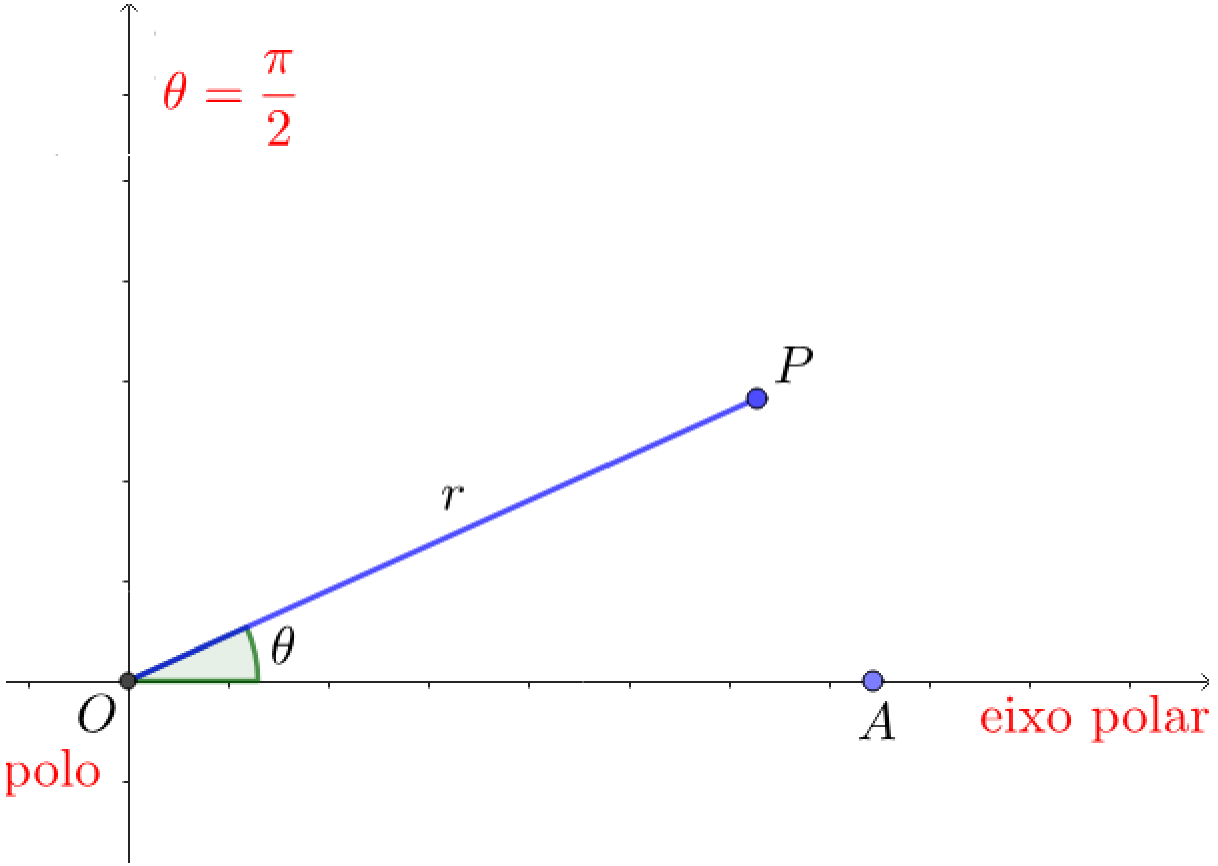
GAN: Geometria Analítica

Coordenadas Polares

Prof.: Francielle Kuerten Boeing

Coordenadas Polares

Coordenadas cartesianas (em $\mathbb{R}^2$): variáveis x, y
Coordenadas polares: variáveis r, θ.



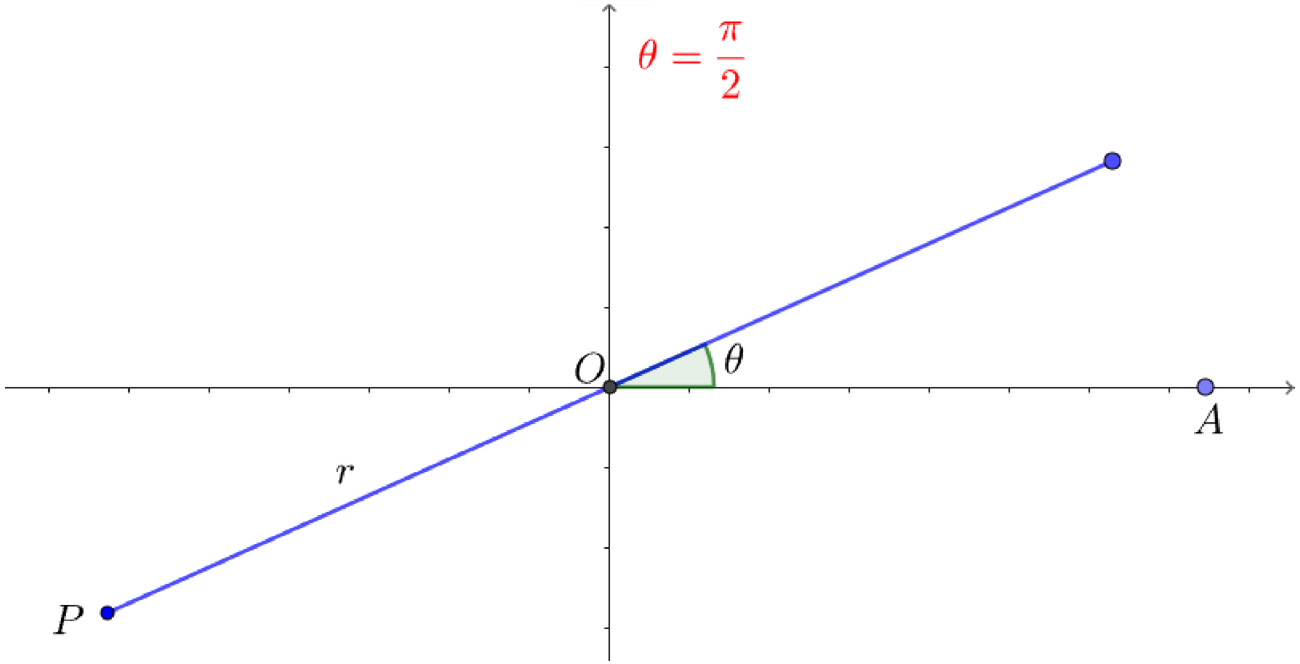
Coordenadas Polares

- $|r|$ determina a distância entre o ponto P e a origem (polo).

- Se o ângulo θ é medido no sentido anti-horário, usamos $\theta > 0$. Se o ângulo θ é medido no sentido horário, usamos $\theta < 0$.

- Se $r < 0$, o ponto P é marcado como na figura ao lado.

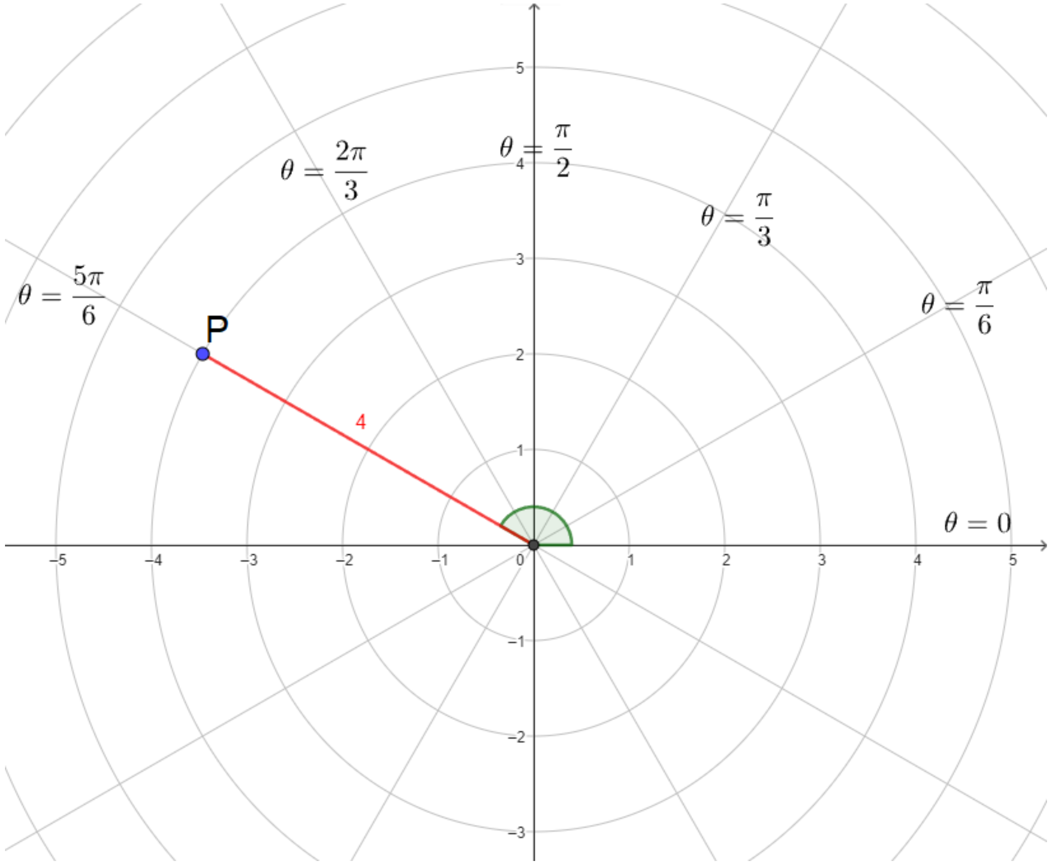
- O par $(0, \theta)$ representa a origem para qualquer θ.



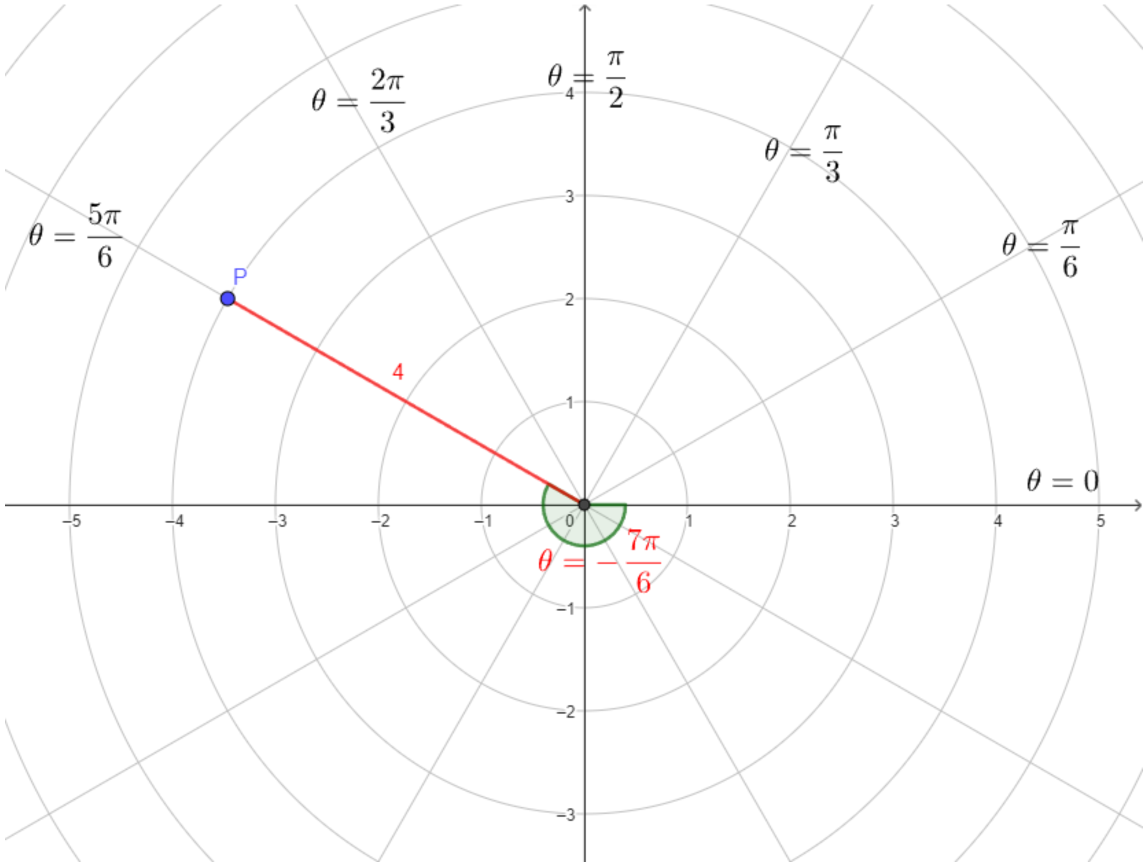
Coordenadas Polares

Exemplo: O ponto $\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ pode ser marcado de quatro formas diferentes com $0 \leq \theta < 2\pi$:

$P\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$



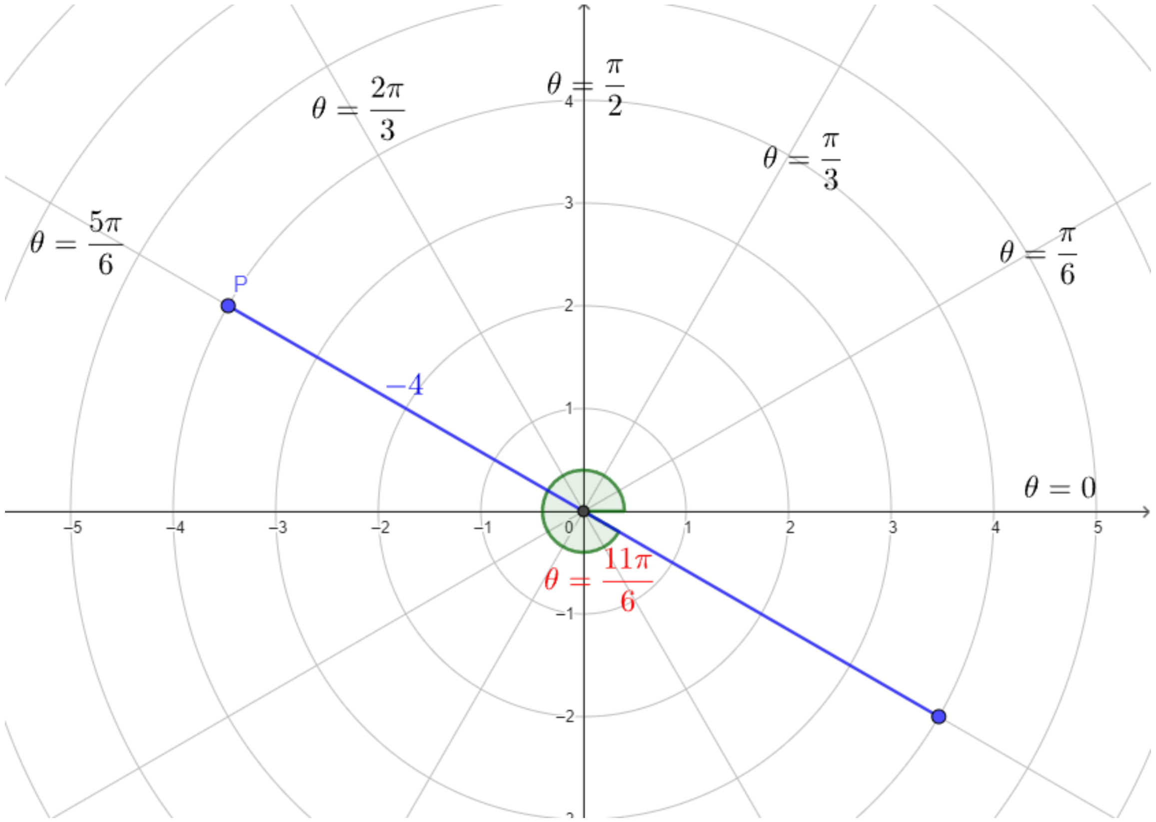
$P\left(4, -\frac{7\pi}{6}\right)$



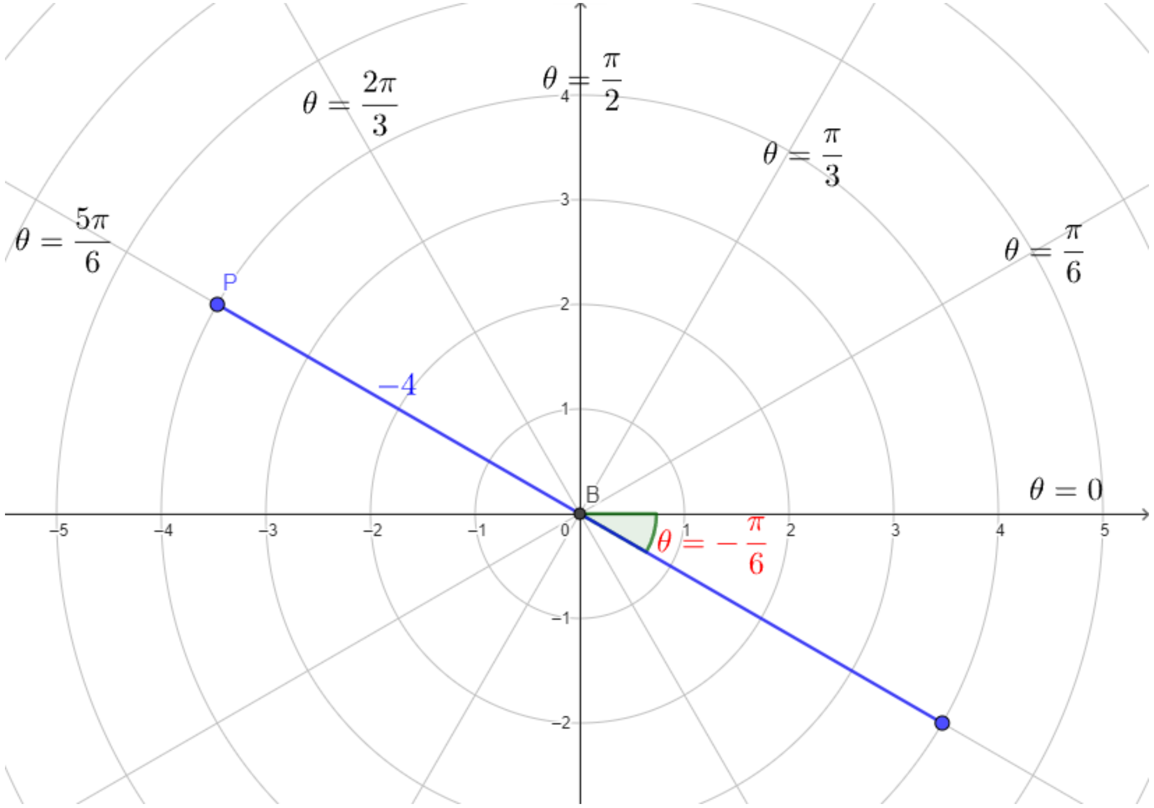
Coordenadas Polares

Exemplo: O ponto $\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ pode ser marcado de quatro formas diferentes com $0 \leq \theta < 2\pi$:

$P\left(-4, \frac{11\pi}{6}\right)$



$P\left(-4, -\frac{\pi}{6}\right)$



Coordenadas Polares

Ex. 1: Represente os pontos abaixo (dados em coordenadas polares) no gráfico:

$(a)\ A\left(2, \frac{\pi}{2}\right);$

$(b)\ B\left(-1, \frac{2\pi}{3}\right);$

$(c)\ C(6, \pi);$

$(d)\ D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{4}\right);$

$(e)\ E\left(3, 25\frac{\pi}{6}\right);$

$(f)\ F\left(-4, \frac{\pi}{2}\right).$

Coordenadas Polares

Ex. 2: Transforme os pontos dados de coordenadas cartesianas para polares e represente-os graficamente:

a) $A\left(\sqrt{3}\,,-1\right)$

b) $B(2,2\ )$

c) $C(3,0)$

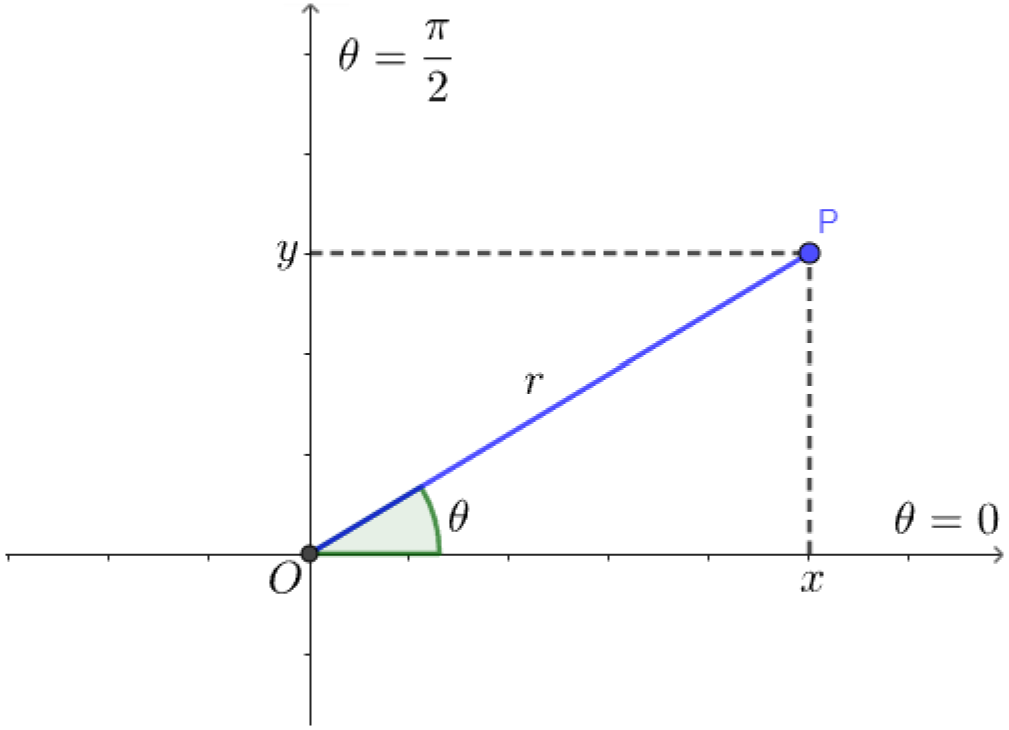
d) $D\left(-2,-\sqrt{3}\right)$

Coordenadas Polares

Relações de mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$



Coordenadas Polares

Ex. 3: Transforme as curvas dadas de coordenadas cartesianas para polares e represente-os graficamente:

a) $x^2 + y^2 = 9$
b) $(x - 2)^2 + y^2 = 2$
c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}\, x$
d) $y = 2x + 1$

Coordenadas Polares

Ex. 4: Transforme as curvas dadas de coordenadas polares para cartesianas e represente-os graficamente:

$a)\ \ r = 2\,sen\,\theta$

$b)\ \ r = 3$

$c)\ \ r = \dfrac{1}{2\cos\theta - 3sen\,\theta}$

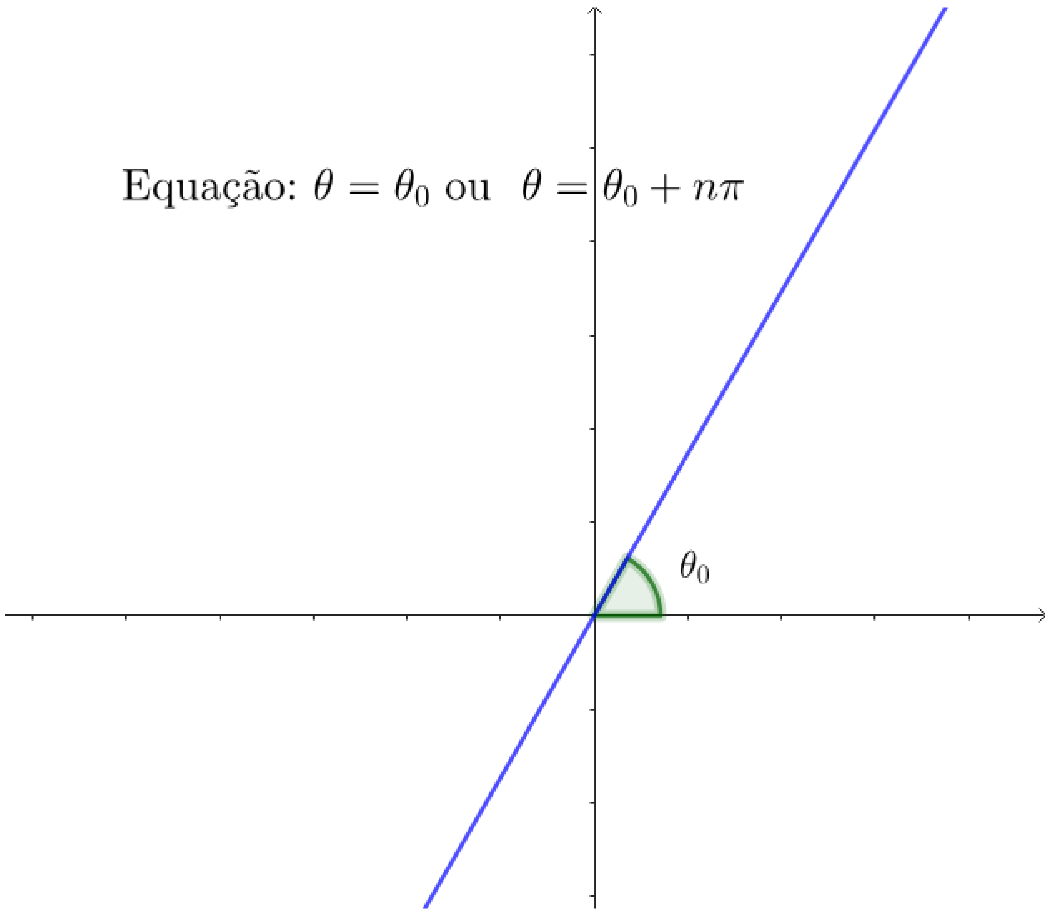
$d)\ \ r = 3\cos\theta$

Equações de algumas retas

- Em uma reta que passa pela origem, temos um ângulo θ constante e r varia livremente:

Equações de algumas retas

- Em uma reta que passa pela origem, temos um ângulo θ constante e r varia livremente:

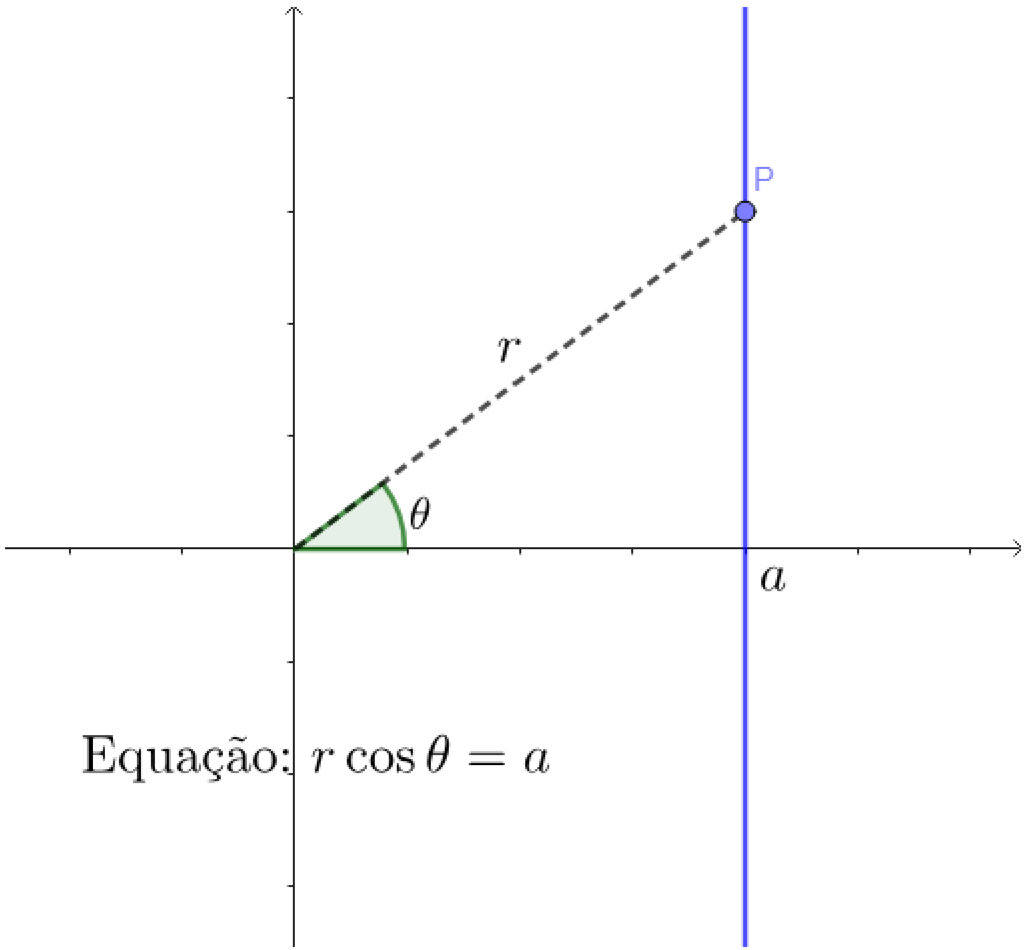


Equações de algumas retas

- Quando a reta é vertical (em cartesianas $x = a$), temos

Equações de algumas retas

- Quando a reta é vertical (em cartesianas $x = a$), temos

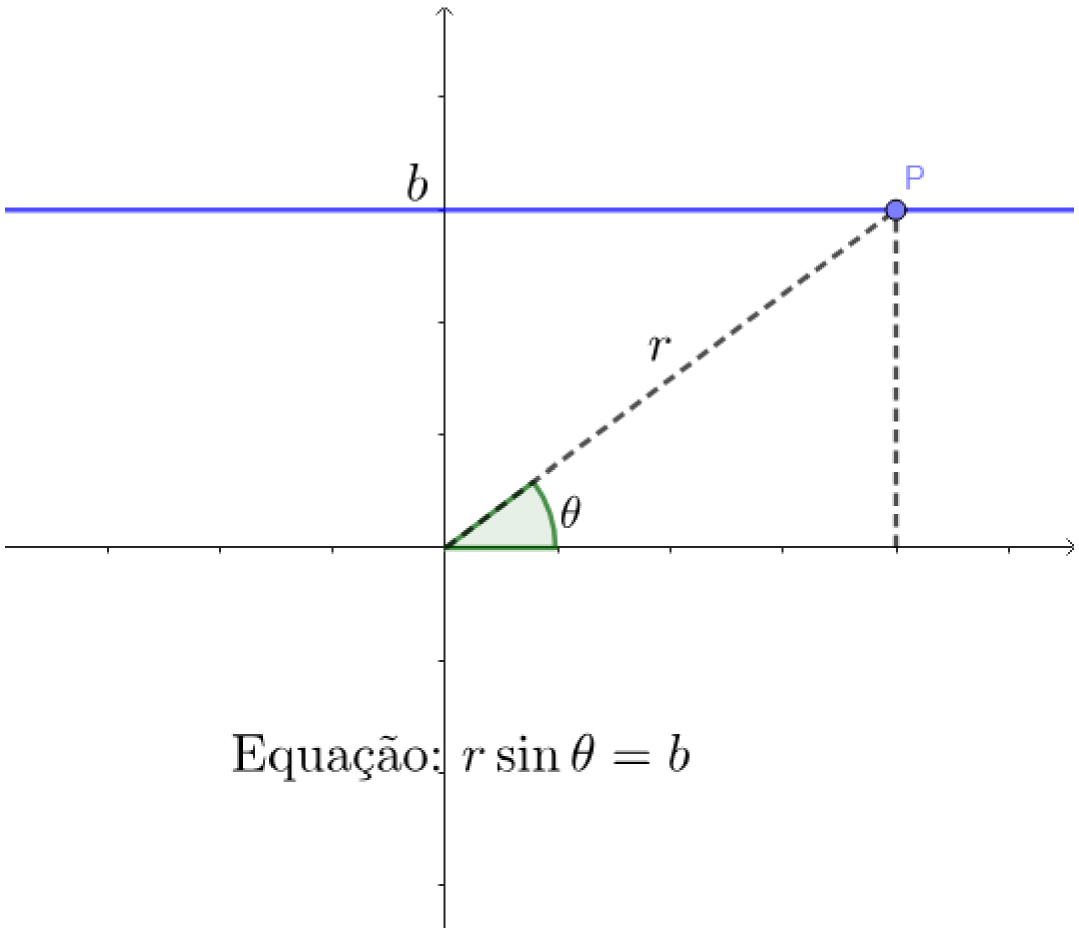


Equações de algumas retas

- Quando a reta é horizontal (em cartesianas $y = b$), temos

Equações de algumas retas

- Quando a reta é horizontal (em cartesianas $y = b$), temos



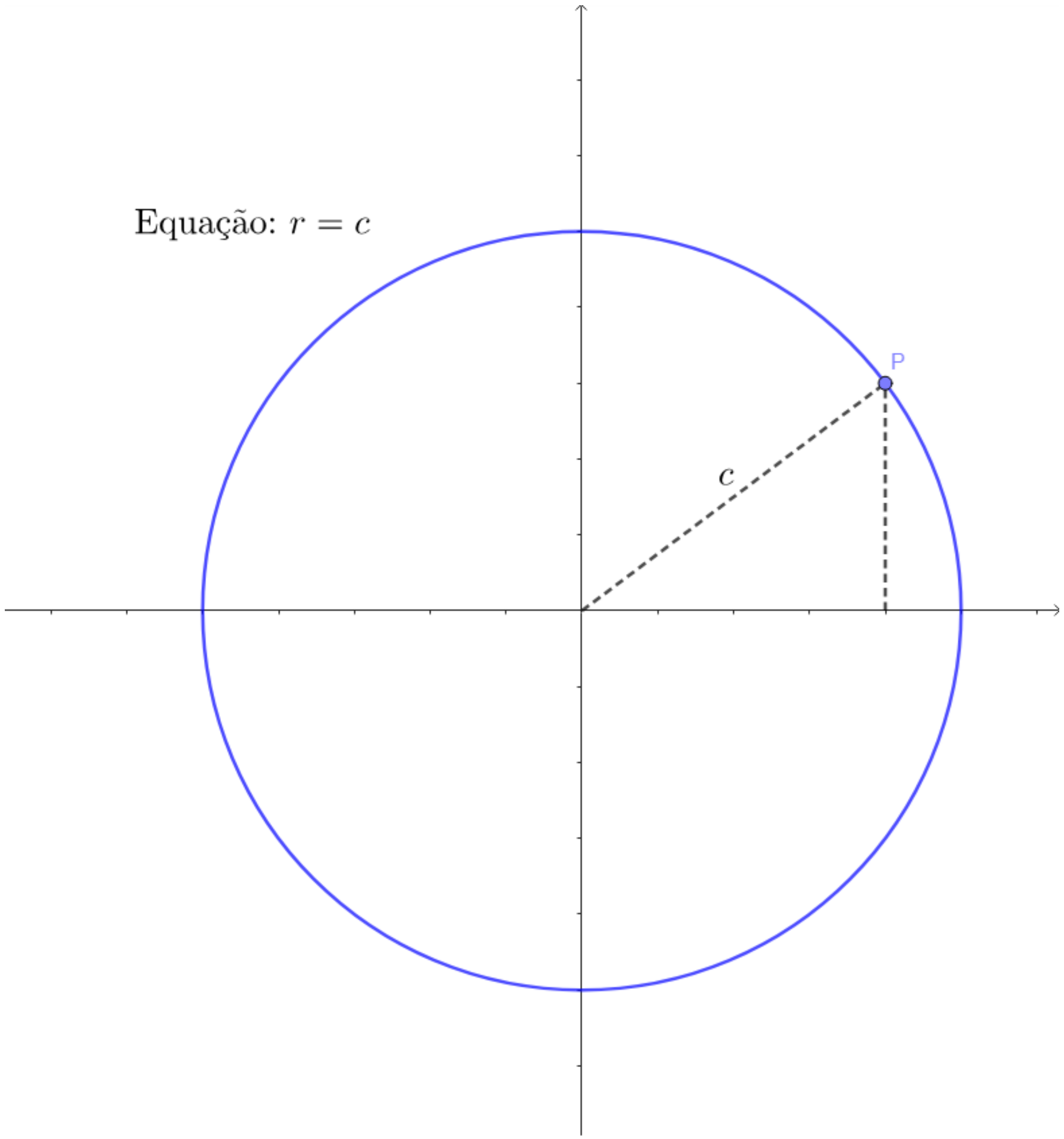
Equação: $r \sin\theta = b$

Equações de algumas circunferências

- Circunferência centrada na origem e de raio c:

Equações de algumas circunferências

- Circunferência centrada na origem e de raio c:

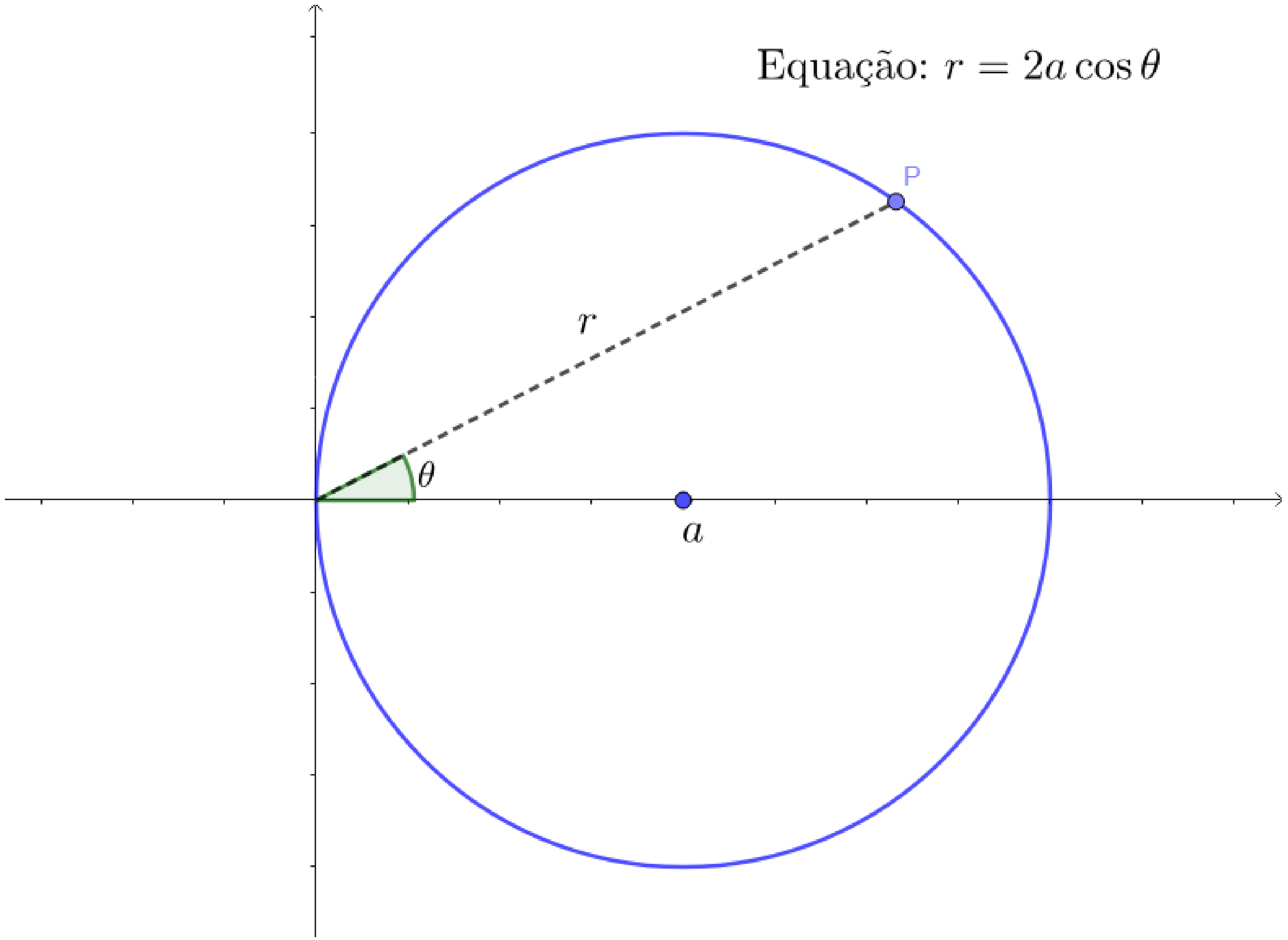


Equações de algumas circunferências

- Circunferência centrada em $C(a, 0)$ e de raio $a > 0$:

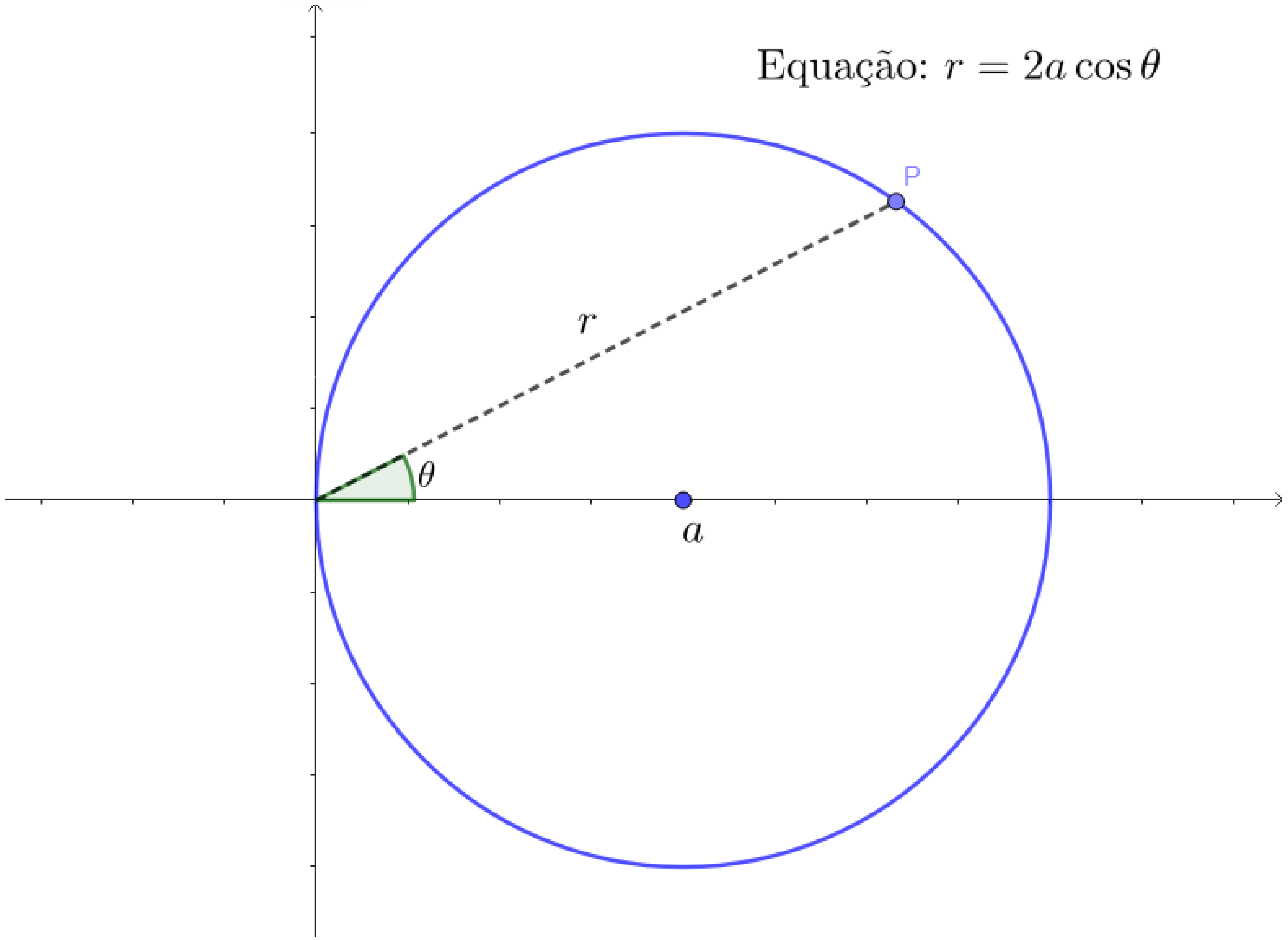
Equações de algumas circunferências

- Circunferência centrada em $C(a, 0)$ e de raio $a > 0$:



Equações de algumas circunferências

- Circunferência centrada em $C(a,0)$ e de raio $a > 0$:

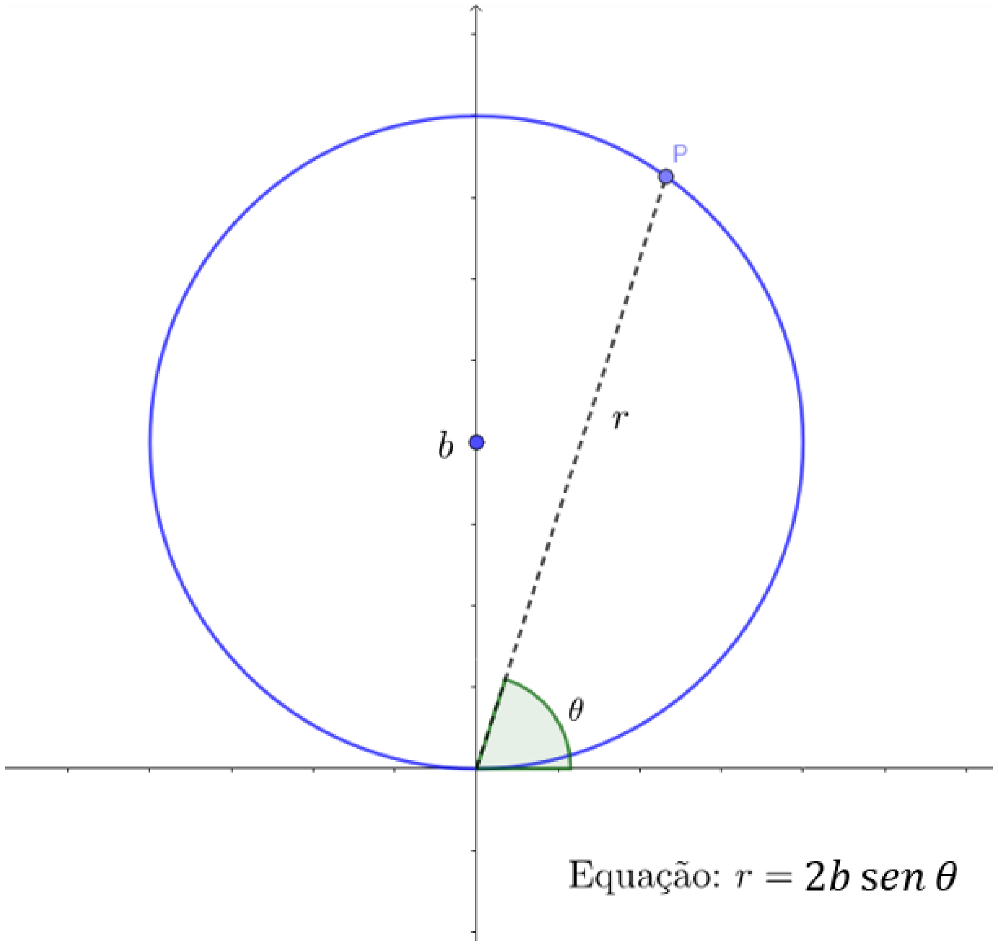


Analogamente, se a circunferência está centrada em $C(-a,0)$ e tem raio $a > 0$, a equação é dada por

$$r = -2a\cos\theta$$

Equações de algumas circunferências

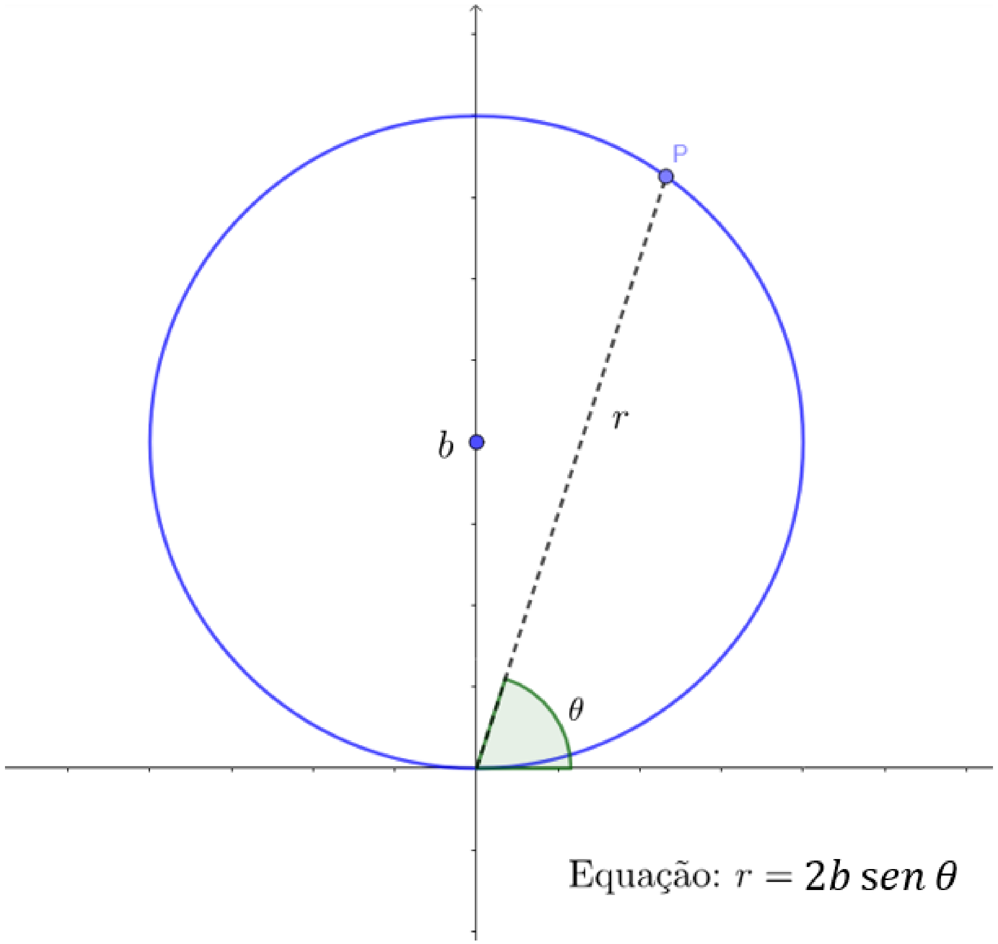
- Circunferência centrada em $C(0, b)$ e de raio $\mathrm{b} > 0$:



Equação: $r = 2b\,sen\,\theta$

Equações de algumas circunferências

- Circunferência centrada em $C(0, b)$ e de raio $\mathrm{b} > 0$:



Analogamente, se a circunferência está centrada em $C(0, -b)$ e tem raio b> 0, a equação é dada por

$$r = -2b\, sen\, \theta$$

Coordenadas Polares

Construindo Gráficos de Equações em Coordenadas Polares:

Os seguintes procedimentos nos auxiliam ao fazer o esboço do gráfico:

i. Calcular os pontos máximos e/ou mínimos;

ii. Encontrar os valores de θ para os quais a curva passa pela origem;

iii. Verificar possíveis simetrias. Se:

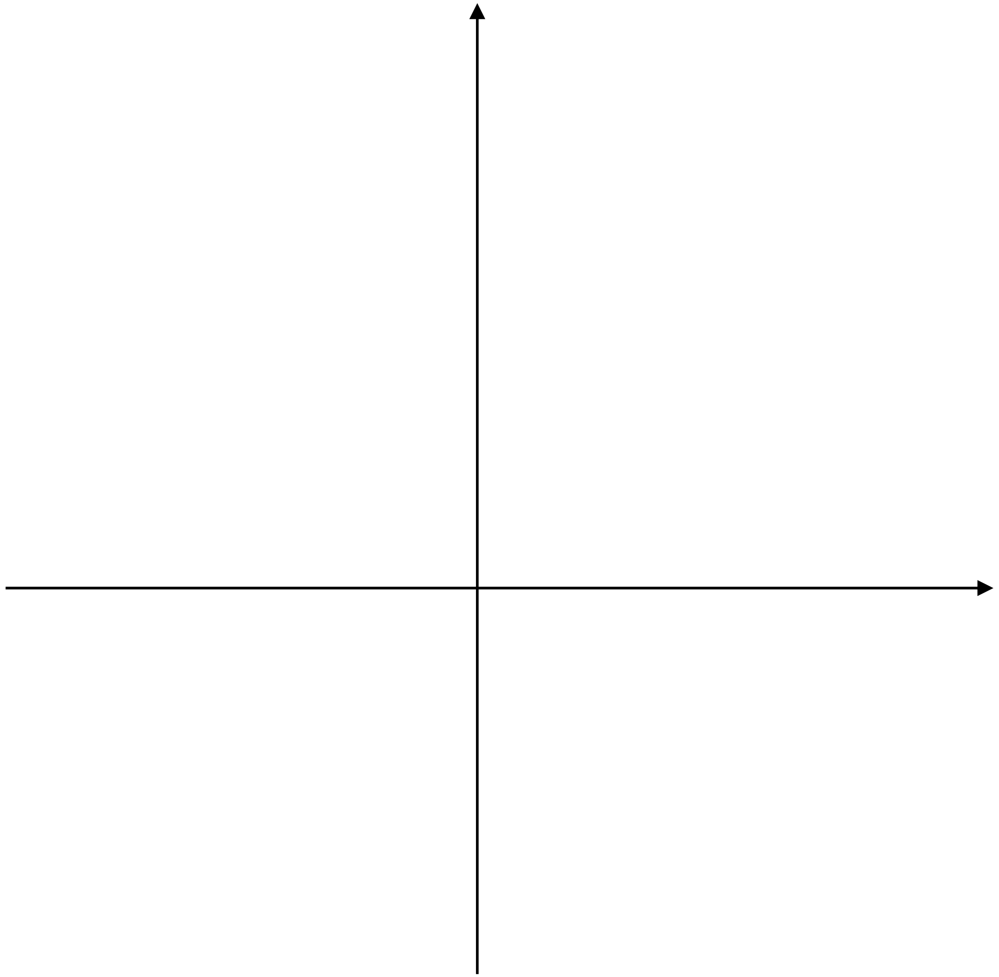
- A equação não se altera ao trocarmos r por $-r$, existe simetria com relação à origem;
- A equação não se altera ao trocarmos θ por $-\theta$, existe simetria com relação ao eixo x;
- A equação não se altera ao trocarmos θ por $\pi - \theta$, existe simetria com relação ao eixo y;

Tendo essas informações, basta testar alguns valores de θ e calcular o r correspondente para esboçar o gráfico :D

Construindo Gráficos de Equações em Coordenadas Polares:

Ex.1: Esboce o gráfico da curva $r = 2 - 2\cos\theta$

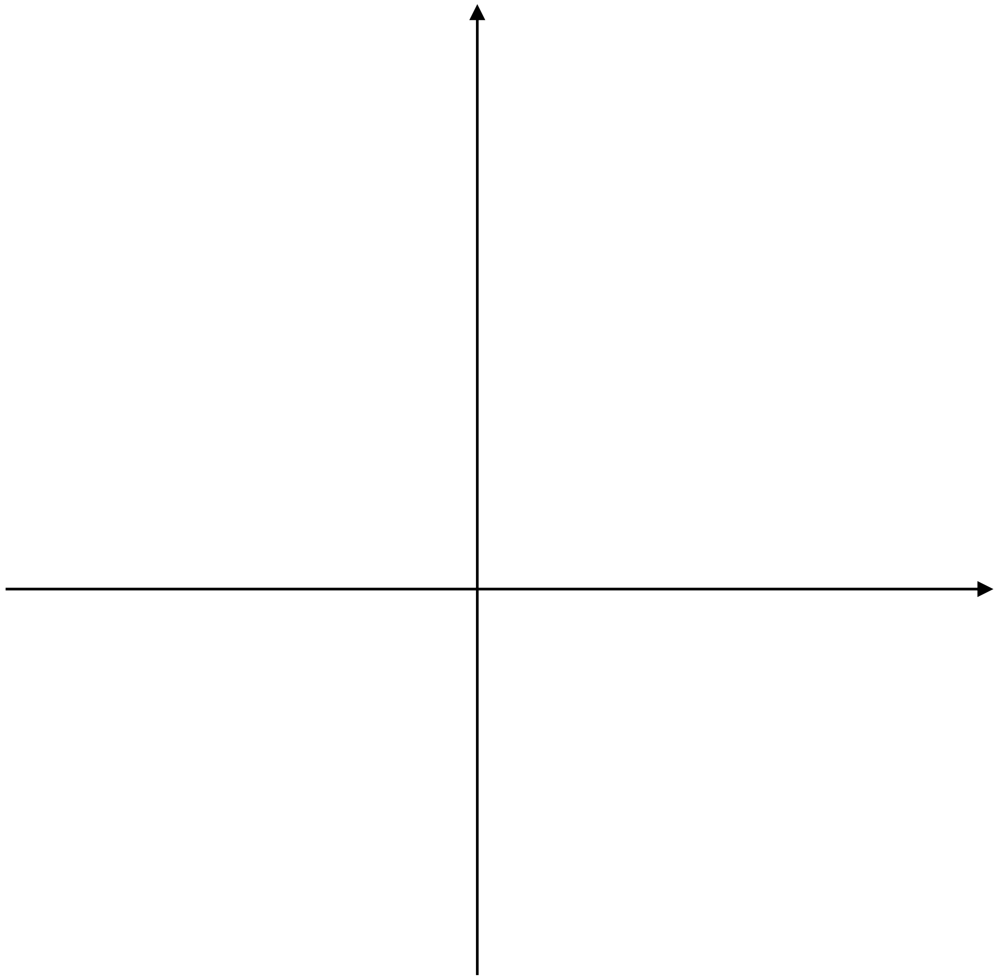
$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{r}$
0	
$\pi/3$	
$\pi/2$	
$2\pi/3$	
π	



Construindo Gráficos de Equações em Coordenadas Polares:

Ex.2: Esboce o gráfico da curva $r = 2\cos 2\theta$

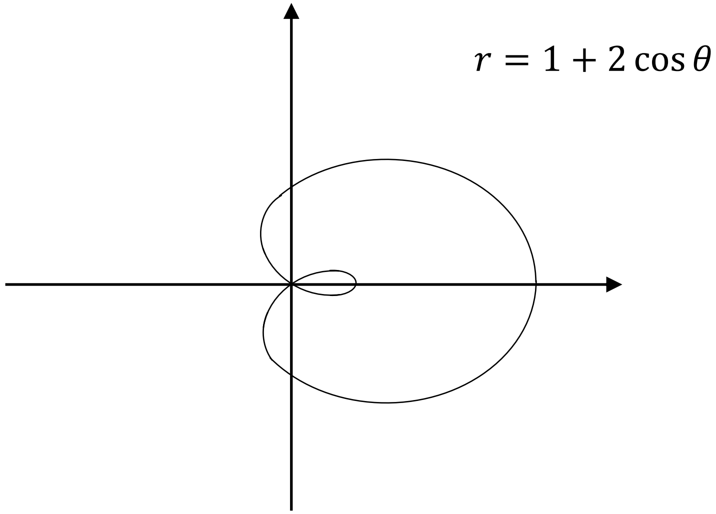
$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{r}$
0	
$\pi/6$	
$\pi/4$	
$\pi/3$	
$\pi/2$	

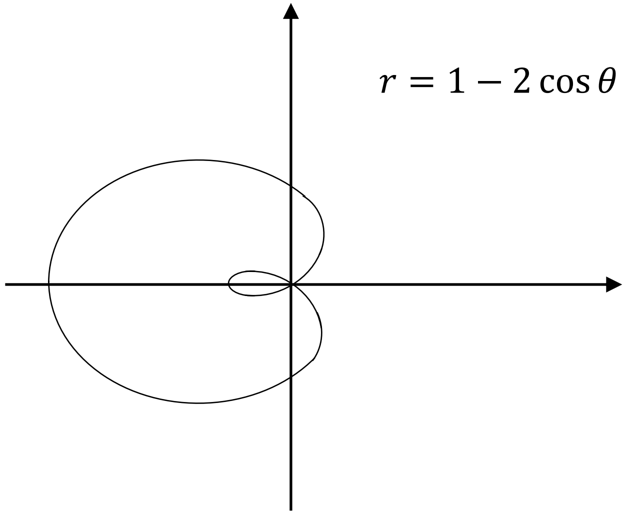


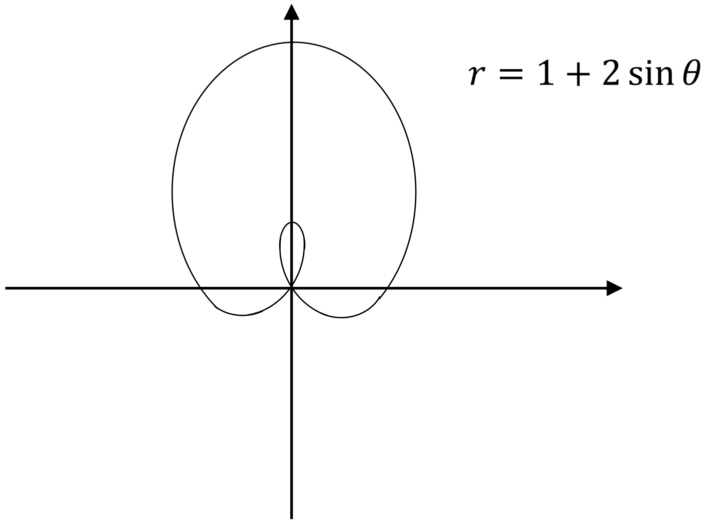
Curvas Especiais

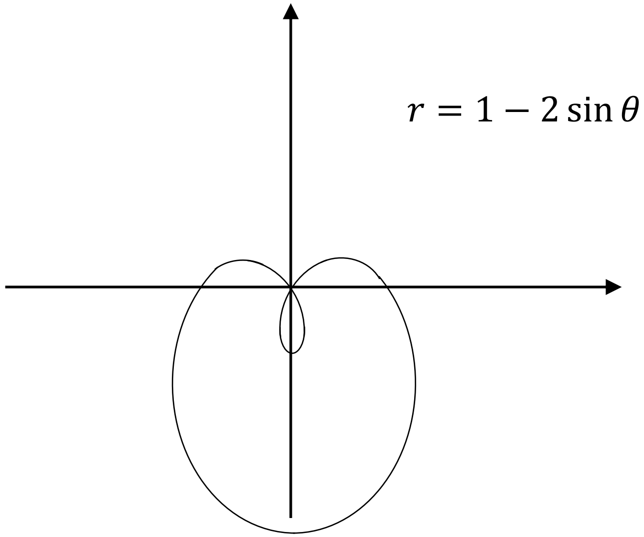
1. Limaçons: $r = a \pm b\cos\theta\,,$ ou $r = a \pm b\sin\theta,$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Se $b > a$, então o gráfico tem um laço:







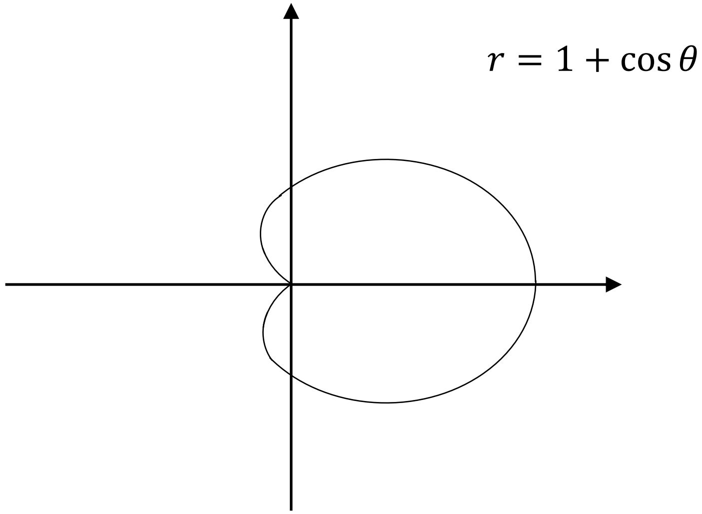


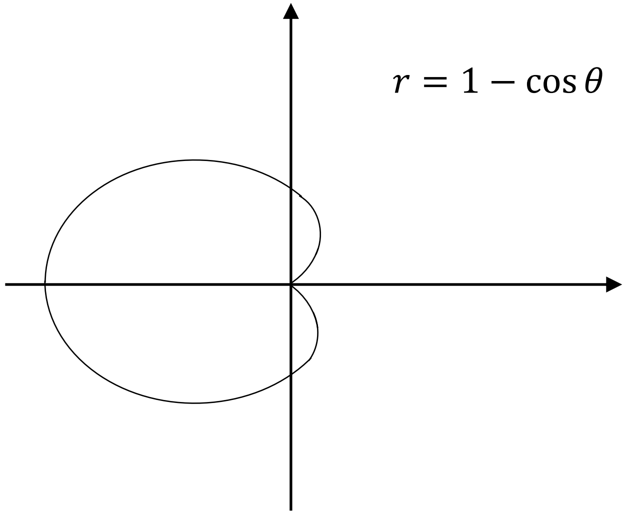
Curvas Especiais

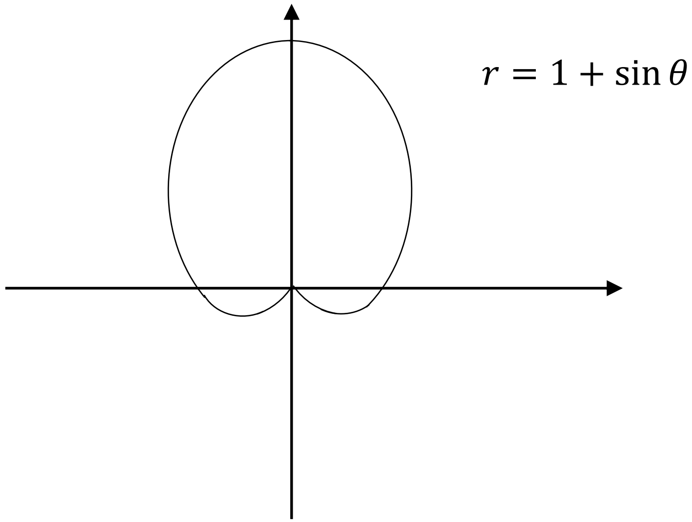
1. Limaçons:

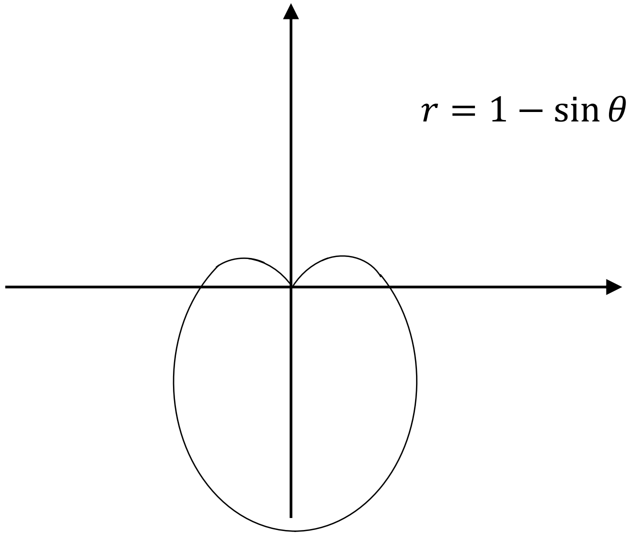
$r = a \pm b\cos\theta\,,$ ou $r = a \pm b\sin\theta,$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Se $b = a$, então o gráfico tem o formato de um coração, e é chamado de **cardioide**:







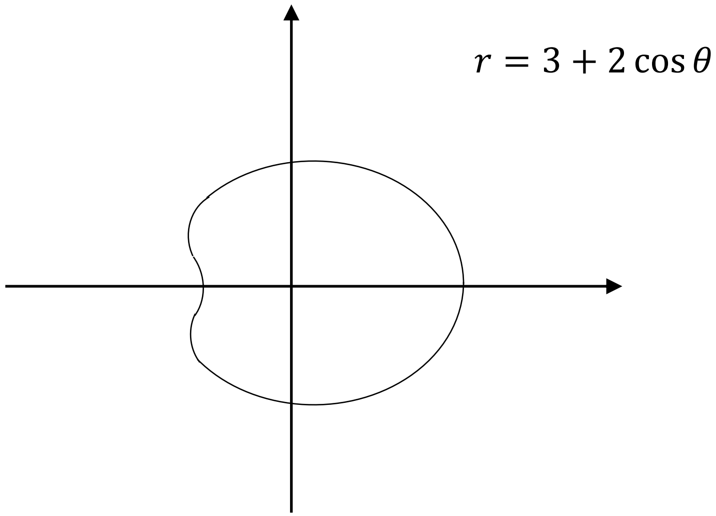


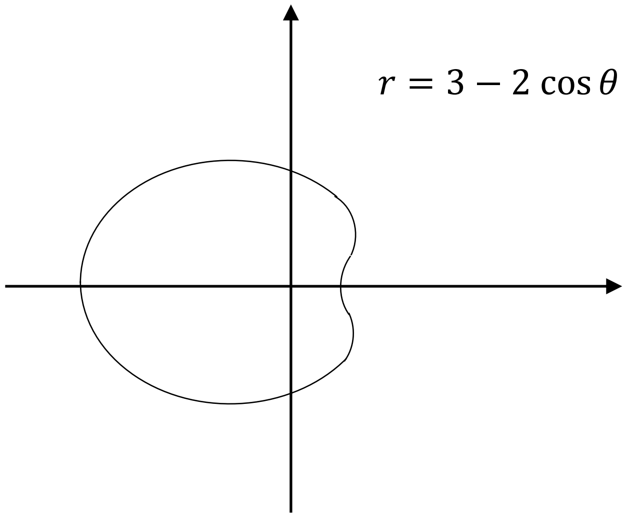
Curvas Especiais

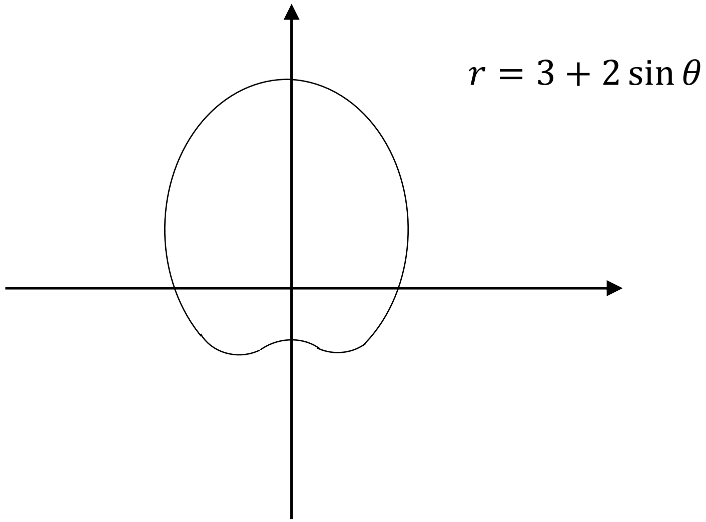
1. Limaçons:

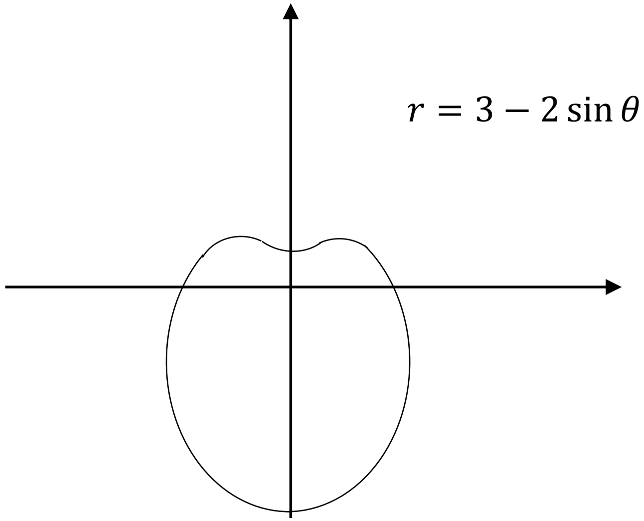
$r = a \pm b\cos\theta$, ou $r = a \pm b\sin\theta$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

c) Se $b < a$, então o gráfico não tem laço:







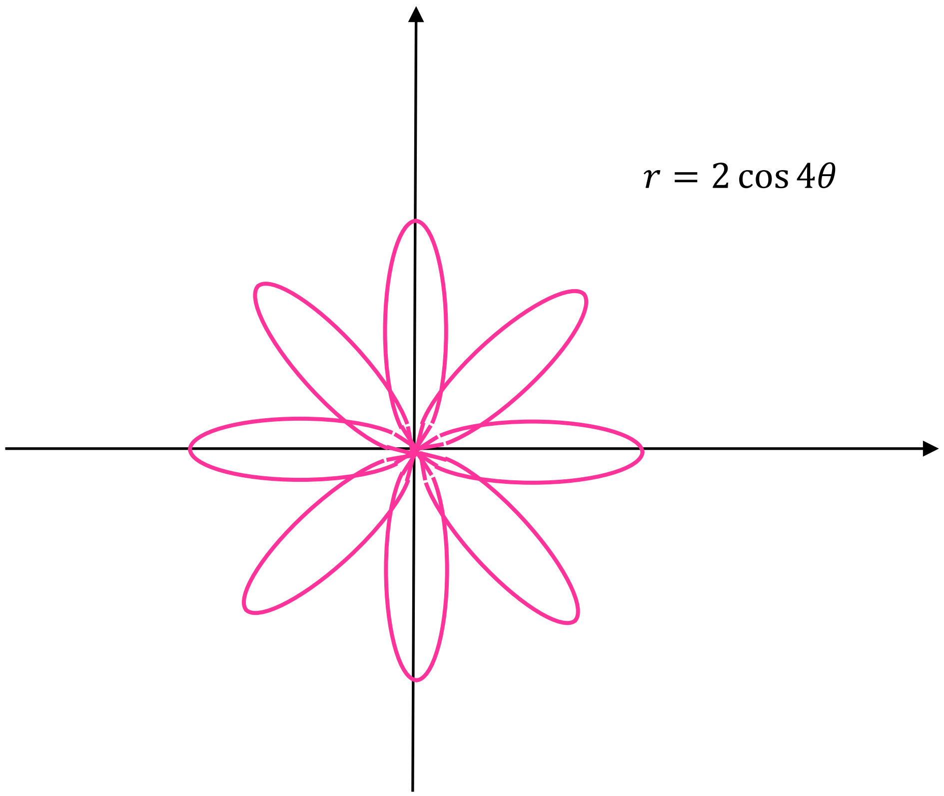


Curvas Especiais

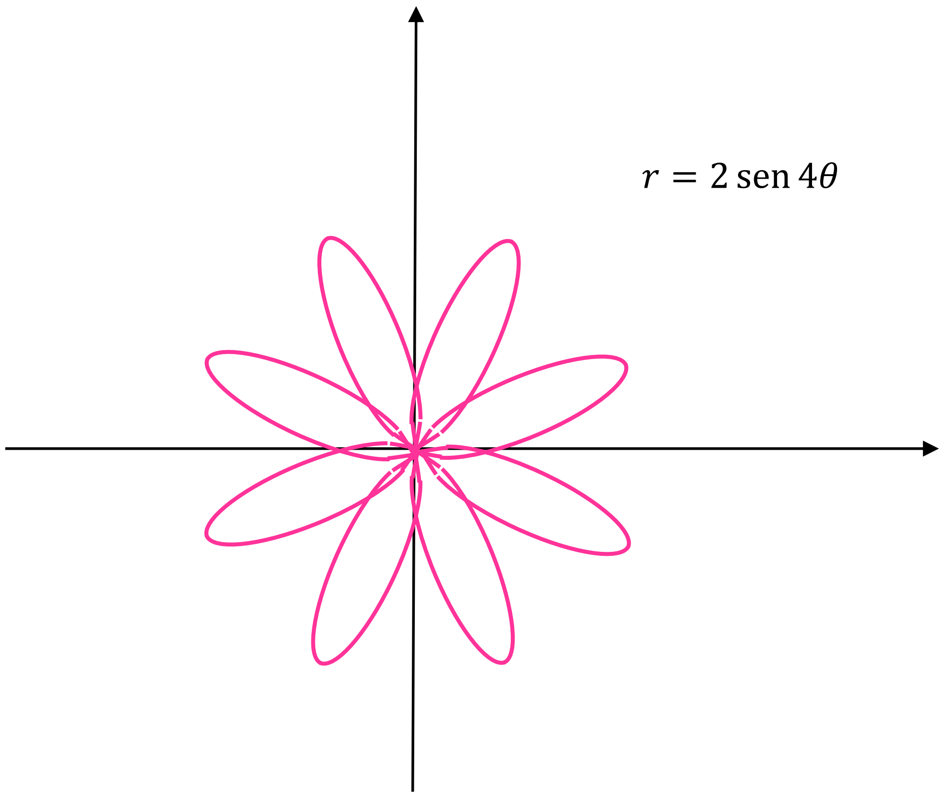
2. Rosáceas: $r = a\cos n\theta$, ou $r = a\sin n\theta$, com $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

O valor a representa o tamanho máximo das pétalas.

a) Se n for par, temos uma rosácea de $2n$ pétalas.



Obs.: cos: Atinge o máximo quando $\theta = 0$.



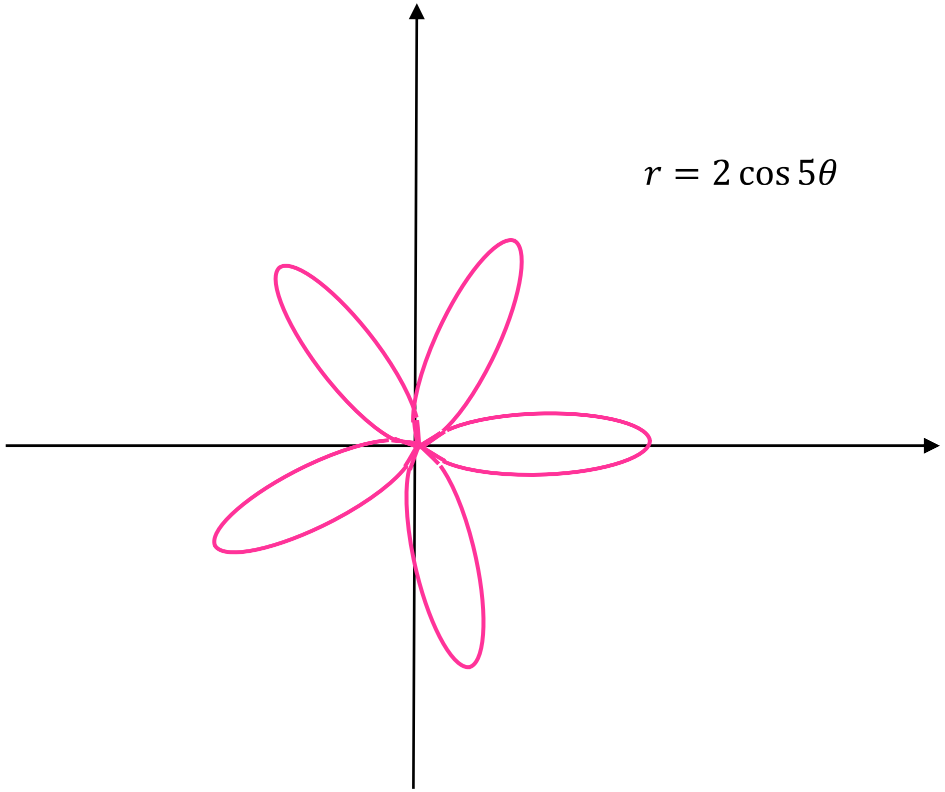
Obs.: sen: Atinge a origem quando $\theta = 0$.

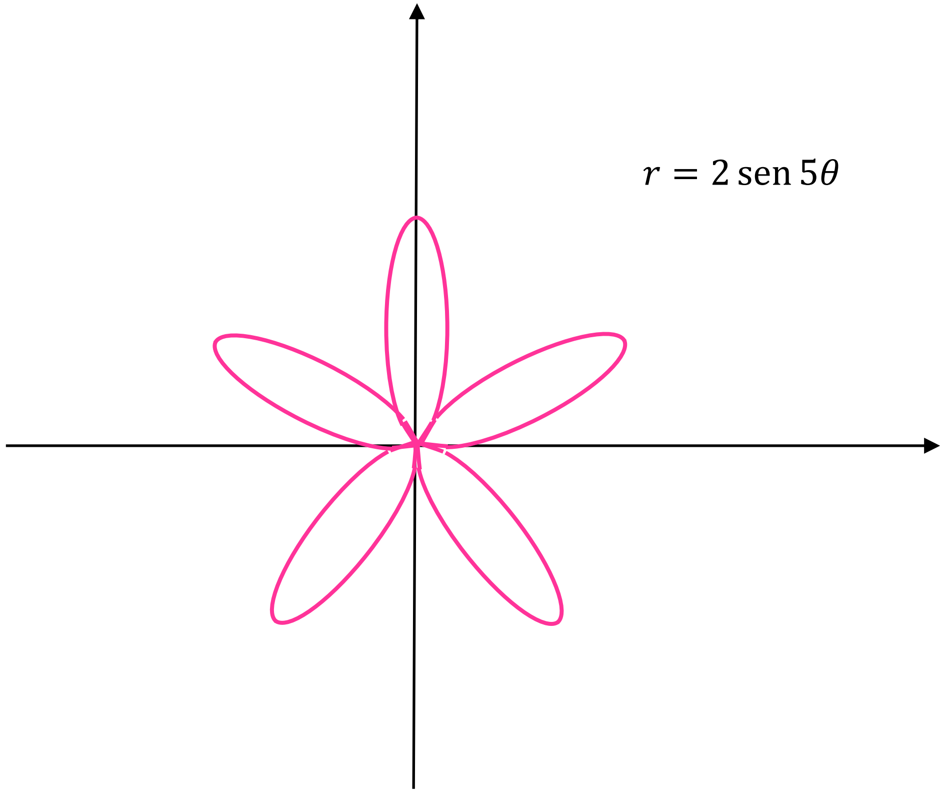
Curvas Especiais

2. Rosáceas: $r = a\cos n\theta$, ou $r = a\sin n\theta$, com $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

O valor a representa o tamanho máximo das pétalas.

b) Se n for ímpar, temos uma rosácea de n pétalas.





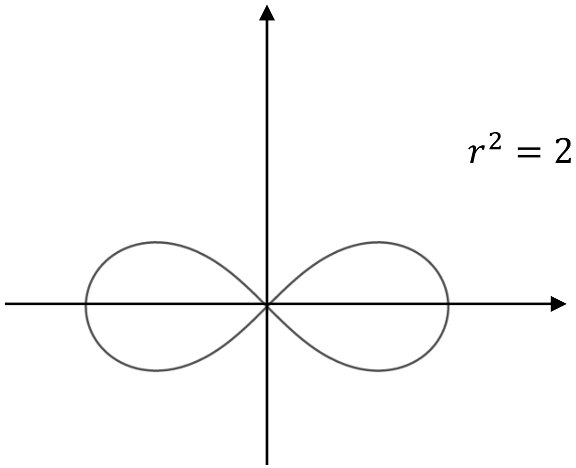
Obs.: cos: Atinge o máximo quando $\theta = 0$.

Obs.: sen: Atinge a origem quando $\theta = 0$.

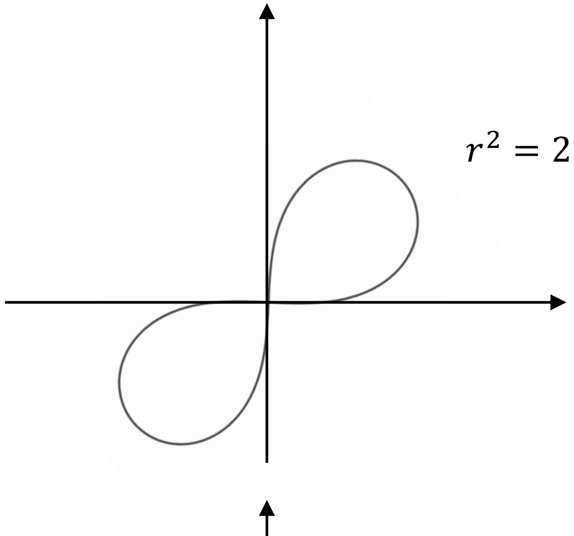
Curvas Especiais

3. Lemniscatas: $r^2 = \pm a \cos 2\theta$, ou $r^2 = \pm a \sin 2\theta$, com $a \in \mathbb{R}$.

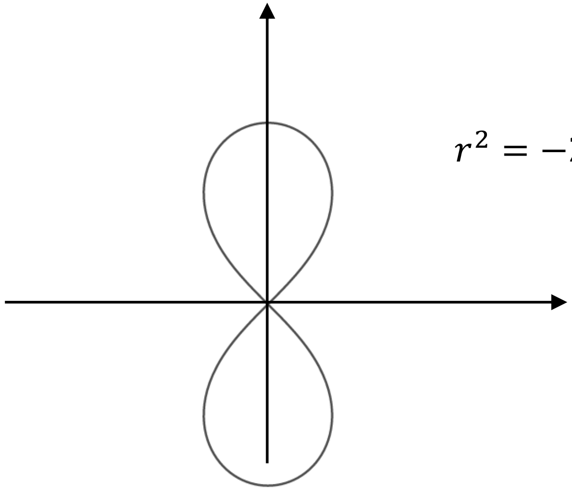
O valor a representa o tamanho máximo dos laços.



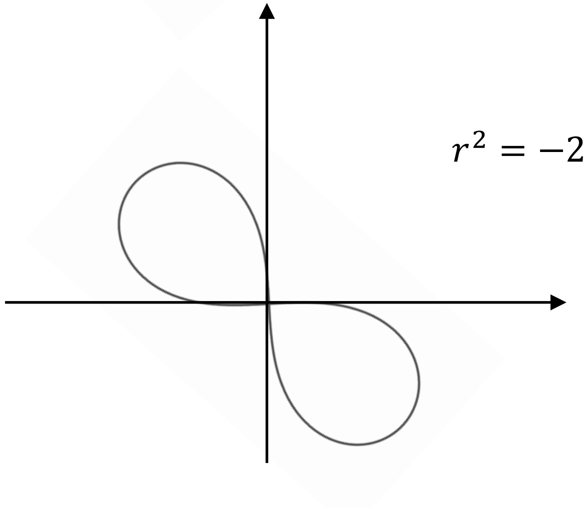
$r^2 = 2 \cos 2\theta$



$r^2 = 2 \operatorname{sen} 2\theta$



$r^2 = -2 \cos 2\theta$



$r^2 = -2 \operatorname{sen} 2\theta$

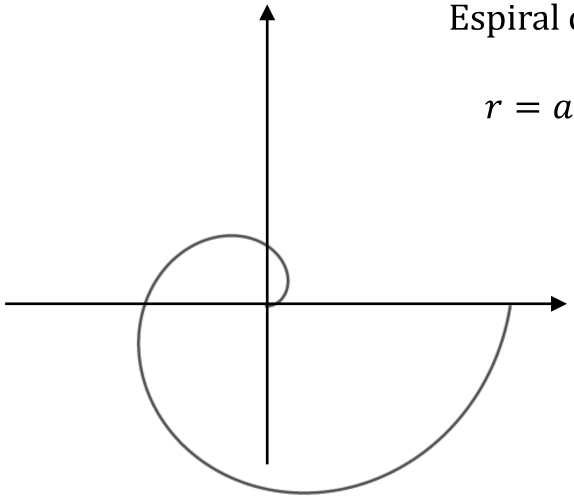
Curvas Especiais

4. Espirais: $r = f(\theta)$, sendo f qualquer função estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Exemplos clássicos:

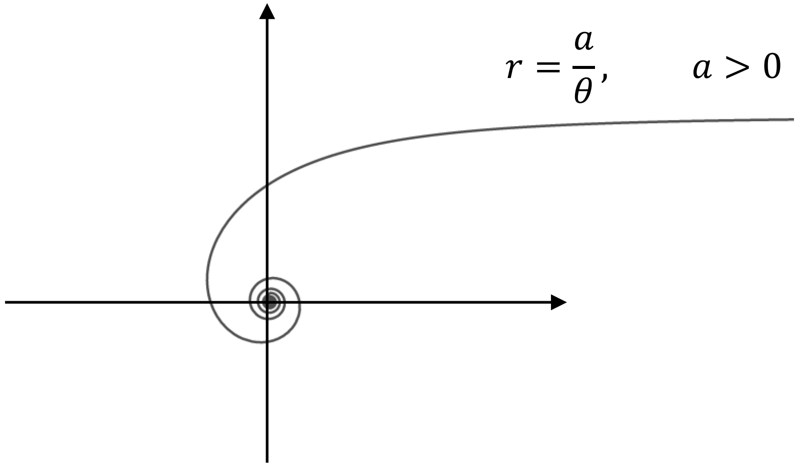
Espiral de Arquimedes

$$r = a\,\theta, \qquad a > 0$$



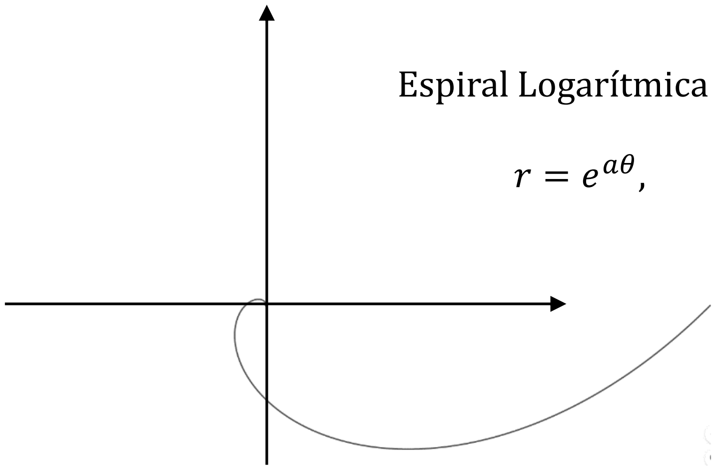
Espiral Hiperbólica

$$r = \frac{a}{\theta}, \qquad a > 0$$



Espiral Logarítmica

$$r = e^{a\theta},$$



Espiral Parabólica

$$r^2 = a\theta, \qquad a > 0$$