

LMA0001 – Lógica Matemática

Aula 11

Dedução Natural

Karina Girardi Roggia
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

2020



O sistema de **dedução natural** \vdash_{DN} , proposto por *Gentzen*, visa ser um sistema de provas intuitivo.

Propriedades:

- Cada conectivo possui *regras de introdução* e *regras de eliminação*
- Podemos introduzir *hipóteses* durante a prova
- Sistema online para brincar :-)

<https://proofs.openlogicproject.org/>



Regras de Inferência

Uma regra de inferência permite inferir uma nova fórmula a partir de fórmulas já derivadas.



Uma prova é uma sequência de fórmulas numeradas. A sequência inicia pela listagem das premissas e encerra com a fórmula que se quer concluir a prova.

$$\Gamma \vdash A$$

1.	γ_1	Premissa
2.	γ_2	Premissa
(:)		
k.	γ_k	Premissa
(:)		
n.	A	



Após a listagem das premissas, a prova é constituída de sucessivas aplicações de regras de inferência, até chegar na conclusão.

Cada regra possui uma estrutura própria. A seguir, vamos ver as regras de cada conectivo da lógica proposicional clássica.



Dedução natural: Reiteração/Repetição

m. | $\begin{array}{l} A \\ A \end{array}$ R m



Dedução natural: Conjunção

Introdução:

m. A

n. B

$A \wedge B \quad \wedge I \text{ m,n}$



Dedução natural: Conjunção

Eliminação:

m.		$A \wedge B$	
		A	$\wedge E$ m

m.		$A \wedge B$	
		B	$\wedge E$ m



Dedução natural: Conjunção

Introdução:

m.		A	
n.		B	
		$A \wedge B$	$\wedge I$ m,n

Eliminação:

m.		$A \wedge B$	
		A	$\wedge E$ m

m.		$A \wedge B$	
		B	$\wedge E$ m



Dedução natural: Condicional

Eliminação:

m.		$A \rightarrow B$	
n.		A	
		B	$\rightarrow E$ m,n



Dedução natural: Condicional

Introdução:

i.	A	Hipótese
	\vdots	
j.	B	
	$A \rightarrow B$	$\rightarrow I\ i-j$



Dedução natural: Condicional

Introdução:

i.	A	Hipótese
	\vdots	
j.	B	
	$A \rightarrow B$	$\rightarrow I$ i-j

Eliminação:

m.	$A \rightarrow B$	
n.	A	
	B	$\rightarrow E$ m,n



Dedução natural: Disjunção

Introdução:

m.		A
		$A \vee B$ $\vee I$ m

m.		A
		$B \vee A$ $\vee I$ m



Dedução natural: Disjunção

Eliminação:

m

$A \vee B$

i.

A

Hipótese

\vdots

j.

C

k.

B

Hipótese

\vdots

l.

C

C

$\vee I$ m,i-j,k-l



Dedução natural: Disjunção

Introdução:

m.		A	
		$A \vee B$	$\vee I$ m

m.		A	
		$B \vee A$	$\vee I$ m

Eliminação:

m.		$A \vee B$	
i.		A	Hipótese
		\vdots	
j.		C	
k.		B	Hipótese
		\vdots	
l.		C	
		C	$\vee I$ m,i-j,k-l



Dedução natural: Negação

Eliminação:

m.		$\neg A$	
n.		A	
		\perp	$\neg E$ m,n



Dedução natural: Negação

Introdução:

i.	A	Hipótese
	\vdots	
j.	\perp	
	$\neg A$	$\neg I$ i-j



Dedução natural: Negação

Introdução:

i.	A	Hipótese
	\vdots	
j.	\perp	
	$\neg A$	$\neg I$ i-j

Eliminação:

m.	$\neg A$	
n.	A	
	\perp	$\neg E$ m,n



Dedução natural: Contradição

Prova Indireta:

i.	$\neg A$	Hipótese
	\vdots	
j.	\perp	
	A	IP i-j

Explosão:

m.	\perp	
	A	X m

Nota: veja que podemos deduzir *qualquer* fórmula A a partir de uma contradição.



Propriedades da Dedução Natural

- A dedução natural para lógica proposicional é
 - **correta:** se $\Gamma \vdash_{\text{DN}} X$ então $\Gamma \models X$
 - **completa:** se $\Gamma \models X$ então $\Gamma \vdash_{\text{DN}} X$
- Permite que comecemos as provas *de baixo para cima*, e que formulemos hipóteses ao longo do processo.
- É um sistema dedutivo bastante usado para realizar provas manualmente.

