Logaritmos

Definição: Sejam *a* e *b* números reais positivos, com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de *b* na base *a*, o expoente que se deve dar à base *a* de modo que a potência obtida seja igual a *b*.

$$\boxed{\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b}$$

Dizemos ainda que *a* é a base do logaritmo, *b* é o logaritmando e *x* é o logaritmo.

Exemplo

1) Calcule pela definição:

a) $\log_2 16 = x$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = x$

c) $\log_7 1 = x$

d) $\log_5 5 = x$

Propriedades

1) $\log_a 1 = 0$

2) $\log_a a = 1$

3) $\log_a b^m = m \log_a b$

4) $a^{\log_a b} = b$

5) $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$

6) $\log_a b/c = \log_a b - \log_a c$

7) $\log_a b = \log_a c \ \leftrightarrow \ b = c$

8) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (mudança de base)

Exemplos

1) Calcular o valor de:

a) $8^{\log_2 5}$

b) $3^{1+\log_3 4}$

c) $9^{2-\log_3 \sqrt{2}}$

2) Simplifique as seguintes expressões:

a) $\log_3 \frac{a^3 b^2}{c^4}$

b) $a^{\left[\frac{\log(\log a)}{\log a}\right]}$

3) Qual é a expressão cujo desenvolvimento logarítmico é:

$$1 + \log_2 a - \log_2 b - 2\log_2 c \quad (a, b, c \text{ são reais positivos})$$

Exercícios

1) Desenvolva aplicando as propriedades dos logaritmos (a,b,c são reais positivos):

a) $\log_5 \left(\frac{5a}{bc}\right)$

b) $\log_3 \left(\frac{ab^2}{c}\right)$

c) $\log_3 \left(\frac{ab^3}{c\sqrt[3]{a^2}}\right)$

d) $\log \sqrt{\frac{ab^3}{c^2}}$

2) Simplificar a expressão abaixo:

$$a^{\log_a b . \log_b c . \log_c d}$$

3) Se $\log_{ab} a = 4$, calcule $\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$.

Função Logarítmica

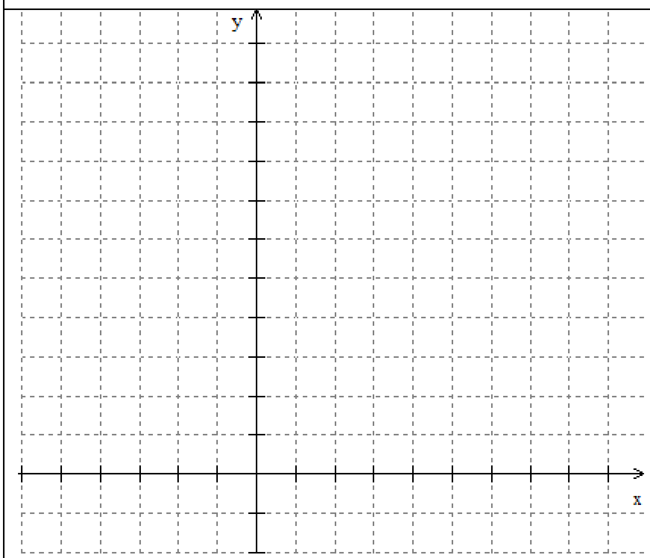
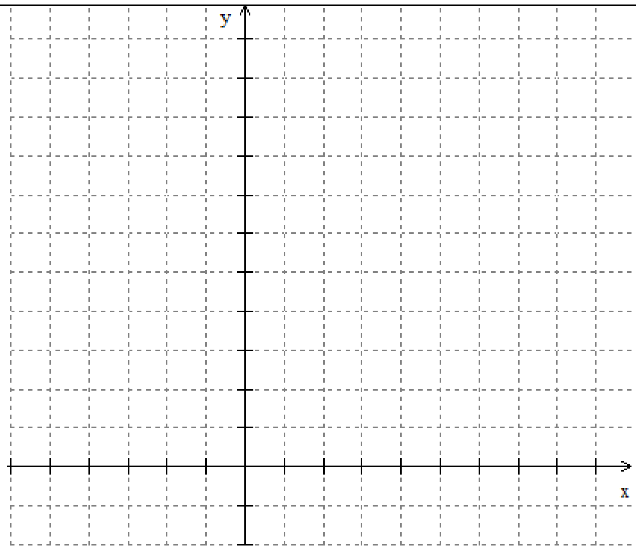
Definição: Dado um número real *a* $(0 < a \neq 1)$ chamamos função logarítmica de base *a* função f de $\mathbb{R}^{*}_{+}$ em $\mathbb{R}$ definida por g(x) = a^x são inversas uma da outra.

Representação Gráfica da Função Logarítmica

Com relação ao gráfico cartesiano da função f(x) = $\log_a x$ $(0 < a \neq 1)$, podemos dizer:

1) Está todo à direita do eixo y (x>0);
2) Corta o eixo x no ponto ___________;
3) Se ______ a função é crescente e se _________ a uma função é ________________________;

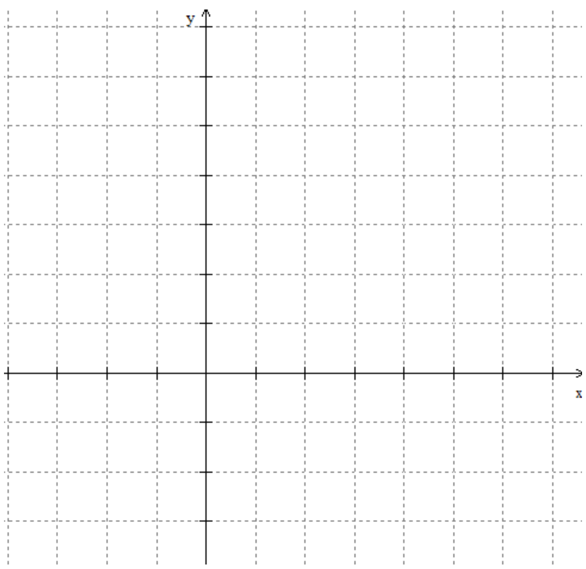
Ex.: Construir o gráfico das funções abaixo num mesmo sistema de eixos e indicar o conjunto imagem e a equação da assíntota em cada caso:

a) $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$	b) $f(x) = (1/2)^x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
	

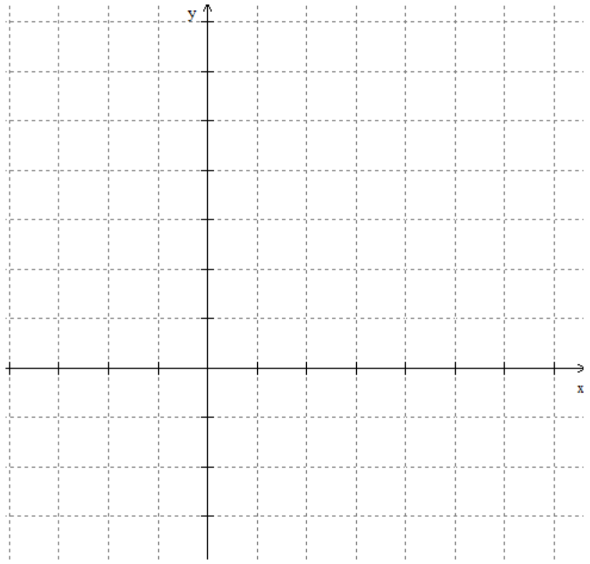
Compare os gráficos das funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$. Existe alguma relação entre estas funções?

Exercício:

Construir o gráfico da função $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x-1) + 3$ a partir do gráfico de $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$. Identifique a assíntota e descreva o domínio e a imagem da função. Determine ainda, a função inversa de *g*.



As funções e^x e $\ln x$



Propriedade:

1. Se $f(x) = e^x$ **e** $g(x) = \ln x$**, então** $(f \circ g)(x) =$ _______ **e** $(g \circ f)(x) =$ ___________ **.**

Exemplos:

1. Determine a inversa das seguintes funções:

a) $f(x) = 3 + 2^{x-1}$

b) $f(x) = \ln(x+3)$

c) $f(x) = 2^{10^x}$

d) $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$

e) $f(x) = \sqrt{3 - e^{2x}}$

f) $f(x) = \ln(2 + \ln x)$

Equação Logarítmica

Temos que:

1) Para $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Se $0 < a \neq 1$, então, $\log_a f(x) = \log_a g(x) \rightarrow f(x) = g(x) > 0$.

2) Para $\log_a f(x) = \alpha$

Se $0 < a \neq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $\log_a f(x) = \alpha \rightarrow f(x) = a^\alpha$

Exemplos

1) Resolva as equações:

a) $\log_4(3x+2) = \log_4(2x+5)$

b) $\log_{\frac{1}{3}}(3x^2 - 4x - 17) = \log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 5x + 3)$

c) $\log_3(\log_2 x) = 1$

d) $\log_x(3x^2 - 13x + 15) = 2$

e) $\log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$

f) $\frac{1}{2}\log_3(x-16) - \log_3(\sqrt{x} - 4) = 1$

g) $\log_4(x-3) - \log_{16}(x-3) = 1$

h) $\log_3(x+2) - \log_{\frac{1}{3}}(x-6) = \log_3(2x-5)$

i) $(\log_3 x)^2 - 5\log_9 x + 1 = 0$

Exercício

1) Resolva as equações:

a) $\log_2(5x^2 - 14x + 1) = \log_2(4x^2 - 4x - 20)$

b) $\log\sqrt{7x-5} + \frac{1}{2}\log(2x+7) = 1 + \log\frac{9}{2}$

c) $\log(x+1) + 2 = \log(4x^2 - 500)$

Inequação Logarítmica

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a x > \log_a y \ \rightarrow x > y, se\ a > 1 \\ \log_a x > \log_a y \ \rightarrow \ x < y, se\ 0 < a < 1 \end{array}}$$

Exemplo

1) Resolva as inequações:

a) $\log_3(5x-2) < \log_3 4$

b) $\log(x^2 - x - 2) < \log(x-4)$

c) $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) > 2 - \log_2 5$

d) $\log_3(3x+4) - \log_3(2x-1) > 1$

Exercícios

1) Resolva as inequações abaixo:

a) $\log_{\frac{1}{10}}(x^2+1) < \log_{\frac{1}{10}}(2x-5)$

b) $\log_2(x-3) + \log_2(x-2) \leq 1$

c) $(4-x^2)\log_2(1-x) \leq 0$

2) Determine o domínio das funções:

a) $f(x) = \sqrt{\log_2(\log_{\frac{1}{2}} x)}$.

b) $f(x) = \ln(2 + \ln x)$