Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Integrais Duplas em coordenadas polares

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 do dia 25 de novembro de 2024.

UDESC

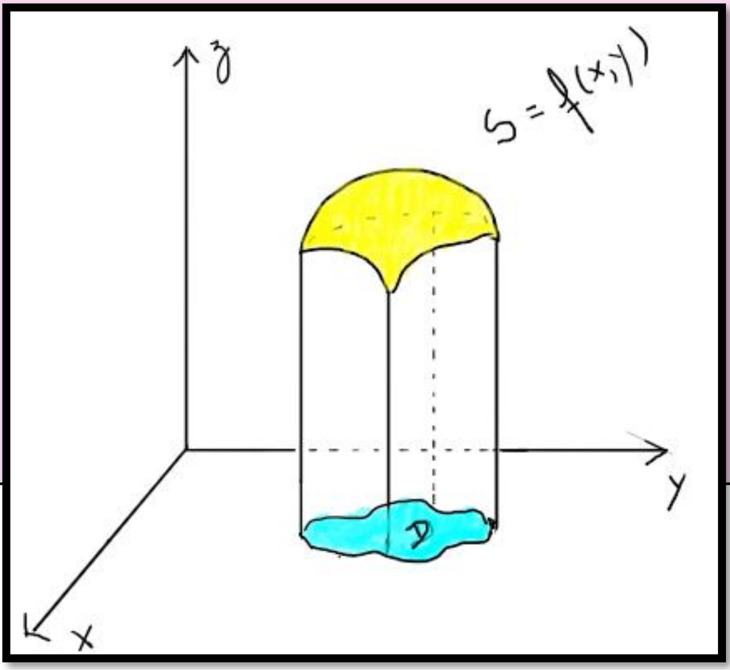
Relembrando:

Se $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e positiva, vimos que o volume do sólido de lateral cilíndrica, cujo topo é a superfície

$$z = f(x,y) \geq 0$$

e cuja base é a região plana D, é dado por

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy.$$



Notação: Como $\Delta A = \Delta x \Delta y = \Delta y \Delta x$ representa a área da base de um elemento infinitesimal de volume, é possível denotarmos $dA = dxdy = dydx$, que é chamado de diferencial da área da base.

Dessa forma, temos a seguinte notação:

$$V = \iint_D f(x,y)dA.$$

Exemplo

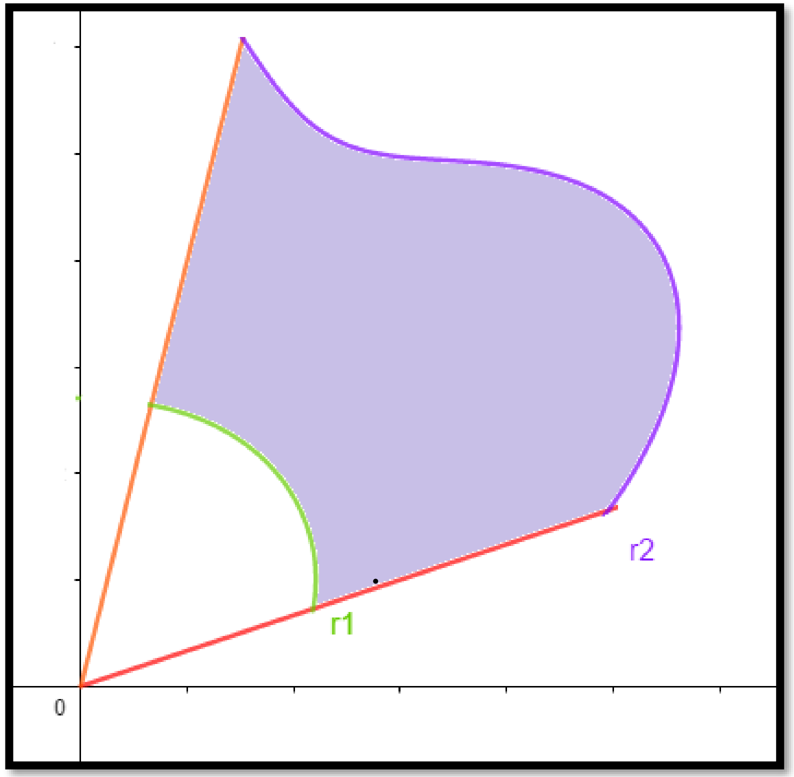
Exercício 1) Calcule o volume do sólido delimitado por

$$z = 5 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad z = 0.$$

Integral Dupla em Coordenadas Polares

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com D uma região polar descrita por

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2; \quad \alpha \leq \theta \leq \beta \quad \text{e} \quad r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)\}.$$



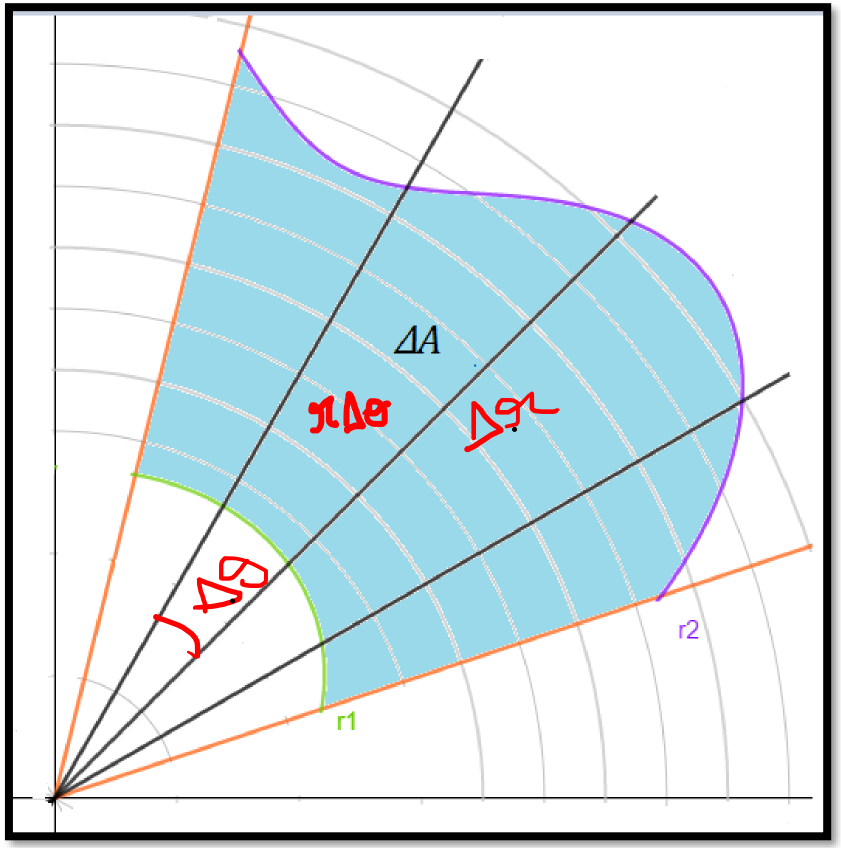
Precisamos determinar o elemento infinitesimal de área, denotado por dA, em coordenadas polares.

Como em coordenadas polares temos que $x = rcos(\theta)$ e $y = rsen(\theta)$, obtemos que

$$I = \iint_D f(x, y)dA = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(rcos(\theta), rsen(\theta))dA\,.$$

Integral Dupla em Coordenadas Polares

Particionando a região polar, obtemos que o elemento infinitesimal de área, destacado na figura abaixo, é aproximadamente um retângulo de dimensões Δr e $r\Delta\theta.$



Com isso, temos que a área do elemento infinitesimal é

$$\Delta A \approx (\Delta r).(r\Delta\theta) = r\Delta r\Delta\theta.$$

Melhorando a aproximação (fazendo $\Delta\theta$ e Δr tender a zero), obtemos que

$$dA = rdrd\theta.$$

Portanto

$$dxdy = dA = rdrd\theta.$$

Assim:

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f\big(rcos(\theta), rsen(\theta)\big)\, rdrd\theta\,.$$

Exemplo

Exercício 2) Utilize coordenadas polares para calcular o volume do sólido delimitado por

$$z = 5 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad z = 0.$$

Exercício 3) Calcule o volume do sólido delimitado por

$$z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 = 2y \quad \text{e} \quad z = 0.$$

Exercício 4) Reescreva

$$I = \int_0^6 \int_{-\sqrt{6x-x^2}}^{\sqrt{6x-x^2}} xy\sqrt{x^2 + y^2}\,dy\,dx$$

a) em coordenadas cartesianas, invertendo a ordem de integração;

b) coordenadas polares.

Exercício

Exercício 5) Considere a integral

$$V = \iint_D \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}\, dA$$

em que D é a região situada simultaneamente no interior das curvas

$$4x^2 + y^2 = 25 \qquad \text{e} \qquad 4y = 3x^2.$$

Escreva a integral em:

a) coordenadas cartesianas, usando x como variável independente;

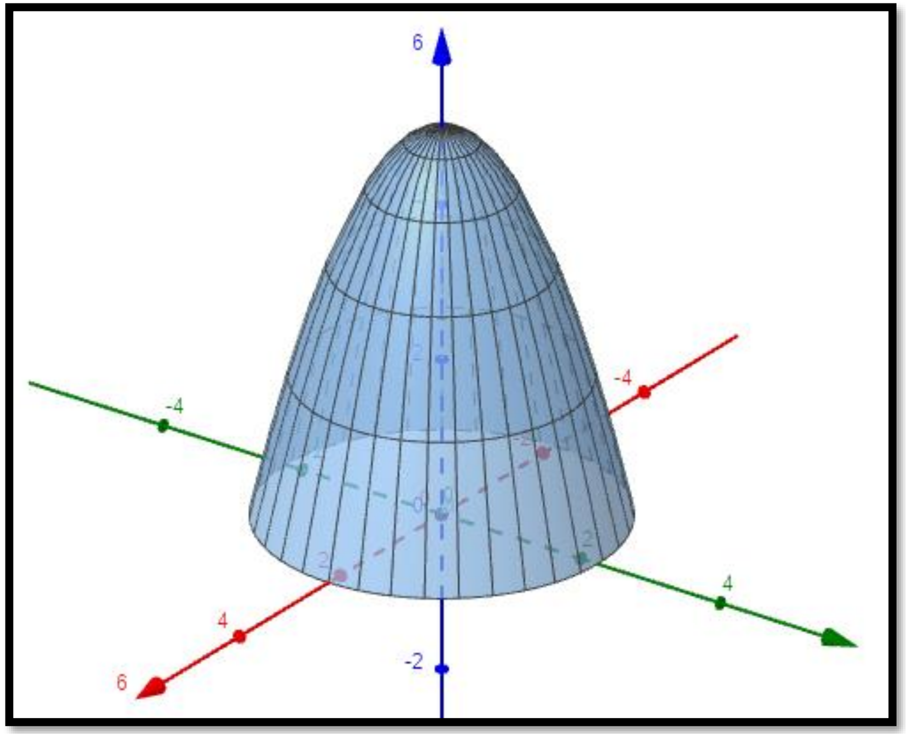
b) coordenadas cartesianas, usando y como variável independente;

c) coordenadas polares.

Exemplo

Exemplo 1) Calcule o volume do sólido delimitado por $z = 5 - x^2 - y^2$ e por $z = 0$.

Solução: O sólido é a porção de um paraboloide situado acima do plano xy:



O topo do sólido é dado pelo gráfico de

$$z = f(x, y) = 5 - x^2 - y^2.$$

Nesse caso, não há lateral a ser considerada.

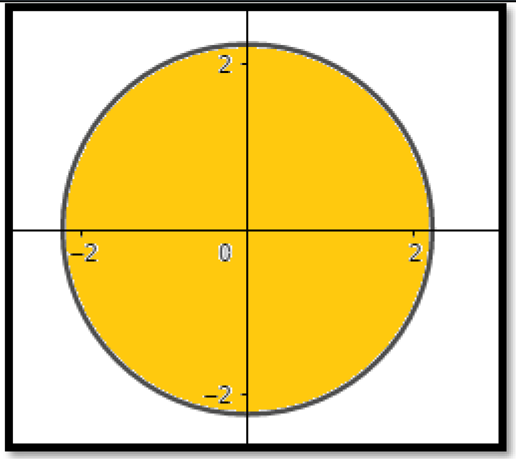
A base do sólido é a região plana D delimitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 5$.

Exemplo

Com isso, o volume do sólido desejado é dado por

$$V = \iint_D (5 - x^2 - y^2)\,dA\,,$$

onde D pode ser descrita de duas formas distintas:



$D: x^2 + y^2 = 5$

1ª Forma: Tomando x como variável independente, temos

$$x \in \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right] \quad \text{e} \quad y \in \left[-\sqrt{5 - x^2}, \sqrt{5 - x^2}\right]$$

E então

$$V = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \int_{-\sqrt{5-x^2}}^{\sqrt{5-x^2}} (5 - x^2 - y^2)\,dy dx.$$

2ª Forma: Tomando y como variável independente, temos

$$y \in \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right] \quad \text{e} \quad x \in \left[-\sqrt{5 - y^2}, \sqrt{5 - y^2}\right]$$

E então

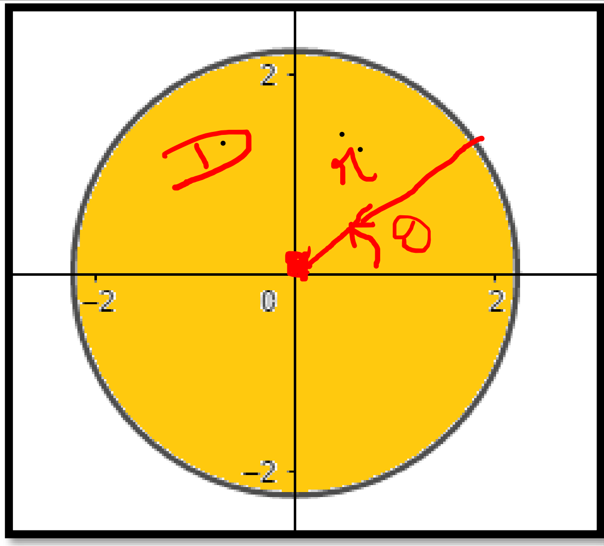
$$V = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \int_{-\sqrt{5-y^2}}^{\sqrt{5-y^2}} (5 - x^2 - y^2)\,dx dy.$$

A montagem das integrais foi bastante simples, mas a sua resolução é bastante trabalhosa...
Por isso, veremos uma terceira forma!

Voltando ao exemplo anterior

3ª Forma: Usando coordenadas polares e reinterpretando a região D temos que o ângulo polar descreve uma volta completa em torno da origem e o raio polar varia do polo até a circunferência. Portanto

$$\theta \in [0, 2\pi] \quad \text{e} \quad r \in \left[0, \sqrt{5}\right].$$



O integrando é $5 - x^2 - y^2 = 5 - (x^2 + y^2) = 5 - r^2$. Assim

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} (5 - r^2)\, r\, dr d\theta$$

e essa integral parece ser bem mais amigável para ser resolvida:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} 5r - r^3 \; dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left. \frac{5r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right|_{r=0}^{r=\sqrt{5}} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{5(\sqrt{5})^2}{2} - \frac{(\sqrt{5})^4}{4} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{25}{2} - \frac{25}{4} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{25}{4} d\theta$$

$$= \frac{25}{4} \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{25}{4} 2\pi = \frac{25\,\pi}{2} \quad \textit{unidades de volume}.$$

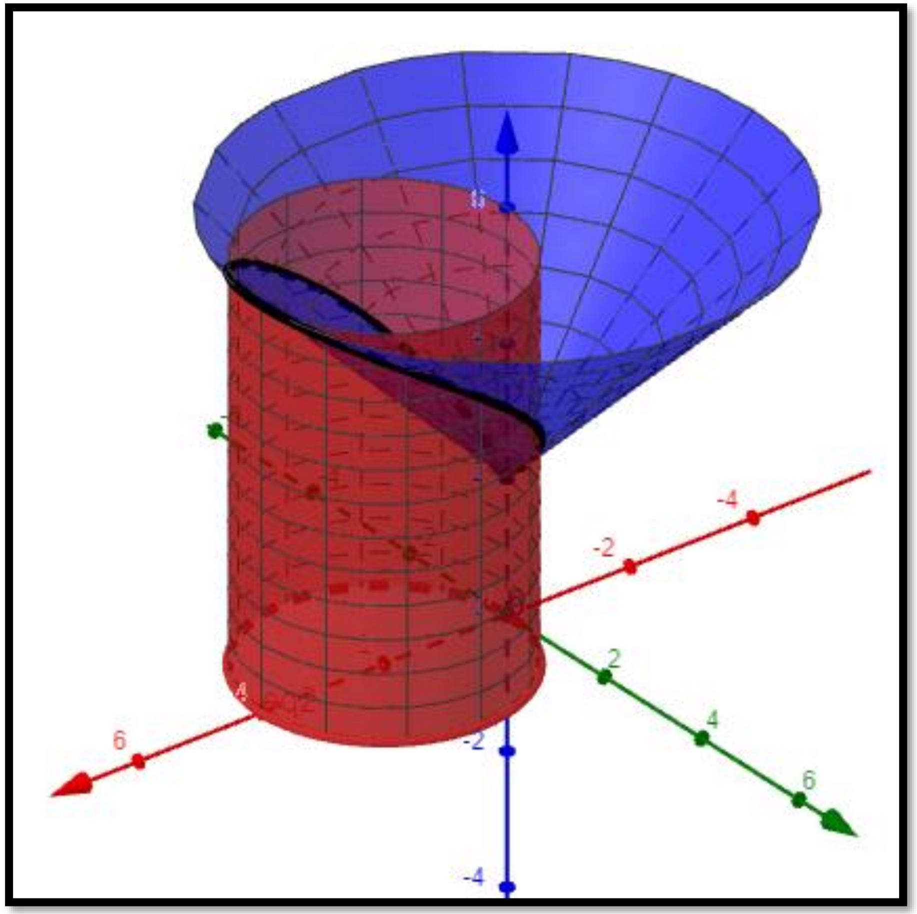
Transformando para polares:

$$x^2 + y^2 = 5$$
$$r^2 = 5$$
$$r = \sqrt{5}$$

Exemplo

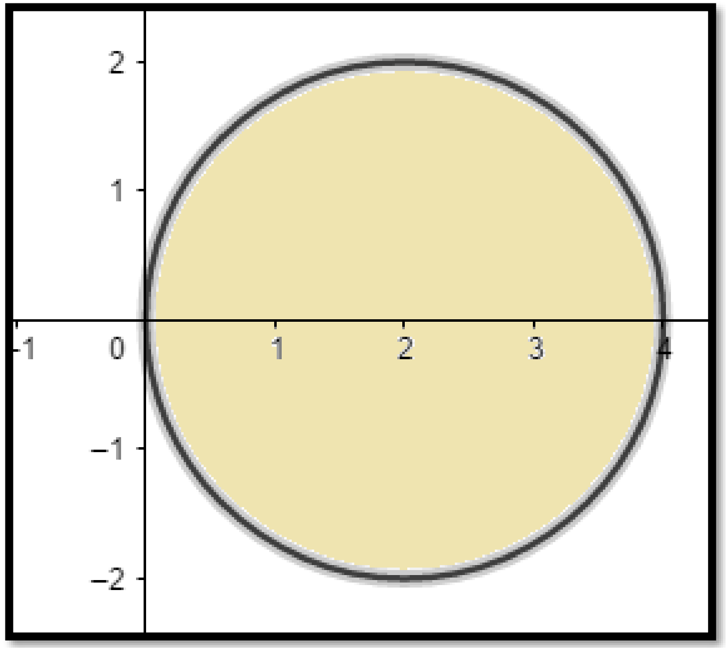
Exemplo 2) Escreva, de três formas distintas, as integrais que permitem calcular o volume do sólido delimitado por $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 4x$ e por $z = 0$.

Solução: O sólido é dado por:



Note que o topo do sólido é dado por $z = f(x, y) = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$, a lateral é cilíndrica e a base do sólido é a região plana D delimitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 4x$.

Exemplo



1ª Forma: Tomando x como variável independente.
Precisamos isolar y na equação da região D:

$$x^2 + y^2 = 4x \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4x - x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{4x - x^2}$$

Interpretando a região D, obtemos:

$$x \in [0, 4] \quad \text{e} \quad y \in \left[-\sqrt{4x - x^2}, \sqrt{4x - x^2}\right]$$

Logo:

$$V = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} 2 + \sqrt{x^2 + y^2}\ dydx\,.$$

2ª Forma: Tomando y como variável independente, precisamos isolar x na equação da região D:

$$x^2 - 4x + y^2 = 0 \;\Rightarrow\; (x-2)^2 + y^2 = 4 \;\Rightarrow\; x - 2 = \pm\sqrt{4 - y^2} \;\Rightarrow\; x = 2 \pm \sqrt{4 - y^2}$$

Interpretando D obtemos $\quad y \in [-2, 2] \quad$ e $\quad x \in \left[2 - \sqrt{4 - y^2}, 2 + \sqrt{4 - y^2}\right]$.

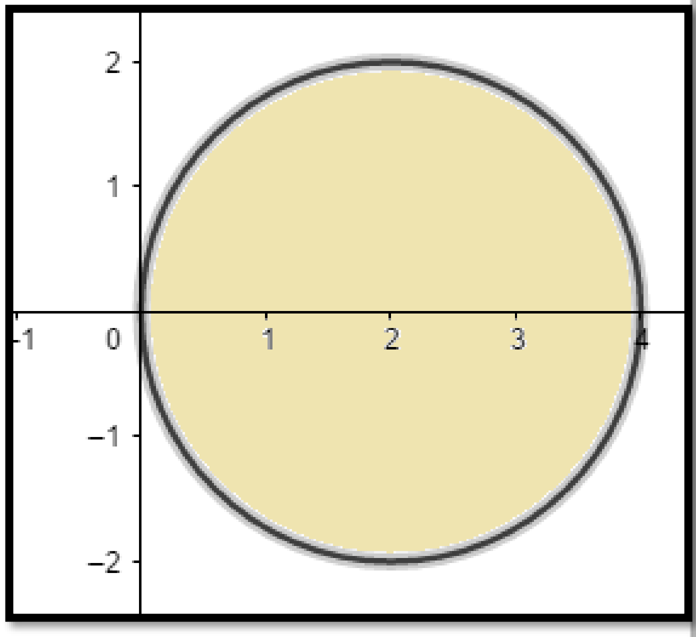
Logo:

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} 2 + \sqrt{x^2 + y^2}\ dxdy.$$

Exemplo

3ª Forma: Em polares, como a circunferência está deslocada, o ângulo deve corresponder à variação que descreve o quarto e o primeiro quadrantes. Logo

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$



Transformando a equação da região D para polares:

$$x^2 + y^2 = 4x \quad \Rightarrow \quad r^2 = 4r\cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad r = 4\cos(\theta).$$

Portanto, como o raio polar varia do polo $(r = 0)$ até a circunferência, obtemos

$$r \in [0, 4\cos(\theta)].$$

Transformando a função integrando para polares, obtemos

$$2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 2 + r.$$

Portanto:

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos(\theta)} (2 + r) \,.\, r \, dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos(\theta)} (2r + r^2) \, dr d\theta.$$

Exemplo

Exemplo 3) Reescreva, de duas formas distintas, a integral dupla

$$I = \int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{0} \frac{xy}{x^2+y^2+1}\,dxdy.$$

Solução: Interpretando a região de integração, temos que

$$y \in [0,2] \qquad \text{e} \qquad x \in [-\sqrt{2y-y^2}, 0].$$

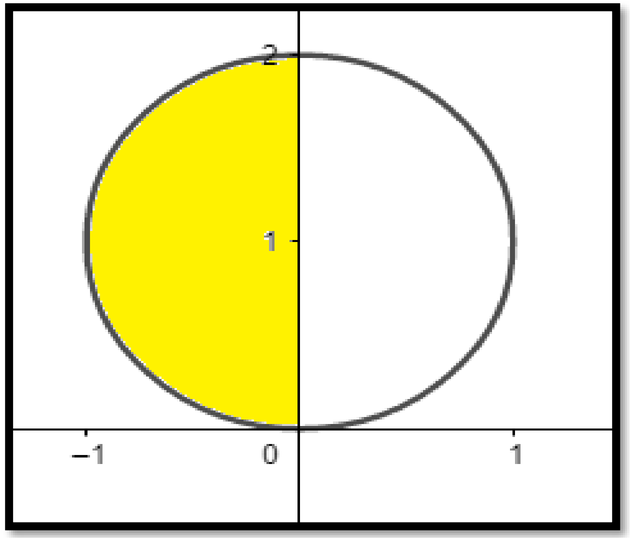
Para identificar as curvas que compõem a região de integração, temos que

$$x = -\sqrt{2y-y^2} \;\Rightarrow\; x^2 = 2y - y^2 \;\Rightarrow\; x^2+y^2-2y=0 \;\Rightarrow\; x^2+(y-1)^2=1$$

Logo $x = -\sqrt{2y-y^2}$ representa a porção da circunferência em que $x \leq 0$, que consiste na curva inferior (à esquerda).

Além disso, a curva à direita é $x = 0,$ que representa o eixo y.

Assim, interpretando os limitantes, obtemos a seguinte região:



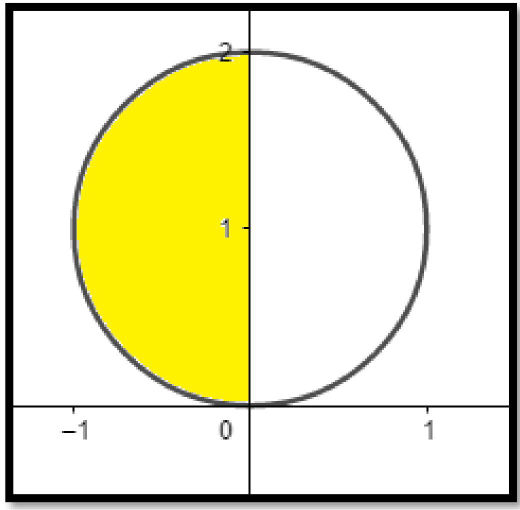
Exemplo

1ª Forma: Tomando x como variável independente, precisamos isolar y na equação de D:

$$x^2+(y-1)^2=1 \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2=1-x^2 \quad \Rightarrow \quad y-1=\pm\sqrt{1-x^2} \quad \Rightarrow \quad y=1\pm\sqrt{1-x^2}$$

Como a região está situada somente no segundo quadrante, obtemos

$$x\in[-1,0] \ \text{ e } \ y\in[1-\sqrt{1-x^2},1+\sqrt{1-x^2}].$$



Portanto

$$I=\int_{-1}^{0}\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}\frac{xy}{x^2+y^2+1}\,dydx\,.$$

2ª Forma: Transformando para polares, vemos que o ângulo polar deve descrever somente o segundo quadrante, logo

$$\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right].$$

Transformando a equação da região D para polares:

$$x^2+(y-1)^2=1 \quad \Rightarrow x^2+y^2=2y \quad \Rightarrow \quad r^2=2r\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad r=2\sin(\theta).$$

Portanto, como o raio polar varia do polo até a circunferência, temos que

$$r\in[0{,}2\sin(\theta)].$$

Exemplo

Transformando a expressão do integrando para polares:

$$\frac{xy}{x^2+y^2+1}dydx = \frac{rcos(\theta)rsin(\theta)}{r^2+1}rdrd\theta = \frac{r^3cos(\theta)sin(\theta)}{r^2+1}drd\theta.$$

Portanto, obtemos:

$$V = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{0}^{2\sin(\theta)}\frac{r^3cos(\theta)sin(\theta)}{r^2+1}drd\theta.$$

Exemplo 4) Reescreva, de duas formas distintas, a integral dupla

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\int_{\frac{3}{2}\sec(\theta)}^{6\cos(\theta)}\frac{tg(\theta)}{r}drd\theta\,.$$

Solução: Interpretando os limitantes de integração, dados em polares, temos que

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \quad \text{e} \quad r \in \left[\frac{3}{2}\sec(\theta)\,, 6\cos(\theta)\right].$$

Transformando para cartesianas, temos que o raio interno é

$$r = \frac{3}{2}\sec(\theta) = \frac{3}{2}.\frac{1}{\cos(\theta)} \quad \Rightarrow \quad r\cos(\theta) = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}.$$

Exemplo

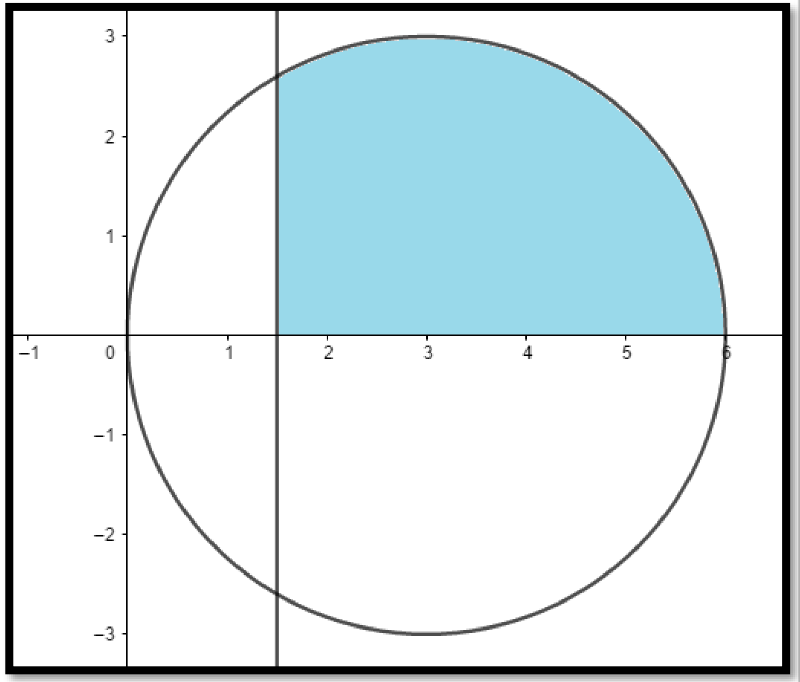
E o raio externo é tal que

$$r = 6\cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad r^2 = 6r\cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 6x \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2 + y^2 = 9$$

Portanto, o raio polar (medido a partir do polo) varia da reta $x = \dfrac{3}{2}$ até a circunferência $(x-3)^2 + y^2 = 9$.

A variação do ângulo polar indica que a região varia do eixo positivo dos x até a interseção entre as curvas.

Portanto, temos a seguinte região de integração:



A interseção entre as curvas, em cartesianas, é dada por

$$\begin{cases} x = 3/2 \\ x^2 + y^2 = 6x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3/2 \\ y^2 = 27/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 3\sqrt{3}/2 \end{cases}$$

Como a região está no primeiro quadrante, temos $y = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Transformando a expressão do integrando:

$$\frac{tg(\theta)}{r} dr d\theta = \frac{tg(\theta)}{r^2} \color{red}{r dr d\theta} = \frac{y}{x.(x^2+y^2)} \color{red}{dydx.}$$

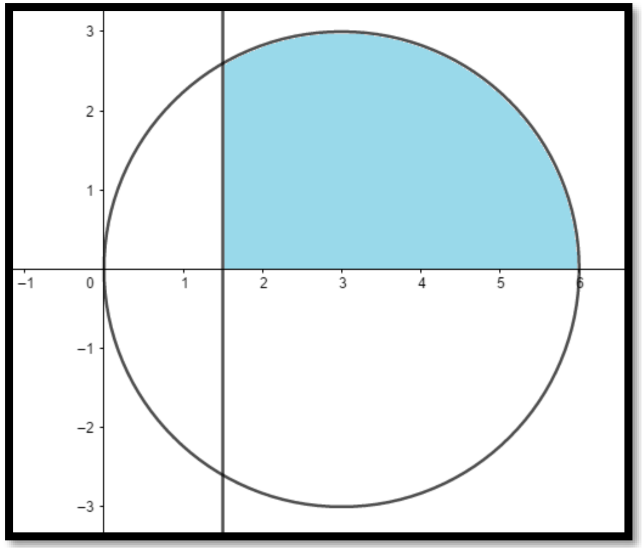
Exemplo

1ª Forma: Tomando x como variável independente. Precisamos isolar y na equação de D.

$$x^2 + y^2 = 6x \quad \Rightarrow \quad y^2 = 6x - x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{6x - x^2}.$$

Como a região é está somente no primeiro quadrante, temos $y = \sqrt{6x - x^2}$.

Interpretando a região, obtemos então



$$x \in \left[\frac{3}{2}, 6\right] \;\; \text{e} \;\; y \in \left[0, \sqrt{6x - x^2}\right].$$

Portanto:

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^{6} \int_{0}^{\sqrt{6x-x^2}} \frac{y}{x(x^2 + y^2)}\, dydx.$$

2ª Forma: Tomando y como variável independente. Precisamos isolar y na equação de D.

$$x^2 - 6x + y^2 = 0 \;\Rightarrow\; (x-3)^2 + y^2 = 9 \;\Rightarrow\; x - 3 = \pm\sqrt{9 - y^2} \;\Rightarrow\; x = 3 \pm \sqrt{9 - y^2}$$

Como há troca de limitação na curva à esquerda, precisamos usar soma de integrais:

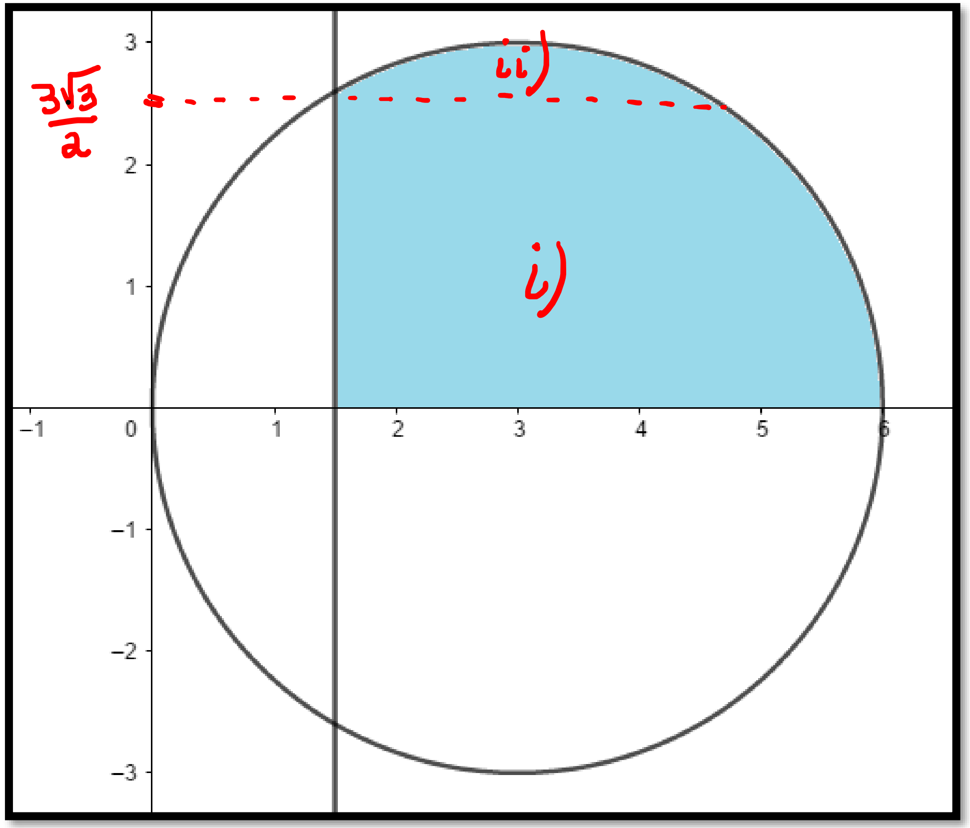
Parte i): $y \in \left[0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$ e $x \in \left[\frac{3}{2}, \; 3 + \sqrt{9 - y^2}\right]$.

Parte ii) $y \in \left[\frac{3\sqrt{3}}{2}, 3\right]$ e $x \in \left[3 - \sqrt{9 - y^2}, \; 3 + \sqrt{9 - y^2}\right]$.

Exemplo

Portanto, obtemos que

$$I = \int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \int_{\frac{3}{2}}^{3+\sqrt{9-y^2}} \frac{y}{x(x^2+y^2)}\,dxdy + \int_{\frac{3\sqrt{3}}{2}}^{3} \int_{3-\sqrt{9-y^2}}^{3+\sqrt{9-y^2}} \frac{y}{x(x^2+y^2)}\,dxdy$$



Exercícios: todos da Lista da Integral Dupla, com exceção do 3.