TEG

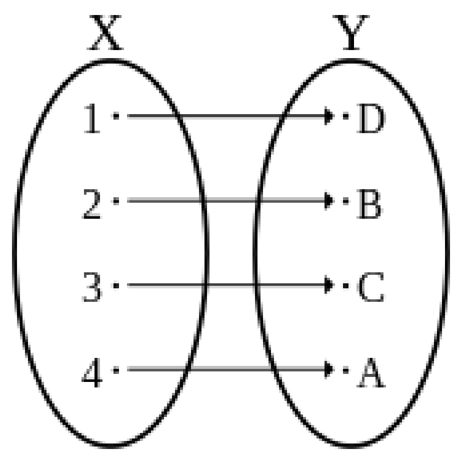
Gilmário B. Santos

gilmario.santos@udesc.br

http://www.joinville.udesc.br/portal/pagina/gilmario

Relembrando

- Sejam X e Y conjuntos e f : X → Y uma função de X a Y.
- A função f é bijetora quando associa cada elemento de X a um único de Y e vice-versa: a cada elemento de Y, um único de X.



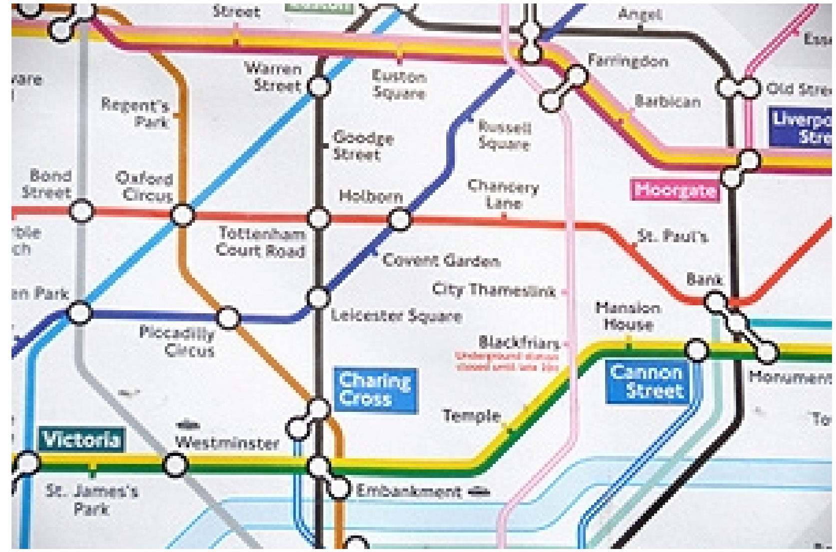
Isomorfismo

Um isomorfismo entre dois grafos G1 e G2 é uma bijeção *f* de vértices de G1 (V(G1)) em vértices de G2 (V(G2)), tal que dois vértices *v* e *w* são adjacentes em G1 se e somente se *f*(v) e *f*(w) são adjacentes em G2.

Formalmente: dois grafos G1 = (V1, A1) e G2 = (V2, A2) são isomorfos, i.e., G1 $\sim$= G2, se existe uma função bijetora f : V1 $\rightarrow$ V2, tal que (u, v) $\in$ A1 se e só se (f (u), f (v)) $\in$ A2.

Dois grafos são isomorfos se é possível alterar os nomes dos vértices de um deles de tal modo que os dois grafos fiquem estruturalmente iguais.

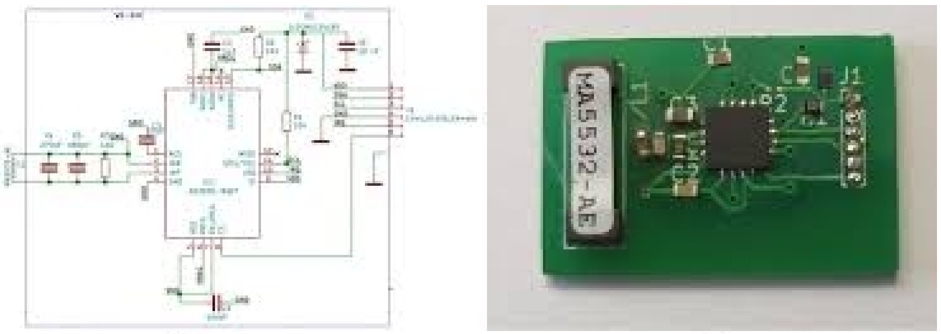
Isomorfismo
Aplicações



O mapa de estações de metrô tem uma aparência geométrica e simplista quando comparado ao mapa desenhado com precisão, no qual as estações são georreferenciadas. No entanto, os grafos correspondentes (vértices são estações e linhas são arestas) são isomorfos: a bijeção mapeia a coordenada de uma estação de um mapa para outro, por fim, cada vértice e cada aresta de um gráfico exatamente a um vértice ou aresta no outro (e vice-versa), de forma a preservar a conectividade do grafo (qual vértice está vinculado a qual).

Isomorfismo
Aplicações

Verificar se os diagramas originais do projeto estão coerentes com o layout do circuito eletrônico físico.

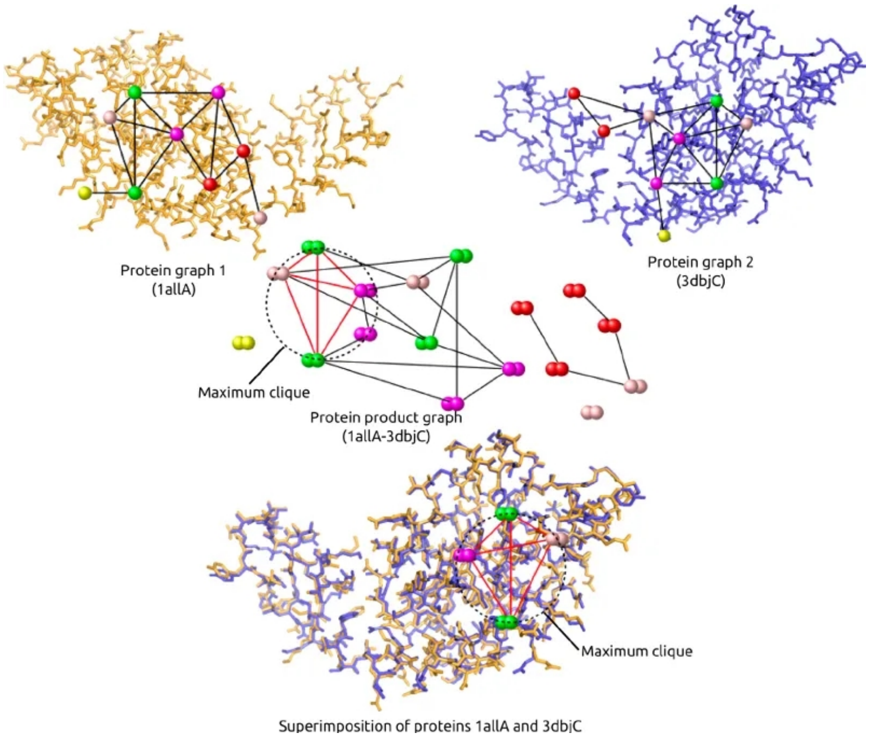


(a) (b)

Verificar se um chip de um fornecedor contém propriedade intelectual de um fornecedor diferente.

Isomorfismo
Aplicações

Verificar estruturas proteicas: as estruturas proteicas podem ser representadas por redes de grafos cujos nós representam proteínas e as arestas representam ligações. O conceito de isomorfismo de grafos pode ser aplicado na identificação de semelhanças entre estruturas de proteínas.



Isomorfismo

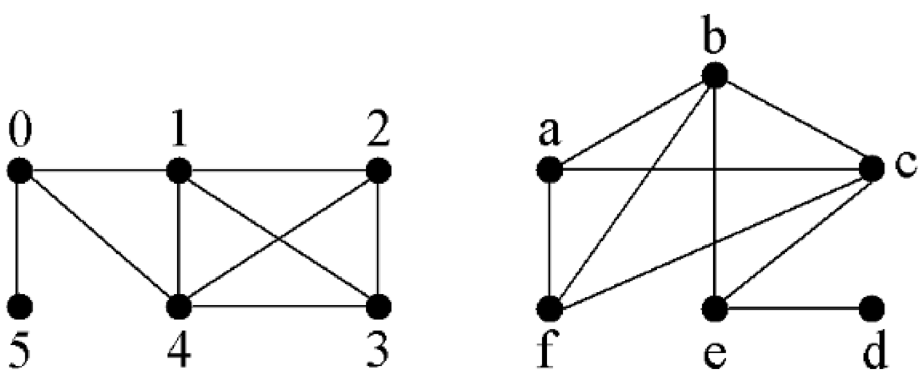
Voltando aos conceitos, é importante destacar:

- G e G’ são isomorfos se e somente se existir uma função bijetiva entre V e V’ (conjuntos de vértices), que preserve suas relações de adjacência (Netto, P.O.B. e Jurkiewicz, S.,2017)

- |V(G)| = |V(G’)| e |E(G)| = |E(G’)|.

Na verdade, além das adjacências, outras propriedades também são preservadas pelo isomorfismo, tais como a mesma sequência de graus…

Os grafos abaixo são isomorfos pela bijeção da tabela:



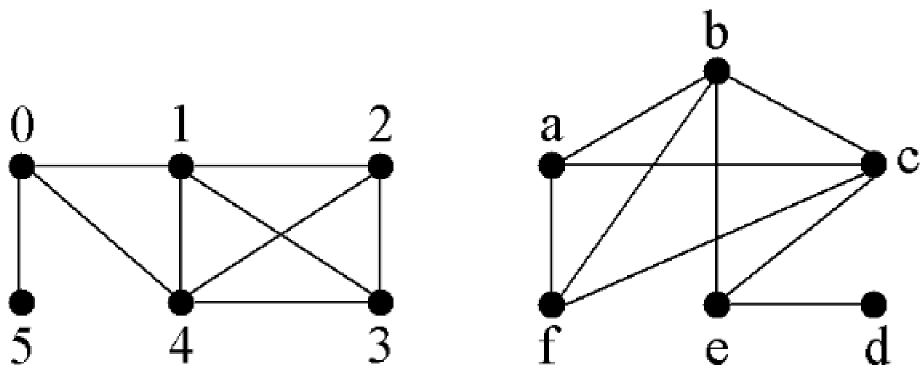
(a) (b)

V_1	V_2
0	e
1	b
2	a
3	f
4	c
5	d

Isomorfismo

Os grafos abaixo são isomorfos pela bijeção da tabela:

Ambos apresentam o mesmo número de arestas e de vértices e a mesma sequência de graus.



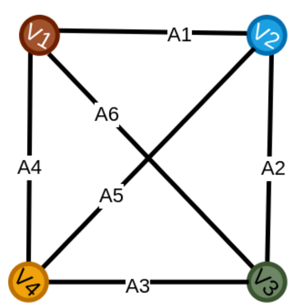
(a) (b)

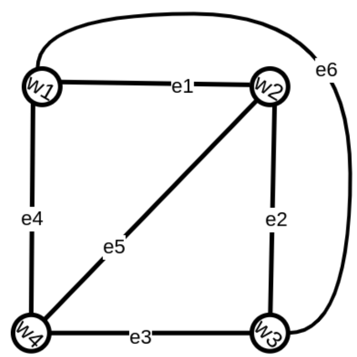
V_1	V_2
0	e
1	b
2	a
3	f
4	c
5	d

Isomorfismo

Para decidir se dois grafos G1 e G2 são isomorfos, basta examinar as possíveis bijeções de V1 em V2.

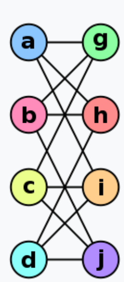
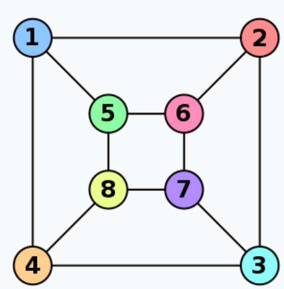
- Dados G1(V1,E1) e G2(V2,E2) com V1 = {v1,v2,v3,v4} V2={w1,w2,w3,w4}, a seguinte bijeção *f* determina um isomorfismo entre *G1 e G2*:
- f(v1)=w3; f(v3)=w1; f(v2)=w2; f(v4)=w4
  - (v1,v3) $\in$ E1 $\leftrightarrow$ (f(v1), f(v3)) = (w3,w1) $\in$ E2: (v1,v3) $\rightarrow$ (w3,w1)
  - (v1,v2) $\in$ E1 $\leftrightarrow$ (f(v1), f(v2)) = (w3,w2) $\in$ E2: (v1,v2) $\rightarrow$ (w3,w2)
  - (v1,v4) $\in$ E1 $\leftrightarrow$ (f(v1), f(v4)) = (w3,w4) $\in$ E2: (v1,v4) $\rightarrow$ (w3,w4)
  - (v2,v3) $\in$ E1 $\leftrightarrow$ (f(v2), f(v3)) = (w2,w1) $\in$ E2: (v2,v3) $\rightarrow$(w2,w1);
  - (v2,v1) $\in$ E1 $\leftrightarrow$ (f(v2), f(v1)) = (w2,w3) $\in$ E2:(v2,v1) $\rightarrow$ (w2,w3);
  - (v2,v4) $\in$ E1 $\leftrightarrow$ (f(v2), f(v4)) = (w2,w4) $\in$ E2:(v2,v4) $\rightarrow$ (w2,w4)





Isomorfismo

G e H abaixo podem se tornar coincidentes pela função *f* indicada na figura, eles são isomorfos entre si [Schwarzfitter,Jaime].

Grafo G	Grafo H	Um isomorfismo entre G e H
		$f(a) = 1$ $f(b) = 6$ $f(c) = 8$ $f(d) = 3$ $f(g) = 5$ $f(h) = 2$ $f(i) = 4$ $f(j) = 7$

Isomorfismo

Para decidir se dois grafos G e H são isomorfos, basta examinar as possíveis bijeções de V(G) em V(H), mas se cada um dos grafos tem *n* vértices, esse algoritmo pode chegar a consumir tempo proporcional a *n!*.

Esse tipo de algoritmo é computacionalmente insatisfatório na prática.

É desconhecido se existe ou não algum algoritmo eficiente para o problema geral da determinação de isomorfismo entre grafos.

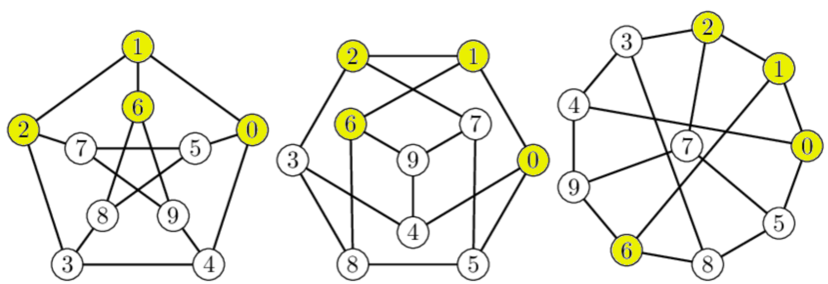
O problema não é conhecido por ser solucionável em tempo polinomial nem por ser NP-completo e, portanto, pode estar na classe de complexidade computacional NP-intermediária.

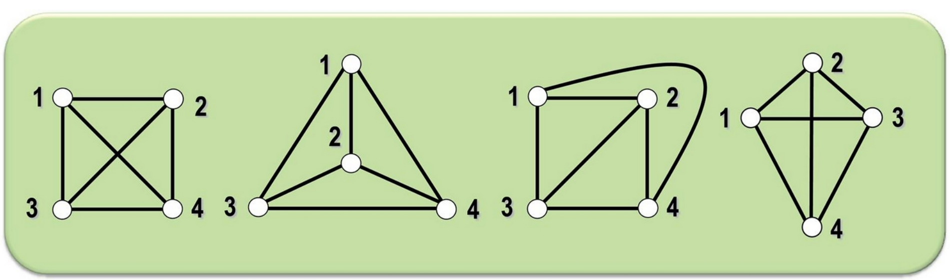
https://mathworld.wolfram.com/IsomorphicGraphs.html

Isomorfismo

Uma classe isomórfica de grafos é uma classe de equivalência (propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva) de grafos regida por uma relação de isomorfismo.

Exemplos de classes isomórficas para o grafo de Petersen e para o K_4;

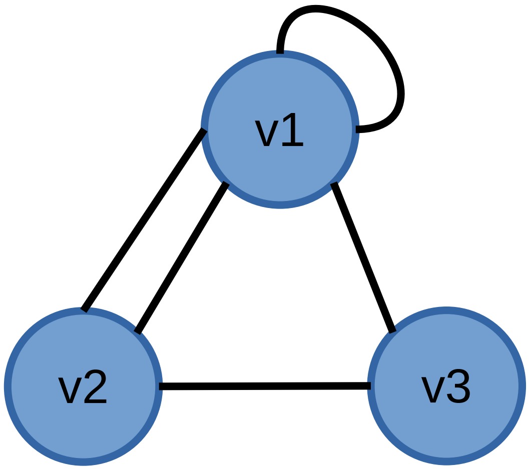




(Goldbarg, 2012)

Isomorfismo

- Tente encontrar um isomorfo ao grafo abaixo, o que você conclui

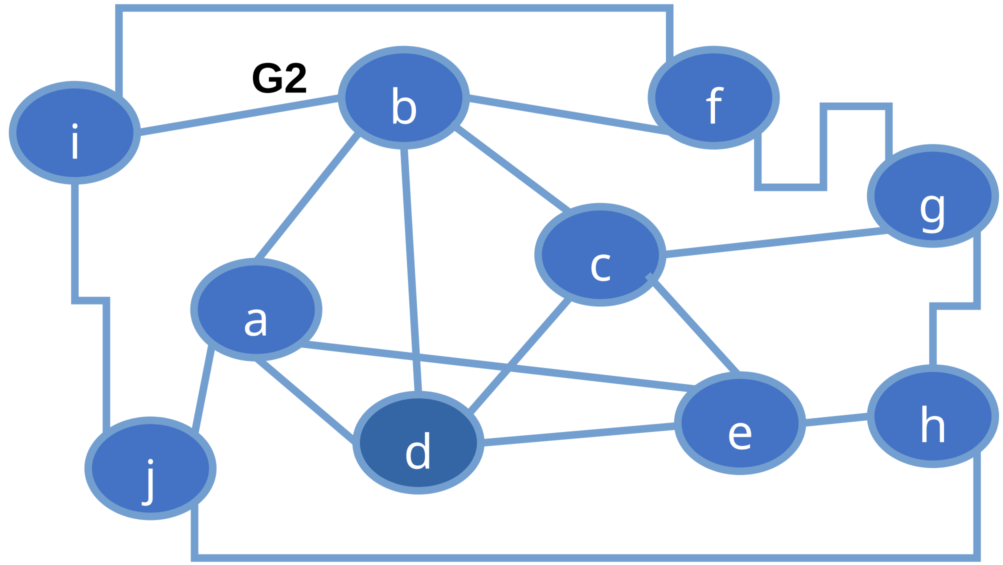


Seria possível uma bijeção que guardasse esse laço e esse par de arestas múltiplas?

Determine se os pares de grafos abaixo são isomorfos:

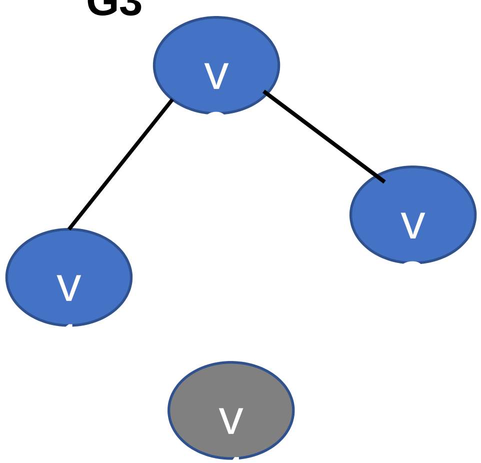
1) **G1**= Grafo de Petersen

G2

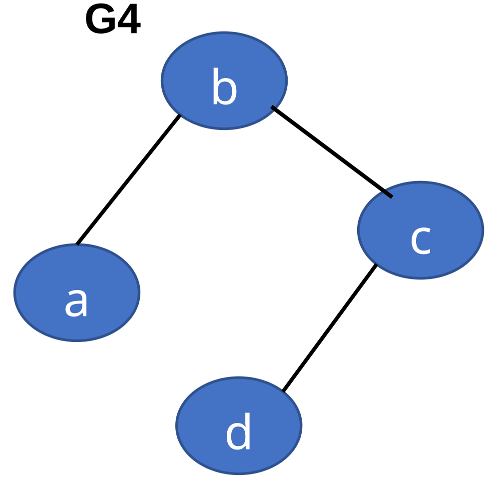


2)

G3

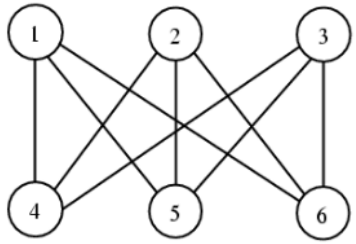


G4

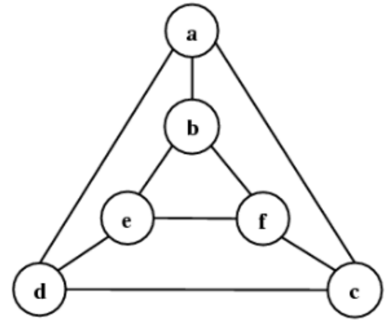


Note que G1 é regular e que G3 é desconexo

3)

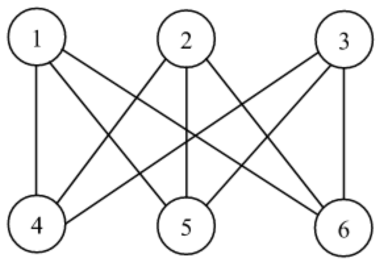


G

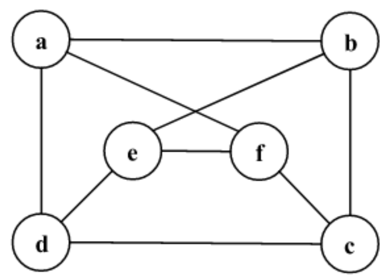


G’

4)



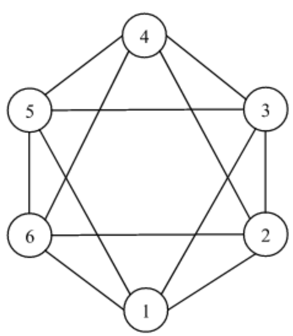
G



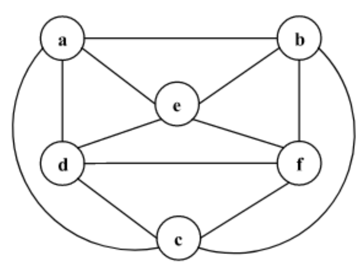
G'

V(G)	V(G')
1	a
2	e
3	c
4	b
5	d
6	f

5)



G



G'

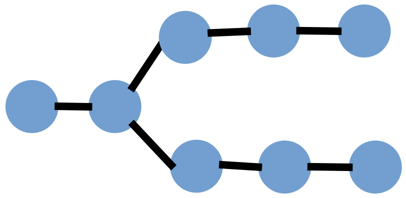
V(G)	V(G')
1	d
2	a
3	e
4	b
5	f
6	c

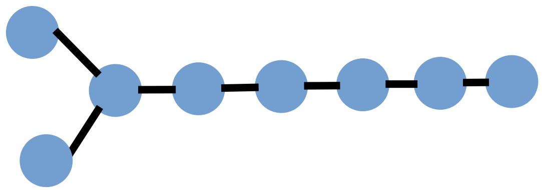
Isomorfismo

Algumas condições emergem, grafos isomorfos apresentam:
a) O mesmo número de vértices e arestas;
b) A mesma sequência gráfica;
c) Se o G1 usa os vértices "v1, v2, v3,.... vk" para criar um ciclo de comprimento k, então, seu isomorfo G2 também deve usar "f(v1), f(v2), f(v3),... f(vk)" para criar um ciclo de mesmo comprimento k.

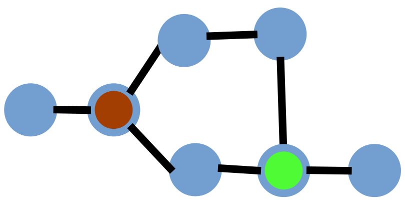
Porque essas condições são necessárias mas não são suficientes?

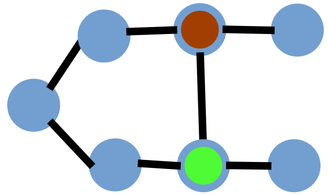
- Veja o exemplo abaixo, as condições *a* e *b* são verdadeiras, porém, não há isomorfismo





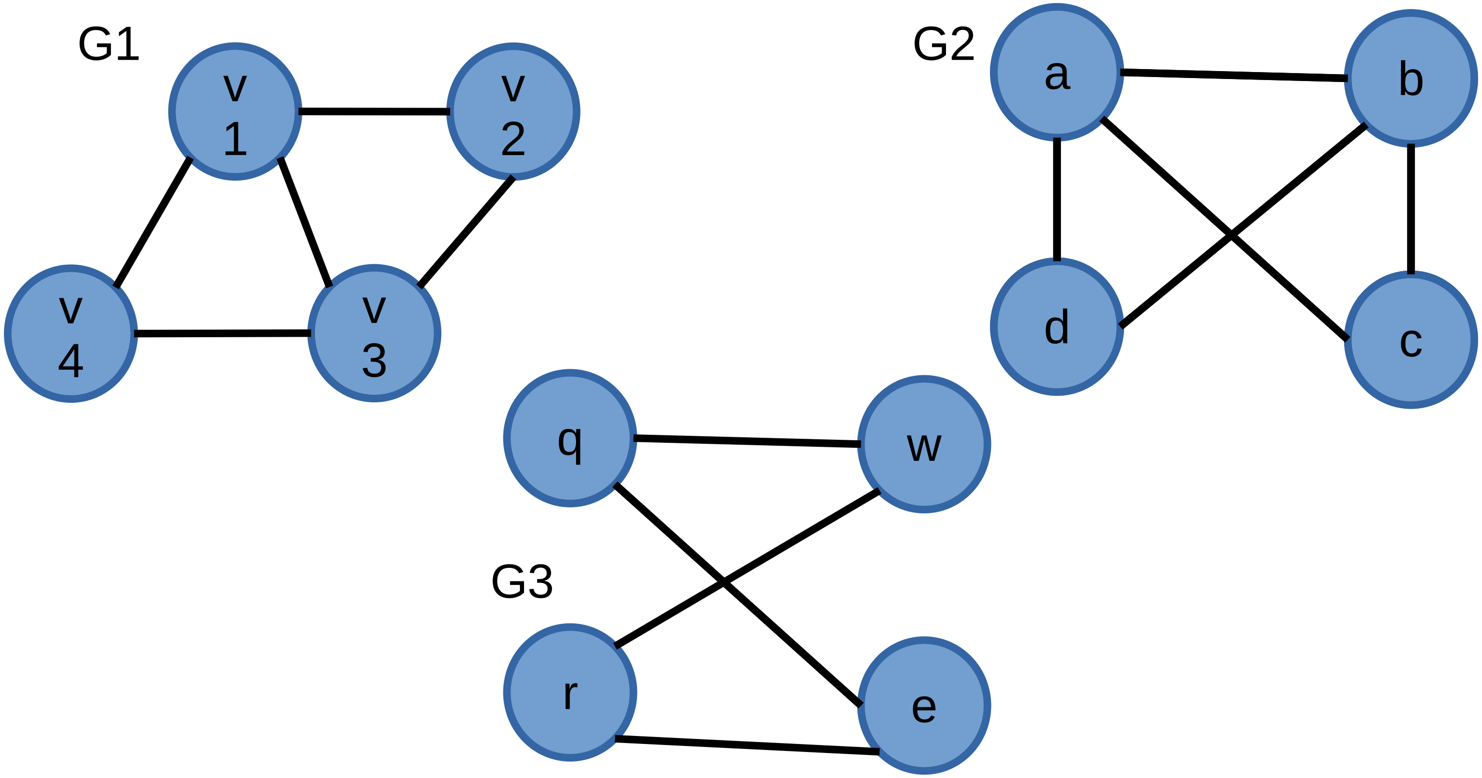
- Veja o exemplo abaixo, ambos apresentam um ciclo de mesmo comprimento, mesma sequência gráfica, mesmo número de vértices e arestas, porém, não há isomorfismo.





Isomorfismo

Utilize as condições anteriores para determinar o isomorfismo ou não entre os grafos baixo:

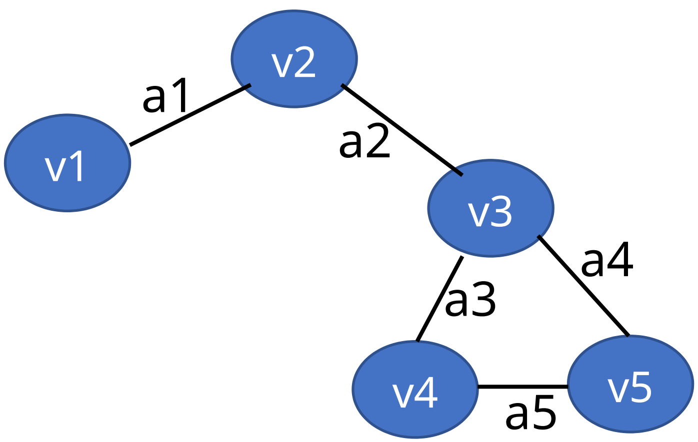


Aqui precisaremos do conceito de matriz de adjacência

Representação de um grafo por meio da estrutura de dados Matriz de Adjacências:

1. como o nome indica, a matriz modela as relações de adjacências (arestas) entre vértices;

2. Não é a única forma de estrutura de dados para a representação de um grafo, ainda voltaremos a tratar detalhes sobre isso...



	v1	v2	v3	v4	v5
v1	0	1	0	0	0
v2	1	0	1	0	0
v3	0	1	0	1	1
v4	0	0	1	0	1
v5	0	0	1	1	0

Isomorfismo
Matriz de permutação

Aqui precisamos do conceito de Matriz de Adjacências: uma matriz que modela as relações de adjacências (arestas) entre vértices;

OBS: A Matriz de Adjacências não é a única forma de representação de um grafo, voltaremos a tratar sobre isso...

O que falar sobre o isomorfismo e a Matriz de Adjacências?

Teorema:

- Sejam G1 e G2 dois grafos e A1 e A2 suas matrizes de adjacência respectivamente:
  - *f*: V(G1) → V(G2) é um isomorfismo se e só se $(P^{-1})(A1)P = A2$
  - Onde P é uma matriz de permutação representando *f*.

Isomorfismo
Matriz de permutação

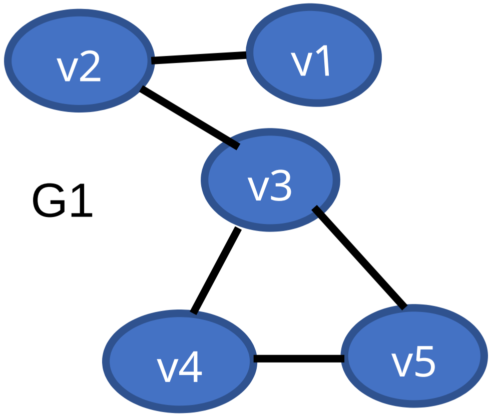
1) Dados P e A1 forneça o grafo G2, isomorfo a G1, por meio de $(P^{-1})(A1)P = A2$ e desenhe o grafo G2.

A1:

	v1	v2	v3	v4	v5
v1	0	1	0	0	0
v2	1	0	1	0	0
v3	0	1	0	1	1
v4	0	0	1	0	1
v5	0	0	1	1	0

P:

	a	b	c	d	e
v1	0	0	0	0	1
v2	0	0	0	1	0
v3	0	0	1	0	0
v4	0	1	0	0	0
v5	1	0	0	0	0



G1

Isomorfismo
Matriz de permutação

$(P^{-1})(A1)P = A2$

$P^{-1}=P^T$

P^{-1} * A1 * P = A2

P^{-1}

0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0

A1

0	1	0	0	0
1	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0

P

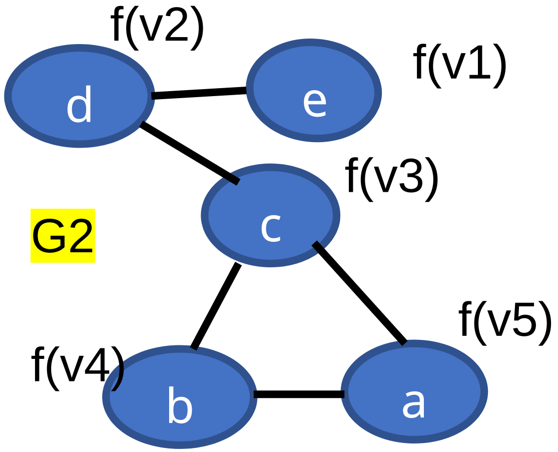
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0

A2

0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	1	0

A2 =

	a	b	c	d	e
a	0	1	1	0	0
b	1	0	1	0	0
c	1	1	0	1	0
d	0	0	1	0	1
e	0	0	0	1	0



Isomorfismo
Matriz de permutação

2) Verifique se há isomorfismo entre A1 e A2 por meio de $(P^{-1})(A1)P = A2$ e desenhe os grafos.

A1

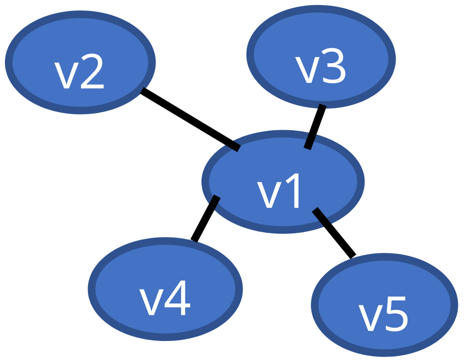
	v1	v2	v3	v4	v5
v1	0	1	1	1	1
v2	1	0	0	0	0
v3	1	0	0	0	0
v4	1	0	0	0	0
v5	1	0	0	0	0

P

	a	b	c	d	e
v1	0	0	1	0	0
v2	1	0	0	0	0
v3	0	1	0	0	0
v4	0	0	0	1	0
v5	0	0	0	0	1

A2

	a	b	c	d	e
a	0	0	1	0	0
b	0	0	1	0	0
c	1	1	0	1	1
d	0	0	1	0	0
e	0	0	1	0	0



Isomorfismo
Matriz de permutação

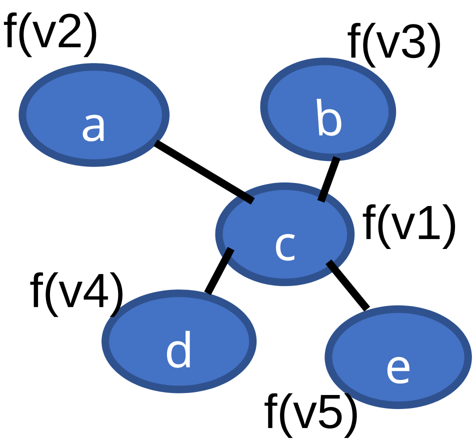
$(P^{-1})(A1)P = A2$

$P^{-1}=P^{T}$

$$
\underset{P^{-1}}{\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}}
*
\underset{A1}{\begin{pmatrix} 0&1&1&1&1\\ 1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}}
*
\underset{P}{\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}}
=
\underset{(P^{-1} * A1)}{\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&1\\ 1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}}
*
\underset{P}{\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}}
=
\underset{X}{\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 1&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}}
$$

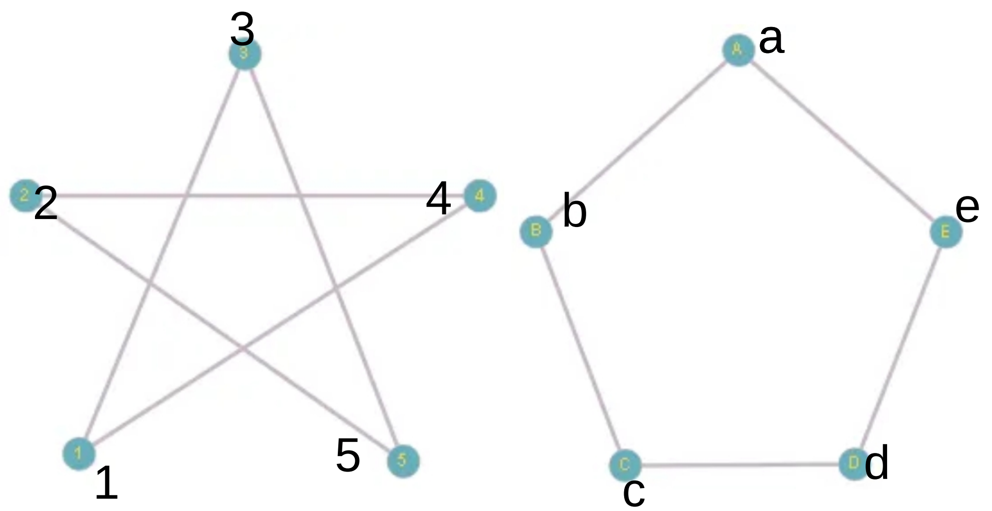
X=A2=

	a	b	c	d	e
a	0	0	1	0	0
b	0	0	1	0	0
c	1	1	0	1	1
d	0	0	1	0	0
e	0	0	1	0	0



Isomorfismo
Matriz de permutação

G1



G2

Sejam G1 e G2, proponha uma permutação e verifique o isomorfismo pelo teorema apresentado?

Exiba as matrizes de adjacências.

Isomorfismo
Autovalores

Um escalar λ ou autovalor de um operador linear $A : V \rightarrow V$ é tal que se existir um vetor x diferente de zero tal que $A\ x=\lambda x$. O vetor x é chamado autovetor do autovalor λ.

Os autovalores de uma dada matriz quadrada A de dimensão $n \times n$ são os n números que resumem as propriedades essenciais daquela matriz.

Importante condição necessária: são idênticos os autovalores das matrizes de adjacência de grafos isomorfos.

Sendo isomorfos, G1 e G2 apresentam os mesmos autovalores das respectivas matrizes de adjacências.

Isomorfismo
Autovalores

Avalie o isomorfismo entre XY e XZ, teste inicialmente por meio dos os autovalores das matrizes usando Python (numpy):

X

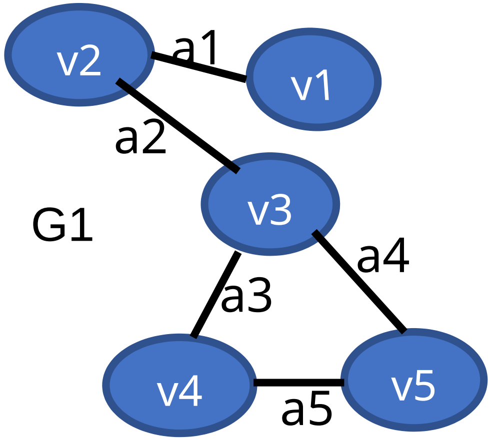
	v1	v2	v3	v4	v5
v1	0	1	0	0	0
v2	1	0	1	0	0
v3	0	1	0	1	1
v4	0	0	1	0	1
v5	0	0	1	1	0

Y

	a	b	c	d	e
a	0	1	1	0	0
b	1	0	1	0	0
c	1	1	0	1	0
d	0	0	1	0	1
e	0	0	0	1	0

Z

	a	b	c	d	e
v1	0	1	0	0	1
v2	1	0	1	0	0
v3	0	1	0	1	1
v4	0	0	1	0	1
v5	0	0	1	1	0



Goldbarg, Marco. Grafos. Disponível em: Minha Biblioteca, Grupo GEN, 2012.

Netto, P.O.B. e Jurkiewicz, S.. Grafos: introdução e prática. Disponível em: Minha Biblioteca, (2nd edição). Editora Blucher, 2017.

Prestes, Edson. https://www.inf.ufrgs.br/~prestes/Courses/Graph%20Theory/Livro/LivroGrafos.pdf

Szwarcfiter, J.L. Teoria computacional de grafos: Os algoritmos

Wilson, R.J. Introduction to Graph Theory