Coloração de Grafos (Vértices)

Coloração de mapas

Desde 1850, os cartógrafos já tinham o conhecimento empírico de que não são necessárias mais do que quatro diferentes cores para colorir as regiões em um mapa. Isso era conhecimento prático desses profissionais, e parava por aí.

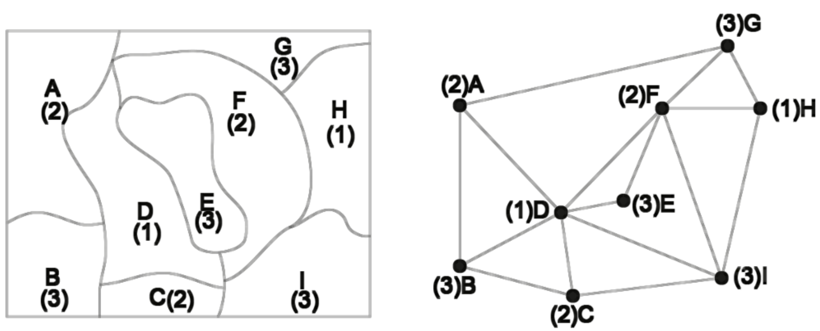
Nessa mesma época um estudante chamado Francis Guthrie aluno do University College em Londres formulou pela primeira vez o chamado problema das quatro cores e buscou uma prova matemática, porém, sem muito sucesso.

Se ficou curioso visite um breve relato histórico via link abaixo:
http://ion.uwinnipeg.ca/~ooellerm/guthrie/FourColor.html

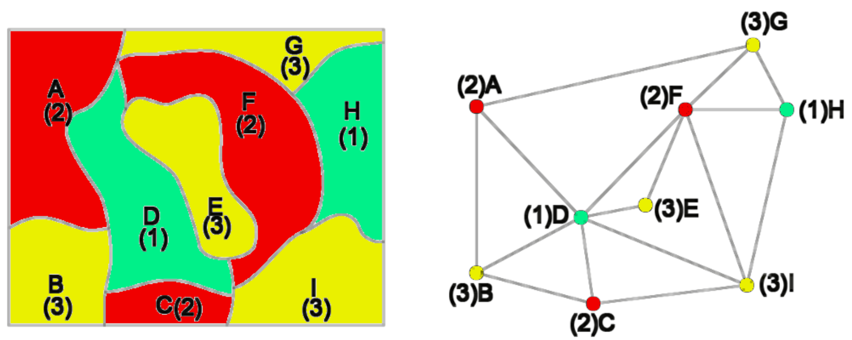
Coloração de mapas

O problema das quatro cores consiste em colorir os países de um mapa arbitrário plano, cada país com uma cor, de tal forma que países separados por uma **linha** fronteiriça possuam cores diferentes e sejam utilizadas não mais de 4 cores.

No mapa abaixo, o conjunto de cores é igual a {1, 2, 3}



(a) (b)



(a) (b)

Coloração de mapas

Parecia haver uma prova simples, mas não foi bem assim ...

A prova de que a coloração de qualquer mapa demanda no máximo 4 cores foi formulado em meados do século XIX, porém, só foi provada em 1976 por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, ainda assim, com o uso de computadores.

Além da importância do tópico de coloração, o problema das 4 cores desempenhou um papel muito relevante para o desenvolvimento geral da teoria dos grafos, pois serviu de motivação para o trabalho na área e ensejou o desenvolvimento de outros aspectos teóricos, realizados na tentativa de resolver a questão.

Coloração de Vértices

Seja um grafo G(V,E) e um conjunto C de cores, uma coloração de G é uma atribuição de alguma cor de C para cada vértice de V, de tal modo que dois vértices adjacentes não tenham a mesma cor.

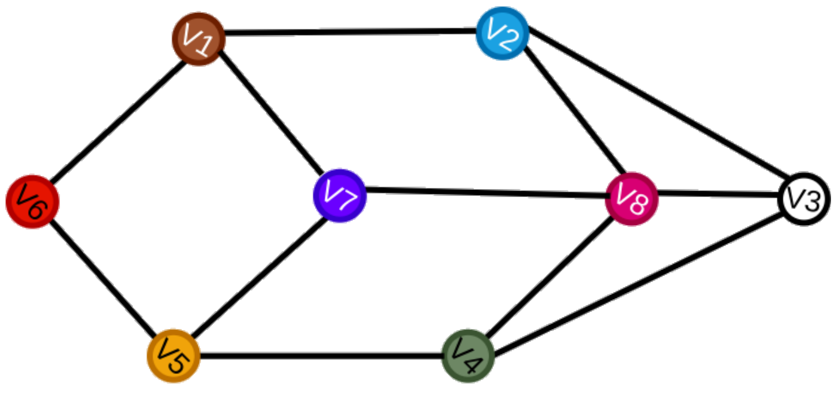
Portanto, uma coloração de G é uma função $f : V \rightarrow C$, tal que para cada par de vértices $v, w \in V$ teremos $(v,w) \in E \Rightarrow f(v) \neq f(w)$.

Uma **k-coloração** de G é uma coloração que utiliza um total de **k** cores.

$$k \in \mathbb{Z}_+^*$$

Isto é, uma k-coloração de G é uma coloração *f* cuja cardinalidade do conjunto imagem é igual a k. Diz-se então que G é k-colorível.

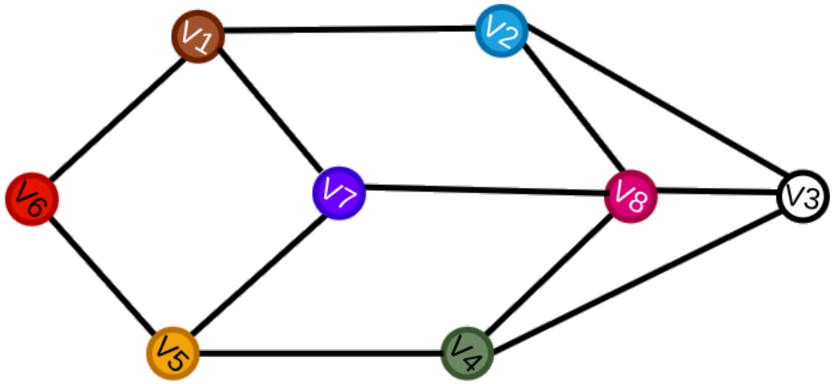
O grafo abaixo apresenta uma 8-coloração:



Coloração de Vértices

É claro que o problema não é obter a k-coloração, visto que podemos sempre utilizar uma ampla variedade de cores para colorir um grafo (talvez não seja uma variedade infinita, mas certamente bastante grande).

A priori, é sempre possível pintar *n* vértices com *n* cores diferentes, como no caso abaixo que admite uma k-coloração=8 cores:



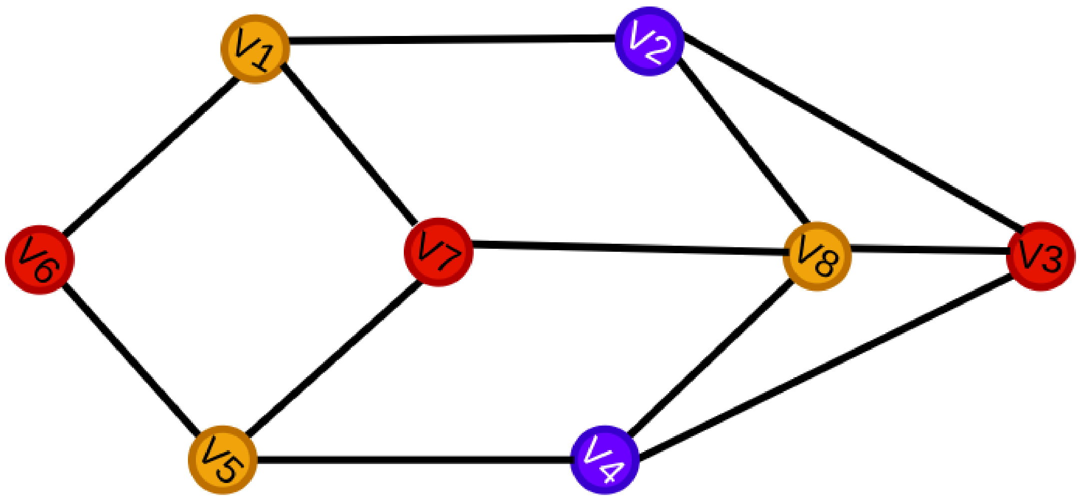
Na prática, o problema mais interessante está em determinar o **menor conjunto de cores** para a coloração.

Coloração de Vértices

O número cromático de um grafo G (representado como **χ(G)**) corresponde ao menor número de cores para o qual existe uma k-coloração de G.

O grafo abaixo admite uma k-coloração de 8 cores, porém seu número cromático é $\chi(G) = 3$.

Na verdade, esse grafo é k-colorível para $k \geq 3$.



Coloração de Vértices

Em geral, o problema de encontrar o número cromático $\chi(G)$ de um grafo $G(V,E)$, $n=|V|$, de ordem $n \geq 3$ é NP-difícil.

Não existe um algoritmo exato eficiente para o problema da coloração, isso sugere a existência de um algoritmo heurístico [Szwarcfiter].

Uma conhecida estratégia gulosa consiste em:

- "colorirmos cada vértice com a primeira cor adequada e disponível";
- Considerando uma cor "c" ordenável, tal que $c_i < c_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}-\{0\}$

Algoritmo guloso (*greedy*) para coloração de vértices
Dados de entrada: grafo G(V,E);
Resultados de saída: uma coloração própria dos vértices de G;

Seja $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. $n=|V|$

Para $i = 1, 2, \ldots, n$

colorir v_i *com a menor cor* c_i *disponível*.

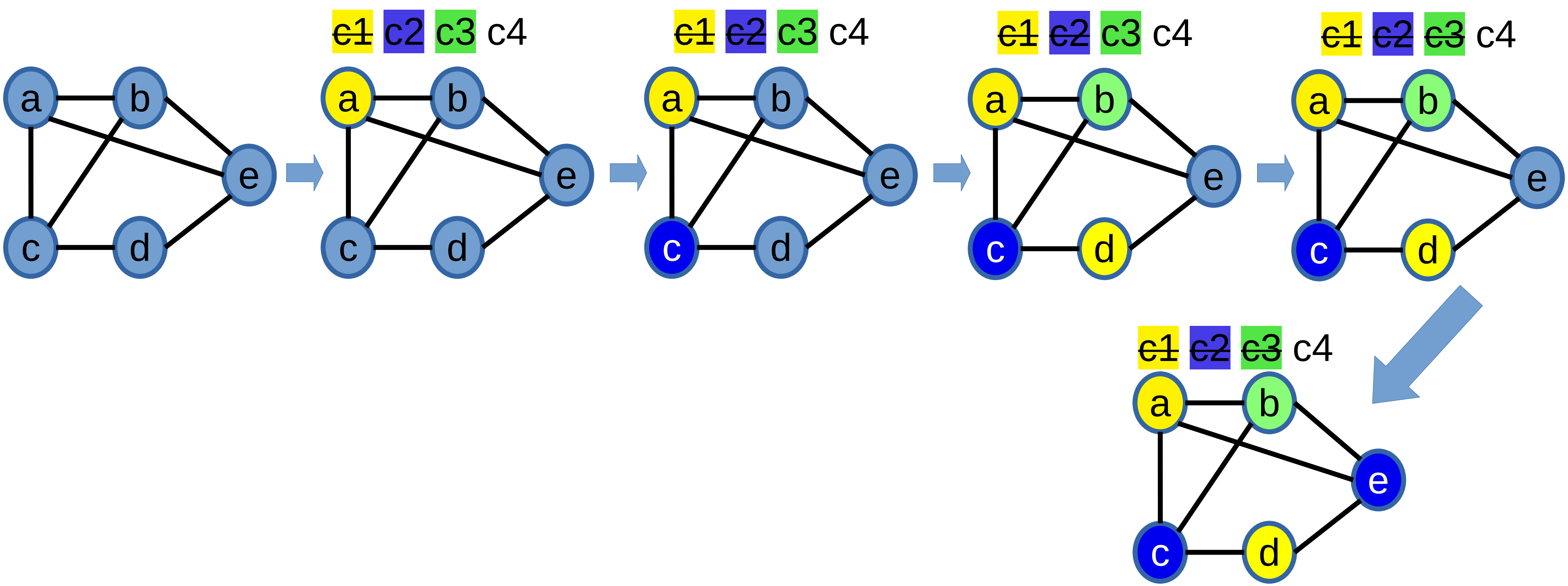
Coloração de Vértices

Algoritmo guloso (*greedy*) para coloração de vértices
Dados de entrada: grafo G(V,E);
Resultados de saída: uma coloração própria dos vértices de G;
Seja $V\,(G) = \{v_1\,, v_2\,, \ldots\,, v_n\}$. $n=|V|$

Para $i = 1, 2, \ldots, n$

colorir v_i *com a menor cor* c_i *disponível/viável para coloração*.

Supondo a disponibilidade do conjunto C={c1,c2,c3,c4} para colorir o grafo abaixo:



Coloração de Vértices

Ainda que nem sempre seja possível a determinação exata de $\chi(G)$, há propriedades que nos auxiliam na caracterização da coloração:

1) Um vértice com laço não admite coloração;

2) Um grafo admite uma 1-coloração se e só se é um grafo nulo (isto é, sem arestas). Obviamente $\chi(G)=1$ para o grafo nulo;

3) Um grafo simples admite uma 2-coloração se e só se é bipartido. Cada uma das partições de vértices forma um conjunto independente, sendo necessárias apenas duas cores para colorir o grafo, ou seja, $\chi(G_{m,n})=2$ para bipartidos;

4) Para todo grafo G planar sem laços, temos $\chi(G) \leq 4$, ou seja, todo grafo planar sem laços é 4-colorível.

5) $\chi(K_n)=n$

Coloração de Vértices

Também é possível estabelecer os limites superior (majorante) e inferior (minorante) para $\chi(G)$:

$$minorante \leq \chi(G) \leq majorante$$

Existem dois limites naturais definidos pelo:

- Conjunto independente;
- Clique.

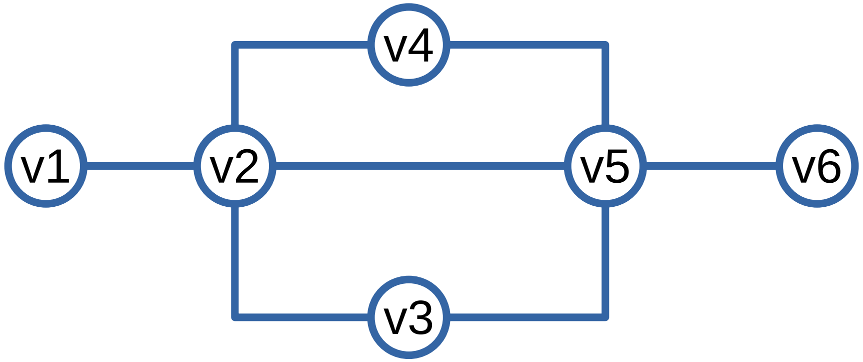
Para tanto são necessários esses conceitos, definidos a seguir...

Coloração de Vértices

Seja G(V,E)

- Conjunto independente é um subgrafo induzido de G e totalmente desconexo (onde não existem dois vértices adjacentes);
- Um conjunto independente é maximal se o acréscimo de um vértice comprometa a propriedade de desconexão;
- Um conjunto independente máximo é o conjunto independente maximal de maior cardinalidade.

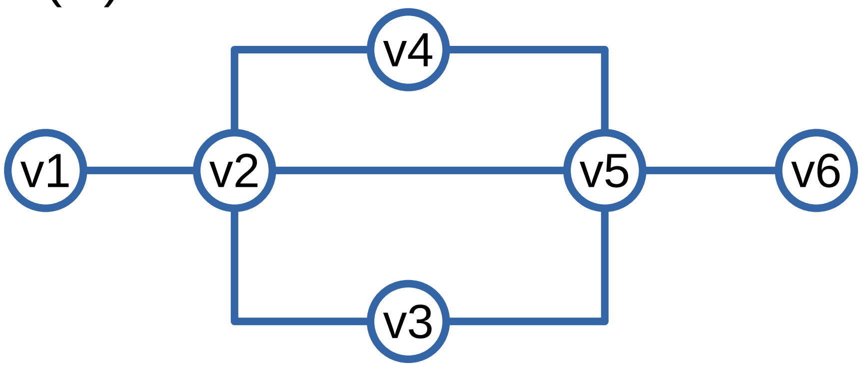
- Exemplos:
  Conjuntos independentes:
  {v1,v5}, {v3,v4}, {v3,v4,v6}
  Conjuntos independentes maximais:
  {v1,v5},{v2,v6}, {v3,v4}, {v1,v3,v6},{v1,v4,v6}…, {v1,v3,v4,v6}
  Conjunto independente máximo:
  {v1,v3,v4,v6}



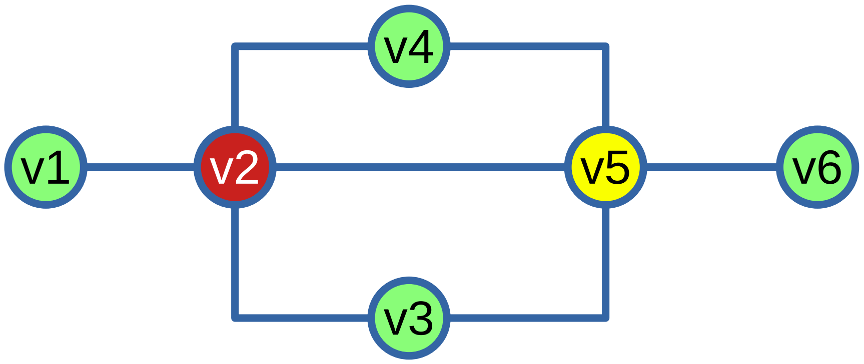
Coloração de Vértices

O número de independência, notação **α(G)** é a cardinalidade de um conjunto independente máximo de vértices do grafo;

- No caso abaixo, α(G)=4.



Importante:
Os vértices de um conjunto independente podem receber a mesma cor;

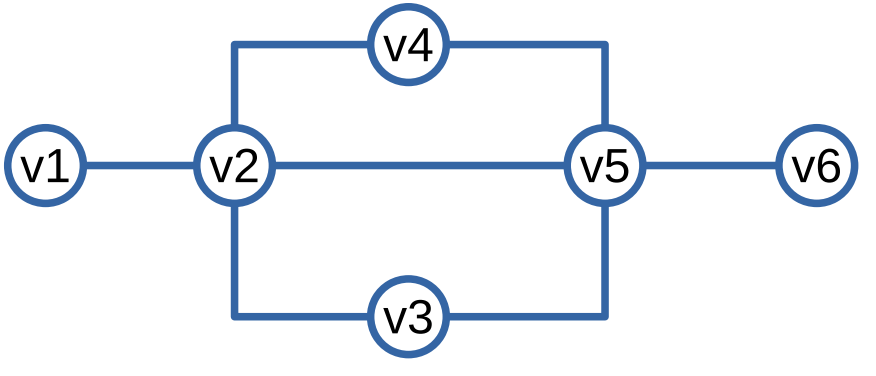


Coloração de Vértices

Uma noção complementar à do conjunto independente é a noção de clique:

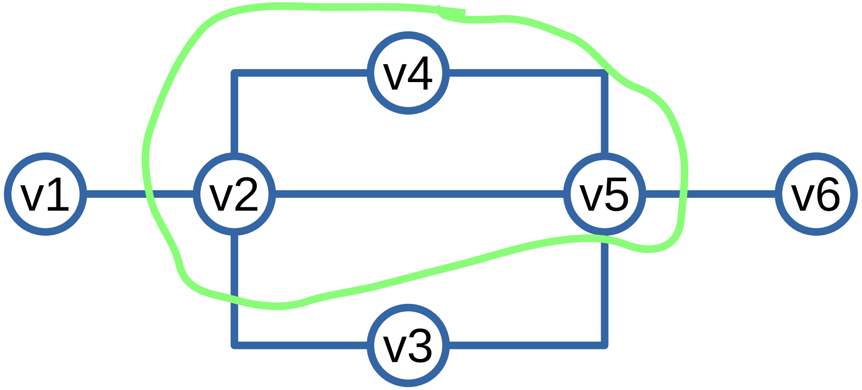
- Uma clique de G é um subgrafo induzido de G que seja completo;

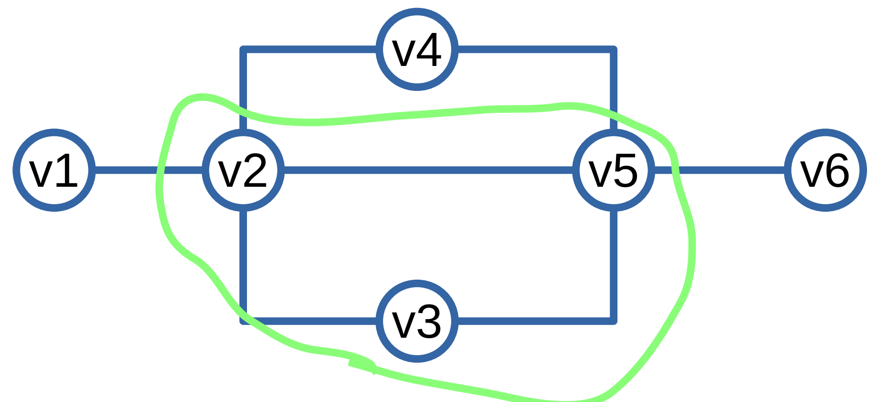
- Exemplos: {v1,v2}, {v5,v6} ou {v2,v4,v5}



Coloração de Vértices

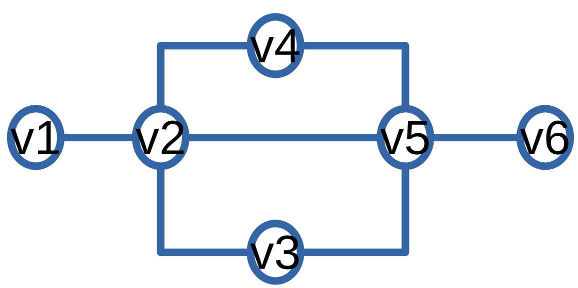
A cardinalidade (número de vértices) da clique máxima recebe a designação de **ω(G)** (ou número da clique de G). No exemplo abaixo: ω(G)=3;

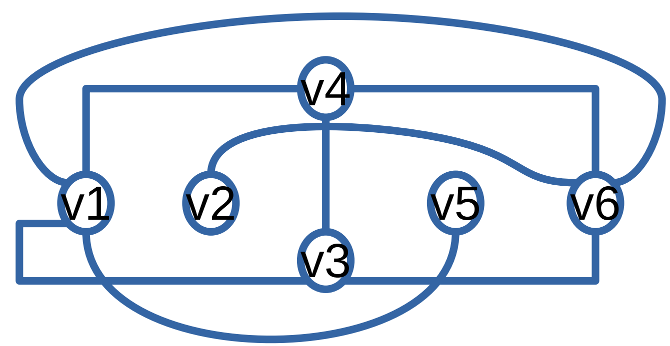




Importante:

- O número cromático da clique é igual a ω(G);
- Uma clique em G corresponde a um conjunto independente em $\overline{G}$, isto é, ω(G) = α($\overline{G}$).





Coloração de Vértices

$$minorante \leq \chi(G) \leq majorante$$

Lembrando que $\Delta(G)$ corresponde ao grau máximo de um vértice. teremos:

- Minorante, limite inferior do $\chi(G)$:
  Se H é um subgrafo de G, então $\chi(H) \leq \chi(G)$.

  Uma clique é um subgrafo, portanto, um limite inferior para $\chi(G)$ é o tamanho da clique máxima de G: $\omega(G) \leq \chi(G)$

- Majorante, limite superior de $\chi(G)$: para um grafo G conexo e simples, teremos que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

- Portanto, genericamente: $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

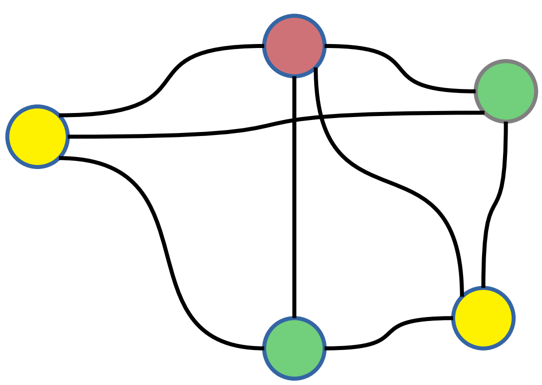
- Se G é um K_n então: $\omega(K_n)=n$; $\Delta(K_n) + 1= n$, $\chi(K_n) = n$

Coloração de Vértices

Atenção:

Os limites *ω(G) ≤ χ(G) ≤ Δ(G) + 1* são referenciais “folgados” para χ(G), eventulamente é possível delimitar χ(G) com mais precisão.

Exemplo: para o grafo abaixo *3 ≤ χ(G) ≤ 5*, porém, ainda que dentro desse intervalo, via algoritmo guloso teremos exatamente *χ(G) = 3*



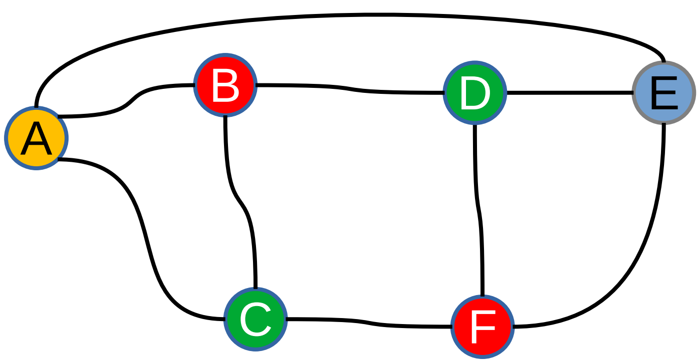
$$[\omega(G) = 3] \leq \chi(G) \leq [\Delta(G) + 1 = 5]$$
$$\text{via algoritmo guloso: } \chi(G) = 3$$

Coloração de Vértices

Atenção:

Os limites $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ são referenciais “folgados” para χ(G), portanto, o limite inferior $\omega(G)$ não necessariamente indica o valor exato do número cromático, por exemplo:

- Para o grafo abaixo $3 \leq \chi(G) \leq 4$, porém, via algoritmo guloso teremos exatamente $\chi(G) = 4$, ou seja, no limite superior do intervalo.



$$[\omega(G) = 3] \leq \chi(G) \leq [\Delta(G) + 1 = 4]$$
$$\text{via algoritmo guloso: } \chi(G) = 4$$

Coloração de Vértices

Determine $\chi(G)$, $\omega(G)$, $\Delta(G)$ e aplique o algoritmo guloso para os seguintes casos:

Árvore: T_n
Completo: K_n
Grafo bipartido $K_{m,n}$
Grafo bipartido $K_{m,n,p,q}$
Ciclo: C_{2i} $i \in \mathbb{N}-\{0\}$
Ciclo: C_{2i+1}
Roda: W_n
Estrela: S_n
Cubo: Q_n
Petersen: Q_n

Coloração de Vértices

Uma aplicação imediata é a organização de eventos ou alocação de tarefas/recursos:

Outra aplicação clássica de coloração é o ***problema dos exames***. A tabela abaixo mostra a alocação de um grupo de alunos aos exames de recuperação que eles devem prestar em um colégio:

Alunos→ Disciplinas ↓	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Matemática	X							X				X			X	
Português	X			X							X					X
Inglês						X	X			X					X	
Geografia				X	X		X		X				X			
História			X							X		X		X		X
Física			X		X								X			
Química		X						X	X		X			X		
Biologia		X				X										

Duas disciplinas só podem ter exames realizados simultaneamente se não envolverem alunos em comum.

Vamos construir um grafo com os vértices **{M, P, I, G, H, F, Q, B}**; dois vértices estarão ligados se tiverem um aluno em comum.

Coloração de Vértices

Outra aplicação clássica de coloração é o ***problema dos exames***. A tabela abaixo mostra a alocação de um grupo de alunos aos exames de recuperação que eles devem prestar em um colégio:

Alunos→ ***Disciplinas*** **↓**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Matemática	X							X				X			X	
Português	X			X							X					X
Inglês						X	X			X					X	
Geografia				X	X		X		X				X			
História			X							X		X		X		X
Física			X		X								X			
Química		X						X	X		X			X		
Biologia		X				X										

Duas disciplinas só podem ter exames realizados simultaneamente se não envolverem alunos em comum.

Vamos construir um grafo com os vértices **{M, P, I, G, H, F, Q, B}**; dois vértices estarão ligados se tiverem um aluno em comum.

Solução:

PENSE NA RELAÇÃO ENTRE O CONJUNTO INDEPENDENTE DE VÉRTICES QUE MODELA A COLISÃO DE HORÁRIOS E A COLORAÇÃO DESSES VÉRTICES.

Coloração de Vértices

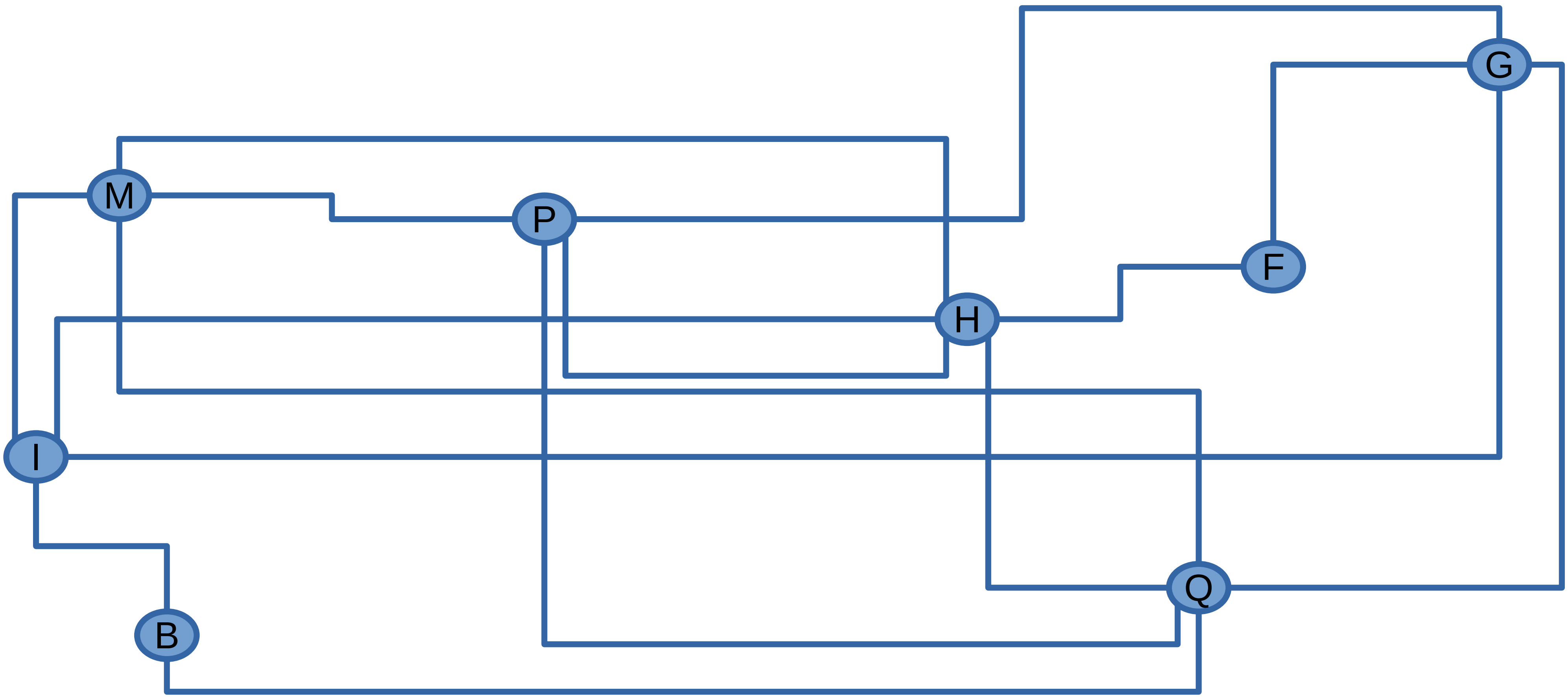
Outra aplicação clássica de coloração é o ***problema dos exames***. A tabela abaixo mostra a alocação de um grupo de alunos aos exames de recuperação que eles devem prestar em um colégio:

Alunos→ Disciplinas ↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Matemática	X							X				X			X	
Português	X			X							X					X
Inglês						X	X			X					X	
Geografia				X	X		X		X				X			
História			X							X		X		X		X
Física			X		X								X			
Química		X						X	X		X			X		
Biologia		X				X										

Duas disciplinas só podem ter exames realizados simultaneamente se não envolverem alunos em comum.

Vamos construir um grafo com os vértices **{M, P, I, G, H, F, Q, B}**; dois vértices estarão ligados se tiverem um aluno em comum.

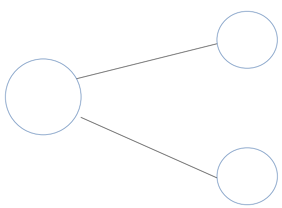
-Vértice: disciplina
-Aresta: pelo menos um aluno em comum entre o par de vértices
- Precisamos de um conjunto de vértices sem alunos em comum;
- Buscaremos conjuntos independentes de vértices, via coloração.

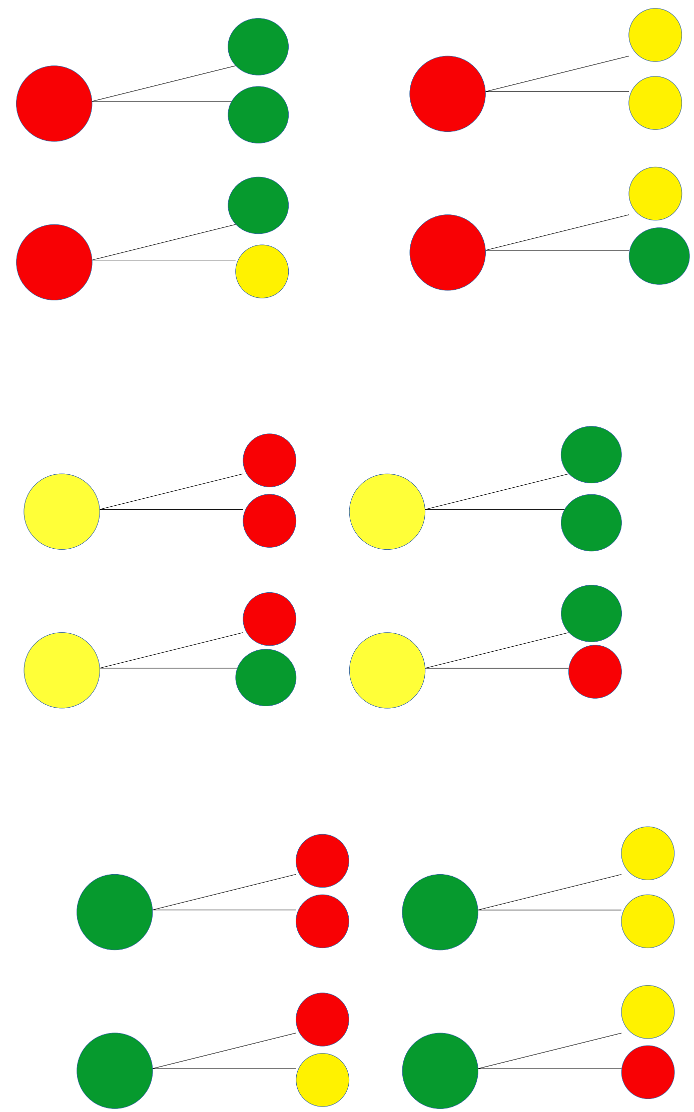


Coloração de Vértices

Polinômio cromático

Se G é uma árvore de 3 vértices (abaixo), supondo a disponibilidade de 3 cores C={verde, vermelho, amarelo}, teremos as seguintes possibilidades de coloração:





Coloração de Vértices

Uma adaptação do princípio da enumeração é usada no estabelecimento do chamado polinômio cromático de um grafo G ou função cromática $P_G(k)$.

$P_G(k)$ contabiliza o número de colorações possíveis do grafo em função do número de cores (k).

Uso do polinômio cromático $P_G(k)$ para testar colorações de k cores em um grafo G:

Se $k < \chi(G) \Rightarrow P_G(k) = 0$;

Se $k \geq \chi(G) \Rightarrow P_G(k) > 0$;

$\chi(G) = \min\{k : P_G(k) > 0\}$;

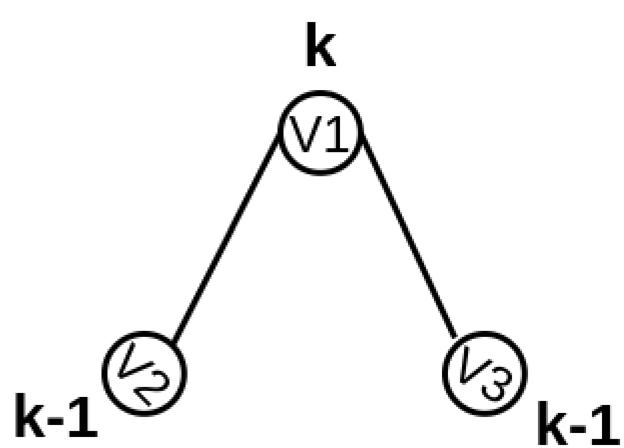
Se G é planar e simples, então $P_G(4) > 0$

Coloração de Vértices

Polinômio cromático

Seja G um grafo simples e $\mathbf{P_G(k)}$ o seu polinômio, determine a quantidade de possíveis diferentes colorações de vértices de G com k-cores, de forma que dois vértices adjacentes não apresentem a mesma cor.

Por exemplo, se G é uma árvore (abaixo), o vértice central pode ser colorido de k maneiras, determinando que os vértices folhas possam ser coloridos de k-1 formas: $P_G(k) = k\,(k-1)^2$

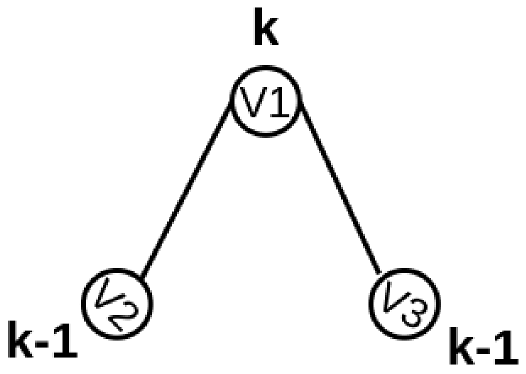


Coloração de Vértices

Polinômio cromático

Por exemplo, se G é uma árvore (abaixo), o vértice central pode ser colorido de k maneiras, determinando que os vértices folhas possam ser coloridos de k-1 formas: $P_G(k)= k\ (k-1)^2$

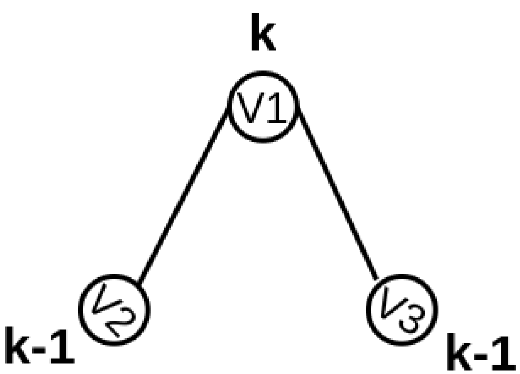
- Supondo k=3 cores → $P_G(k)= k\ (k-1)^2= 3 \cdot 4 =12$ possíveis colorações



c1 c2 c3; c1 c3 c2; c2 c1 c3; c2 c3 c1;c3,c1,c2; c3 c2 c1
c1 c2 c2; c1 c3 c3; c2 c1 c1; c2 c3 c3; c3 c1 c1; c3 c2 c2

Ou seja 12 maneiras de colorir com k=3 cores

Coloração de Vértices



Lembre-se: “**k**” é sempre uma quantidade de cores disponíveis (é um **inteiro positivo**!)

- Supondo k=2 cores → $P_G(k) = k\,(k-1)^2 = 2$
  2 maneiras de colorir com k=2 cores
  possíveis colorações: “c1 c2 c2” ou “c2 c1 c1”

- Supondo k=3 cores → $P_G(k) = k\,(k-1)^2 = 12$

- k=1 cor → $P_G(k) = k\,(k-1)^2 = 0$, k=1 só é válido para um grafo nulo

Importante:

Se $k < \chi(G) \Rightarrow P_G(k) = 0$;

Se $k \geq \chi(G) \Rightarrow P_G(k) > 0$;

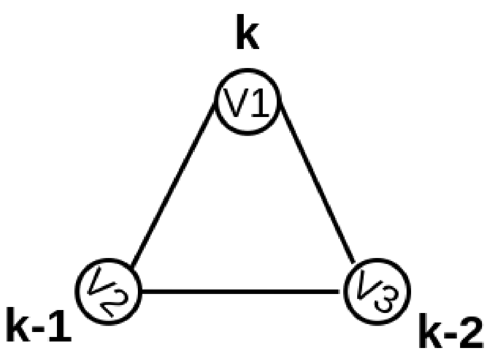
$\chi(G) = \min\{k : P_G(k) > 0\}$;

Se G é planar e simples, então $P_G(4) > 0$

Coloração de Vértices

Polinômio cromático

Similarmente, no caso de $G = K_3$ (abaixo), o vértice central pode ser colorido de k maneiras, determinando que os vértices folhas possam ser coloridos de k-1 e k-2 formas, nesse caso, $P_G(k) = k\,(k-1)\,(k-2)$



k=3 cores → $P_G(k) = k(k-1)(k-2) = 3.2.1 = 6$ → $P_G(k) > 0$

com as possíveis colorações:
c1 c2 c3; c1 c3 c2; c2 c1 c3; c2 c3 c1; c3,c1,c2; c3 c2 c1

k=4 cores → $P_G(k) = 4.3.2 = 24$ → $P_G(k) > 0$

k=1 cor → $P_G(k) = 0$

k=2 cor → $P_G(k) = 0$

$\boldsymbol{\chi(G) = \min\{k : P_G(k) > 0\}} = \min\{3,4,5\ldots\} = 3;$

Coloração de Vértices

Polinômio cromático

É possível estender esses resultados para certas categorias:

$P_G(k) = k(k - 1)^{n-1}$ se G é uma árvore (ou um caminho) com n vértices.

$P_G(k) = k\,(k - 1)\,(k - 2) \cdot \cdot \cdot (k - n + 1)$ se G é um grafo completo com n vértices (K_n).

$P_G(k) = (k - 1)^n + (-1)^n\,(k-1)$ se G for o grafo ciclo C_n

Coloração de Vértices

Normalmente é muito difícil obter a função cromática por inspeção do grafo, sendo mais prático utilizar uma espécie de desmembramento metódico de redução de G por remoção/contração de arestas.

Isso se repete até se conseguir árvore(s) e/ou grafo(s) completo(s), pois já conhecemos $P_G(k)$ para esses tipos de grafos.

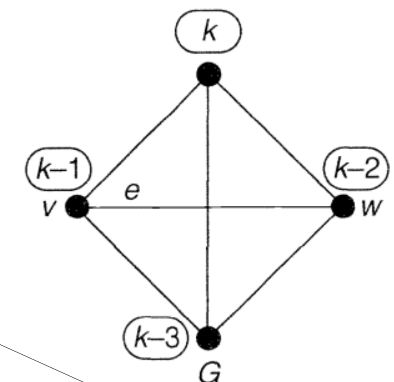
O teorema abaixo nos ajuda nisso, ele indica um sistema para a obtenção da função cromática de um grafo simples em termos de funções cromáticas de grafos nulos (Wilson):

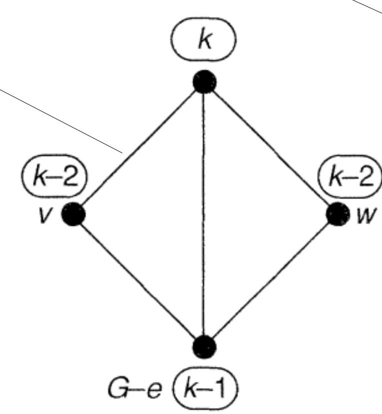
Seja G um grafo simples, *G-e* o grafo obtido pela remoção da aresta "*e*" e G/e o grafo obtido pela contração da aresta "*e*".
Então, $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$

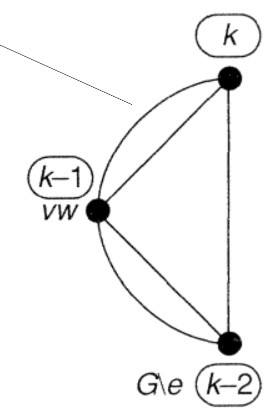
Coloração de Vértices

$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$

$=[k(k-1)(k-2)^2] - [k(k-1)(k-2)] =$







Coloração de Vértices

$P_G(k)$ possui grau $n=|V|$ para $G(V,E)$ simples;

Seguindo no processo de redução obtém-se apenas um grafo nulo com *n* Vértices:

$$P_G(k)= a_0k^n - a_1k^{n-1} + a_2k^{n-2} - a_3k^{n-3} + \cdot\cdot\cdot - a_ik^2 + a_{i+1}k,$$

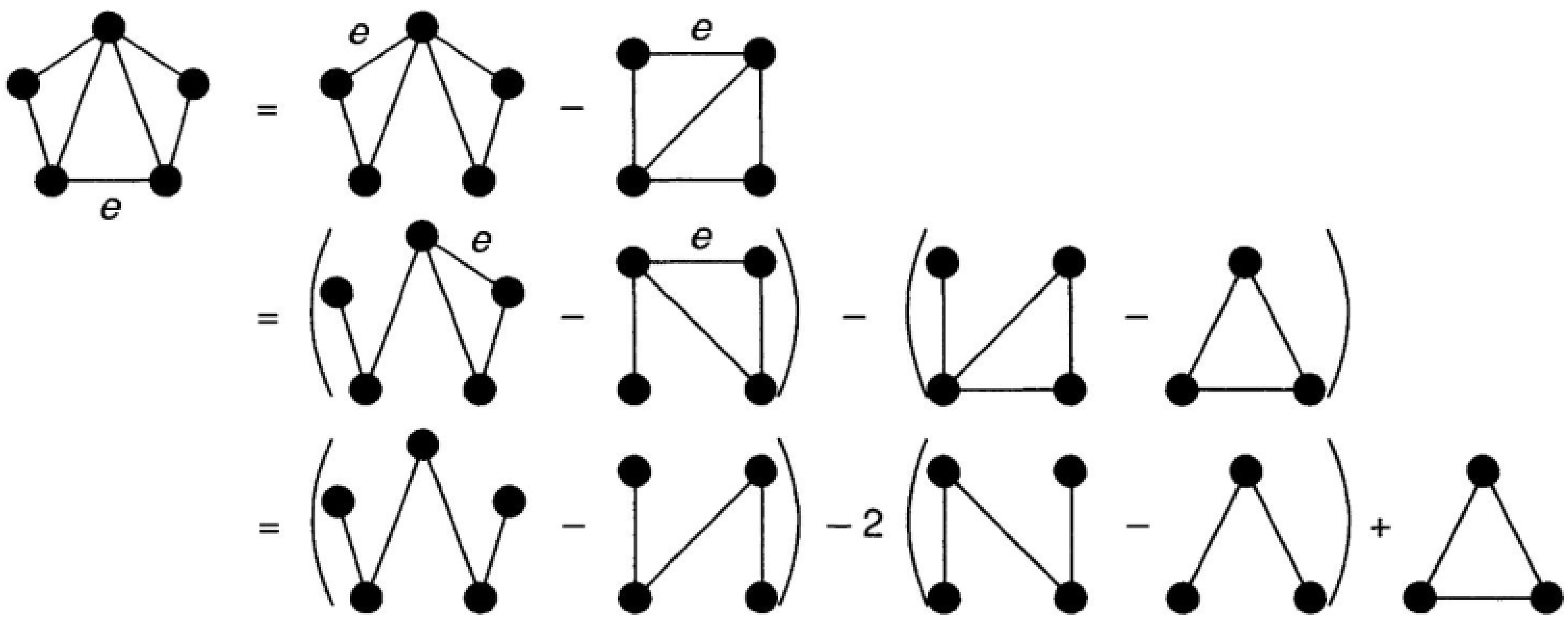
Onde: $a_0 = 1$ e $a_1 = m = |E|$

Na prática, não é necessário levar o processo de redução até se obter apenas grafos nulos.

Basta reduzir até que se obtenha grafos para os quais o polinômio cromático seja conhecido, como, por exemplo, árvores e grafos completos.

Coloração de Vértices

Tendo isto em mente, obtemos (vamos ignorar arestas paralelas que eventualmente surjam)



Logo,

$$
\begin{aligned}
P_G(k) &= k(k-1)^4 - 3k(k-1)^3 + 2k(k-1)^2 + k(k-1)(k-2) \\
&= k^5 - 7k^4 + 18k^3 - 20k^2 + 8k.
\end{aligned}
$$

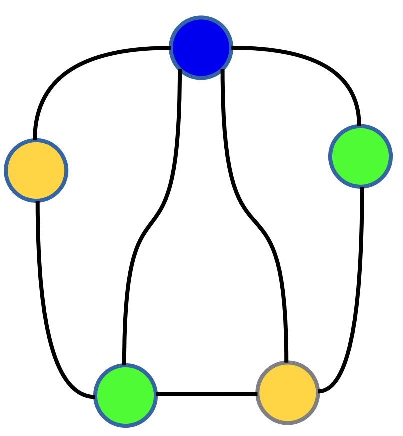
Coloração de Vértices

Continuando o exercício anterior:

$P_G(k) = k^5 - 7k^4 + 18k^3 - 20k^2 + 8k$, temos

$P_G(0) = 0$;
$P_G((1) = 1 - 7 + 18 - 20 + 8 = 0$;
$P_G((2) = 32 - 112 + 144 - 80 + 16 = 0$;
$P_G((3) = 243-567+486-180+24=6$;
$P_G((4) = 1024-1792+1152-320+32=96$

$\chi(G) = \min\{k : P_G(k) > 0\}$ $= \min\{3,4,\ldots\} = 3$; ou seja, necessitamos de pelo menos 3 cores para colorir este grafo



Coloração de Vértices

Continuando o exercício anterior:

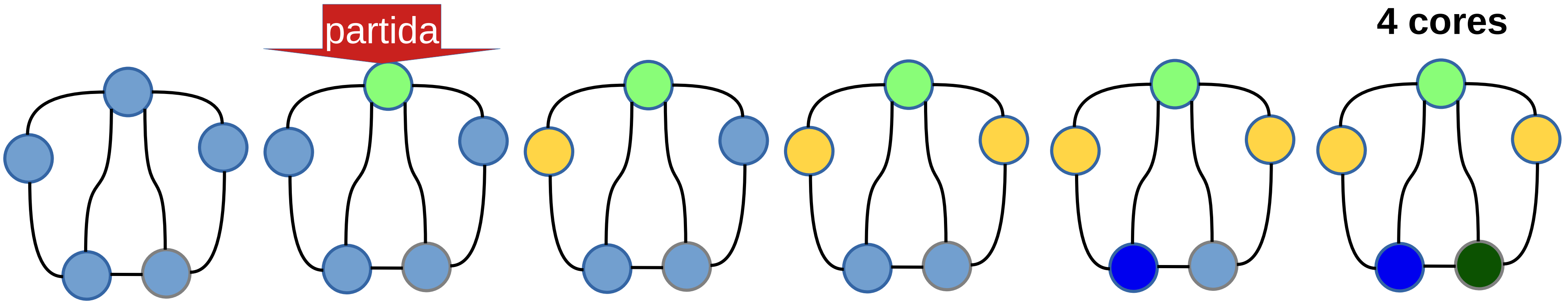
- Limites para $\chi(G)$ do grafo do exercício
  - $\omega(G) \leq \chi(G) \leq (\Delta(G) + 1)$
    - no caso:
      $\omega(G)=3$
      $\Delta(G) + 1 = 5$
  - $3 \leq \chi(G) \leq 5$

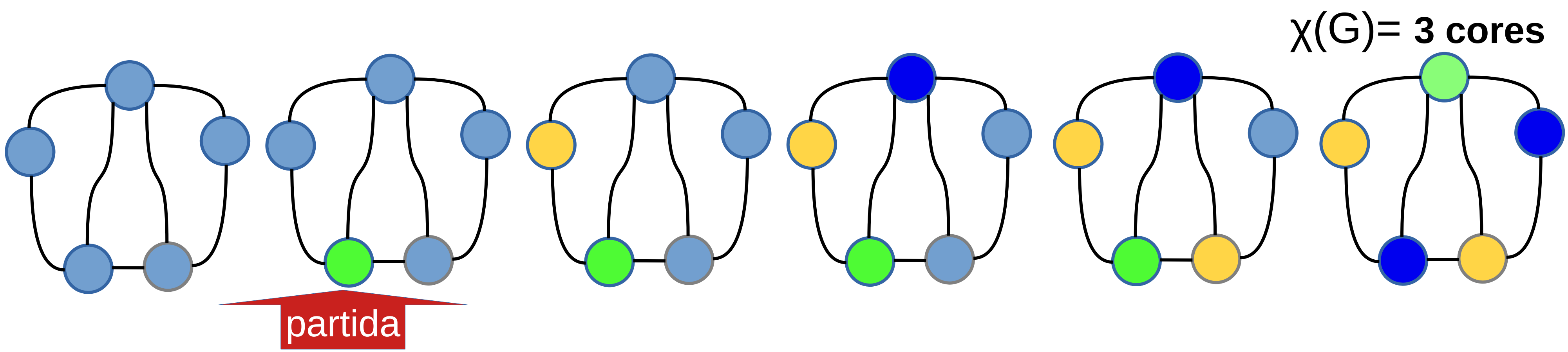
Portanto, o valor $\chi(G)$= 3 cores obtido via polinômio cromático está dentro dos limites teóricos para o grafo em questão.

Coloração de Vértices

Note que, a depender das escolhas de vértices, a aplicação do algoritmo guloso pode levar a um resultado não ideal

- Exemplo: guloso considerando c1 c2 c3 c4





1. Determine os limites inferior e superior, o número cromático $\chi(G)$. EG). Execute uma coloração mínima para cada um dos grafos e verifique se você conseguiu o valor de $\chi(G)$:

a) K_7

b) $K_{3,5}$

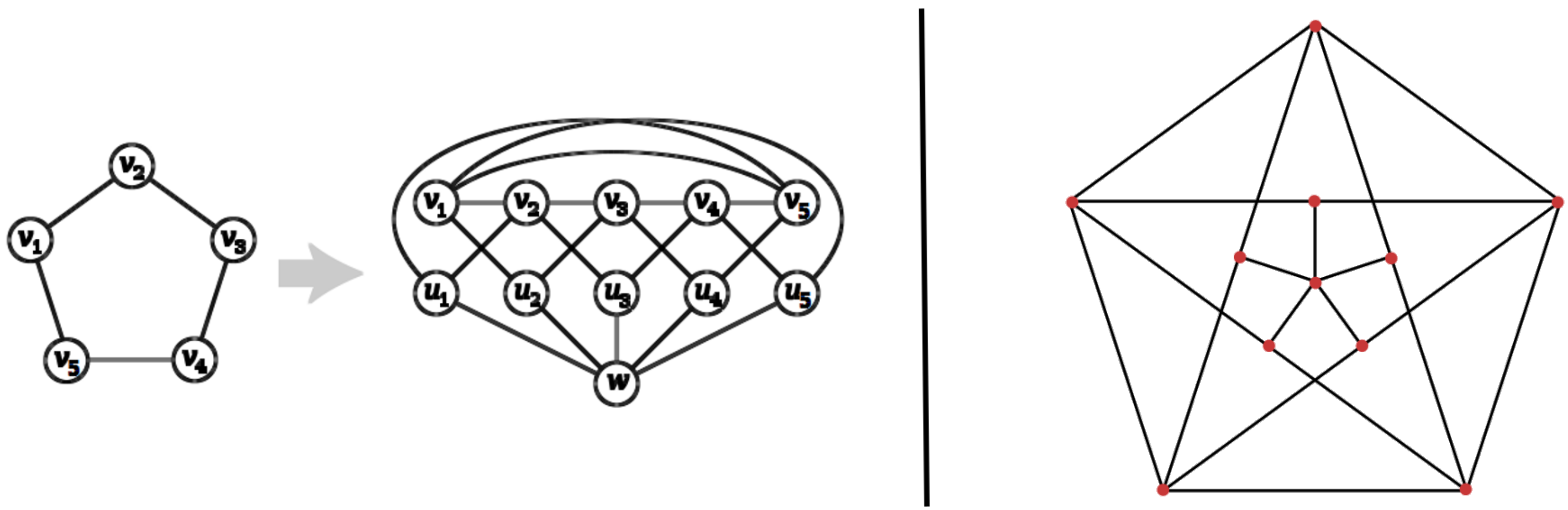
c) C_9

d) Petersen

e) Cubo Q_k

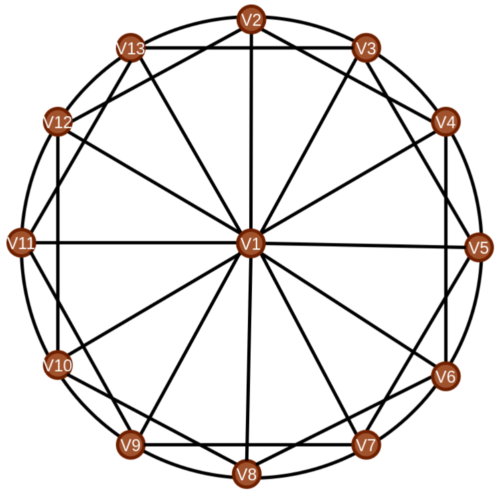
f) Completo tripartite $K_{R,S,T}$

g) O grafo G é conhecido com grafo da construção de Mycielski/Grötzsch, a construção sempre gera grafos livres de triângulos (K_3), na figura temos duas configurações isomorfas desse grafo construído a partir de C_5.



Grafo Mycielski construído a partir de C_5. À direita uma outra versão isomorfa do mesmo grafo.

h) Um grafo com 14 vértices e repetições de K4.



Grafo com 14 vértices contendo repetições de K4.

2) Determine χ(G), ω(G), Δ(G) e tente encontrar uma relação entre os valores para os seguintes casos:

Uma árvore

Um grafo caminho (P_n)

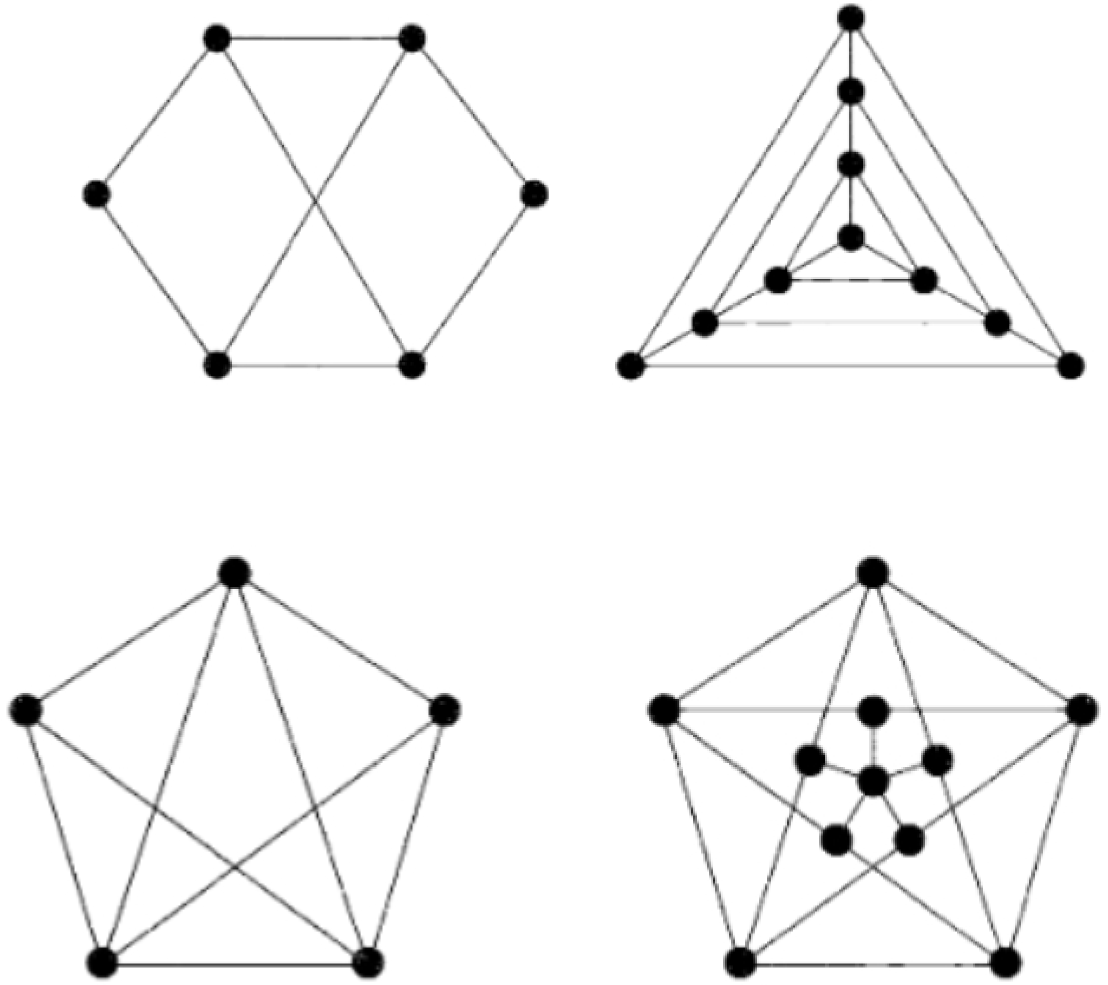
K_n

Grafo bipartido $K_{m,n}$

C_{2i} $i \in \mathbb{N}-\{0\}$

C_{2i+1}

3) Determine os números cromáticos χ(G), para:



4) Prove usando indução no número de vértices (n), que se G é um grafo simples com grau máximo Δ(G), então χ(G) ≤ Δ(G)+1

5) Prove que para todo grafo G(V,E), com m=|E| temos o seguinte majorante para o número cromático: $$\chi(G) \leq 1/2 + \sqrt{2m + 1/4}$$

Dica: a soma dos graus de um grafo é igual a 2m, particularmente, a soma dos graus de um Kn = n(n-1)
Uma das raízes será: $$\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{8m+1}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{8m}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

6) Uma tabela de horários de aulas é exibida abaixo. Considerando que alguns alunos pretendem fazer matrícula em diferentes disciplinas, algumas delas não podem coincidir. Na tabela, as marcações (asterisco) representam os pares de disciplinas que não podem coincidir horários. Quantos períodos de aulas são necessários para atender a todas as disciplinas contemplando o interesse dos alunos?

	a	b	c	d	e	f	g
a		*	*	*			*
b	*		*	*	*		*
c	*	*		*		*	
d	*	*	*			*	
e		*					
f			*	*			*
g	*	*				*	

7) Há uma conferência científica anual com a organização de encontros de 10 comitês para debates, os comitês são identificados por letras de “A” a “J”. Os membros participantes estão inscritos em diferentes comitês e identificados pelo respectivo número de crachá:

A={1,2,3,4}
B={1,6,7}
C={3,4,5}
D={2,4,7,8,9,10}
E={6,9,12,14}
F={5,8,11,13}
G={10,11,12,13,15,16}
H={14,15,17,19}
I={13,16,17,18}
J={18,19}

Os inscritos exigem participar dos comitês nos quais se inscreveram. Dessa forma, dois ou mais comitês que apresentem intersecção de nomes na lista de inscritos não podem ser realizados no mesmo horário. Quantos horários distintos (sem sobreposição na lista de inscritos) serão necessários e quais os comitês que serão alocados a cada horário?

8) Escreva os polinômios cromáticos diretamente para e verifique diferentes valores de k-coloração:

lembre-se:

“k” é uma quantidade inteira positiva:

$$k < \chi(G) \Rightarrow P_G(k) = 0;$$

$$k \geq \chi(G) \Rightarrow P_G(k) > 0;$$

$\chi(G) = \min\{k : P_G(k) > 0\};$

a) C_4

b) K_6

c) $K_{1,5}$

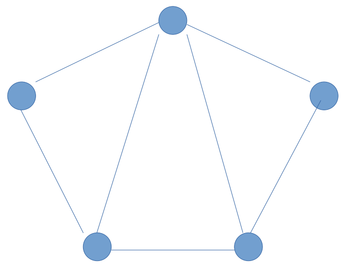
d) $K_{2,5}$

e) $K_{2,s}$

9) Para os casos abaixo descritos, escreva os polinômios cromáticos pela aplicação do teorema que aplica a redução do grafo por remoção e contração de aresta: $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$

a) K_4

b)



BOAVENTURA NETTO , P. O. Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos. Edgard Blucher, SP, quinta edição.

Cardoso, DM; Szymański, J.; Rostami, M. Matemática Discreta Combinatória, Teoria dos Grafos e Algoritmos.
https://ria.ua.pt/handle/10773/4448

SZWARCFITER, J. L. Grafos e Algoritmos Computacionais. Campus, 1986.

WILSON, R.J. Introduction to Graph Theory. John Wiley & Sons Inc., 1985.
https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/wilsongraph.pdf