LMA0001 – Lógica Matemática
Aula 07
Consequência Lógica

Karina Girardi Roggia
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

2020

Consequência lógica

Um dos objetivos da lógica é identificar quando podemos afirmar novos fatos com base em fatos já conhecidos.

A lógica, inicialmente, foi desenvolvida como e estudo da argumentação. De como uma conclusão pode ser dada a partir de premissas.

Em outras palavras, quando uma fórmula é consequência de outra fórmula ou de um conjunto de fórmulas (também chamado **teoria**)?

Dada a teoria $\Gamma = \{A, B, C, \ldots\}$, usamos a sintaxe

$$\Gamma \vDash X$$

para dizer X *é consequência lógica da teoria* Γ. Caso contrário, escrevemos $\Gamma \nvDash X$.

Notação:

1. Por conveniência, é comum omitirmos $\{\}$ quando descrevemos Γ:

$$\{A, B, C\} \models X \qquad = \qquad A, B, C \models X$$

2. Quando queremos aumentar um Γ já existente, utilizamos uma vírgula para denotar união de conjuntos:

$$\Gamma \cup \{D\} \models X \qquad = \qquad \Gamma, D \models X$$

3. Quando uma valoração $\mathcal{V}$ satisfaz **todas** as fórmulas de Γ, escrevemos que $\mathcal{V}$ satisfaz Γ, ou então

$$\mathcal{V}(\Gamma) = 1$$

Nota: assumimos que $\mathcal{V}(\varnothing) = 1$.

Na lógica proposicional, temos

$$\Gamma \vDash X$$

se, e somente se,

toda valoração que satisfaz Γ também satisfaz X.

Note que a definição de consequência lógica é dada em termos de valorações e satisfazibilidade.

Podemos usar o método da tabela-verdade para confirmar ou refutar $\Gamma \vDash X$.

Exemplo 1

Testaremos a afirmação $p \vee q \to r \vDash p \to r$.

Exemplo 1

Testaremos a afirmação $p \vee q \to r \vDash p \to r$.

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee q \to r$	$p \to r$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Sempre que $p \vee q \to r$ é satisfeito, $p \to r$ também é: **afirmação válida!**

Exemplo 1

Testaremos a afirmação $p \vee q \rightarrow r \vDash p \rightarrow r$.

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
0	0	0	0	**1**	**1**
0	0	1	0	**1**	**1**
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	**1**	**1**
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	**1**	**1**
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	**1**	**1**

Exemplo 2

Testaremos a afirmação $p \wedge q \to r \vDash p \to r$.

Exemplo 2

Testaremos a afirmação $p \land q \to r \vDash p \to r$.

p	q	r	$p \land q$	$p \land q \to r$	$p \to r$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Exemplo 2

Testaremos a afirmação $\cancel{p \wedge q \rightarrow r \models p \rightarrow r}$.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	**1**	**0**
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Problema, pois valoração $p = 1, q = 0, r = 0$ satisfaz $p \wedge q \rightarrow r$ mas não satisfaz $p \rightarrow r$: **afirmação inválida!**

Teorema da dedução

Pela definição de consequência, percebam que há similaridades entre a afirmação $A \vDash B$ e a implicação $A \to B$.

O seguinte teorema estabelece formalmente esta similaridade:

Teorema da dedução:

$$\Gamma, A \vDash B \qquad \text{se, e somente se} \qquad \Gamma \vDash A \to B$$

Prova: temos que mostrar que obtemos a afirmação da direita a partir da esquerda, e vice-versa.

Prova ("ida")

1. Supomos que $\Gamma, A \vDash B$.

Prova (“ida”)

1. Supomos que $\Gamma, A \models B$.

2. Considere uma valoração $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}(\Gamma) = 1$.

Prova (“ida”)

1. Supomos que $\Gamma, A \vDash B$.
2. Considere uma valoração $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}(\Gamma) = 1$.
3. Dois casos possíveis:
   - $\mathcal{V}(A) = 0$.
   - $\mathcal{V}(A) = 1$.

Prova ("ida")

1. Supomos que $\Gamma, A \vDash B$.
2. Considere uma valoração $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}(\Gamma) = 1$.
3. Dois casos possíveis:
   - $\mathcal{V}(A) = 0$. Portanto, $\mathcal{V}(A \to B) = 1$, pela tabela da implicação.
   - $\mathcal{V}(A) = 1$.

Prova (“ida”)

1. Supomos que $\Gamma, A \vDash B$.
2. Considere uma valoração $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}(\Gamma) = 1$.
3. Dois casos possíveis:
   - $\mathcal{V}(A) = 0$. Portanto, $\mathcal{V}(A \rightarrow B) = 1$, pela tabela da implicação.
   - $\mathcal{V}(A) = 1$. Portanto, $\mathcal{V}(\Gamma, A) = 1$.

Prova ("ida")

1. Supomos que $\Gamma, A \vDash B$.

2. Considere uma valoração $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}(\Gamma) = 1$.

3. Dois casos possíveis:

    - $\mathcal{V}(A) = 0$. Portanto, $\mathcal{V}(A \to B) = 1$, pela tabela da implicação.
    - $\mathcal{V}(A) = 1$. Portanto, $\mathcal{V}(\Gamma, A) = 1$. Como $\Gamma, A \vDash B$, temos que $\mathcal{V}(B) = 1$.

Prova ("ida")

1. Supomos que $\Gamma, A \vDash B$.
2. Considere uma valoração $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}(\Gamma) = 1$.
3. Dois casos possíveis:
   - $\mathcal{V}(A) = 0$. Portanto, $\mathcal{V}(A \to B) = 1$, pela tabela da implicação.
   - $\mathcal{V}(A) = 1$. Portanto, $\mathcal{V}(\Gamma, A) = 1$. Como $\Gamma, A \vDash B$, temos que $\mathcal{V}(B) = 1$. Finalmente, $\mathcal{V}(A \to B) = 1$, pela tabela da implicação.

Prova ("ida")

1. Supomos que $\Gamma, A \vDash B$.

2. Considere uma valoração $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}(\Gamma) = 1$.

3. Dois casos possíveis:

   - $\mathcal{V}(A) = 0$. Portanto, $\mathcal{V}(A \to B) = 1$, pela tabela da implicação.
   - $\mathcal{V}(A) = 1$. Portanto, $\mathcal{V}(\Gamma, A) = 1$. Como $\Gamma, A \vDash B$, temos que $\mathcal{V}(B) = 1$. Finalmente, $\mathcal{V}(A \to B) = 1$, pela tabela da implicação.

4. Portanto, temos $\Gamma \vDash A \to B$.

Prova ("volta")

1. Supomos que $\Gamma \vDash A \rightarrow B$.

Prova ("volta")

1. Supomos que $\Gamma \vDash A \to B$.
2. Considere uma valoração $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}(\Gamma) = \mathcal{V}(A) = 1$.

Prova ("volta")

1. Supomos que $\Gamma \vDash A \to B$.
2. Considere uma valoração $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}(\Gamma) = \mathcal{V}(A) = 1$.
3. Assuma (para contradição) que $\mathcal{V}(B) = 0$.

Prova (“volta”)

1. Supomos que $\Gamma \vDash A \to B$.
2. Considere uma valoração $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}(\Gamma) = \mathcal{V}(A) = 1$.
3. Assuma (para contradição) que $\mathcal{V}(B) = 0$.
4. Pela tabela da implicação, $\mathcal{V}(A \to B) = 0$.

Prova ("volta")

1. Supomos que $\Gamma \vDash A \to B$.

2. Considere uma valoração $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}(\Gamma) = \mathcal{V}(A) = 1$.

3. Assuma (para contradição) que $\mathcal{V}(B) = 0$.

4. Pela tabela da implicação, $\mathcal{V}(A \to B) = 0$. Mas como $\mathcal{V}(\Gamma) = 1$, e temos $\Gamma \vDash A \to B$ pela suposição 1, então $\mathcal{V}(A \to B) = 1$.

Prova (“volta”)

1. Supomos que $\Gamma \vDash A \to B$.

2. Considere uma valoração $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}(\Gamma) = \mathcal{V}(A) = 1$.

3. Assuma (para contradição) que $\mathcal{V}(B) = 0$.

4. Pela tabela da implicação, $\mathcal{V}(A \to B) = 0$. Mas como $\mathcal{V}(\Gamma) = 1$, e temos $\Gamma \vDash A \to B$ pela suposição 1, então $\mathcal{V}(A \to B) = 1$.

5. Como chegamos a uma **contradição** ao assumir $\mathcal{V}(B) = 0$, esta afirmação está errada, e o correto é afirmar o seu oposto: $\mathcal{V}(B) = 1$.

Prova ("volta")

1. Supomos que $\Gamma \vDash A \to B$.

2. Considere uma valoração $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{V}(\Gamma) = \mathcal{V}(A) = 1$.

3. Assuma (para contradição) que $\mathcal{V}(B) = 0$.

4. Pela tabela da implicação, $\mathcal{V}(A \to B) = 0$. Mas como $\mathcal{V}(\Gamma) = 1$, e temos $\Gamma \vDash A \to B$ pela suposição 1, então $\mathcal{V}(A \to B) = 1$.

5. Como chegamos a uma **contradição** ao assumir $\mathcal{V}(B) = 0$, esta afirmação está errada, e o correto é afirmar o seu oposto: $\mathcal{V}(B) = 1$.

6. Portanto, temos $\Gamma, A \vDash B$.

Prove ou refute as seguintes consequências lógicas, usando tabela-verdade:

1. $\neg q \to \neg p \vDash p \to q$
2. $\neg p \to \neg q \vDash p \to q$
3. $\neg q \to \neg p \vDash p \to q \vee r$
4. $\neg q \to \neg p \vDash p \to q \to r$
5. $\neg(p \wedge q) \vDash \neg p \wedge \neg q$
6. $\neg(p \vee q) \vDash \neg p \wedge \neg q$

Exercícios (2)

As seguintes consequências lógicas refletem métodos de prova famosos, portanto é interessante confirmar sua validade. Mostre que tais afirmações estão corretas através do método da tabela-verdade:

1. *Modus Ponens*: $p \rightarrow q, p \vDash q$
2. *Modus Tollens*: $p \rightarrow q, \neg q \vDash \neg p$
3. *Reductio ad Absurdum* (contradição): $\neg p \rightarrow q, \neg q \vDash p$