Universidade do Estado de Santa Catarina
Centro de Ciências Tecnológicas
Departamento de Matemática

ICD - Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral

Professora Viviane

Combinações de Funções

Conceitos

1. Sejam f e g funções com domínio A e B. Então as funções $f+g, f-g, fg$ e f/g são definidas como seguem:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x) \quad \text{e} \\ \text{dom}(f+g) &= A\cap B; \\ (f-g)(x) &= f(x)-g(x) \quad \text{e} \\ \text{dom}(f-g) &= A\cap B; \\ (fg)(x) &= f(x)g(x) \quad \text{e} \\ \text{dom}(fg) &= A\cap B; \\ (f/g)(x) &= f(x)/g(x) \quad \text{e} \\ \text{dom}(f/g) &= \{x\in A\cap B \mid g(x)\neq 0\}. \end{aligned}$$

2. A partir dos gráficos de f e g na Figura 2, encontramos

   (a) $(f+g)(2) = f(2)+g(2) = 3+5 = 8$

   (b) $(f-g)(2) = f(2)-g(2) = 3-5 = -2$

   (c) $(fg)(8) = f(8)g(8) = 4\cdot 3 = 12$

   (d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(o)}{g(0)} \approx \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

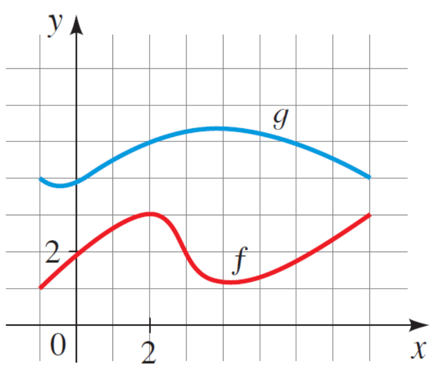
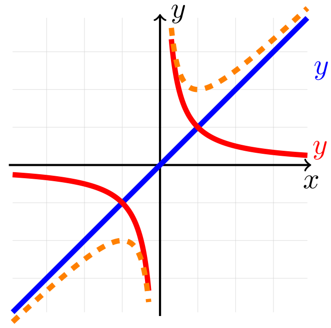


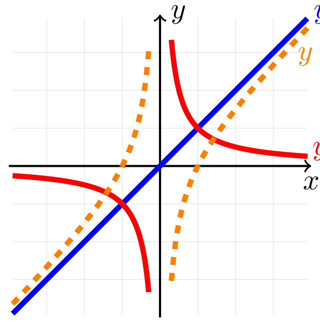
Figura 1: Gráfico de f e g

3. Sejam $f(x)=x$, $g(x)=\text{sen}(x)$ e $n(x)=\frac{1}{x}$. Use o GeoGebra para visualizar os gráficos sobrepostos de:

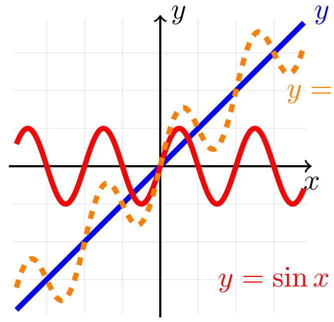
   (a) f, g e $f+n$



   (b) f, n e $f-n$



   (c) f, g e $f+g$



4. Sejam $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ e $g(x)=\sqrt{x}$. Encontre as funções e seus domínios.

(a) $(f+g)(x) = \dfrac{1}{x-2} + \sqrt{x}$ e
$\text{Dom}(f+g) = \{x \mid x \neq 2 \text{ e } x \geq 0\}$.

(b) $(f-g)(x) = \dfrac{1}{x-2} - \sqrt{x}$ e
$\text{Dom}(f+g) = \{x \mid x \neq 2 \text{ e } x \geq 0\}$.

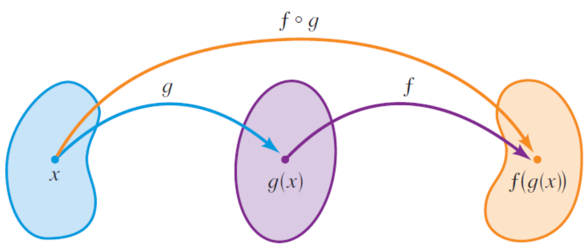
(c) $(fg)(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$ e
$\text{Dom}(f+g) = \{x \mid x \neq 2 \text{ e } x \geq 0\}$.

(d) $(f/g)\ \dfrac{1}{(x-2)\sqrt{x}}$ e
$\text{Dom}(f+g) = \{x \mid x \neq 2 \text{ e } x > 0\}$.

5. Dadas duas funções f e g, a função composta $f \circ g$ (também chamada de **composição** de f e g) é definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

6. O **domínio** de $f \circ g$ é o conjunto de todos os x no domínio de g, de modo que $g(x)$ esteja no imagem de f. Em outras palavras, $(f \circ g)(x)$ está definida sempre que $g(x)$ e $(f(g(x))$ estão definidas. Podemos imaginar $f \circ g$ usando um diagrama de flechas.



7. Por definição, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Se $g(2) = 5$ e $f(5) = 12$, então $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(5) = 12$.

8. Se a regra da função f é "adicione 1" e a regra da função g é "multiplique por 2", então a regra de $f \circ g$ é "multiplique por 2, adicione 1" e a regra de $g \circ f$ é "adicone 1, multiplique por 2."

9. Podemos expressar as funções no exercício anterior algebricamente com $f(x) = x+1, g(x) = 2x, (f \circ g) = 2x+1$ e $(g \circ f)(x) = 2(x+1)$.

10. Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$. Encontre as funções e seus domínios.

(a) $f \circ g = \sqrt{\sqrt{2-x}} = \sqrt[4]{2-x}$ e

$$\begin{aligned}\text{Dom}(f \circ g) &= \{x \mid x - 2 \geq 0\} \\ &= \{x \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2].\end{aligned}$$

(b) $g \circ f = \sqrt{2-\sqrt{x}}$ e

$$\begin{aligned}\text{Dom}(g \circ f) &= \{x \mid 2 - \sqrt{x} \geq 0 \text{ e } x \geq 0\} \\ &= \{x \mid 2 \leq \sqrt{x} \text{ e } x \geq 0\} \\ &= \{x \mid 0 \leq x \leq 4\} = [0, 4].\end{aligned}$$

(c) $f \circ f =$

$$\text{Dom}(f \circ f) = \{x \mid x \geq 0\} = [0, +\infty).$$

(d) $g \circ g =$

$$\begin{aligned}&\text{Dom}(f \circ g) \\ &= \{x \mid 2 - x \geq 0 \text{ e } 2 - \sqrt{2-x} \geq 0\} \\ &= \{x \mid x \leq 2 \text{ e } \sqrt{2-x} \leq 2\} \\ &= \{x \mid x \leq 2 \text{ e } 2 - x \leq 4\} \\ &= \{x \mid x \geq 2 \text{ e } -2 \leq x\} = [-2, 2].\end{aligned}$$

11. Encontre $f \circ g \circ h$ se $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $g(x) = x^{10}$ e $h(x) = \sqrt{3-x}$. Determine o domínio de $f \circ g \circ h$.

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(\sqrt{3-x})) \\ &= f((\sqrt{3-x})^{10}) = f((3-x)^5) \\ &= \frac{(3-x)^5}{(3-x)^5+1}.\end{aligned}$$

A função $(f \circ g \circ h)(x)$ está definida sempre que $h(x) = \sqrt{3-x}$, $(g \circ h)(x) = (3-x)^5$ e $(f \circ g \circ h)(x) = \frac{(3-x)^5}{(3-x)^5+1}$ estão definidas. Assim,

$$\begin{aligned}&\text{Dom}(f \circ g \circ h) \\ &= \{x \mid 3 - x \geq 0 \text{ e } (3-x)^5 + 1 \neq 0\} \\ &= \{x \leq 3 \text{ e } x \neq 4\} = (-\infty, 3].\end{aligned}$$

12. Dada $F(x) = \sqrt[4]{x^2-4}$ determine f e g tais que $(f \circ g)(x) = F(x)$.

Uma das opções é $g(x) = x^2 - 4$ e $f(x) = \sqrt[4]{x}$.

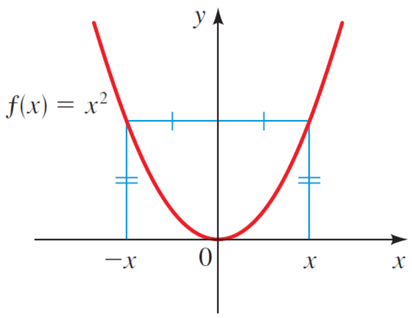
13. Dada $F(x) = (4+\sqrt{x})^9$ determine f, g e h tais que $(f \circ g \circ h)(x) = F(x)$.

Uma das opções é $h(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 4 + x$ e $f(x) = x^9$.

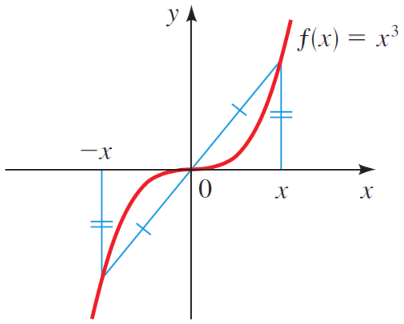
14. Seja f uma função.

   - f é par se $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in \text{dom}(f)$.
   - f é ímpar se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \text{dom}(f)$.

15. O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y. O gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem. Veja os seguintes exemplos:

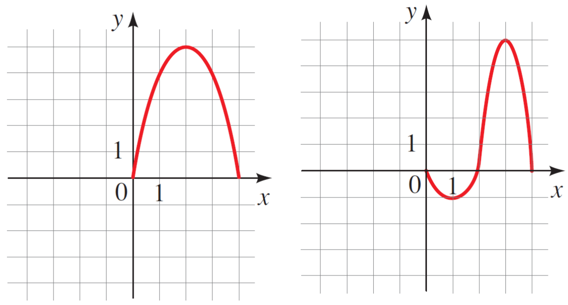


$f(x) = x^2$ é uma função par

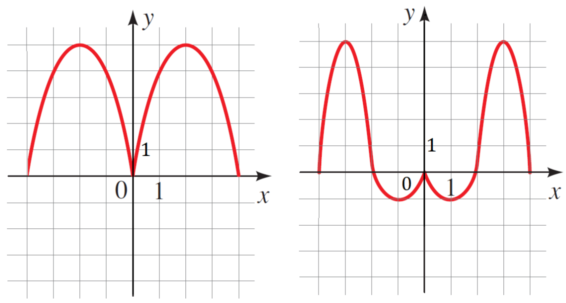


$f(x) = x^3$ é uma função ímpar

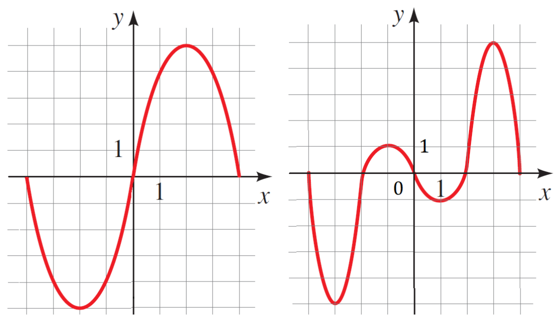
16. O gráfico de uma função definida para $x \geq 0$ é dado. Completo o gráfico para $x < 0$ para fazer (a) uma função par e (b) uma função ímpar.



(a)

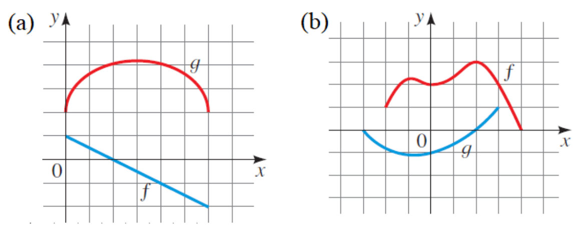


(b)



Habilidades

1. Use a adição gráfica para esboçar o gráfico de $f + g$.



2. Sejam $f(x) = x^2 - 3x + 2$ e $g(x) = 4 - 3x$. Encontre as seguintes funções e seus domínios.

   (a) $f - g$ (c) f/g (e) $g \circ f$
   (b) fg (d) $f \circ g$ (f) $f \circ f$

3. Encontre $f \circ g \circ h$ e seu domínio, em que $f(x) = \sqrt{1-x}$, $g(x) = 1 - x^2$ e $h(x) = 1 + \sqrt{x}$.

4. Dados $f(x) = \dfrac{1-x}{x+1}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ determine a lei das seguintes funções e o seu domínio.

   (a) $h(x) = f \circ g$ (b) $m(x) = f \circ f$

5. Expresse a função na forma $f \circ g$.

   (a) $F(x) = (x-9)^2$
   (b) $G(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$
   (c) $K(x) = |1 - x^3|$

6. Exrpresse a função na forma $f \circ g \circ h$.

   (a) $T(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

(b) $M(x) = (4 + \sqrt[3]{x})^9$
(c) $V(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x} - 1}$

7. Dados $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & \text{se } x \leq 0 \\ 2x^2 + x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$ e $g(x) = x + 3$, determine $f \circ g$ e $g \circ f$.

8. Dados $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1, & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1}, & \text{se } x < 2 \\ 7x - 1, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$, determine $f \circ g$ e $g \circ f$.

9. Suponha que $h = f \circ g$. (a) Se g é uma função par, h é necessariamente par? (b) Se g é ímpar, h é ímpar? (c) E se g é ímpar e f é ímpar? (d) E se g é ímpar e f é par?

10. Mostre que se f e g são funções ímpares, então $(f + g)$ e $(f - g)$ também são funções ímpares.

11. Mostre que se f e g são funções ímpares, então $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$ são funções pares.

12. Seja f uma função. Mostre que a função

$$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$$

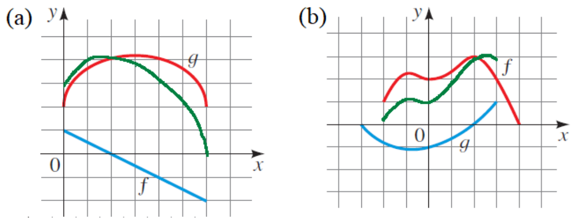
é par e que a função

$$h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

é ímpar.

13. Prove que qualquer função f pode ser expressa como a soma de uma função par com uma função ímpar. (Dica: Use o exercício anterior).

Gabarito

1. 

2. (a) $(f - g)(x) = x^2 - 2$
   $\text{Dom}(f - g) = \mathbb{R}$

   (b) $(f \cdot g)(x) = -3x^3 + 13x^2 - 18x + 8$
   $\text{Dom}(f \cdot g) = \mathbb{R}$

   (c) $(f/g)(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{4 - 3x}$
   $\text{Dom}(f/g) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$

   (d) $(f \circ g)(x) = 9x^2 - 15x + 6$
   $\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$

   (e) $(g \circ f)(x) = -3x^2 + 9x - 2$
   $\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$

   (f) $(f \circ f)(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$
   $\text{Dom}(f \circ f) = \mathbb{R}$

3. $(f \circ g \circ h)(x) = |1 + \sqrt{x}|$ e $\text{Dom}(f \circ g \circ h) = \mathbb{R}_+$

4. (a) $h(x) = \dfrac{x}{x+2}$ e $\text{Dom}(h) = \mathbb{R} - \{-2, -1\}$

   (b) $m(x) = x$ e $\text{Dom}(m) = \mathbb{R} - \{-1\}$

5. (a) Uma das opções é $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 9$. Assim, $(f \circ g)(x) = F(x)$

   (b) Uma das opções é $f(x) = \dfrac{x}{x+4}$ e $g(x) = x^2$. Assim, $(f \circ g)(x) = G(x)$

   (c) Uma das opções é $f(x) = |x|$ e $g(x) = 1 - x^3$. Assim, $(f \circ g)(x) = K(x)$

6. (a) Uma das opções é $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \sqrt{1+x}$ e $h(x) = \sqrt{x}$. Assim, $(f \circ g \circ h)(x) = T(x)$

   (b) Uma das opções é $f(x) = x^9$, $g(x) = 4 + x$ e $h(x) = \sqrt[3]{x}$. Assim, $(f \circ g \circ h)(x) = M(x)$

   (c) Uma das opções é $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = x - 1$ e $h(x) = \sqrt{x}$. Assim, $(f \circ g \circ h)(x) = V(x)$

7. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 3x^2 + 18x + 28, & \text{se } x \leq -3 \\ 2x^2 + 13x + 21, & \text{se } x > -3 \end{cases}$

   $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4, & \text{se } x \leq 0 \\ 2x^2 + x + 3, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

8. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 + 1 + \sqrt{x^2+1}, & \text{se } x < 2 \\ 49x^2 - 7x, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

   $(g \circ f)(x) = \begin{cases} \sqrt{9x^4 + 6x^2 + 2}, & \text{se } -\frac{\sqrt{3}}{3} < x \leq 0 \\ 21x^2 + 6, & \text{se } x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{x^4 + 2x^3 + x^2 + 1} & \text{se } 0 < x < 1 \\ 7x^2 + 7x - 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

9. (a) Sim, pois $h(-x) = f \circ g(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = f \circ g(x) = h(x)$.

   (b) Não, pois se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$ temos que $g(x)$ é ímpar, mas $h(x) = f \circ g(x) = x^6$ não é ímpar.

   (c) h é ímpar, pois $h(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) = -h(x)$.

   (d) h é par, pois $h(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = h(x)$.

10. Dica: Desenvolva $(f+g)(-x)$ e $(f-g)(-x)$, aplicando a definição de soma e subtração de funções e a de função ímpar em $f(-x)$ e $g(-x)$. Mostre que $(f+g)(-x) = -(f+g)(x)$ e $(f-g)(-x) = -(f-g)(x)$.

11. Dica: Desenvolva $(f \cdot g)(-x)$ e $(f/g)(-x)$, aplicando a definição multiplicação e divisão de funções e a de função ímpar em $f(-x)$ e $g(-x)$. Mostre que $(f \cdot g)(-x) = (f \cdot g)(x)$ e $(f/g)(-x) = (f/g)(x)$

12. Desenvolva $g(-x)$ e mostre que $g(-x) = g(x)$
    Desenvolva $h(-x)$ e mostre que $h(-x) = -h(x)$

13. Utilizando o exercício anterior, mostramos que $f(x) = g(x) + h(x)$, sendo f uma função qualquer, g uma função par e h uma função ímpar.

Bibliografia

STEWART, James et all. Precalculus: Mathematics for Calculus. Seventh Edition. Boston: Cengage Learning, 2014.