Conjuntos

Aula 1

Conjuntos

Na teoria dos conjuntos três noções são aceitas sem definição (noção primitiva):

- Conjunto;
- Elemento;
- Relação de pertinência

Notação

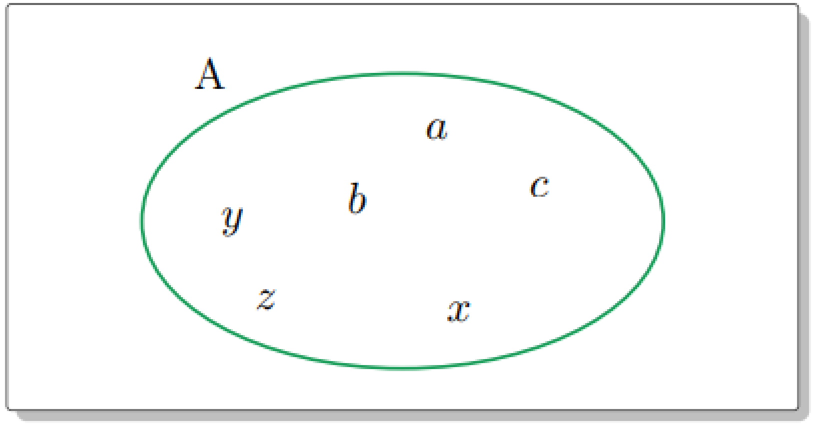
- Indicamos um conjunto, em geral, com uma letra maiúscula:

  A, B, C, . . . , X, Y, Z.

- Denotamos um elemento de um conjunto, em geral, com letras minúsculas:

  a, b, c, . . . , x, y, z.

- O diagrama de Venn é uma maneira de representar graficamente um conjunto.



- Para indicar que um elemento x faz parte de um conjunto A usamos a notação: $x \in A$

- Para indicar que um elemento x **não** faz parte de um conjunto A usamos a notação: $x \notin A$

Conjunto vazio

O conjunto vazio é o único conjunto que não possui elementos e é denotado por:

$\emptyset$ ou { }

Listando

Alguns conjuntos podem ser descritos listando seus elementos entre chaves.

Exemplo:

a) Conjunto das vogais: $A = \{a, e, i, o, u\}$

b) Conjunto dos números inteiros divisores de 8: $B = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$

Propriedade

Um conjunto A também pode ser designado por uma propriedade p da seguinte forma

$$A = \{x \mid x \text{ verifica a propriedade } p(x)\}.$$

Exemplos:

(a) conjunto das vogais: $A = \{x / x \text{ é vogal}\}$

(b) Conjunto das raízes de $x^2 - 9$: $B = \{x / \ x^2 - 9 = 0\}$

(c) Conjunto dos inteiros múltiplos de 3: $C = \{x / x = 3k \ e \ k \in \mathbb{Z}\}$

Conjuntos iguais

Dois conjuntos A e B são iguais se todo elemento que pertence a um deles também pertence a outro e vice-versa. Denotamos por

$$A = B \text{ (}A\text{ igual a }B\text{).}$$

OBS.:

- ✓ A ordem em que os elementos são listados em um conjunto é irrelevante:

$$\left\{\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}\right\} = \{\sqrt{7}, \sqrt{6}, \sqrt{5}\}$$

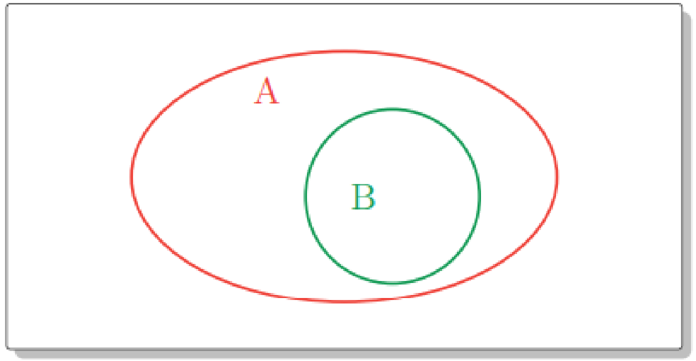
- ✓ A repetição dos elementos em um conjunto é irrelevante:

$$\{a, b, c\} = \{a, a, b, b, b, c, c, c, c\}$$

UDESC

Subconjuntos

Um conjunto B é subconjunto de um conjunto A se todo elemento de B pertence também a A. Nesse caso dizemos que B está contido em A e denotamos por $B \subseteq A$



Por exemplo, o conjunto B = {3, −2, 5} está contido em A = {3, −2, 5, 7, −10}.

OBS.: Na definição de igualdade de conjuntos está explícito que todo elemento de A é elemento de B e vice-versa, isto é, A ⊆ B e B ⊆ A; portanto, podemos escrever: A = B se, e somente se, A ⊆ B e B ⊆ A

Tarefas para sala de aula

(3) Sejam $A = \{0,1,2,3,4,5\}$, $B = \{3,4,5,6,7,8\}$, $C = \{1,3,7,8\}$, $D = \{3,4\}$, $E = \{1,3\}$, $F = \{1\}$ e X um conjunto desconhecido. Para cada item abaixo, determine quais dos conjuntos A, B, C, D, E ou F podem ser iguais a X :

(a) $X \subseteq A$ e $X \subseteq B$

(b) $X \nsubseteq B$ e $X \subseteq C$

(c) $X \nsubseteq A$ e $X \nsubseteq C$

(d) $X \subseteq B$ e $X \nsubseteq C$.

(5) Sejam $R = \{1,3,\pi,4,9,10\}$, $T = \{1,3,\pi\}$, $S = \{\{1\},3,9,10\}$ e $V = \{\{1,3,\pi\},1\}$. Quais das sentenças a seguir são verdadeiras?

(a) $S \subseteq R$

(b) $1 \in R$

(c) $1 \in S$

(d) $1 \subseteq V$

(e) $\{1\} \subseteq T$

(f) $\{1\} \subseteq S$

(g) $T \subseteq R$

(h) $\{1\} \in S$

(i) $\varnothing \subseteq S$

(j) $T \subseteq V$

(k) $T \in V$

(l) $T \notin R$

(m) $S \subseteq \{1,3,9,10\}$

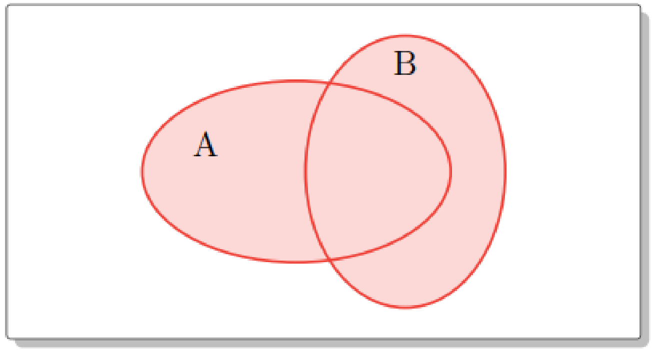
(n) $\varnothing \in V$

(o) $\varnothing \notin S$

(p) $\varnothing \subseteq R$

União e intersecção

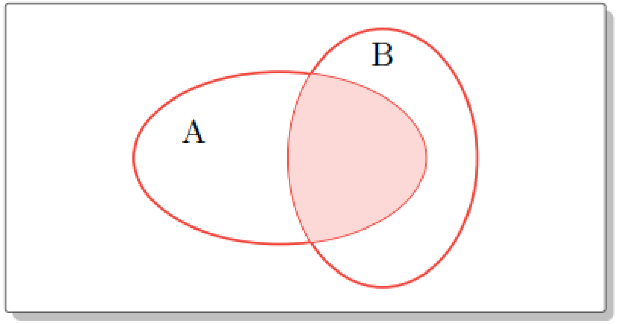
- Dados os conjuntos A e B, chama-se **união de A e B** o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B. Denotamos por: $A \cup B$



Por exemplo, se $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, então $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

- Dados os conjuntos A e B, chama-se interseção de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B. Denotamos por A ∩ B (A interseção B). Em símbolos: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

Por exemplo, se A = {0, 1, 2, 3} e B = {0, 2, 4, 6, 8}, então A ∩ B = {0, 2}.

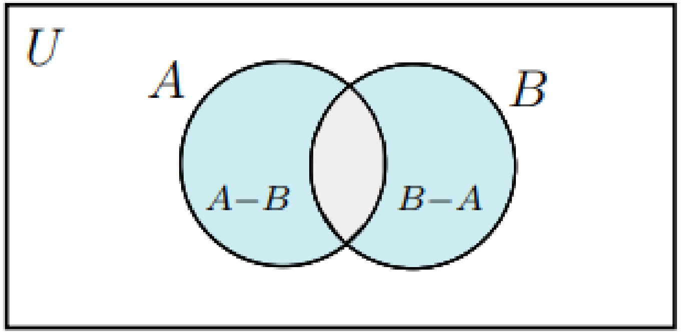


UDESC

Diferença entre conjuntos

A diferença entre os conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B , ou seja,

$$A - B = \{x / x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



Tarefas para sala de aula

(4) Quais das sentenças a seguir são verdadeiras para quaisquer conjuntos A, B e C?

(a) $\{\varnothing\} = \varnothing$

(b) $\varnothing \in \{\varnothing\}$

(c) $\varnothing \subseteq A$, para todo A.

(d) $\varnothing \in A$, para todo A.

(e) $A \cap \varnothing = \varnothing$, para todo A.

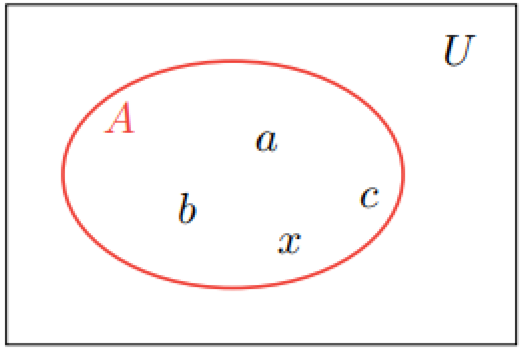
(f) $A \cup \varnothing = A$, para todo A.

(7) Determinar os conjuntos A, B, C sabendo-se que:

$$A \cap B = \{2, 4\}, \quad A \cup B = \{2, 3, 4, 5\},$$
$$A \cap C = \{2, 3\} \quad \text{e} \quad A \cup C = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Conjunto universo

Quando desenvolvemos um determinado assunto de Matemática, admitimos a existência de um conjunto U ao qual pertencem todos os elementos utilizados no tal assunto. Esse conjunto U recebe o nome de **conjunto universo**.



Por exemplo:

(a) Em Geometria Plana, o universo é o conjunto de todos os pontos do plano.

(b) O universo dos números primos é o conjunto dos números inteiros

Descrição de um conjunto

- No universo U, o conjunto A dos elementos x que verificam a condição $p(x)$ denota-se por: $A = \{x \in U \mid p(x)\}$.

Por exemplo,

(a) $A = \{x$ é aluno da Matemática $\mid x$ tem olhos azuis $\}$

(b) conjunto dos números naturais múltiplos de 10 pode ser descrito por:

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ múltiplo de } 10\};$$

ou,

$$\{x \in \mathbb{N} \mid x = 10n, n \in \mathbb{N}\};$$

ou ainda,

$$\{10n \mid n \in \mathbb{N}\};$$

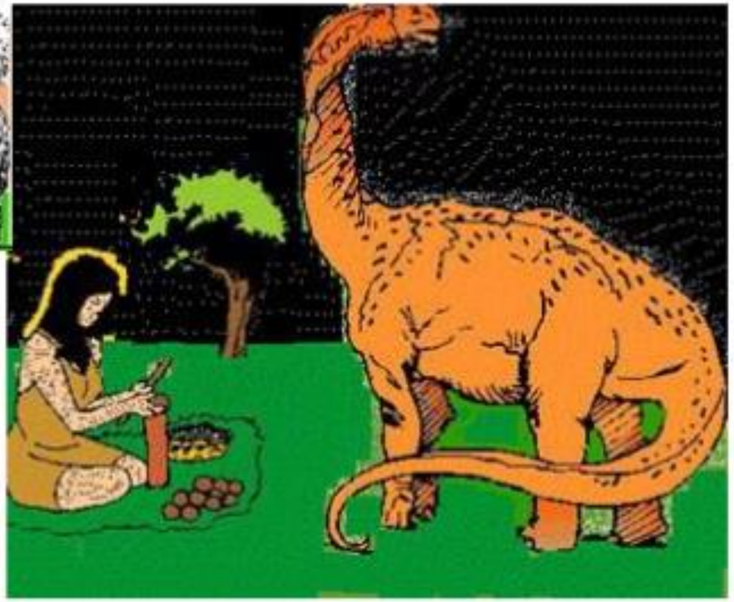
(c) conjunto dos números inteiros maiores do que −153 denota-se por:

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x > -153\};$$

Conjuntos numéricos

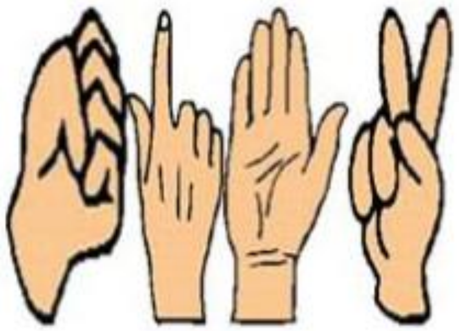
Uma breve história...

O homem sempre teve a necessidade de se organizar

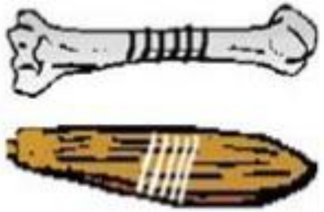


e administrar os seus bens de forma a não ser enganado.

Uma breve história...

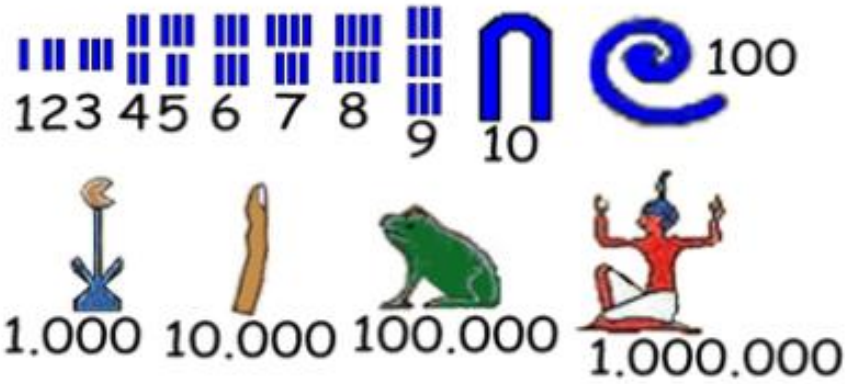


O primeiro sistema de contagem foi as mãos.



Depois riscos em madeiras e ossos.

Alguns utilizavam símbolos para representar quantidades.



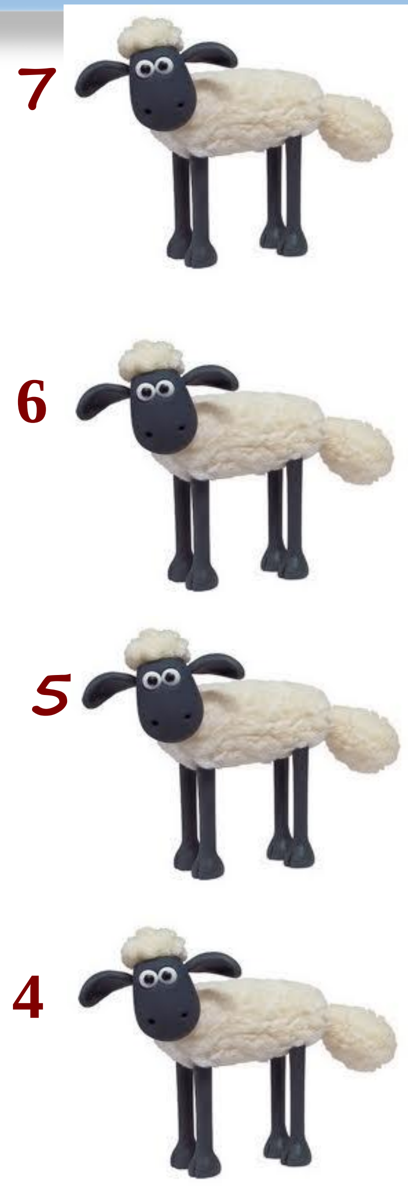
Uma breve história...

- Desde muito tempo o homem sempre teve a preocupação em contar objetos e ter registros numéricos. Desta preocupação sugiram os

  Conjuntos Numéricos

NÚMEROS NATURAIS

Estes números foram criados pela necessidade prática de contar as *coisas da natureza*, por isso são chamados de números naturais.



Números naturais

A representação matemática deste conjunto é:

$$\mathbb{N} = \{0,1, 2, 3, 4, 5, ... \}$$

Subconjunto: $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,4,5, ...\}$

Números inteiros

- Os números naturais não permitiam a resolução de todas as operações. A subtração de 3 - 4 era impossível.

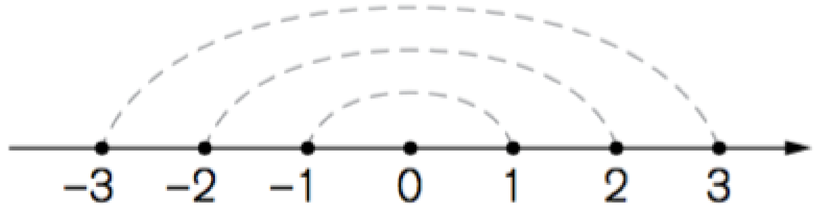
- A ideia do número negativo, aparece na Índia, associada a problemas comerciais que envolviam dívidas.

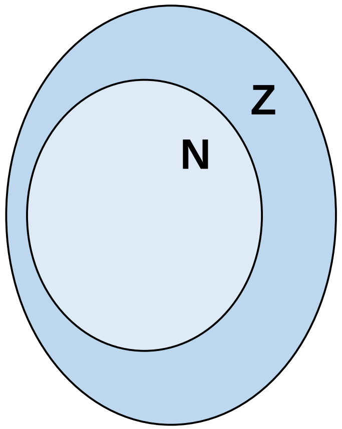
- A ideia do número zero surgiu também nesta altura, para representar o *nada.*

Números inteiros

A representação matemática deste conjunto é:

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$





$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Suconjuntos:

$\mathbb{Z}^* = \{... -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, ...\} = \mathbb{Z}-\{0\}$

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$ Inteiros não-negativos

$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$ Inteiros positivos

$\mathbb{Z}_- = \{... -4, -3, -2, -1, 0\}$ Inteiros não-positivos

$\mathbb{Z}_-^* = \{... -4, -3, -2, -1\}$ Inteiros negativos

Operações em $\mathbb{Z}$:

- Adição
- Multiplicação
- Divisão ????

Números racionais

Entretanto...surgiu outro tipo de problema:

" Como dividir 3 vacas por 2 herdeiros? "

Para resolver este tipo de problemas foram criados os números **fracionários**.
Estes números juntamente com os números inteiros formam os **racionais**.

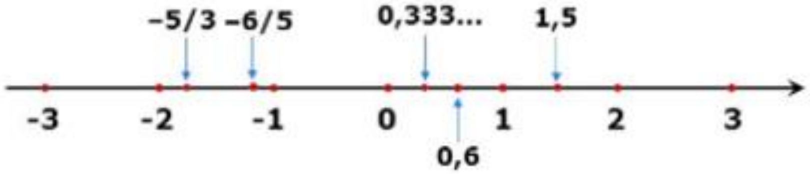
$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q}, onde\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

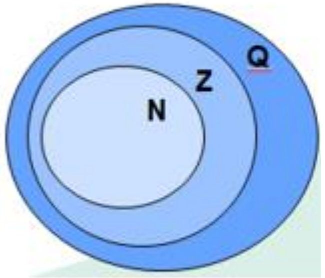
Neste conjunto encontram-se os número inteiros, os decimais exatos e as dízimas periódicas.

Ex.: $2 = \frac{4}{2} = \frac{100}{50} = \cdots$

$\frac{1}{2} = 0{,}5$

$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$





Números irracionais

- Conjunto de números que não podem ser expressos na forma de uma fração de dois inteiros

- Exemplo:

  Decimais infinitos não periódicos, como:

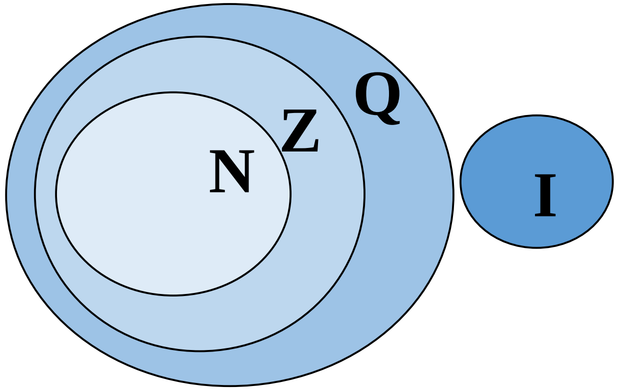
  $\pi = 3{,}14{,}1592653 \ldots$

  $e = 2{,}718291828 \ldots$ (número de Euler)

  $\Phi = 1{,}61803399 \ldots$ (número de ouro)

  $\sqrt{2} = 1{,}414213562 \ldots .$

  $\sqrt{10} = 3{,}162277660 \ldots$



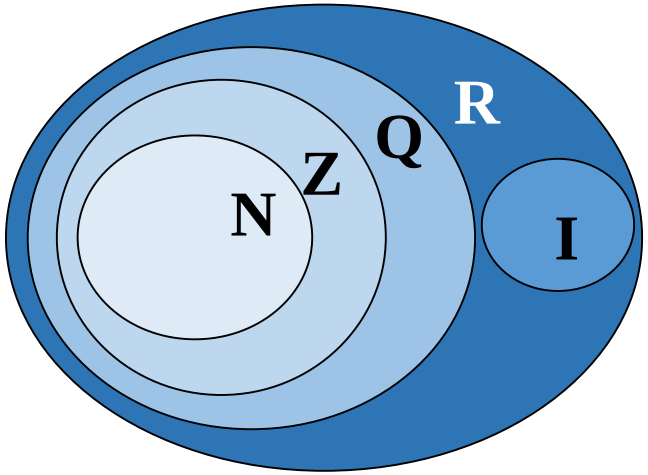
OBS.: $\mathbb{Q} \cap I = \emptyset$ ($\mathbb{Q}$ e I são conjuntos disjuntos)

Números reais

- Conjunto numérico que é a união do conjunto dos racionais ($\mathbb{Q}$) com os irracionais (I)

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbf{I}$$

- Operações em $\mathbb{R}$:
  - Adição e Subtração
  - Multiplicação e Divisão



Tarefas para sala de aula

(1) Descreva cada um dos conjuntos a seguir, listando seus elementos:

(a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 25\}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par e } 2 < x \leq 11\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\}$

(d) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$

(e) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < -3 \text{ e } x > 4\}$

(f) $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < -3 \text{ ou } x > 4\}$.

(2) Representar, através de uma propriedade conveniente, os seguintes conjuntos:

(a) $A = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$;

(b) $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

(c) $C = \{6, 7, 8, 9, 10, \cdots\}$;

(d) $D = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.

Tarefas para sala de aula

(6) Com relação aos conjuntos numéricos, determine se é verdadeiro ou falso cada uma das sentenças abaixo:

(a) $5 \in \mathbb{N}$
(b) $0.999\ldots \in \mathbb{N}$
(c) $-3 \in \mathbb{N}$
(d) $\sqrt{2} \in \mathbb{N}$
(e) $17 \in \mathbb{Z}$
(f) $0.01313\ldots \in \mathbb{Z}$
(g) $-3 \in \mathbb{Z}$
(h) $\pi \in \mathbb{Z}$
(i) $91 \in \mathbb{Q}$
(j) $-\frac{15}{12} \in \mathbb{Q}$
(k) $\frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{Q}$
(l) $\sqrt{-7} \in \mathbb{R}$

(8) Considere $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 8\}$, $B = \{3, 4, 9\}$ e $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ divide } 18\}$. Determine os conjuntos abaixo, listando seus elementos:

(a) $A \cap B$
(b) $A \cup B$
(c) $B \cap \varnothing$
(d) $A - B$
(e) $B - A$
(f) $B \cup (A \cap C)$

Tarefas para sala de aula

(9) Siga o modelo do item (a) para completar os próximos itens.

(a) $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\} =$ racionais não negativos.

(b) $\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} =$

(c) $\mathbb{Q}^*_+ = \{ \qquad \} =$ racionais negativos.

(d) $\mathbb{Q}^* = \{ \qquad \} =$ racionais não nulos.

(e) $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} =$

(f) $\mathbb{R}_+ = \{ \qquad \} =$

(g) $\mathbb{R}^*_+ = \{ \qquad \} =$ reais positivos.

(h) $\mathbb{R}_- = \{ \qquad \} =$

(i) $\mathbb{R}^*_- = \{ \qquad \} =$