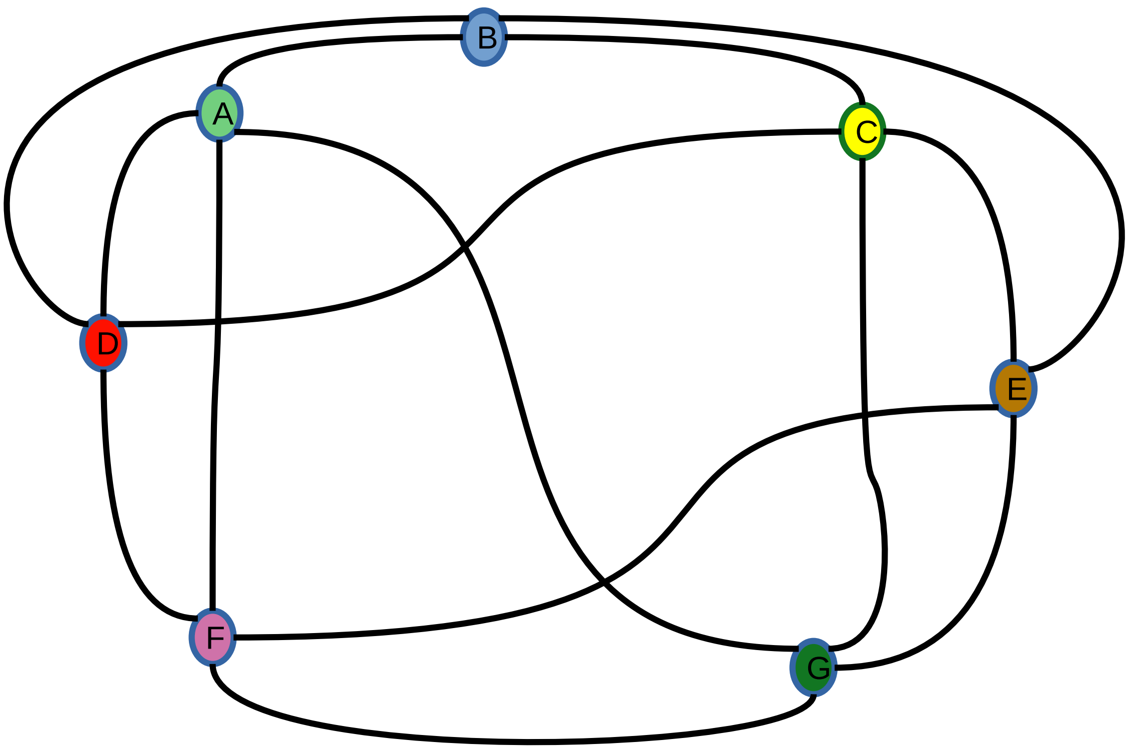
Gabarito de algumas das questões da lista sobre coloração – TEG –

1. Determine os limites inferior e superior, o número cromático χ(G). Execute uma coloração mínima para cada um dos grafos e verifique se você conseguiu o valor de χ(G):

$w(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G)+1$

a) K_7

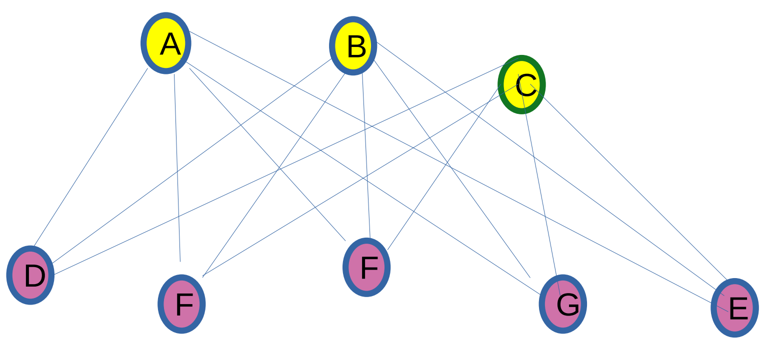
$(w(G)=7) \leq \chi(G) \leq (\Delta(G)+1 = 7)$



b) $K_{3,5}$

$2 \leq \chi(G) \leq 6$

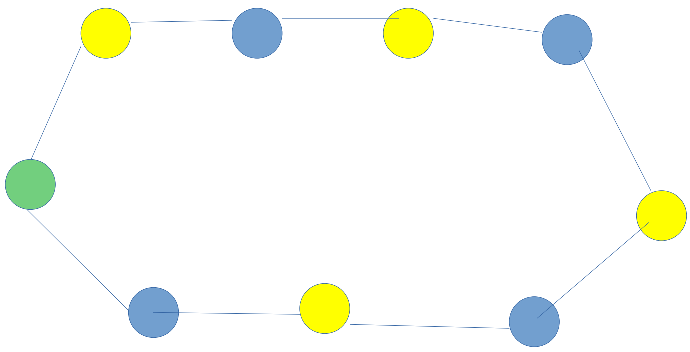
$\chi(G)=2$ (grafo bipartido)



c) C_9

$2 \leq \chi(G) \leq 3$

$\chi(G)=3$

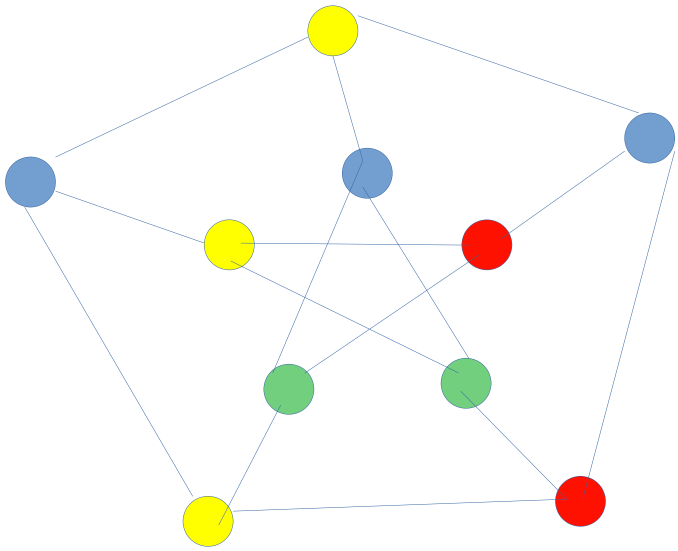


d) Petersen

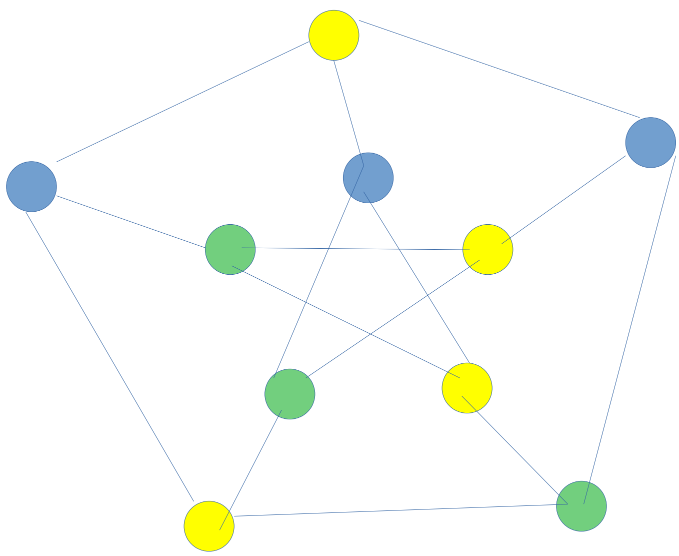
$2 \leq \chi(G) \leq 4$

Mas Petersen não é bipartido, portanto $3 \leq \chi(G) \leq 4$

Note que o guloso fornece $\chi(G)= 4$,



Mas na verdade é possível colorir com 3 cores (o guloso não é um algoritmo ótimo, é apenas um algoritmo de heurística local)



e) Cubo Q_k

$2 \leq \chi(G) \leq k+1$

$\chi(G)=2$ (grafo bipartido)

f) Completo tripartite $K_{R,S,T}$

$\chi(G) = 3$

g) O grafo G é conhecido com grafo da construção de Mycielski/Grötzsch, a construção sempre gera grafos livres de triângulos (K_3), na 1 temos duas configurações isomorfas desse grafo construído a partir de C_5.

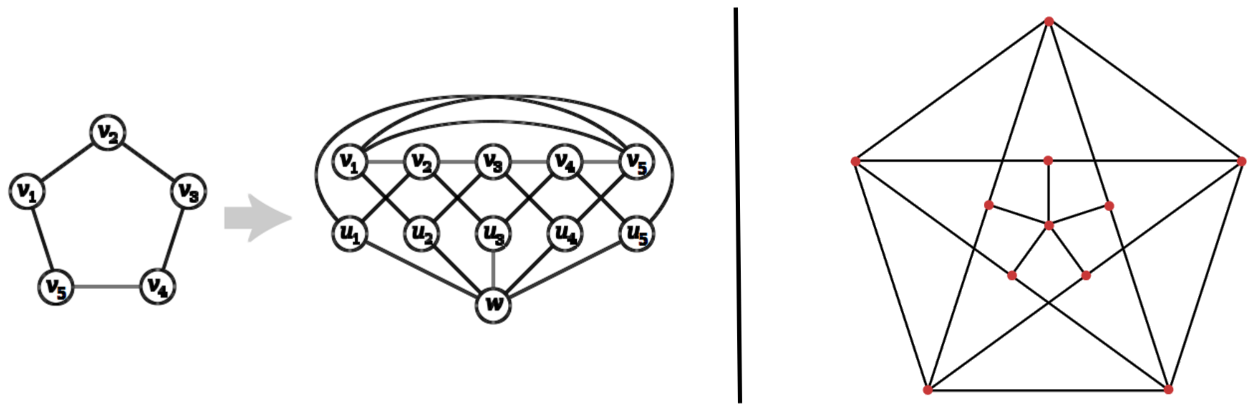


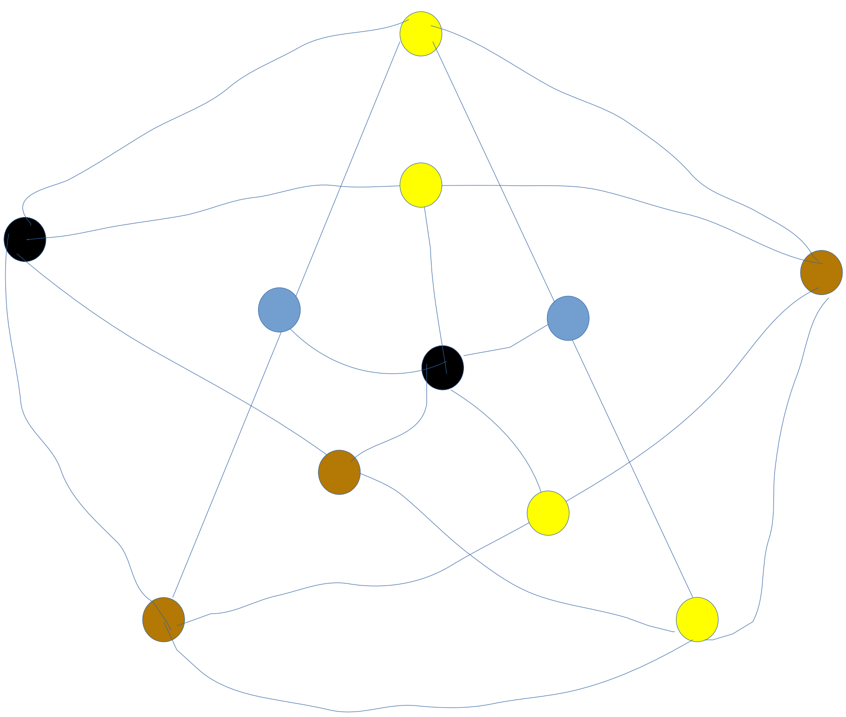
Figura 1: GRAFO G: Mycielski construído a partir de C5. À direita uma outra versão isomorfa do mesmo grafo.

$2 \leq \chi(G) \leq 6$, não é grafo bipartido, portanto $3 \leq \chi(G) \leq 6$,

Trata-se de um Na verdade esse grafo tem $\chi(G)=4$

Grafos de Mycielski M_k são K-coloráveis, no caso temos um Mycielski M_4.

(https://mathworld.wolfram.com/MycielskiGraph.html)



h) Um grafo com 13 vértices e repetições de K_4.

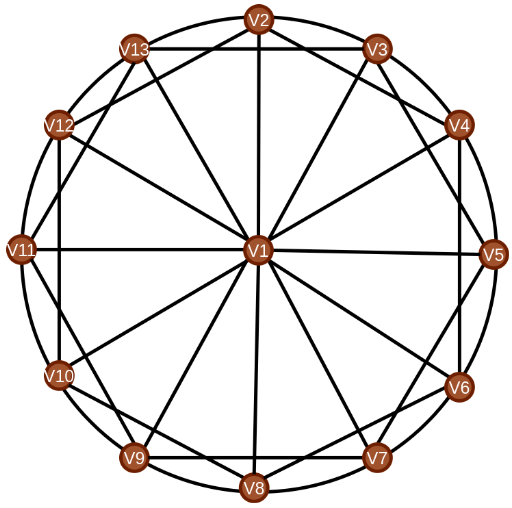
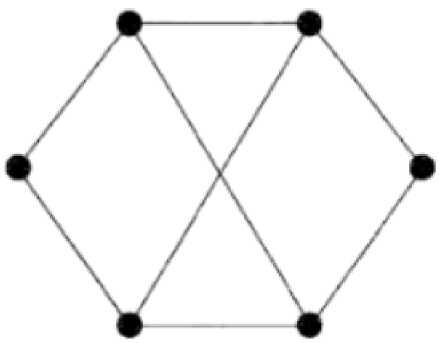


Figura 2: GRAFO H com 14 vértices contendo repetições de K4.

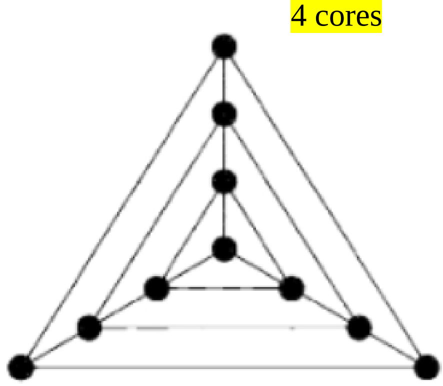
$4 \leq \chi(G) \leq 13$, portanto $3 \leq \chi(G) \leq 6$,

3) Encontre os números cromáticos dos grafos abaixo:

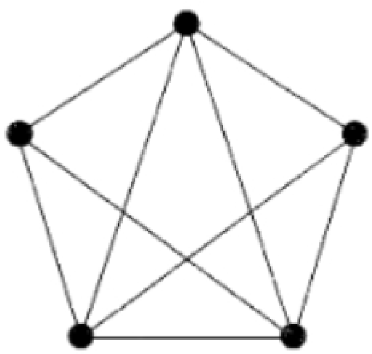
2 cores



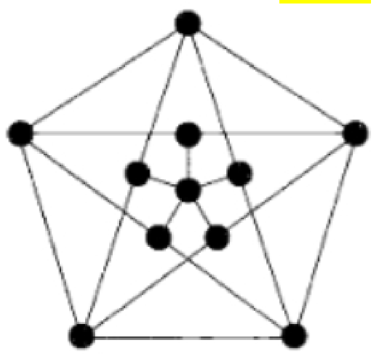
4 cores



4 cores



4 cores



4) Prove que no número de vértices (n), se G é um grafo simples com grau máximo Δ(G), então $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$

Se colorirmos G seguindo a estratégia do algoritmo guloso, quando chegarmos a um vértice v de grau Δ(G)=w, no pior dos casos *v* ele terá *w* vértices adjacentes coloridos com *w* cores diferentes, então será necessária uma nova cor diferente das outras, a qual será a *(w+1)-ésima cor*, dessa forma o majorante será Δ(G)+1.

5) Prove que para todo grafo G(V,E), com m=|E| temos o seguinte majorante para o número cromático: $\chi(G) \leq 1/2 + \sqrt{2m + 1/4}$

Discutida e resolvida em sala, O Kn é um majorante natural para o número cromático de grafos simples, cuja soma de graus é n*(n-1). Encontre as raízes da equação abaixo partindo do teorema do aperto de mão

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m$$

$$n * (n-1) = 2m$$

$$n^2 * -n = 2m$$

$$n^2 * -n - 2m = 0$$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

6) Uma tabela de horários de aulas é exibida abaixo. Considerando que alguns alunos pretendem fazer matrícula em diferentes disciplinas, algumas delas não podem coincidir. Na tabela, as marcações (asterisco) representam os pares de disciplinas que não podem coincidir horários. Quantos períodos de aulas são necessários para atender a todas as disciplinas contemplando o interesse dos alunos?

	a	b	c	d	e	f	g
a		*	*	*			*
b	*		*	*	*		*
c	*	*		*		*	
d	*	*	*			*	
e		*					
f			*	*			*
g	*	*				*	

(u,v) é uma aresta se u e v apresentam conflito de horário.

Faça a coloração pelo guloso e determine os conjuntos independentes (vértices de mesma cor)
Cada conjunto independente é um conjunto de disciplinas que podem “ rodar” em paralelo, ou seja, serem aplicada no mesmo horário.

7) Há uma conferência científica anual com a organização de encontros de 10 comitês para debates, os comitês são identificados por letras de “A” a “J”. Os membros participantes estão inscritos em diferentes comitês e identificados pelo respectivo número de crachá:
A={1,2,3,4}
B={1,6,7}
C={3,4,5}
D={2,4,7,8,9,10}
E={6,9,12,14}
F={5,8,11,13}
G={10,11,12,13,15,16}
H={14,15,17,19}
I={13,16,17,18}
J={18,19}

Os inscritos exigem participar dos comitês nos quais se inscreveram. Dessa forma, dois ou mais comitês que apresentem intersecção de nomes na lista de inscritos não podem ser realizados no mesmo horário. Quantos horários distintos (sem sobreposição na lista de inscritos) serão necessários e quais os comitês que serão alocados a cada horário?

Mesma estratégia para a solução da questão anterior.

8) Escreva os polinômios cromáticos diretamente para e verifique diferentes valores de k-coloração:
lembre-se:

“k” é uma quantidade inteira positiva

$k < \chi(G) \Rightarrow P_G(k) = 0$;

$k \geq \chi(G) \Rightarrow P_G(k) > 0$;

$\chi(G) = \min\{k : P_G(k) > 0\}$;

a) C_4

Ciclo

$P_G(k)=(k-1)^n+(-1)^n(k-1)$

b) K_6

Grafo completo

$P_G(k)=k(k-1)(k-2)...(k-n+1)$

c) $K_{1,5}$

Árvore

$P_G(k)=k(k-1)^{n-1}$

d) $K_{2,3}$

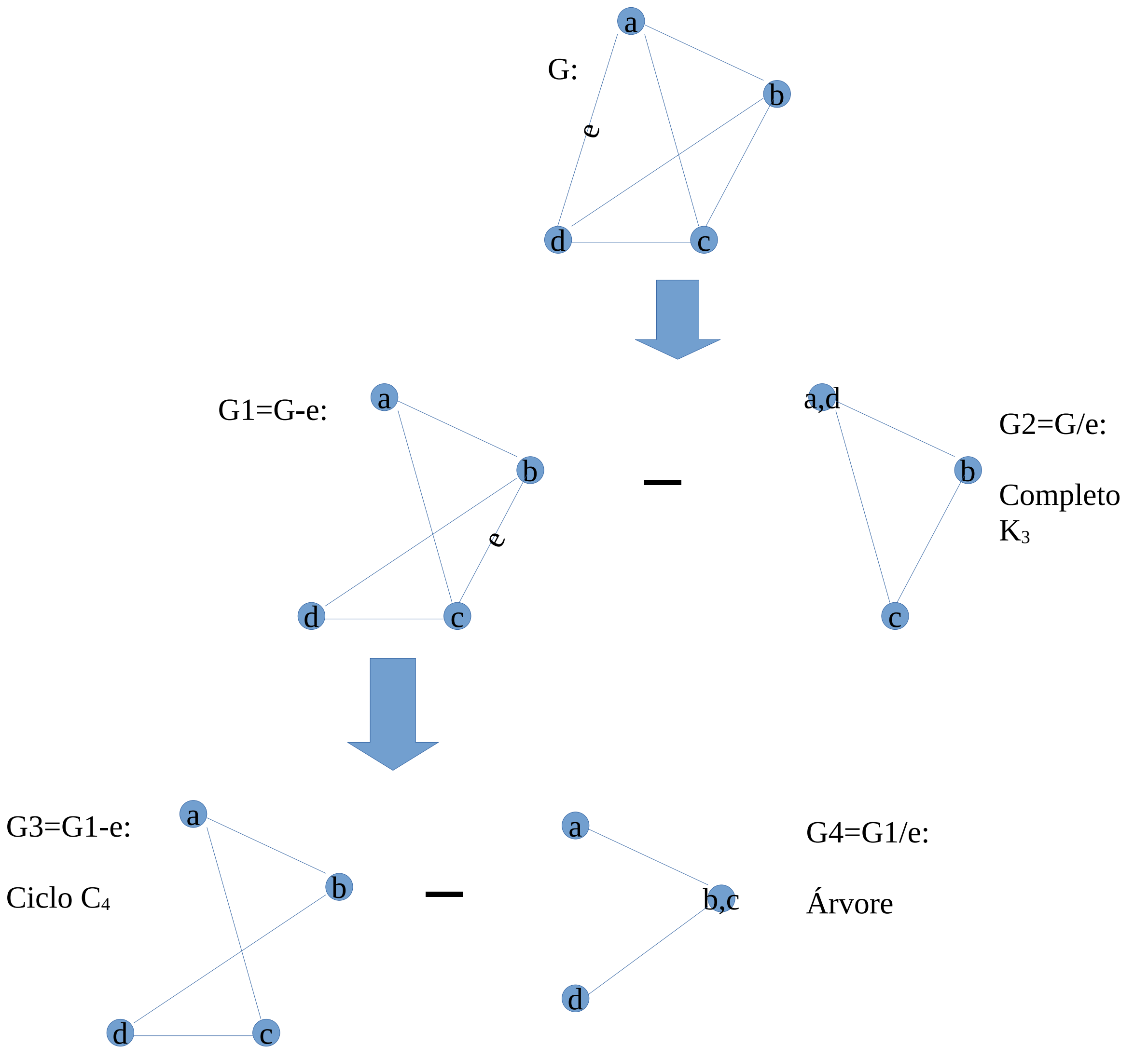
Bipartido

Toda árvore é bipartida, mas nem todo bipartido é árvore, aqui é preciso decompor o grafo e encontrar seu polinômio usando $P_G(k) = P_{G-e}(k) – P_{G/e}(k)$

9) Para os casos abaixo descritos, escreva os polinômios cromáticos pela aplicação do teorema que aplica a redução do grafo por remoção e contração de aresta: $P_G(k) = P_{G-e}(k) – P_{G/e}(k)$

a) K_4

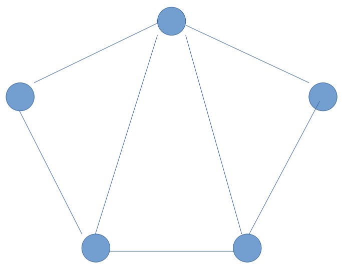
Uma possibilidade:



$P_G(k) = P_{G1}(k) – P_{G2}(k) = (P_{G3}(k) - P_{G4}(k)) – P_{G2}(k) = [(k-1)^4+(k-1)] – [k(k-1)^2] – [k(k-1)(k-2)]$

fatorando e simplificando $P_G(k)=k(k-1)(k-2)(k-3)$ pois G é um grafo K_4

b)



---9b)Discutida em sala, a solução está no final do pdf sobre coloração