Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Técnicas de Integração Definida:
Substituição de variáveis
Integração por Partes

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 de 28 de agosto de 2024.

UDESC

Técnicas de Integração Definida

- Vimos, na última aula, que o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) é uma ferramenta poderosa (e simples) para a resolução de uma integral definida.
- Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua, para aplicar o TFC basta encontrarmos uma primitiva qualquer F para f e utilizar a expressão

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).}$$

- Como a primitiva F é obtida por meio do processo de integração indefinida, aprendido em CDI-1, vamos relembrar as principais técnicas de integração, com ênfase naquelas que utilizaremos com maior frequência em CDI-2, adaptando-as conforme necessário:

- Substituição de Variáveis:
- Permite transformar uma integral em outra mais simples, por meio de uma substituição adequada de variável.
- A diferença do método para integrais definidas é que a substituição deve ser aplicada também aos limitantes de integração.

Exercícios

Exercício 1: Resolva as seguintes integrais definidas:

$$a)\ I = \int_{-\pi/2}^{\pi/6} \operatorname{sen}^5(4x)\cos(4x)\, dx$$

$$b)\ I = \int_{2}^{5} \frac{x}{\sqrt{3x+10}}\, dx$$

Solução: Resolvidos durante a aula.

Integração por Partes

A integração por partes é útil quando o integrando é um produto de funções, em que um dos fatores consiste em uma derivada.

A fórmula para a Integração por Partes, adaptada para a integração definida é:

$$\int_a^b u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Observações:

- Apesar de usarmos du e dv na expressão para a integração por partes, a variável de integração é sempre x (ou a variável dada originalmente na integral), pois

$$u = u(x) \quad \text{e} \quad v = v(x).$$

- Portanto, na integração por partes jamais efetuamos a troca dos limitantes de integração.

- Veja que o termo $u \cdot v$ faz parte da primitiva, por isso é preciso aplicá-lo nos limitantes de integração, de acordo com o TFC.

Exercícios

Exercício 2: Resolva as seguintes integrais definidas:

$$a)\ I = \int_{1}^{5} x^3 \ln(x)\, dx$$

$$b)\ I = \int_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x\, \mathrm{sen}^2(x)\, dx$$

Solução: Resolvidos durante a aula.

Exercício 3: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(-3) = 10$ e $f(15) = -9$.

Considere $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$G(x) = \int_{7x+4x^2}^{xe^{6+2x}} f(t)dt.$$

Determine o valor de $G'(-3)$.

Solução: Resolvido durante a aula.

Integral de Função Descontínua

Definição: Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, exceto em $c \in [a,b]$, ponto em que há uma assíntota vertical. Definimos a integral imprópria de f como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)\,dx + \lim_{w \to c^+} \int_w^b f(x)\,dx\,.$$

desde que ambos os limites existam.

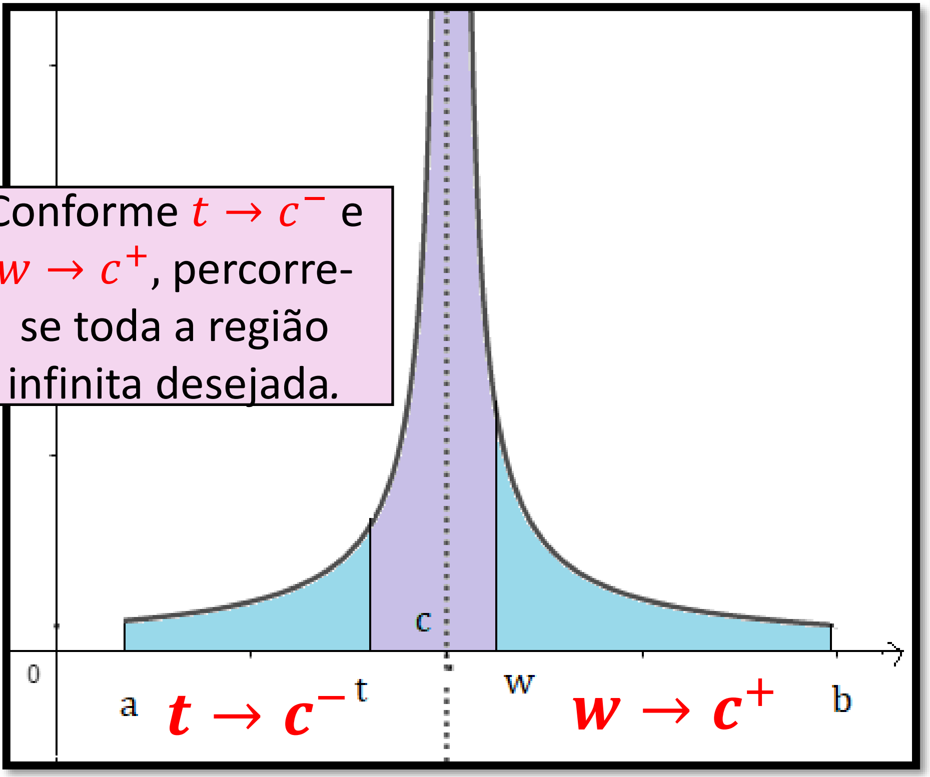
Se existirem, dizemos que a integral imprópria é convergente. Caso contrário, dizemos que a integral Imprópria é divergente.

O uso de limites laterais garante que f passa a ser contínua em cada um dos novos subintervalos (pois sempre teremos $t < c$ e $w > c$).

Com isso, o TFC pode ser aplicado nessas parcelas!

Como f não é contínua em $[a,b]$, não é possível aplicar o TFC. Por isso, a integral é separada em dois intervalos de integração, usando o ponto de descontinuidade como extremos.

Conforme $t \to c^-$ e $w \to c^+$, percorre-se toda a região infinita desejada.



Exercícios

Exercício 3: Determine se a seguinte integral converge ou diverge:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4}\, dx$$

Solução: Resolvido durante a aula.

Exemplos resolvidos

Exemplo 1: Resolva a integral

$$I = \int_{-\pi/6}^{\pi/8} \cos^3(2x)\mathrm{sen}(2x)\, dx\,.$$

Solução: A função $f(x) = \cos^3(2x)\mathrm{sen}(2x)$ é contínua em todos os reais.

Portanto, é possível aplicar o TFC.

Usando a substituição

$$u = \cos(2x)\,,$$

obtemos, pela regra da cadeia:

$$du = 2.\big(-\mathrm{sen}(2x)\big)dx \;= -2\mathrm{sen}(2x)dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{-1}{2}du = \mathrm{sen}(2x)dx.$$

Mudando os limitantes de integração:

$$x = -\frac{\pi}{6} \qquad \Rightarrow \qquad u = \cos\left(\frac{-2\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{8} \qquad \Rightarrow \qquad u = \cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exemplos resolvidos

Assim, a substituição $u = \cos(2x)$ transoforma a integral definida em:

$$I = \int_{-\pi/6}^{\pi/8} \cos^3(2x)\operatorname{sen}(2x)\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u^3 \frac{-1}{2}\, du$$

$$= \frac{-1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u^3 du = \frac{-1}{2}\frac{u^4}{4}\bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{-1}{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \frac{-1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$= \frac{-1}{8}\left[\frac{4}{16} - \frac{1}{16}\right]$$

$$= \frac{-1}{8}\left[\frac{3}{16}\right] = \frac{-3}{128}.$$

Exemplo 2: Resolva a integral:

$$I = \int_1^{10} \frac{x}{\sqrt{5x-1}}\, dx\,.$$

Solução: Note que a função $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x-1}}$ é contínua se e somente se $x > \frac{1}{5}$. Portanto, f é contínua no intervalo de integração e podemos aplicar o TFC.

Definindo a substituição

$$u = 5x - 1$$

temos que

$$du = 5dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{5}du = dx.$$

Além disso,

$$u = 5x - 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{u+1}{5}.$$

Mudando os limitantes de integração:

$$x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad u = 5.1 - 1 = 4$$

$$x = 10 \qquad \Rightarrow \qquad u = 5.10 - 1 = 49.$$

Exemplos resolvidos

Assim, a integral fica:

$$I = \int_1^{10} \frac{x}{\sqrt{5x-1}}\,dx = \int_4^{49} \frac{\frac{u+1}{5}}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{5}\,du = \frac{1}{25}\int_4^{49} \frac{u+1}{\sqrt{u}}\,du$$

$$= \frac{1}{25}\int_4^{49} (u+1).u^{-1/2}\ du = \frac{1}{25}\int_4^{49} (u^{1/2}+u^{-1/2})\,du$$

$$= \frac{1}{25}\left(\frac{u^{3/2}}{3/2} + \frac{u^{1/2}}{1/2}\right)\Bigg|_4^{49} = \left(\frac{2}{75}(49)^{3/2} + \frac{2}{25}.(49)^{1/2}\right) - \left(\frac{2}{75}(4)^{3/2} + \frac{2}{25}.(4)^{1/2}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{75}.343 + \frac{2}{25}.7\right) - \left(\frac{2}{25}.8 + \frac{2}{25}.2\right) = \frac{2}{75}.(343-8) + \frac{2}{25}.(7-2)$$

$$= \frac{2}{75}.335 + \frac{2}{25}.5 = \frac{2}{15}.67 + \frac{2}{5} = \frac{140}{15}.$$

Exemplo 3: Resolva a integral

$$I = \int_2^3 x^6 \ln(x)\, dx\,.$$

Solução: Note que a função $f(x) = x^6 \ln(x)$ é contínua se e somente se $x > 0$.

Portanto, f é contínua no intervalo de integração e podemos aplicar o TFC.

O método de substituição de variáveis não parece ser apropriada para essa integral. Usando a integração por partes, podemos tomar:

$$u = \ln(x) \qquad \text{e} \qquad dv = x^6 dx.$$

Note que essa escolha não é única. Optamos por essa pois é mais fácil derivar o logaritmo do que integrá-lo (Regra LIATE). Assim:

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad \text{e} \qquad v = \frac{x^7}{7}.$$

Aplicando na expressão, obtemos

$$I = \int_2^3 x^6 \ln(x)\, dx = \ln(x).\frac{x^7}{7}\bigg|_2^3 - \int_2^3 \frac{x^7}{7}\frac{1}{x}dx = \frac{x^7\ln(x)}{7}\bigg|_2^3 - \frac{1}{7}\int_2^3 x^6 dx$$

$$= \frac{3^7\ln(3)}{7} - \frac{2^7\ln 2}{7} - \frac{1}{7}.\frac{x^7}{7}\bigg|_2^3 = \frac{1}{7}\left(3^7\ln(3) - 2^7\ln(2) - \frac{3^7}{7} + \frac{2^7}{7}\right).$$

Exemplo 4: Resolva a integral:

$$I = \int_{-1}^{4} |x| e^{-2x} dx\,.$$

Solução: A função $f(x) = |x|e^{-2x}$ é contínua para todos os reais e podemos aplicar o TFC.

No entanto, o termo $|x|$ não possui nem primitiva nem derivada. Como o módulo depende do sinal de x e, no intervalo de integração temos valores negativos e positivos, precisamos utilizar a Propriedade 3 para separá-la em duas integrais:

$$I = \int_{-1}^{0} |x| e^{-2x} dx + \int_{0}^{4} |x| e^{-2x} dx.$$

$$|x| = \begin{cases} x, se\ x \geq o \\ -x, se\ x \leq 0 \end{cases}$$

Veja que a escolha do zero deu-se por esse ser o ponto em que $|x|$ altera sua expressão. Usando então a definição de módulo, obtemos

$$I = \int_{-1}^{0} -xe^{-2x} dx + \int_{0}^{4} xe^{-2x} dx \ = \ -\int_{-1}^{0} xe^{-2x} dx + \int_{0}^{4} xe^{-2x} dx$$

Podemos agora usar Partes para resolver ambas integrais. Tomamos:

$$u = x \qquad \text{e} \qquad dv = e^{-2x} dx$$

e obtemos $\qquad du = dx \qquad$ e $\qquad v = \frac{-1}{2} e^{-2x}$

$$I = -\int_{-1}^{0} xe^{-2x}dx + \int_{0}^{4} xe^{-2x}dx$$

$$= -\left(x.\frac{-1}{2}e^{-2x}\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{-1}{2}e^{-2x}dx \right) + \left(x.\frac{-1}{2}e^{-2x}\Big|_{0}^{4} - \int_{0}^{4} \frac{-1}{2}e^{-2x}dx \right) =$$

$$= \left(\frac{x}{2}e^{-2x}\Big|_{-1}^{0} + \frac{-1}{2}\int_{-1}^{0} e^{-2x}dx \right) + \left(\frac{-x}{2}e^{-2x}\Big|_{0}^{4} + \frac{1}{2}\int_{0}^{4} e^{-2x}dx \right) =$$

$$= \left(\frac{x}{2}e^{-2x}\Big|_{-1}^{0} + \frac{-1}{2}.\frac{-1}{2}e^{-2x}\Big|_{-1}^{0} \right) + \left(\frac{-x}{2}e^{-2x}\Big|_{0}^{4} + \frac{1}{2}.\frac{-1}{2}e^{-2x}\Big|_{0}^{4} \right) =$$

$$= \left(\frac{x}{2}e^{-2x}\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{4}e^{-2x}\Big|_{-1}^{0} \right) + \left(\frac{-x}{2}e^{-2x}\Big|_{0}^{4} + \frac{-1}{4}e^{-2x}\Big|_{0}^{4} \right) =$$

$$= \left(0 - \frac{(-1)}{2}e^{-2(-1)} + \frac{1}{4}e^{0} - \frac{1}{4}e^{-2(-1)}\Big| \right) + \left(\frac{-4}{2}e^{-2.4} - 0 + \frac{-1}{4}e^{-2.4} - \frac{-1}{4}e^{0} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{2} \right) + \left(-2e^{-8} - \frac{1}{4}e^{-8} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}e^{2} + \frac{1}{2} - \frac{9}{4}e^{-8}.$$

Exemplos Resolvidos

Exemplo 5: Resolva as integrais: $a)\ I = \int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2}\, dx$

Solução: Note que a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ não é contínua em $x = 0 \in [-2, 2]$.

Com isso, não podemos aplicar diretamente o TFC. Aplicando a definição anterior, com $c = 0$, temos que:

$$I = \int_{-2}^{0} \frac{1}{x^2} + \int_{0}^{2} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \to 0^-} \int_{-2}^{t} \frac{1}{x^2} dx + \lim_{w \to 0^+} \int_{w}^{2} \frac{1}{x^2} dx.$$

Agora, nesses novos limitantes, a função se torna contínua e com isso podemos utilizar o TFC:

$$I = \lim_{t \to 0^-} \left. \frac{-1}{x} \right|_{-2}^{t} + \lim_{w \to 0^+} \left. \frac{-1}{x} \right|_{w}^{2} = \lim_{t \to 0^-} \frac{-1}{t} - \frac{-1}{-2} + \lim_{w \to 0^+} \frac{-1}{2} - \frac{-1}{w}$$

$$= -\lim_{t \to 0^-} \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \lim_{w \to 0^+} \frac{-1}{2} + \frac{1}{w} = -(-\infty) - \frac{1}{2} + \frac{-1}{2} + \infty = +\infty.$$

Portanto, a integral é divergente!

Observação: O fato da integral divergir significa que a área da região ilimitada destacada na figura abaixo é infinita!

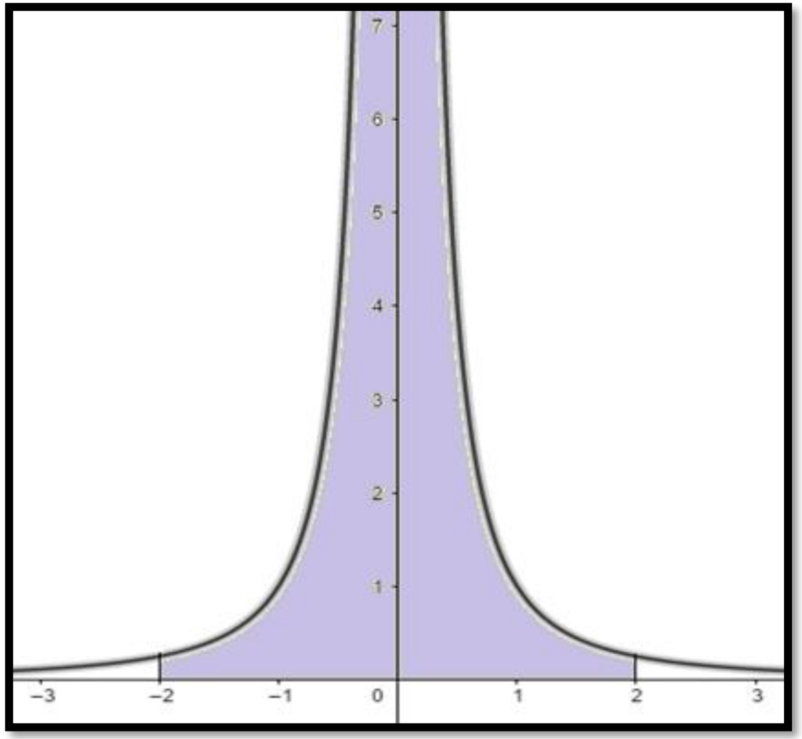


Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Note que, se não nos atentássemos para a necessidade de usar os limites laterais no ponto de descontinuidade e utilizássemos diretamente o TFC, obteríamos que:

$$I = \int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2} = \left.\frac{-1}{x}\right|_{-2}^{2} = \frac{-1}{2} - \frac{-1}{-2} = -1.$$

Esse cálculo errado indicaria que a área de uma região situada acima do eixo x resultaria em um valor negativo, o que não é possível. Tal absurdo é decorrente da utilização do TFC!