Universidade do Estado de Santa Catarina
Centro de Ciências Tecnológicas
Departamento de Matemática

ICD - Introdução ao Cálculo Diferencial e Integral

Professora Viviane

Funções Inversíveis

Conceitos

1. Uma função f com domínio A é chamada de função <u>`injetora`</u> se não houver dois elementos de A com a mesma imagem, ou seja, para quaisquer $x_1, x_2 \in A$,

$$\text{se } x_1 \neq x_2 \text{ então } f(x_1) \neq f(x_2).$$

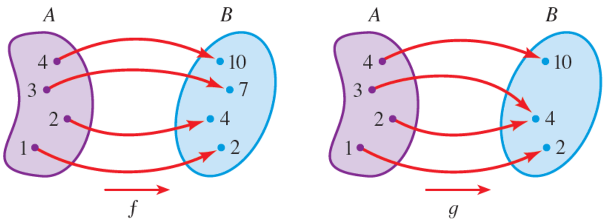


Figura 1: Funções f e g.

Na Figura 1 acima temos que f é injetora, mas g não, pois $g(3) = 4 = g(2)$.

2. Uma maneira equivalente de escrever a condição para que uma função f com domínio A seja injetora é: Para quaisquer $x_1, x_2 \in A$,

$$\text{se } f(x_1) = f(x_2) \text{ então } x_1 = x_2.$$

3. Temos que uma função f com domínio A não é injetora se existem $x_1, x_2 \in A$ com $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$. Caso uma função f não é injetora, basta um exemplo numérico para provar que f não satisfaz a propriedade (o que chamamos de contraexemplo), ou seja, tome dois números x_1, x_2 com $x_1 \neq x_2$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$.

4. **Teste da reta horizontal:** Uma função é injetora se, e somente se, nenhuma <u>`reta horizontal`</u> cruzar seu gráfico mais de uma vez.

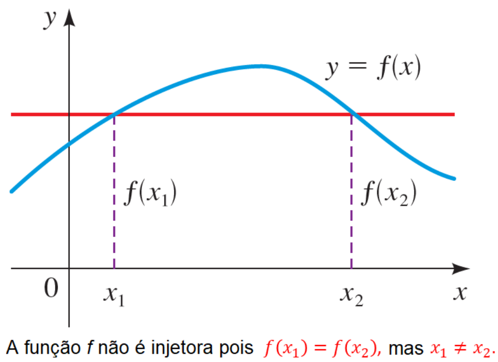


Figura 2: Gráfico de uma função não injetora.

5. A função $f(x) = x^3$ é injetora? E a função $g(x) = x^2$? Justifique sua resposta usando a definição de função injetora e depois usando o teste da reta horizontal.
Solução: Suponhamos que, para existem $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$ tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Então,

$$(x_1)^3 = (x_2)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{(x_1)^3} = \sqrt[3]{(x_2)^3}$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2.$$

Portanto, f `é injetora.`
Pela Figura 3 podemos ver que qualquer `reta horizontal corta o gráfico em apenas um ponto.`

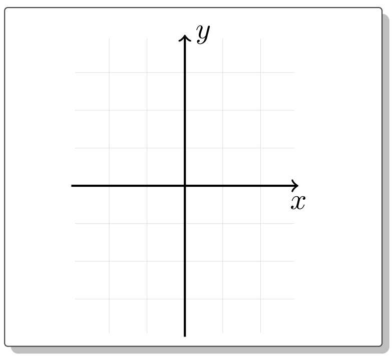


Figura 3: Função $f(x) = x^3$ `é injetora.`

Ao tentarmos fazer o mesmo processo para a função quadrática, temos que $\sqrt{(x_1)^2} = \sqrt{(x_2)^2}$ implica que $|x_1| = |x_2|$. Porém, isto **não** implica na igualdade $x_1 = x_2$. Tomando $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$, temos que $x_1 \neq x_2$, mas $g(-1) = 1 = g(1)$. Portanto, g não é injetora, como também vemos na Figura 4:

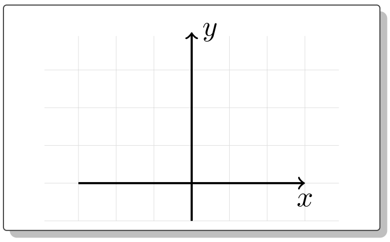


Figura 4: Função $f(x) = x^2$ não é injetora.

6. A função $g(x) = x^2$ com domínio $[0, +\infty)$ é injetora? Justifique sua resposta.
Sim. Suponhamos que $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ e $g(x_1) = g(x_2)$. Então,

$$(x_1)^2 = (x_2)^2 \Rightarrow \sqrt{(x_1)^2} = \sqrt{(x_2)^2}$$
$$\Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2,$$

pois $x_1, x_2 \geq 0$.

7. Mostre algebricamente que as funções $h(x) = 5x - 1$ e $k(x) = \sqrt{x} + 3$ são injetoras.
Sejam $x_1, x_2 \in \text{Dom}(h)$ tais que $h(x_1) = h(x_2)$. Então,

$$5x_1 - 1 = 5x_2 - 1 \Rightarrow 5x_1 = 5x_2 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

provando que k é injetora.

Agora, suponhamos que $x_1, x_2 \in \text{Dom}(k) = [0, +\infty)$ e $k(x_1) = k(x_2)$. Então,

$$\sqrt{x_1} + 3 = \sqrt{x_2} + 3 \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$$
$$\Rightarrow \sqrt{x_1}^2 = \sqrt{x_2}^2 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

mostrando que k é injetora.

8. Seja $f : A \to B$ uma função. Se existir uma função $g : B \to A$ tal que

$$(f \circ g)(x) = x, \ \forall\, x \in B$$

e

$$(g \circ f)(x) = x, \ \forall\, x \in A,$$

então g é chamada função inversa de f e é denotada por f^{-1}. Neste caso, também dizemos que f é inversível.

9. Seja $f : A \to B$ uma função inversível. Então, por definição:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x, \ \forall\, x \in B$$

e

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \ \forall\, x \in A.$$

Assim,

$$y = f(x) \Rightarrow f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$$

e

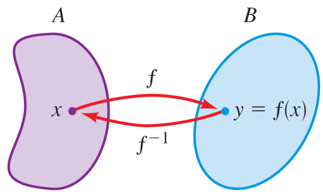
$$x = f^{-1}(y) \Rightarrow f(x) = f(f^{-1}(y)) = y.$$

Isto nos diz que

$$f(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-1}(y) = x,$$

ou ainda, se f leva x em y, então f^{-1} leva y de volta a x.

10. Seja f uma função injetora com domínio A e imagem B. Então, f é inversível e sua função inversa f^{-1} possui domínio B e imagem A.



O diagrama de flechas indica que f^{-1} reverte o efeito de f. A partir da definição, temos que

imagem de f^{-1} = domínio de f,

domínio de f^{-1} = imagem de f.

11. Se f é uma função injetora e $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ e $f(8) = -10$, então $f^{-1}(5) = 1$, $f^{-1}(7) = 3$ e $f^{-1}(-10) = 8$.

12. Um gráfico de uma função f é dado. f tem uma função inversa? Se sim, encontre $f^{-1}(1), f^{-1}(3) =$ e $f^{-1}(-1)$.

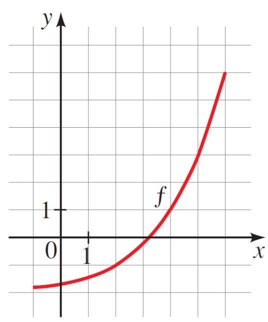


Figura 5: Gráfico de f.

Sim. $f^{-1}(1) = 4; f^{-1}(3) = 5; f^{-1}(-1) = 2$

13. Se o ponto $(3, 4)$ pertence ao gráfico da função f, então o ponto $\underline{(4, 3)}$ pertence ao gráfico da função f^{-1}.

14. Mostre que $f(x) = 2x - 4$ e $g(x) = \frac{x}{2} + 2$ são inversas uma da outra.
Basta verificar que
$$f(g(x)) = x \text{ e } g(f(x)) = x.$$
De fato,
$$f(g(x)) = 2\left(\frac{x}{2} + 2\right) - 4 = \frac{2x}{2} + 4 - 4 = x$$
e
$$g(f(x)) = \frac{2x - 4}{2} + 2 = x - 2 + 2 = x.$$

15. **Como encontrar o inverso de uma função injetora:**
   (i) Escreva $y = f(x)$;
   (ii) Resolva esta equação para x em termos de y (se possível);
   (iii) Troque x e y. A equação resultante é $y = f^{-1}(x)$.

   Determine a função inversa das funções:

   (a) $f(x) = \dfrac{x^5 - 3}{2}$
   Escrevemos $y = \frac{x^5-3}{2}$ e vamos isolar x:
   $$y = \frac{x^5 - 3}{2} \Rightarrow 2y = x^5 - 3 \Rightarrow 2y + 3 = x^5$$
   $$\Rightarrow \sqrt[5]{2y + 3} = x.$$
   Trocando x por y obtemos $y = \sqrt[5]{2x + 3}$. Logo,
   $$f^{-1}(x) = \sqrt[5]{2x + 3}.$$

   (b) $g(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 1}$.
   Escrevemos $y = \frac{2x+3}{x-1}$ e isolamos x:
   $$y = \frac{2x + 3}{x - 1} \Rightarrow (x - 1)(y) = 2x + 3$$
   $$\Rightarrow xy - y = 2x + 3$$
   $$\Rightarrow xy - 2x = 3 + y$$
   $$\Rightarrow x(y - 2) = 3 + y$$
   $$\Rightarrow x = \frac{3 + y}{y - 2}$$
   Trocando x por y obtemos $y = \frac{3+x}{x-2}$. Assim, $g^{-1}(x) = \dfrac{3 + x}{x - 2}$.

16. Uma função f tem a seguinte descrição verbal: "Multiplique por 3, adicione 5 e, em seguida, tome a terceira potência do resultado."

   (a) Escreva uma descrição verbal para f^{-1}.
   Extraia a raiz cúbica, subtraia 5 e, em seguida, divida por 3 o resultado.

   (b) Encontre fórmulas algébricas que expressam f e f^{-1} em termos da entrada x.
   $$f(x) = (3x + 5)^3 \text{ e } f^{-1}(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - 5}{3}.$$

17. O ponto (a, b) está no gráfico de f se, e somente se, o ponto $\underline{(b, a)}$ está no gráfico de f^{-1}. Obtemos o ponto (b, a) a partir do ponto (a, b) refletindo na reta $y = x$. Portanto, o gráfico de f^{-1} é obtido <u>refletindo</u> o gráfico de f na reta $y = x$.

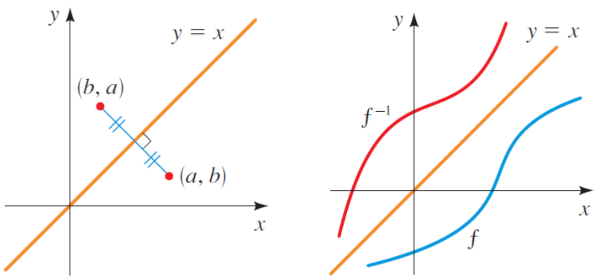
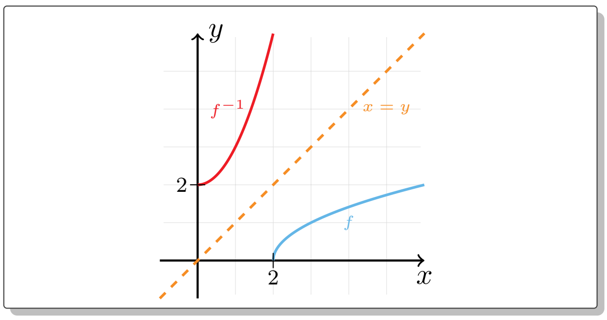


Figura 6: Simetria entre os gráficos de f e f^{-1}.

18. Esboce o gráfico de $f(x) = \sqrt{x - 2}$. Use o gráfico de f para esboçar o gráfico de f^{-1}. Encontre f^{-1}, $\mathrm{Dom}(f^{-1})$ e $\mathrm{Im}(f^{-1})$.



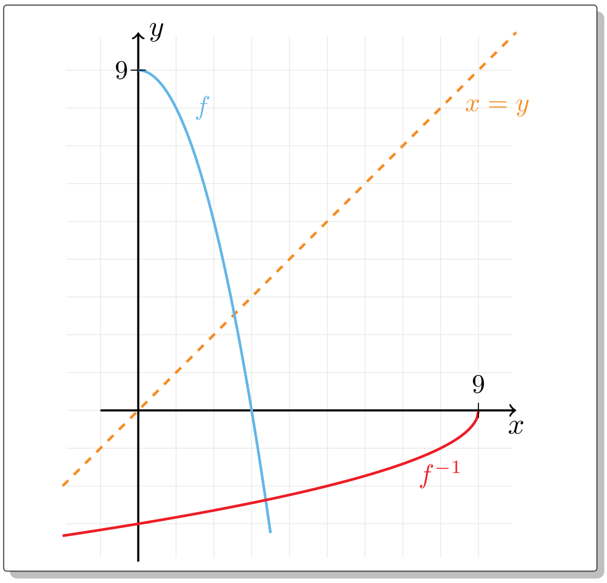
Escrevemos $y = \sqrt{x-2}$ e vamos isolar x:

$$y = \sqrt{x-2} \Rightarrow y^2 = x - 2 \Rightarrow y^2 + 2 = x.$$

Trocando x por y obtemos $y = x^2 + 2$. Portanto, $f^{-1}(x) = x^2 + 2$.
Note que $\text{Dom}(f) = [2, +\infty)$ e $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$. Então,

$$\text{Dom}(f^{-1}) = [0, +\infty) \quad \text{e} \quad \text{Im}(f^{-1}) = [2, +\infty).$$

19. Esboce o gráfico de $f(x) = 9 - x^2$ para $x \geq 0$. Use o gráfico de f para esboçar o gráfico de f^{-1}. Encontre $f^{-1}, \text{Dom}(f^{-1})$ e $\text{Im}(f^{-1})$.



Temos que

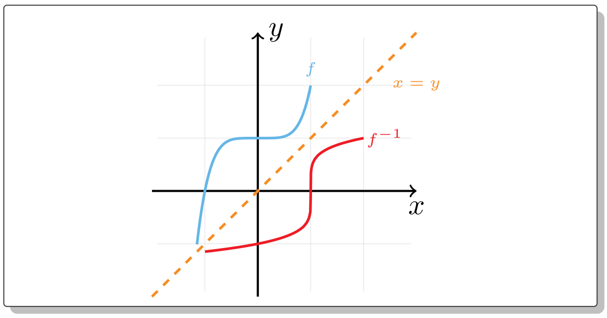
$$y = 9 - x^2 \Rightarrow y - 9 = -x^2 \Rightarrow 9 - y = x^2$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{9-y}.$$

Substituindo x por y temos $y = \sqrt{9-x}$ e, portanto,

$$f^{-1}(x) = \sqrt{9-x}.$$

Temos que $\text{Dom}(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid 9 - x \geq 0\} = (-\infty, 9]$. Como $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ temos e $\text{Im}(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

20. Esboce o gráfico de $f(x) = x^5 + 1$. Use o gráfico de f para esboçar o gráfico de f^{-1}. Encontre $f^{-1}, \text{Dom}(f^{-1})$ e $\text{Im}(f^{-1})$.



A partir de $y = x^5 + 1$ isole x:

$$y = x^5 + 1 \Rightarrow y - 1 = x^5 \Rightarrow \sqrt[5]{y-1} = x.$$

Troque x por y: $y = \sqrt[5]{x-1}$. Então,

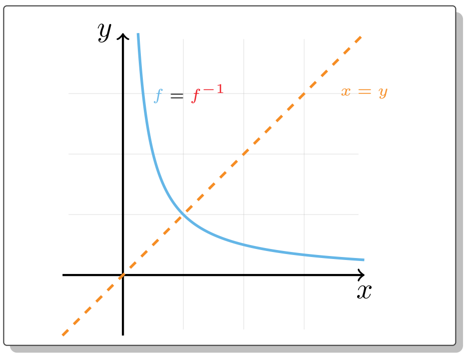
$$f^{-1} = \sqrt[5]{x-1}.$$

Note que $\text{Dom}(f^{-1}) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

21. Se uma função f é inversível (ou seja, f é injetora) o gráfico de f^{-1} é simétrico em relação a reta $y = x$ ao gráfico de f. (i) Faça um gráfico da função fornecida. (ii) O gráfico indica que f e f^{-1} têm a mesma função? (iii) Encontre a função f^{-1}. Use seu resultado para verificar sua resposta na parte (ii).

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (b) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$

(a) (i)

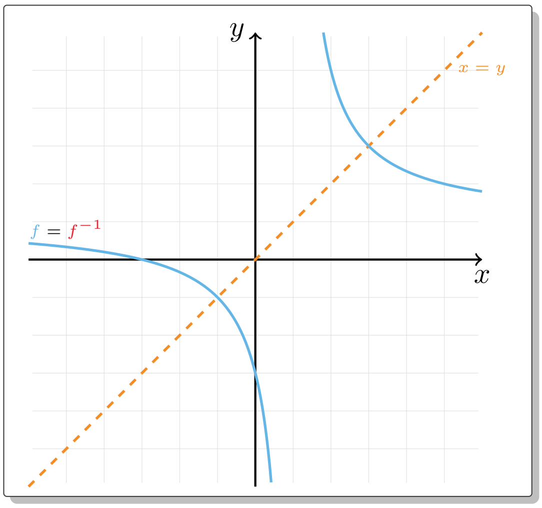


(ii) Sim, pois o gráfico de f é simétrico em relação a reta $y = x$, logo o gráfico de f^{-1} coincide com f.
(iii)

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y}$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{x}.$$

Portanto, $f = f^{-1}$, como percebemos em (ii).

(b) (i)



(ii) Sim, novamente pois o gráfico de f é simétrico em relação a reta $y = x$, logo o gráfico de f^{-1} coincide com f.

(iii)

$$y = \frac{x+3}{x-1} \Rightarrow (x-1)y = x+3$$
$$\Rightarrow xy - y = x + 3 \Rightarrow xy - x = y + 3$$
$$\Rightarrow x(y-1) = y+3 \Rightarrow x = \frac{y+3}{y-1}$$
$$\Rightarrow y = \frac{x+3}{x-1}$$

Temos que $f = f^{-1}$.

22. Em uma pizzaria local, o especial diário é de US$ 12 para uma pizza de queijo comum mais US$ 2 para cada cobertura adicional.

    (a) Encontre uma função p que modele o preço de uma pizza com n coberturas.

    $$p(n) = 12 + 2n.$$

    (b) Encontre o inverso da função p. O que p^{-1} representa?

    $$y = 12+2n \Rightarrow y - 12 = 2n \Rightarrow n = \frac{y-12}{2}.$$

    Assim, $p^{-1}(y) = \frac{y-12}{2}$. A função p^{-1} representa a quantidade de coberturas em função de um preço y.

    (c) Se uma pizza custa US \$ 22, quantas coberturas possui?

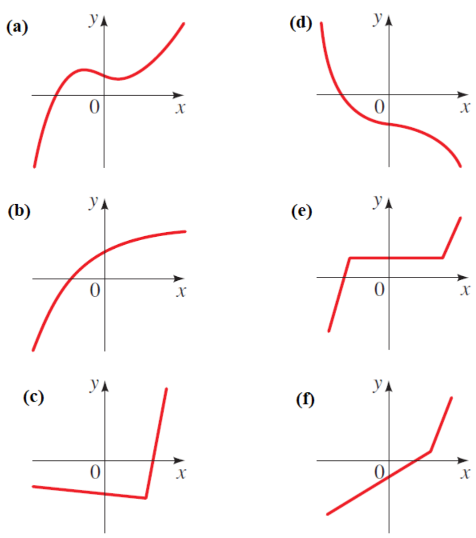
    Basta usar a função inversa:

    $$p^{-1}(22) = \frac{22-12}{2} = 5,$$

    isto significa que a pizza tem 5 coberturas.

Habilidades

1. O gráfico de uma função é dado. Determine se f é injetora.



2. Determine se a função é injetora. Justifique sua resposta.

    (a) $f(x) = -2x + 1$
    (b) $k(x) = x^4 - 5$
    (c) $m(x) = \sqrt[3]{x} + 1$
    (d) $g(x) = (x-1)^2$
    (e) $h(x) = (x-1)^2, \quad x \geq 1$

3. Determine o maior valor de a em $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ de modo que a função f de A em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ seja injetora.

4. Uma função injetora é dada. (i) Encontre a inversa da função. (ii) Esboce o gráfico de f e f^{-1} em um mesmo plano cartesiano.

    (a) $f(x) = \sqrt{x+3}$
    (b) $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x$
    (c) $f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 1$

5. Determine o domínio e imagem de cada função. Encontre a inversa de cada função, seu domínio e imagem.

(a) $f(x) = 5 - 4x^3$
(b) $g(x) = \dfrac{4x-2}{3x+1}$
(c) $h(x) = (x^5 - 6)^7$
(d) $k(x) = x^2 + x, \quad x \leq -\frac{1}{2}$
(e) $m(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2$

6. Verifique f e g são inversas uma da outra ($(f \circ g)(x) = x$ e $(g \circ f)(x) = x$).
   (a) $f(x) = 3x + 4$ e $g(x) = \dfrac{x-4}{3}$
   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x} + 1$
   (c) $f(x) =$ e $g(x) = \dfrac{2x+2}{1-x}$

7. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções inversíveis. Mostre que $f^{-1} \circ g^{-1}$ é a inversa da função $g \circ f$ e, portanto, $g \circ f$ também é inversível.

Gabarito

1. (a) não (b) sim (c) não (d) sim (e) não (f) sim

2. (a) sim (b) não (c) sim (d) não (e) sim

3. $a = \frac{3}{4}$

4. (a) $f^{-1}(x) = x^2 - 3$ (b) $f^{-1}(x) = -2x + 4$ (c) $y = \sqrt{x-1}$

5. (a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{5-x}{4}}$
   (b) $g^{-1}(x) = \frac{2+x}{4-3x}$
   (c) $h^{-1}(x) = \sqrt[5]{x^7 + 6}$
   (d) $k^{-1}(x) = \dfrac{-1 - \sqrt{1+4x}}{2}, \ x \geq -\frac{1}{2}$
   (e) $m^{-1}(x) = \sqrt{4 - x^2}, \ 0 \leq x \leq 2$

6.

7. Basta mostrar que $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)(x), \forall x \in A$ e $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})(x), \forall x \in B$.

Bibliografia

1. STEWART, James et all. Precalculus: Mathematics for Calculus. Seventh Edition. Boston: Cengage Learning, 2014.

2. GIMENEZ, Carmem S. C. e STARKE, Rubens. Introdução ao Cálculo. 2a Edição. Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 2010. Disponível em `http://mtm.grad.ufsc.br/files/2014/04/Introdu%C3%A7%C3%A3o-ao-C%C3%A1lculo.pdf`