Definição 1 (Assinatura) Uma **assinatura** $\Sigma = (\mathbf{Con}, \mathbf{Fun}, \mathbf{Pred})$ consiste em um conjunto de constantes, um conjunto de funções (com suas respectivas aridades) e um conjunto de predicados (com suas respectivas aridades).

Definição 2 (Termos) O **conjunto de termos Term** é formado por indução como o menor conjunto tal que

- $\mathbf{Con} \subseteq \mathbf{Term}$
- $\mathbf{Var} \subseteq \mathbf{Term}$
- se $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{Term}$ e $f^n \in \mathbf{Fun}$, então $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{Term}$.

Definição 3 (Fórmulas Atômicas) O conjunto de **fórmulas atômicas** $\mathfrak{F}_{0\ (\Sigma,\mathbf{Var})}$ é definido como o menor conjunto tal que

- se $t_1, t_2 \in \mathbf{Term}$, então $t_1 = t_2 \in \mathfrak{F}_0$
- se $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{Term}$ e $P^n \in Pred$, então $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathfrak{F}_0$.

Definição 4 (Fórmulas) O **conjunto de fórmulas** $\mathfrak{F}$ (da lógica de predicados) é o menor conjunto tal que

- $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{F}$
- se $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$, então $(\neg\mathcal{A}) \in \mathfrak{F}$
- se $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{F}$, então $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}),\ (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}),\ (\mathcal{A} \to \mathcal{B})\ \in\ \mathfrak{F}$
- se $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$ e $x \in \mathbf{Var}$, então $(\forall x.\mathcal{A}) \in \mathfrak{F}$
- se $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$ e $x \in \mathbf{Var}$, então $(\exists x.\mathcal{A}) \in \mathfrak{F}$.

Definição 5 (Estrutura) Uma **estrutura** para a assinatura Σ consiste em

- um domínio não vazio D
- $\mathbf{Con}_D : \mathbf{Con} \to D$ que associa cada $c \in \mathbf{Con}$ a um elemento $d \in D$
- $\mathbf{Fun}_D$ associa cada $f^n \in \mathbf{Fun}$ a uma função do tipo $\overbrace{D \times D \times \ldots \times D}^{n} \to D$
- $\mathbf{Pred}_D$ associa cada $P^n \in \mathbf{Pred}$ a um subconjunto de n-uplas de elementos de D, indicando para quais casos o predicado é verdadeiro.

Definição 6 (Interpretação de Termos) A função $[-]^\sigma_\mathcal{D} : \mathbf{Term} \to D$ é definida indutivamente por

- $[x]^\sigma_\mathcal{D} = \sigma(x)$, para $x \in \mathbf{Var}$
- $[c]^\sigma_\mathcal{D} = c_D$, para $c \in \mathbf{Con}$
- $[f(t_1, \ldots, t_k)]^\sigma_\mathcal{D} = f_D([t_1]^\sigma_\mathcal{D}, \ldots, [t_k]^\sigma_\mathcal{D})$, para $f \in \mathbf{Fun}$.

Definição 7 (Valoração de Fórmula Atômica) A valoração de uma fórmula atômica é determinada como segue

$$[t_1 = t_2]^\sigma_\mathcal{D} = \begin{cases} 1 & \text{se } [t_1]^\sigma_\mathcal{D} = [t_2]^\sigma_\mathcal{D} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$[P(t_1, \ldots, t_k)]^\sigma_\mathcal{D} = P_D([t_1]^\sigma_\mathcal{D}, \ldots, [t_k]^\sigma_\mathcal{D}).$$

Definição 8 (Interpretação de Fórmulas) A valoração das fórmulas construídas através dos conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\to$ é definida da mesma forma que em lógica proposicional.

Uma interpretação intuitiva de fórmulas quantificadas existencialmente, $\exists x.\mathcal{A}(x)$ é testar a fórmula aberta $\mathcal{A}(x)$ buscando **alguma substituição** para x que a faça verdadeira.

Uma interpretação intuitiva de fórmulas quantificadas universalmente, $\forall x.\mathcal{A}(x)$ é testar a fórmula aberta $\mathcal{A}(x)$ com **todas** as substituições possíveis para x e certificando que *todas elas* fazem a fórmula verdadeira.

Definição 9 (Consequência Lógica) Dizemos X é *consequência* de Γ, denotado por $\Gamma \vDash X$ quando todos sistemas algébricos e interpretações de variáveis que satisfazem Γ também satisfazem X.

Definição 10 (Equivalência Lógica) Duas fórmulas A e B são *logicamente equivalentes*, denotado por $A \equiv B$ se, e somente se, $A \vDash B$ e $B \vDash A$.

LMA0001 - Lógica Matemática
Regras da Dedução Natural

$$
\begin{array}{r|ll}
m. & A & \\
 & & \\
 & A & \text{R m}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|ll}
m. & A & \\
n. & B & \\
 & & \\
 & A \wedge B & \wedge\text{I m,n}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|ll}
m. & A \wedge B & \\
 & & \\
 & A & \wedge\text{E m}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|ll}
m. & A \wedge B & \\
 & & \\
 & B & \wedge\text{E m}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \\
\begin{array}{r} i. \\ \\ j. \end{array} & \boxed{\begin{array}{ll} A & \text{Hipótese} \\ \vdots & \\ B & \end{array}} \\
 & \\
 & A \to B \qquad \to\text{I i-j}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|ll}
m. & A \to B & \\
n. & A & \\
 & & \\
 & B & \to\text{E m,n}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|ll}
m. & A & \\
 & & \\
 & A \vee B & \vee\text{I m}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|ll}
m. & B & \\
 & & \\
 & A \vee B & \vee\text{I m}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
m. & A \vee B \\
\begin{array}{r} i. \\ \\ j. \end{array} & \boxed{\begin{array}{ll} A & \text{Hipótese} \\ \vdots & \\ C & \end{array}} \\
 & \\
\begin{array}{r} k. \\ \\ l. \end{array} & \boxed{\begin{array}{ll} B & \text{Hipótese} \\ \vdots & \\ C & \end{array}} \\
 & \\
 & C \qquad \vee\text{E m,i-j,k-l}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \\
\begin{array}{r} i. \\ \\ j. \end{array} & \boxed{\begin{array}{ll} A & \text{Hipótese} \\ \vdots & \\ \bot & \end{array}} \\
 & \\
 & \neg A \qquad \neg\text{I i-j}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|ll}
m. & \neg A & \\
n. & A & \\
 & & \\
 & \bot & \neg\text{E m,n}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
i. & \boxed{\begin{array}{ll} \neg A & \text{Hipótese} \\ \vdots & \\ \bot & \end{array}} \\
j. & \\
 & \\
 & A \qquad \text{IP i-j}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|ll}
m. & \bot & \\
 & & \\
 & A & \text{X m}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|ll}
m. & A(\ldots c \ldots c \ldots) & \\
 & & \\
 & \exists x A(\ldots x \ldots c \ldots) & \exists\text{I m}
\end{array}
$$

RESTRIÇÃO:

- x não pode ocorrer em $A(\ldots c \ldots c \ldots)$

$$
\begin{array}{r|ll}
m. & A(\ldots c \ldots c \ldots) & \\
 & & \\
 & \forall x A(\ldots x \ldots x \ldots) & \forall\text{I m}
\end{array}
$$

RESTRIÇÕES:

- c não pode ocorrer em premissas ou em hipóteses não fechadas
- x não pode ocorrer em $A(\ldots c \ldots c \ldots)$

$$
\begin{array}{r|ll}
m. & \forall x A(\ldots x \ldots x \ldots) & \\
 & & \\
 & A(\ldots c \ldots c \ldots) & \forall\text{E m}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
m. & \exists x A(\ldots x \ldots x \ldots) \\
i. & \boxed{\begin{array}{ll} A(\ldots c \ldots c \ldots) & \text{Hipótese} \\ \vdots & \\ B & \end{array}} \\
j. & \\
 & \\
 & B \qquad \exists\text{E m,i-j}
\end{array}
$$

RESTRIÇÕES:

- c não pode ocorrer em premissas ou em hipóteses não fechadas
- c não pode ocorrer em $\exists x A(\ldots x \ldots x \ldots)$
- c não pode ocorrer em B