Limite – Definição Formal

Alex é vendedor de uma empresa de softwares e recebe um salário fixo de R$ 1.200,00 por mês além de uma comissão de R$ 10,00 por software vendido.

Responda:

a. Se Alex recebeu o pagamento de R$ 1.800,00, qual foi o número de softwares vendidos?

Seja f a função que representa o salário de Alex e x o número de softwares vendidos:

$$\boxed{f(x) = 1200 + 10x}$$

Qual o valor de x para que $f(x) = 1800$?

$$1800 = 1200 + 10x$$

$$600 = 10x$$

$$\boxed{x = 60}$$

b. Suponha que Alex deseja receber no mês seguinte um salário entre R$ 1.600,00 e R$ 2.000,00, quantos softwares deverá vender?

Qual a variação de x para que $1600 \leq f(x) \leq 2000$?

$$1600 \leq 1200 + 10x \leq 2000$$

$$400 \leq 10x \leq 800$$

$$\boxed{40 \leq x \leq 80}$$

c. Refaça a questão (b) supondo que este funcionário planeja receber, no mês seguinte, o pagamento no intervalo de R$ 1.700,00 à R$ 1.900,00.

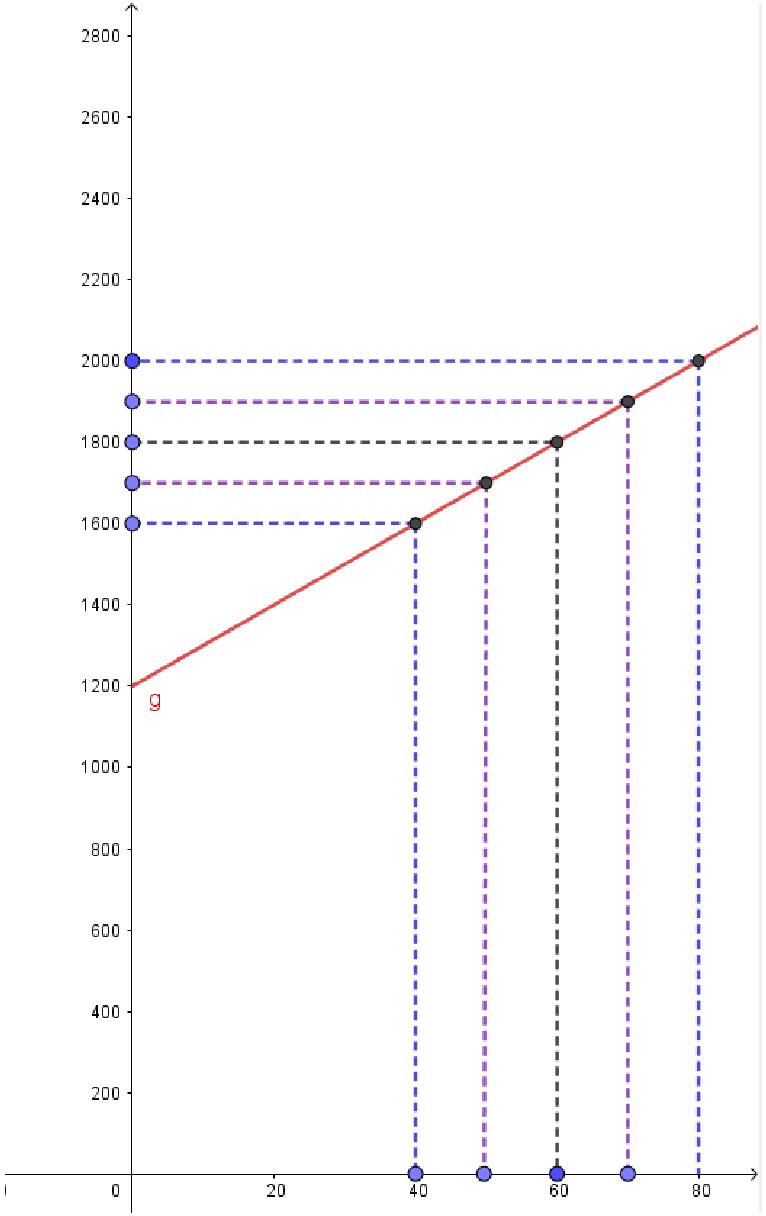
Qual a variação de x para que $1700 \leq f(x) \leq 1900$?

$$1700 \leq 1200 + 10x \leq 1900$$

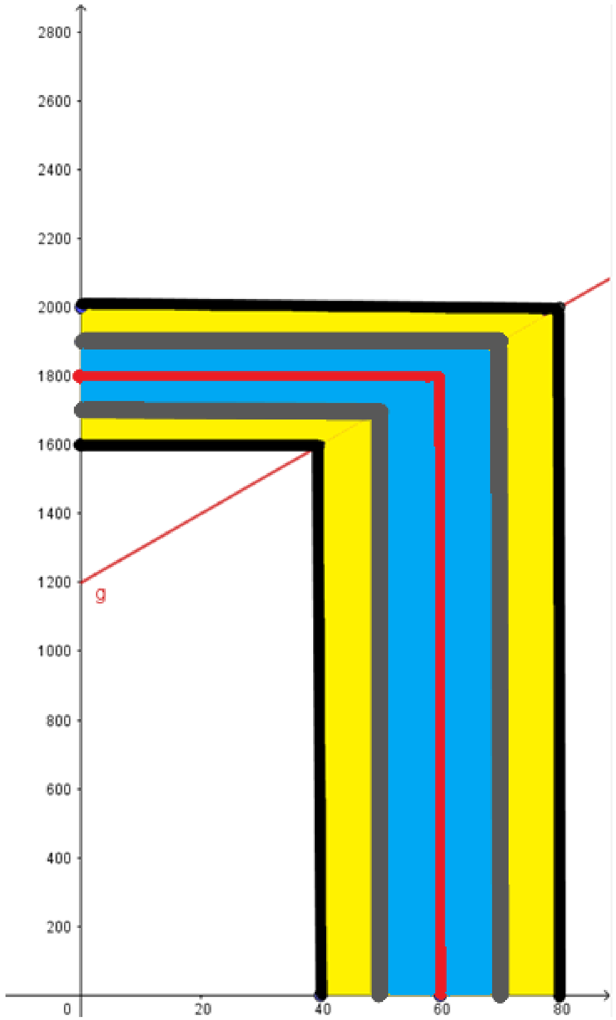
$$500 \leq 10x \leq 700$$

$$\boxed{50 \leq x \leq 70}$$

d. Represente graficamente as situações dos itens (a, b, c) e responda: O que você pode observar que ocorre com o número de softwares vendidos quando a faixa salarial se estreita em torno de R$ 1.800,00?



e. Agora, suponha que esse funcionário deseje receber mensalmente, em torno de R$ 1.800,00 com um erro muito pequeno, que você pode denotar por ε. Qual a relação entre o erro e a variação em torno da resposta encontrada na letra (a)? Você pode denotar a variação do valor das vendas dos projetos por δ.



Formalizando:

$$40 \leq x \leq 80 \quad \Leftarrow \quad 1600 \leq f(x) \leq 2000$$

$$40 - 60 \leq x - 60 \leq 80 - 60 \qquad 1600 - 1800 \leq f(x) - 1800 \leq 2000 - 1800$$

$$-20 \leq x - 60 \leq 20 \qquad -200 \leq f(x) - 1800 \leq 200$$

$$|x - 60| \leq 20 \qquad |f(x) - 1800| \leq 200$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$$50 \leq x \leq 70 \quad \Leftarrow \quad 1700 \leq f(x) \leq 1900$$

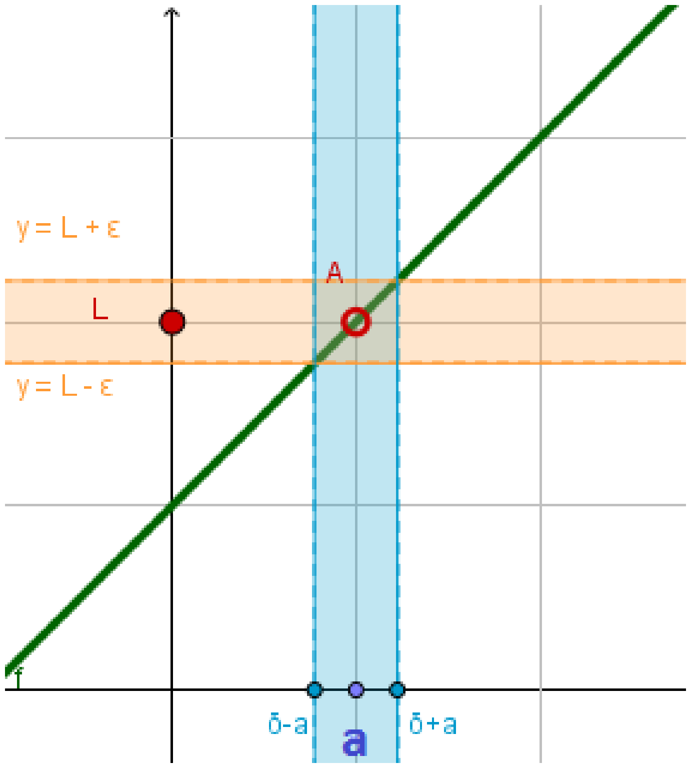
$$50 - 60 \leq x - 60 \leq 70 - 60 \qquad 1700 - 1800 \leq f(x) - 1800 \leq 1900 - 1800$$

$$-10 \leq x - 60 \leq 10 \qquad -100 \leq f(x) - 1800 \leq 100$$

$$|x - 60| \leq 10 \qquad |f(x) - 1800| \leq 100$$

Definição formal:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \text{Dado } \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que se } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



Exemplos:

Encontre a relação entre ε e δ para mostrar que os limites abaixo existem e são iguais aos valores informados.

$a)$ $\lim_{x \to 60} (1200 + 10x) = 1800$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - 60| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1800| < \varepsilon$

$|f(x) - 1800| < \varepsilon$ desde que $|x - 60| < \delta$

$\Rightarrow |1200 + 10x - 1800| < \varepsilon$

$\Rightarrow |600 + 10x| < \varepsilon$

$\Rightarrow |10(-60 + x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow 10|x - 60| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |x - 60| < \frac{\varepsilon}{10}$$

Conclusão:

Escolhendo $\delta = \frac{\varepsilon}{10}$ o limite está provado.

$$b)\ \lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x-1}=5$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x-1| < \delta \ \Rightarrow |f(x) - 5\,| < \varepsilon$

$|f(x) - 5\,| < \varepsilon$ desde que $|x-1| < \delta$

$$\Rightarrow \left|\frac{2x^2+x-3}{x-1} - 5\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{(2x+3)(x-1)}{x-1} - 5\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |2x+3-5\,| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |2x-2\,| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow 2|x-1\,| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |x-1\,| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Conclusão:

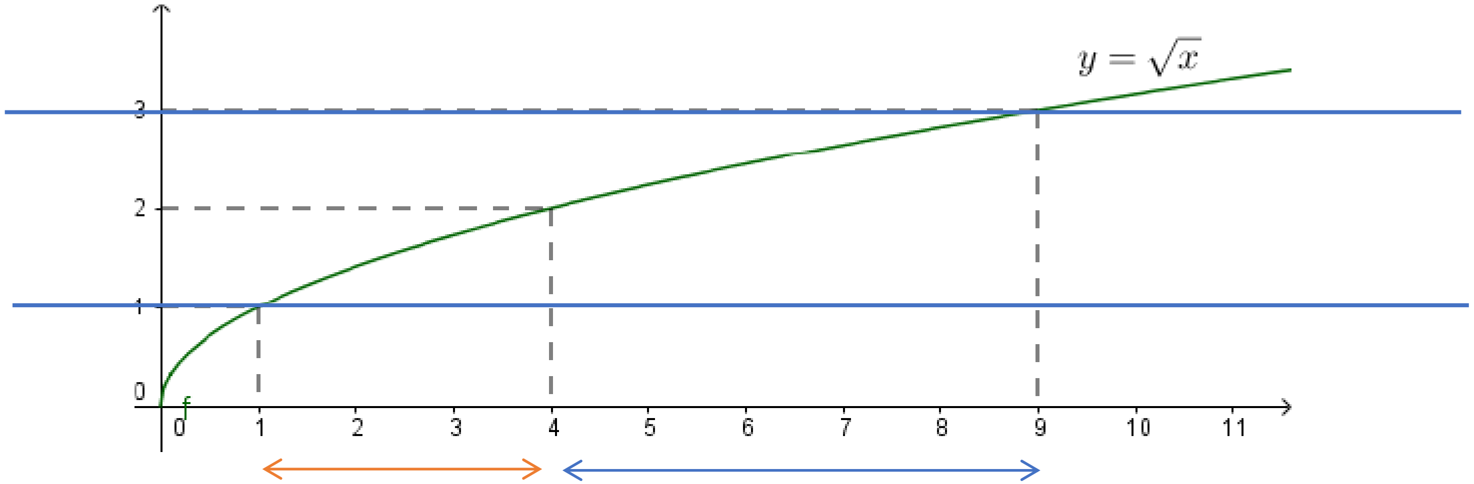
Escolhendo $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ o limite está provado.

Exemplos:

Assumindo $\varepsilon = 1$, encontre o valor de δ para que os limites abaixo existem e são iguais aos valores informados.

a) $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$

Graficamente:



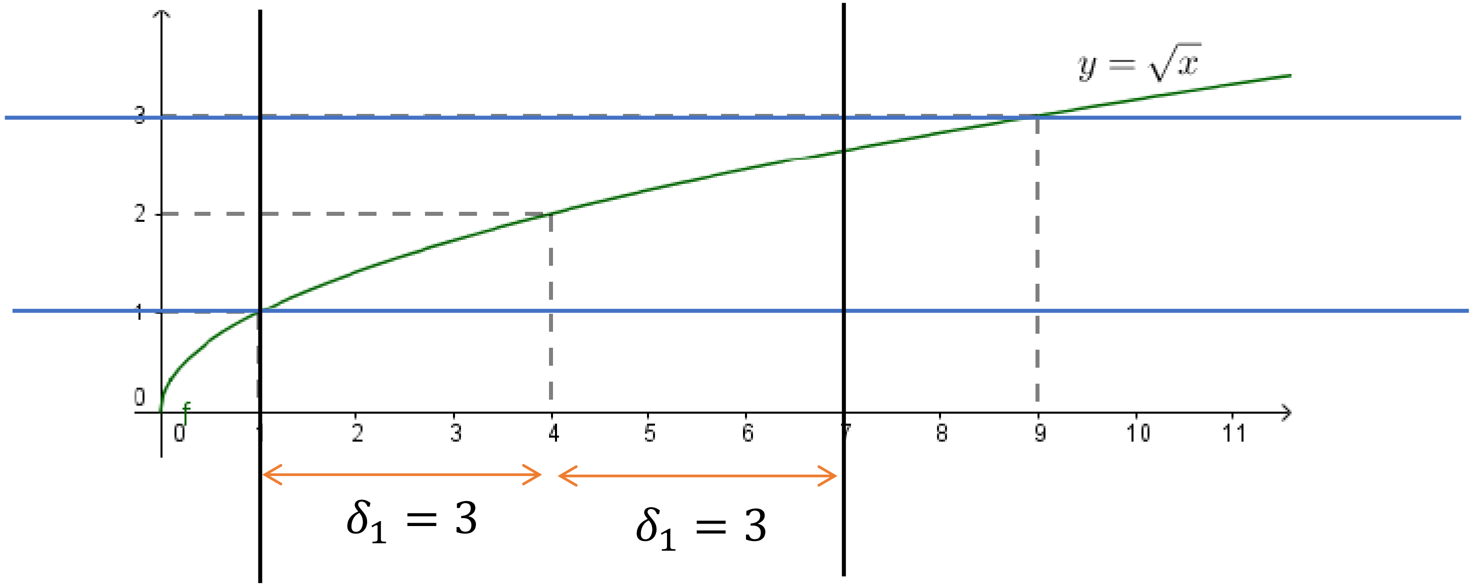
$\delta_1 = 3$ $\delta_2 = 5$

Exemplos:

Assumindo $\varepsilon = 1$, encontre o valor de δ para que os limites abaixo existem e são iguais aos valores informados.

a) $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$

Graficamente:

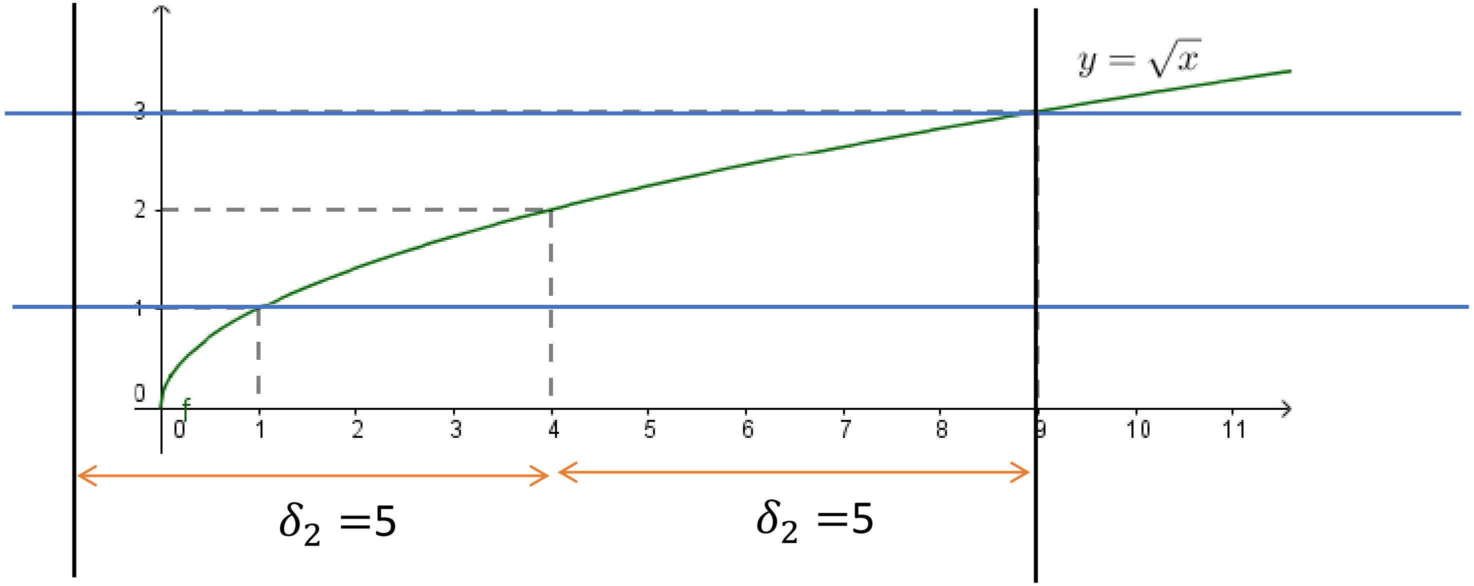


Exemplos:

Assumindo $\varepsilon = 1$, encontre o valor de δ para que os limites abaixo existem e são iguais aos valores informados.

a) $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$

Graficamente:



Exemplos:

Assumindo $\varepsilon = 1$, encontre o valor de δ para que os limites abaixo existem e são iguais aos valores informados.

a) $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = 2$

Analiticamente:

Dado $\varepsilon = 1 > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - 4| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < 1$

$|f(x) - 2| < 1$ desde que $|x - 4| < \delta$

$\Rightarrow \left|\sqrt{x} - 2\right| < 1$

$-\delta < x - 4 < \delta$

$\Rightarrow -1 < \sqrt{x} - 2 < 1$

$\Rightarrow 1 < \sqrt{x} < 3$

$\Rightarrow 1 < x < 9$

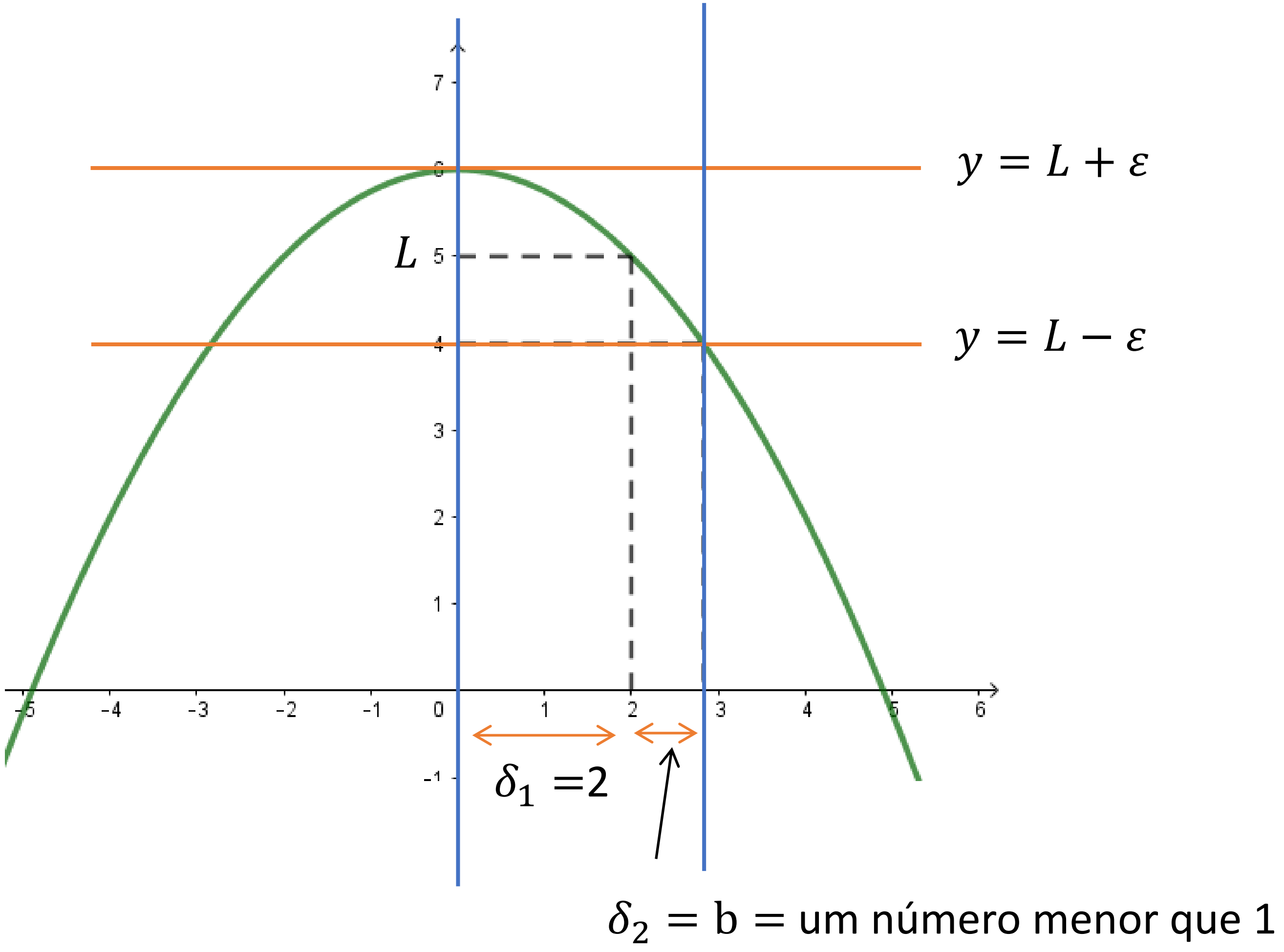
$\Rightarrow 1 - 4 < x - 4 < 9 - 4$

$\Rightarrow -3 < x - 4 < 5$

Conclusão: $\delta = min\{|-3|, 5\}$

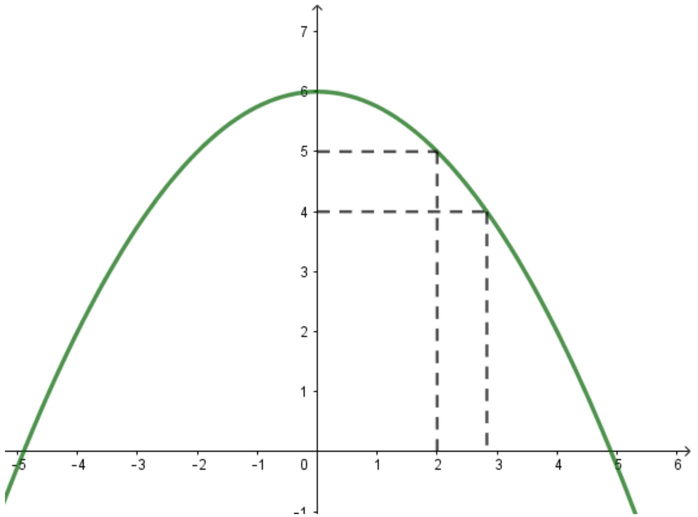
b) $\lim_{x \to 2} \left(6 - \frac{x^2}{4}\right) = 5$

Graficamente:



b) $\lim_{x \to 2} \left(6 - \frac{x^2}{4}\right) = 5$

Analiticamente:



Se $\varepsilon = 1$

Dado $\boxed{\varepsilon > 0}$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon$

$|f(x) - 5| < 1$ desde que $|x - 2| < \delta$

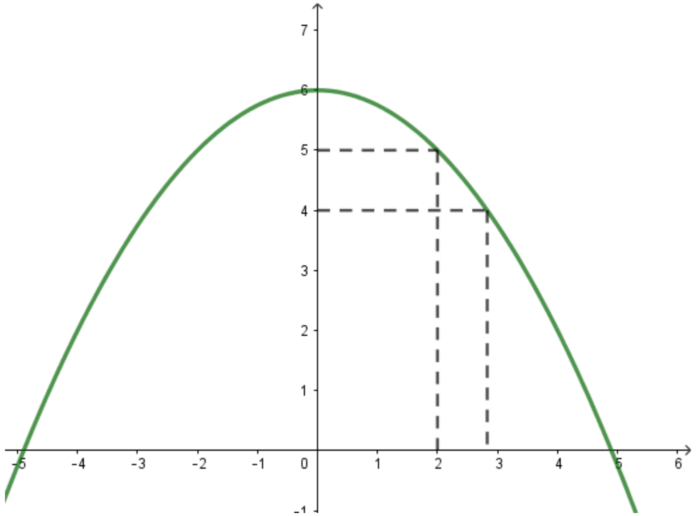
$\Rightarrow \left|6 - \frac{x^2}{4} - 5\right| < 1 \quad \Rightarrow \left|1 - \frac{x^2}{4}\right| < 1 \quad \Rightarrow \left|\frac{4 - x^2}{4}\right| < 1 \Rightarrow \frac{|4 - x^2|}{4} < 1$

$\Rightarrow |4 - x^2| < 4$

$\Rightarrow -4 < 4 - x^2 < 4$

b) $\lim_{x \to 2}\left(6 - \frac{x^2}{4}\right) = 5$

Analiticamente:



Se $\varepsilon = 1$

Dado $\boxed{\varepsilon > 0}$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon$

$|f(x) - 5| < 1$ desde que $|x-2| < \delta$

$\delta < x - 2 < \delta$

$\vdots$

$\Rightarrow |4 - x^2| < 4$

$\Rightarrow -4 < 4 - x^2 < 4$

$-4 < 4 - x^2$

$0 < 8 - x^2$

$0 = 8 - x^2$

$x = \pm 2\sqrt{2}$

e

$4 - x^2 < 4$

$-x^2 < 0$

$x^2 > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$

Fazendo a interseção dos conjuntos, temos que:

$-2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$, excluindo $x = 0$

$-2 - 2\sqrt{2} < x - 2 < 2\sqrt{2} - 2$

$-4.8 \approx -2 - 2\sqrt{2} < x - 2 < 2\sqrt{2} - 2 \approx 0{,}8$

Conclusão:
Escolhendo $\delta = \min\{0{,}8; -4{,}8\}$,
o limite está provado.

b) $\lim_{x \to 2}\left(6 - \frac{x^2}{4}\right) = 5$

Outra opção de resolução, considerando um ε qualquer.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon$

$|f(x) - 5| < \varepsilon$ desde que $|x - 2| < \delta$

$$\Rightarrow \left|6 - \frac{x^2}{4} - 5\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|1 - \frac{x^2}{4}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{4 - x^2}{4}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{|4 - x^2|}{4} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |4 - x^2| < 4\varepsilon$$

$$\Rightarrow |(2 - x)(2 + x)| < 4\varepsilon$$

$$\Rightarrow |2 - x||2 + x| < 4\varepsilon$$

$$\Rightarrow |x - 2| < \frac{4\varepsilon}{|2 + x|}$$

Supondo $\delta \leq 1$, temos que:

$$\Rightarrow |x - 2| < \delta \leq 1$$

$$\Rightarrow |x - 2| \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq x - 2 \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq x \leq 3$$

$$\Rightarrow 3 \leq x + 2 \leq 5$$

$$\Rightarrow 3 \leq | x + 2 | \leq 5$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{3} \geq \frac{1}{|2 + x|}} \geq \frac{1}{5}$$

b) $\lim_{x \to 2} \left(6 - \frac{x^2}{4}\right) = 5$

Outra opção de resolução, considerando um ε qualquer.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon$

$|f(x) - 5| < \varepsilon$ desde que $|x - 2| < \delta$

$$\Rightarrow \left|6 - \frac{x^2}{4} - 5\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|1 - \frac{x^2}{4}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{4 - x^2}{4}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{|4 - x^2|}{4} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |4 - x^2| < 4\varepsilon$$

$$\Rightarrow |(2 - x)(2 + x)| < 4\varepsilon$$

$$\Rightarrow |2 - x||2 + x| < 4\varepsilon$$

$$\Rightarrow |x - 2| < \frac{4\varepsilon}{|2 + x|}$$

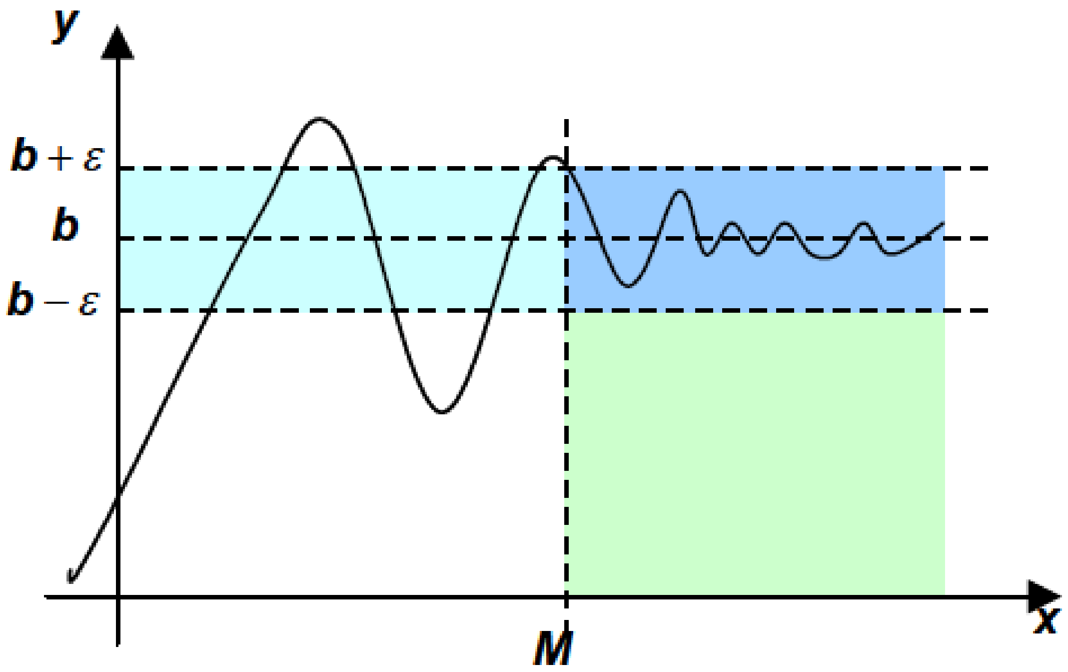
$$\Rightarrow |x - 2| < \frac{1}{|2 + x|} 4\varepsilon \leq \frac{4\varepsilon}{3}$$

Conclusão: Escolhendo $\delta = \min\left\{1, \frac{4\varepsilon}{3}\right\}$, o limite está provado.

Se $\varepsilon = 1 \Rightarrow \delta = \min\left\{1, \frac{4}{3}\right\}$

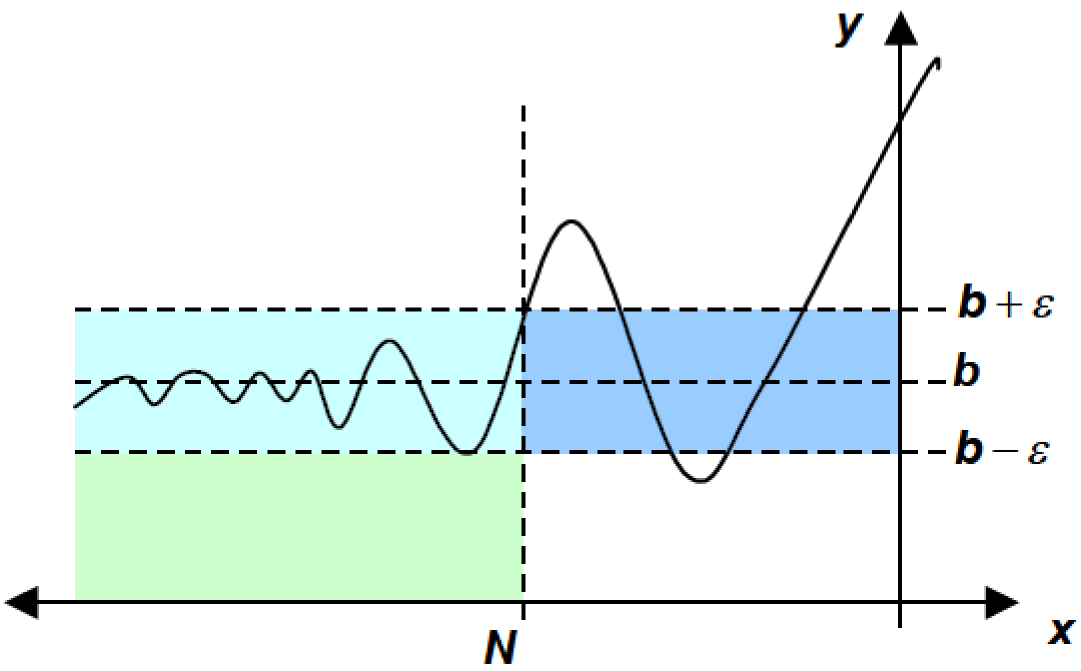
Limite no infinito

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ ⟺ Dado $\varepsilon > 0$, existe $\mathrm{M} > 0$ tal que se $x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$



Limite no infinito

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ ⟺ Dado $\varepsilon > 0$, existe $\mathrm{M} < 0$ tal que se $x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$



c) $\lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que se $x > M \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon$

$\Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow |e^{-2x}| < \varepsilon$

Como $y = e^{-2x} > 0$ para todo número real, temos que:

$\Rightarrow e^{-2x} < \varepsilon$

Isolando a variável x, temos que:

$\Rightarrow \ln(e^{-2x}) < \ln(\varepsilon)$, existe pois $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow -2x ln(e) < \ln(\varepsilon)$

$\Rightarrow -2x < \ln(\varepsilon)$

$$\Rightarrow x > -\frac{1}{2}\ln(\varepsilon) = M$$

$M > 0 \Leftrightarrow \varepsilon \in (0,1)$

Conclusão:

$M = -\frac{1}{2}\ln(\varepsilon)$, com $\varepsilon \in (0,1)$