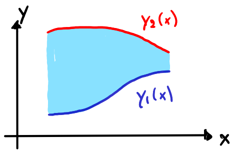
Integral Dupla:

Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais. Se D é uma região retangular dada por $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ a\le x\le b \text{ e } c\le y\le d\}$ com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ então

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dxdy$$

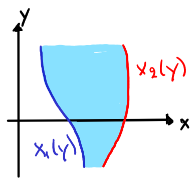
Definição 1: Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais. Se D for uma região não retangular dada por $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\to\mathbb{R};\ a\le x\le b \text{ e } y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$ com $a,b \in \mathbb{R}$ então

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dydx$$



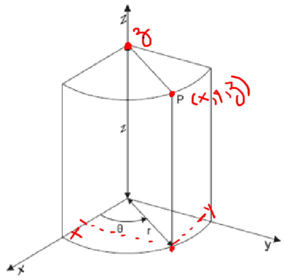
Definição 1: Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais. Se D for uma região não retangular dada por $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\to\mathbb{R};\ c\le y\le d \text{ e } x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$ com $a,b \in \mathbb{R}$ então

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dxdy$$



Integrais Triplas em coordenadas Cilíndricas

O sistema de coordenadas cilíndricas utiliza o raio polar (r), o ângulo polar (θ) e a altura (z) para representar um ponto $P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.



é definido pelas relações:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \\ z = z \end{cases}$$

Definição: Seja S um sólido tridimensional descrito algebricamente por: $S=\{(\theta,r,z)\in\mathbb{R}^3;\ \alpha\le\theta\le\beta,\ r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta) \text{ e } z_1(r,\theta)\le z\le z_2(r,\theta)\}$. Para uma função contínua $f: S\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ define-se a integral tripla de f sobre S por:

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dV = \int_\alpha^\beta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}\int_{z_1(\theta)}^{z_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)\, r\,dz\,dr\,d\theta$$

⚠ Em cilíndricas, utiliza-se somente uma única ordem de integração: $dz\,dr\,d\theta$

Integrais Duplas em coordenadas polares

Temos que:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_\alpha^\beta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

onde: $dA = dxdy = r\,dr\,d\theta$;

⚠ transformar $f(x,y)$ em $f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$ com relações cartesianas e polares.

Integrais Triplas: Seja S qualquer sólido tridimensional descrito algebricamente por $S=\{(x,y)\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R};\ a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x) \text{ e } z_1(x,y)\le z\le z_2(x)\}$. Para a função contínua $f: S\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ a integral tripla de f sobre S é definida por

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dxdydx = \int_a^b\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dzdydx$$

Obs: A resolução é feita de dentro p/ fora.

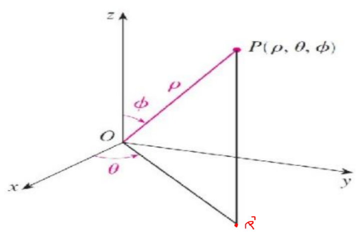
temos que:
- z é variável totalmente dependente
- y é variável parcialmente dependente
- x é variável independente.

• Para a integral tripla temos 6 ordens de integração.

Obs: Se $f(x,y,z) = 1\ \forall (x,y,z)\in S$ a integral tripla nos fornece o volume de S.

Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas

O sistema de coordenadas esféricas utiliza o raio esférico ρ, o ângulo vertical ϕ, e o ângulo polar θ, para representar um ponto $P\in\mathbb{R}^3$.



$$\begin{cases} \rho = |\vec{OP}| \ge 0 \\ \phi = \text{âng}(\vec{Oz}_+, \vec{OP}) \\ \theta = \text{âng}(\vec{Ox}_+, \vec{OP'}) \end{cases}$$

Variação: $\begin{cases} \rho\in[0,+\infty] \\ \phi\in[0,\pi] \\ \theta\in[0,2\pi] \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \rho\,\text{sen}(\phi)\cos(\theta) \\ y = \rho\,\text{sen}(\phi)\,\text{sen}(\theta) \\ z = \rho\cos(\phi) \\ r = \rho\,\text{sen}(\phi) \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \phi = \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \\ \theta = \text{arctg}(y/x) \end{cases}$$

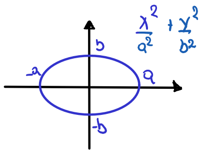
Definição: Seja S um sólido tridimensional descrito algebricamente, em coordenadas esféricas por: $S=\{(\theta,\phi,\rho)\in\mathbb{R}^3;\ \alpha\le\theta\le\beta,\ \phi_1(\theta)\le\phi\le\phi_2(\theta),\ \rho_1(\theta,\phi)\le\rho\le\rho_2(\theta,\phi)\}$. Para uma função $f: S\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ define-se a integral tripla de f sobre S por

$$\iiint_S f\,dV = \int_\alpha^\beta\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)}\int_{\rho_1(\theta,\phi)}^{\rho_2(\theta,\phi)} f(\rho\,\text{sen}(\phi)\cos(\phi), \rho\,\text{sen}(\phi)\,\text{sen}(\theta), \rho\cos(\theta)).\ \underbrace{\rho^2\,\text{sen}(\phi)\,d\rho\,d\phi\,d\theta}_{dV}$$

⚠ Em esféricas, utiliza-se somente uma única ordem de integração: $d\rho\, d\phi\, d\theta$.

Curvas em cartesianas

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



- Elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

↳ a é o semi-eixo maior (maior denominador)

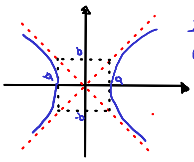
↳ vertices do semi-eixo maior está em $\pm a$ e do semi-eixo menor em $\pm b$.

- Hipérbole: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ou $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$

↳ vértices estão em $\pm a$ para hipérbole horizontal e $\pm b$ para uma hipérbole vertical

↳ assintotas são $y=\pm \frac{b}{a}x$ (horizontal) ou $x=\pm\frac{a}{b}y$ (vertical)

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

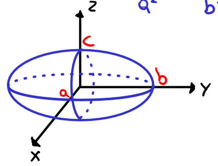


Relações Trigonométricas

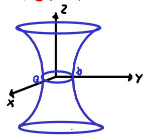
- $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $\text{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta$
- $1+\text{cotg}^2\theta = \text{cossec}^2\theta$
- $\text{sen}(2\theta) = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$
- $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \text{sen}^2\theta$
- $\text{sen}(a\pm b) = \text{sen}\,a\cos b \pm \text{sen}\,b\cos a$
- $\cos(a\pm b) = \cos a\cos b \mp \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$
- $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)$
- $\text{sen}^2(\theta) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\theta)$

Curvas no $\mathbb{R}^3$

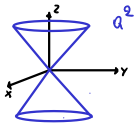
Elipsoide: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



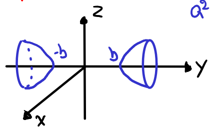
Hiperbolóide: 1 folha $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



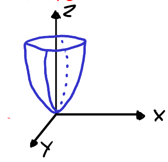
Cone: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$



Hiperbole 2 folhas $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

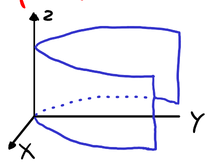


Paraboloide eliptico $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=\frac{z}{c}$

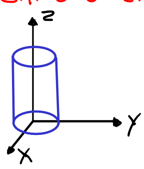


Paraboloide hiperbólico $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=\frac{z}{c}$

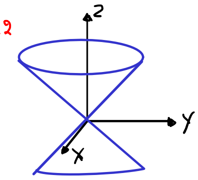
Cilindro parabólico $y=ax^2$



Cilindro eliptico $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$



Cone: $z^2=x^2+y^2$



Soma e Produto $ax^2+bx+c=0$

S: $r_1+r_2=-\frac{b}{a}$; P: $r_1\cdot r_2=\frac{c}{a}$