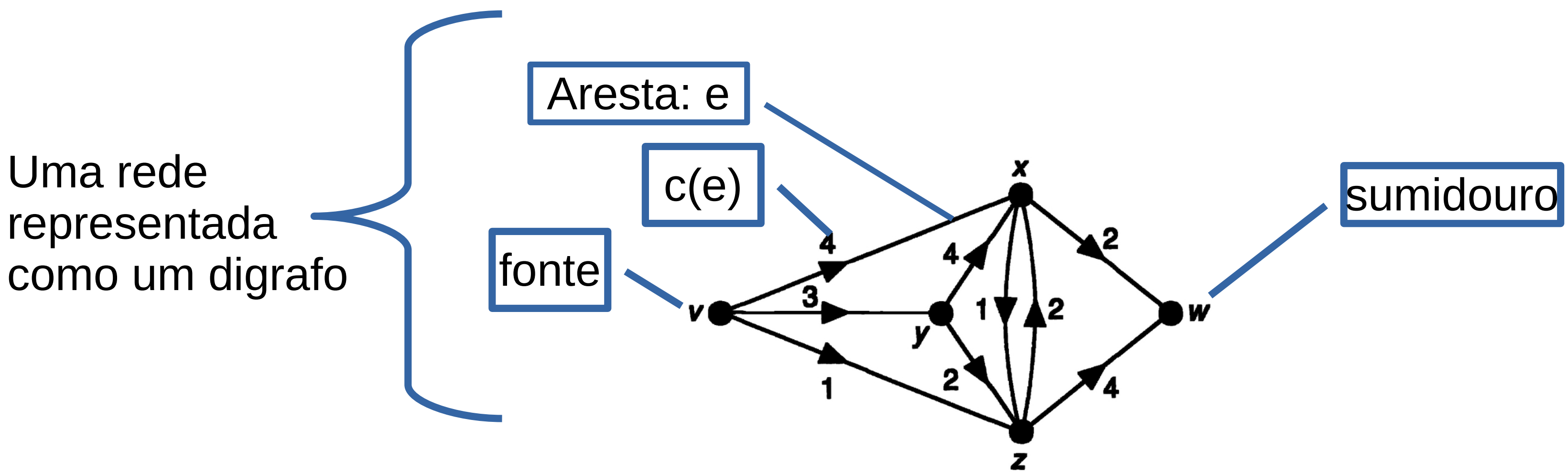
Fluxo em Redes

Fluxo em Redes

A sociedade moderna é dependente de redes (de transporte, comunicação etc), as quais podem ser adequadamente representadas por digrafos ponderados.

Essas redes usualmente apresentam algum tipo de fluxo de dados ou de mercadoria, por exemplo, sendo importante a determinação do fluxo máximo que permeia a rede.

Exemplo: um fabricante de computadores deseja enviar sua produção para um determinado mercado utilizando ao máximo os canais de distribuição. Seja “*v*” o fabricante (origem/fonte), “*w*” o consumidor (destino/sumidouro), “c(e)” a capacidade do canal “e” (aresta) de distribuição, o fabricante deseja saber qual é o número máximo de caixas transportáveis através da rede sem exceder a capacidade permitida de qualquer canal.

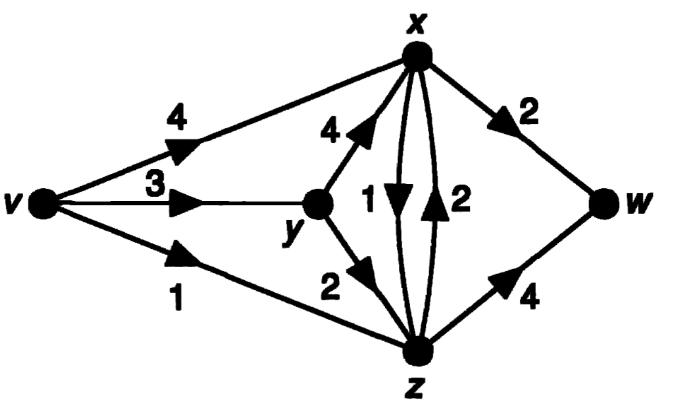


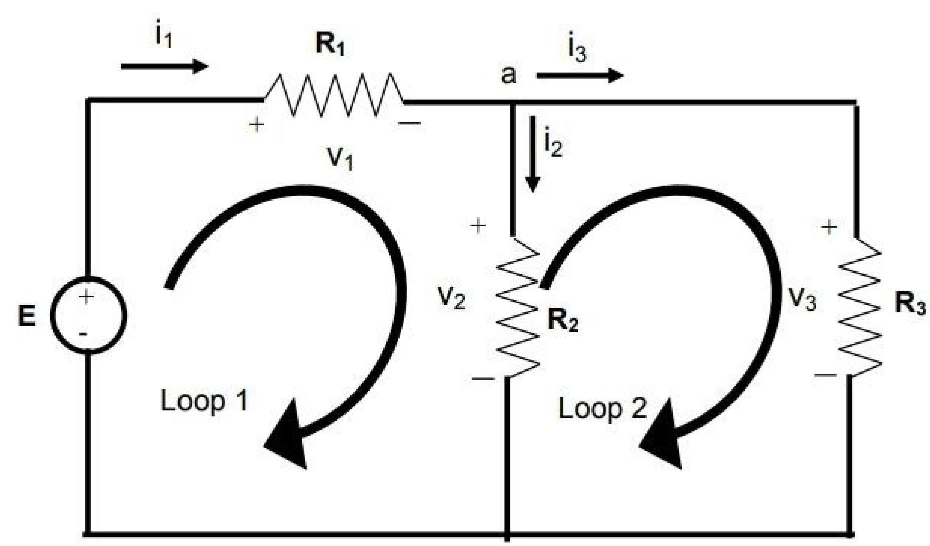
Fluxo em Redes

Outras situações similares:

- Se cada arco representa um rua de mão única e o peso de cada aresta representar o fluxo máximo possível de tráfego ao longo daquela rua, em veículos por hora, então podemos avaliar o maior número de veículos que podem viajar de *v* para *w* em uma hora.

- Se o diagrama retrata uma rede elétrica, podemos avaliar a corrente elétrica máxima que pode percorrer a rede com segurança, dados os limites máximos de corrente suportáveis





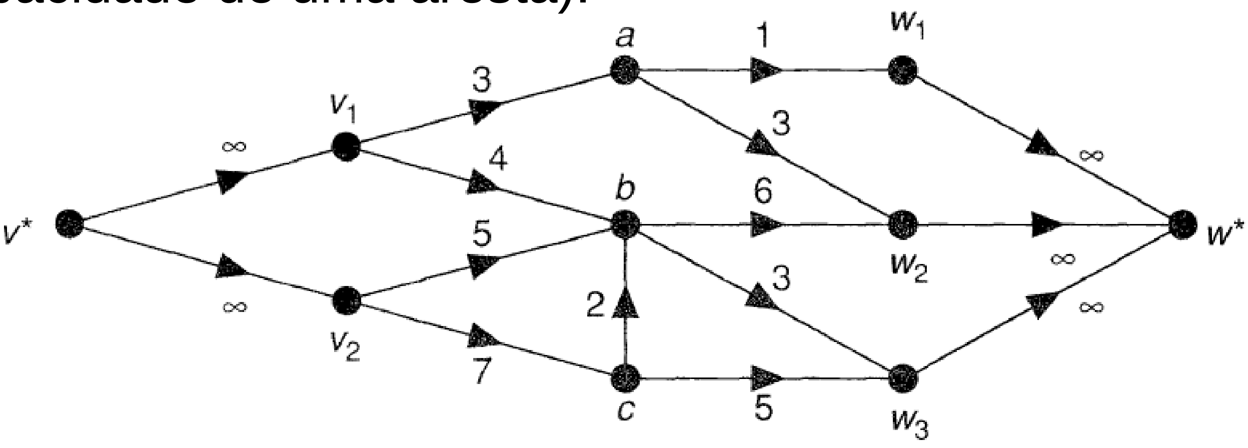
Fluxo em Redes

OBSERVAÇÃO:

Se problema envolver mais de uma fonte (ou mais de um sumidouro) será necessário criar fontes (ou sumidouros) fictícios e ligar todas as fontes (ou sumidouros) existentes por meio de arestas de saída (ou entrada).

As capacidades dessas arestas são habitualmente setadas com capacidade infinita evitando a introdução de gargalos no modelo. Como essas arestas são de fato virtuais, é possível o uso de uma capacidade infinita, o que não afeta a busca do fluxo máximo (limitado à menor capacidade de uma aresta).

Exemplo:

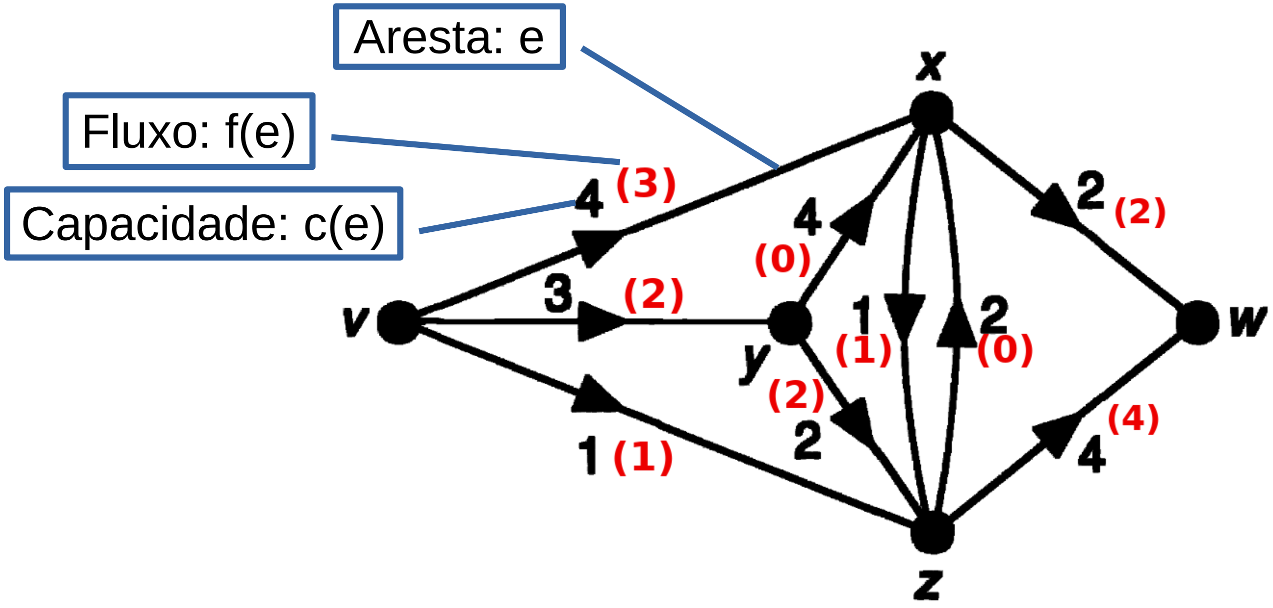


Fluxo em Redes

Grau de saída e grau de entrada de um vértice:

- O grau de saída *outdeg(x)* de um vértice x é a soma das capacidades das arestas que saem de *x*, enquanto seu grau de entrada *indeg(x)* corresponde à soma das capacidades das arestas que chegam a *x*.

- Na figura: outdeg(x) = 3 and indeg(x) = 10.



Fluxo em Redes

Grau de saída e grau de entrada de um vértice:

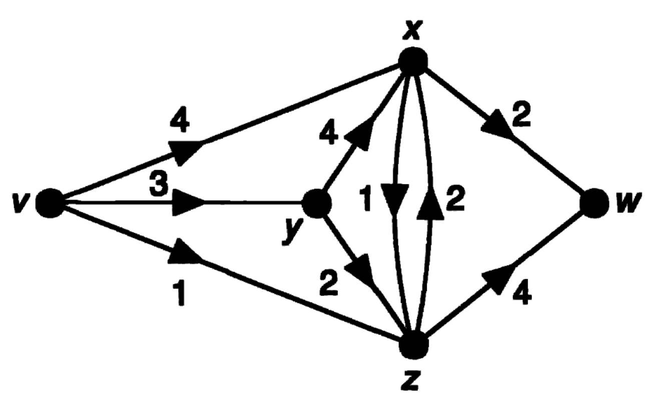
Seja G(V,E) uma rede representada pelo abaixo:

- A soma de todos os graus de saída dos vértices de uma rede é igual à soma de todos graus de entrada;

$$\sum_{i}^{V} outdeg(i) = (4+3+1)+(2+1)+(4+2)+(4+2)+0 = 23$$

$$= \sum_{i}^{V} indeg(i) = 0+(4+4+2)+3+(1+2+1)+(2+4) = 23$$

- Há dois vértices especiais e distintos a fonte “*v*” e sumidouro “*w*”, tais que *indeg(v)=*



Fluxo em Redes

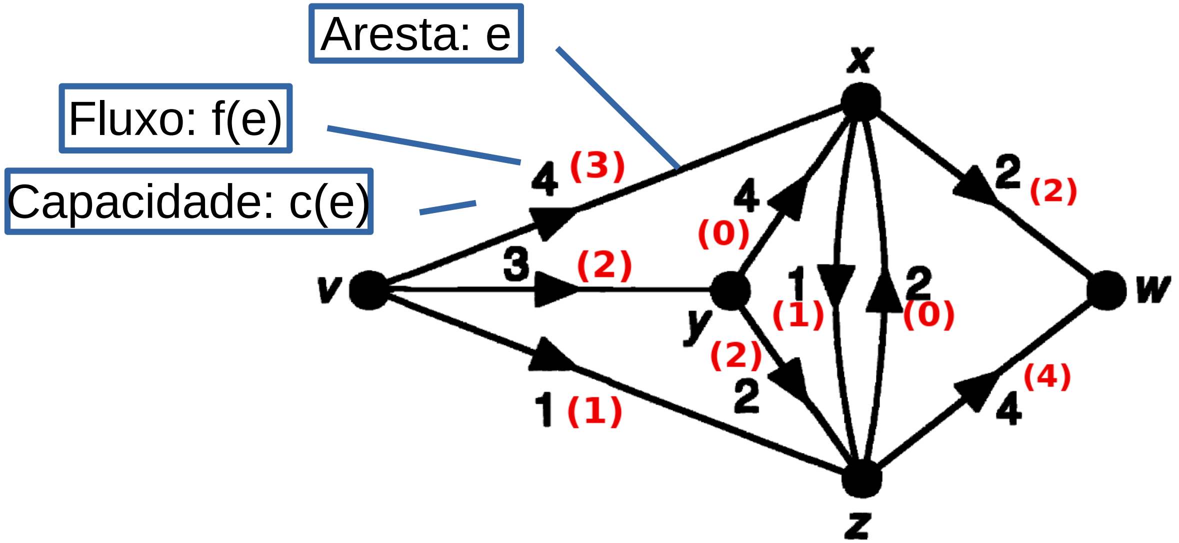
Fluxo na aresta:

Um fluxo *f* na aresta é uma função que associa cada aresta e=*(u,z)* a um número real não negativo *f(e)*, tal que $0 \leq f(e) \leq c(e)$;

Qualquer fluxo *f(e)* fora do intervalo acima, é dito ilegal;

Saturação: Uma aresta *e* está saturada se $f(e) = c(e)$.

Abaixo: as arestas vz, xz, yz, xw e zw estão saturadas, as demais são arestas não-saturadas;

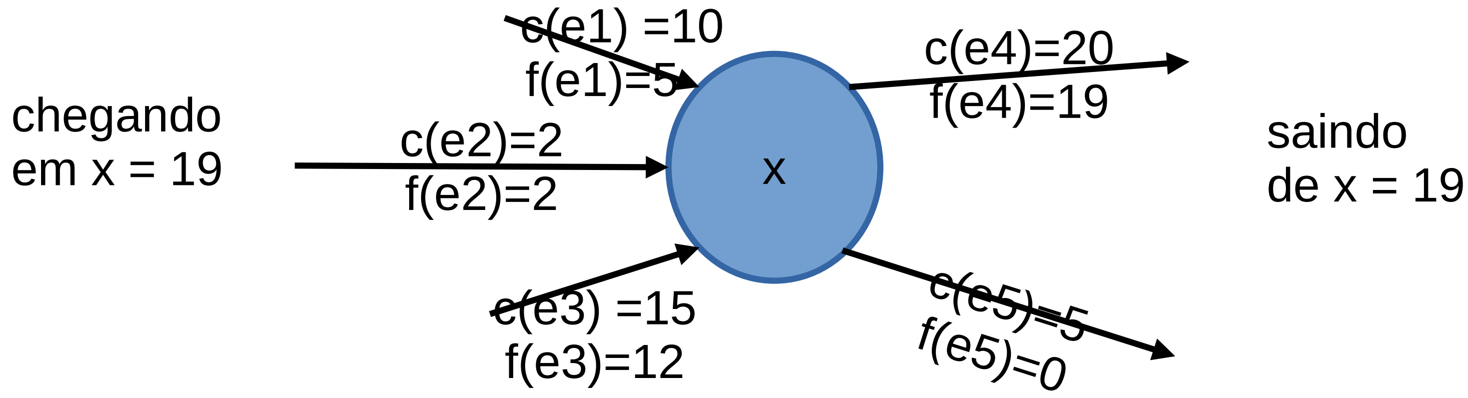


Fluxo em Redes

Fluxo no vértice:

exceto para a fonte e o sumidouro[1], o *fluxo total que chega a um vértice "x" é igual ao fluxo total que sai do mesmo vértice "x"*

Ex: O fluxo no vértice "x" é igual a 19

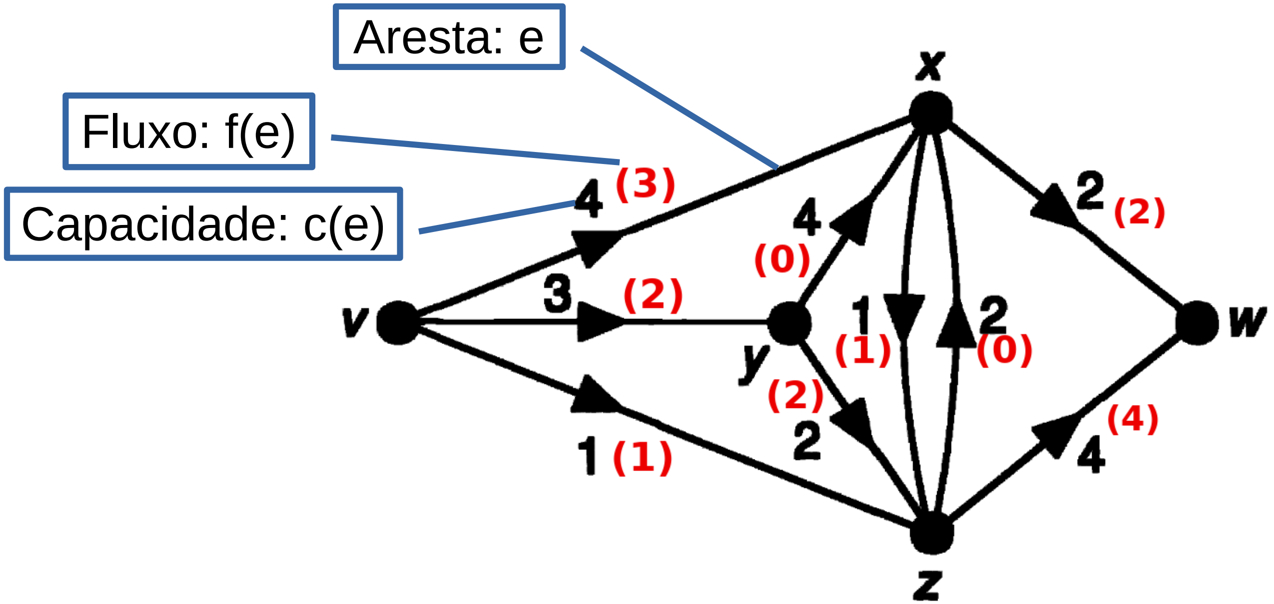


[1]não há fluxo de entrada na fonte nem de saída no sumidouro, pois *indeg(fonte)=0* e *outdeg(sumidouro)=0)*

Fluxo em Redes

Fluxo no vértice:

O fluxo no vértice *x* é igual a 3.
O fluxo no vértice z é igual a 4.



Fluxo em Redes

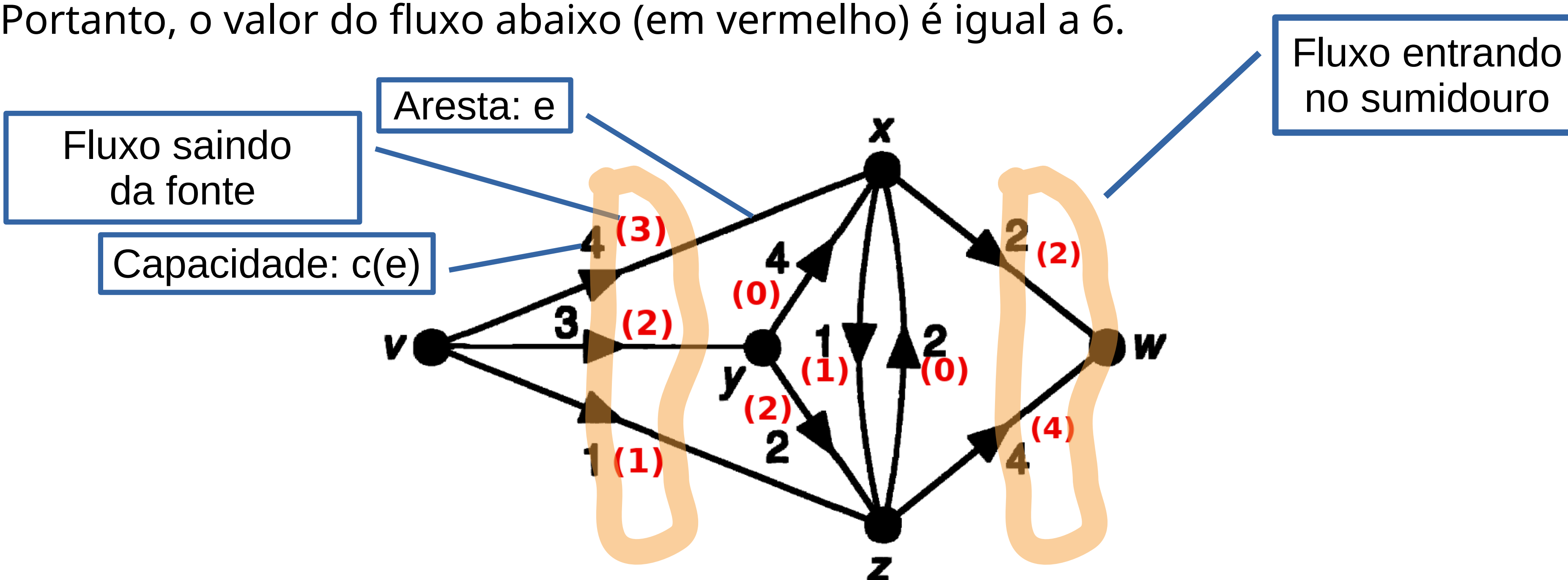
Fluxo total na rede:

A soma dos fluxos nas arestas que saem de “*v*” (fonte) é igual à soma dos fluxos nas arestas que entram em “*w*” (sumidouro) este montante é chamado de valor do fluxo na rede.

Exemplo:

- O fluxo total saindo do vértice-origem *v é igual a 6*.
- O fluxo total entrante no vértice-destino (*w*) é igual a 6.

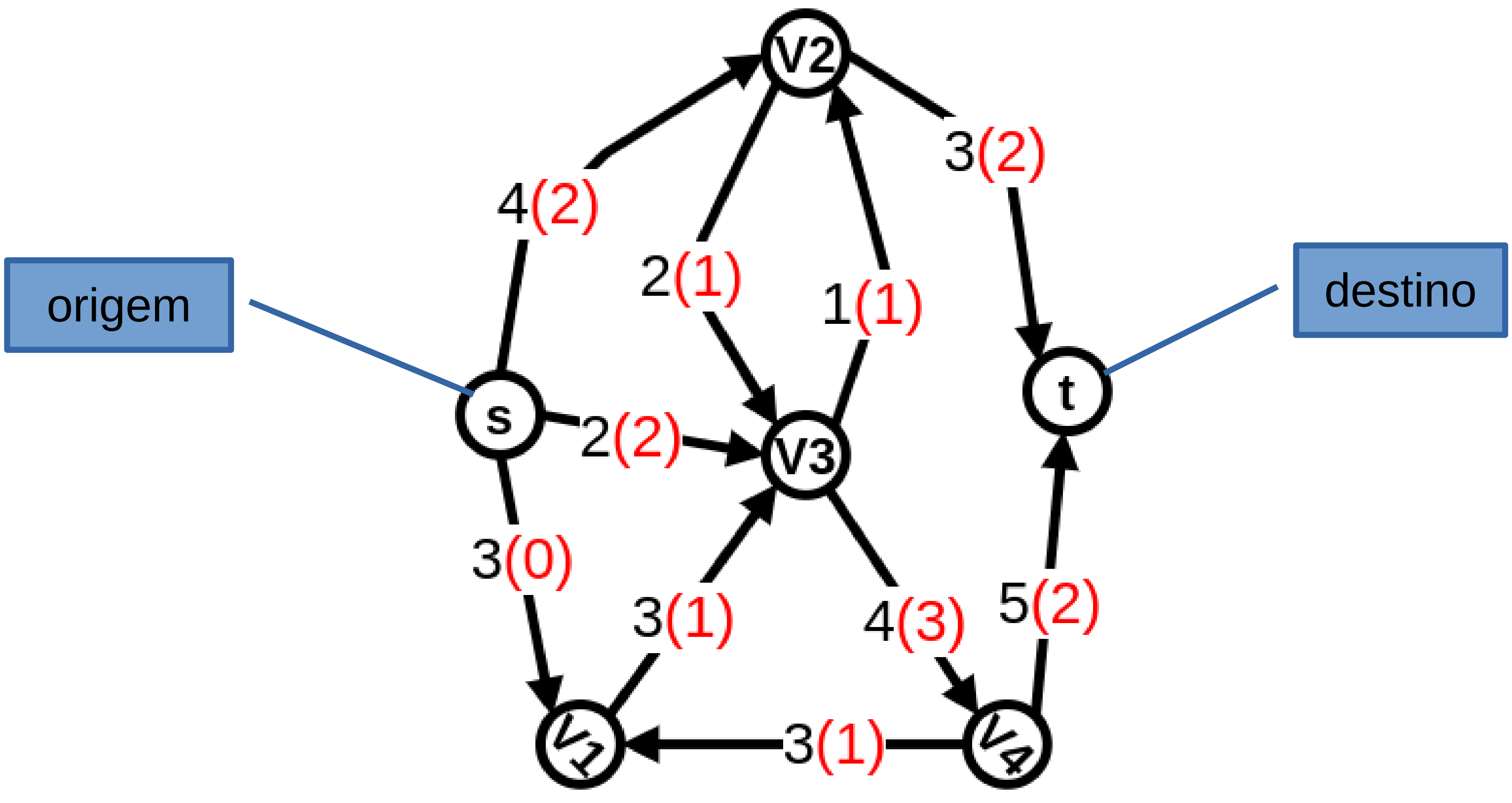
Portanto, o valor do fluxo abaixo (em vermelho) é igual a 6.



Fluxo em Redes

Exemplos:

A) Um fluxo (vermelho) para as capacidades (preto) da rede abaixo;



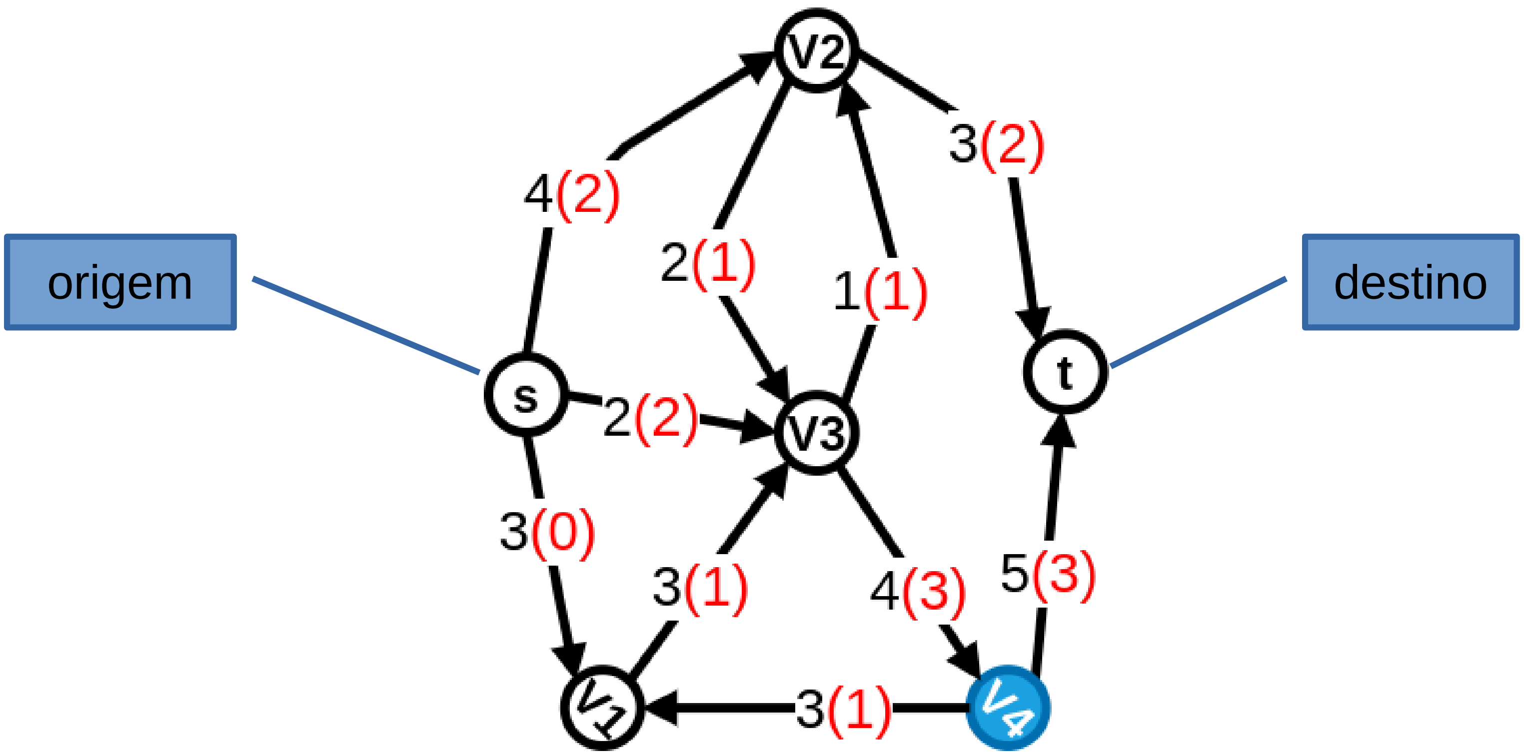
(A)

Fluxo em Redes

Outro exemplo:

B) A situação abaixo não corresponde a um fluxo legal.

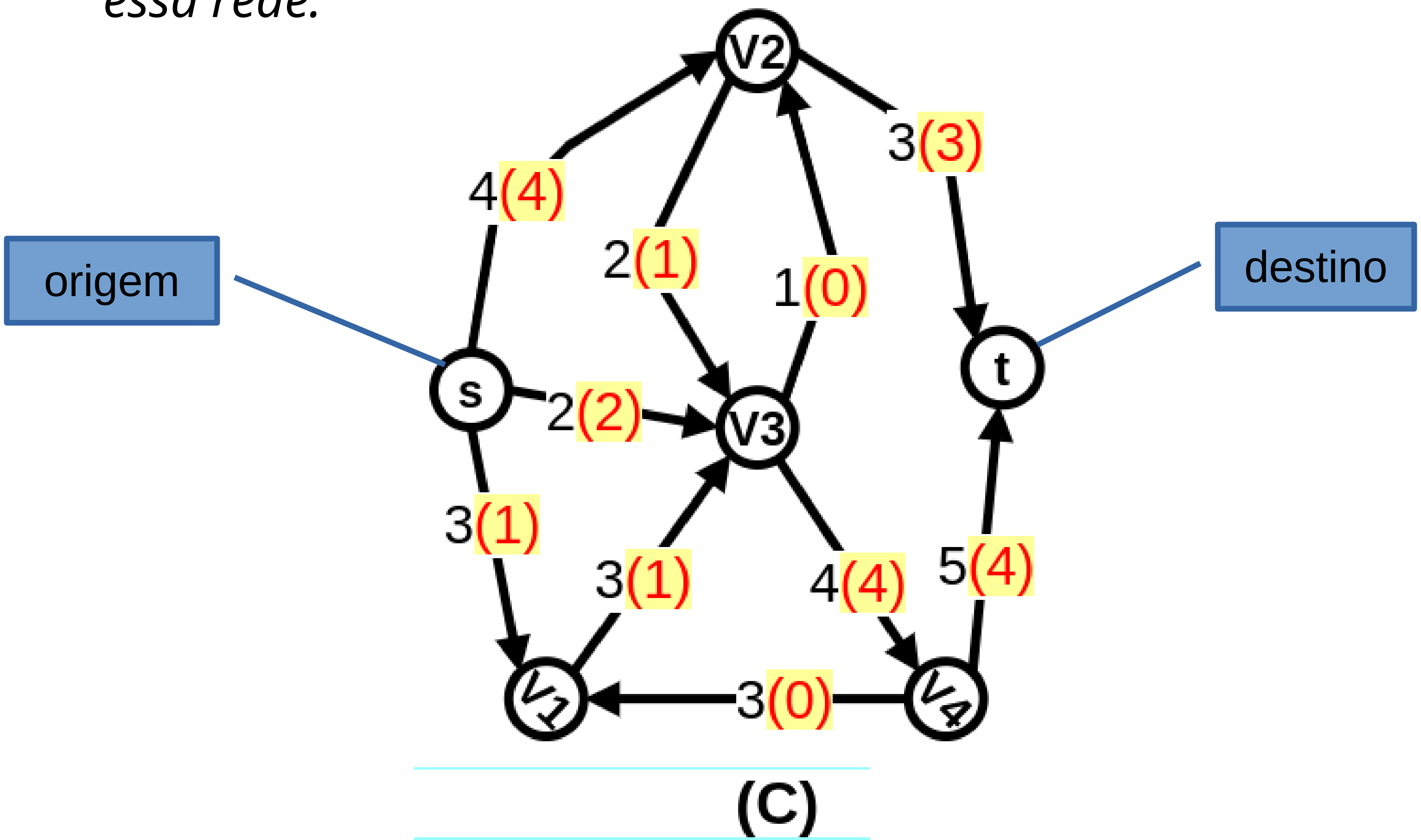
fluxoEntrante(v4) = 3 diferente do fluxoSaindo(v4) = 4.



(B)

Fluxo em Redes

C) O valor do fluxo em uma rede pode variar de um mínimo igual a zero até um certo máximo.
Por exemplo, o valor do fluxo na figura é igual a 7, o qual é máximo para essa rede.



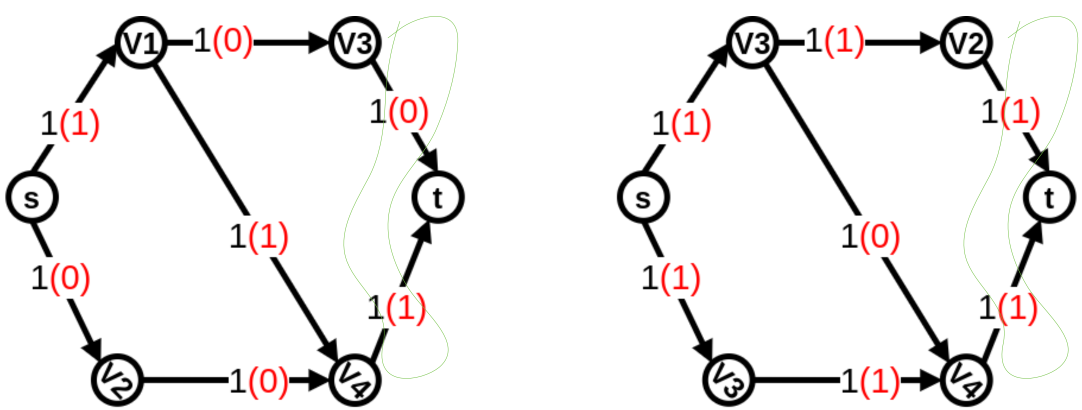
Fluxo em Redes

Fluxo maximal e fluxo máximo:

Um fluxo é maximal quando todo caminho da origem *s* ao destino *t* da rede contém alguma aresta saturada. O valor de um fluxo maximal não pode ser aumentado simplesmente por acréscimos de fluxos em algumas arestas.

Na figura-A (abaixo): as arestas (s,v1), (v1,v4) e (v4,t) estão saturadas, bem como os vértices v1 e v4. Este fluxo é maximal pois todo caminho de s a t contém uma dessas arestas (ou um desses vértices).

O valor do fluxo em A é igual a 1 (total de fluxo entrante no vértice de destino)



(A) (B)

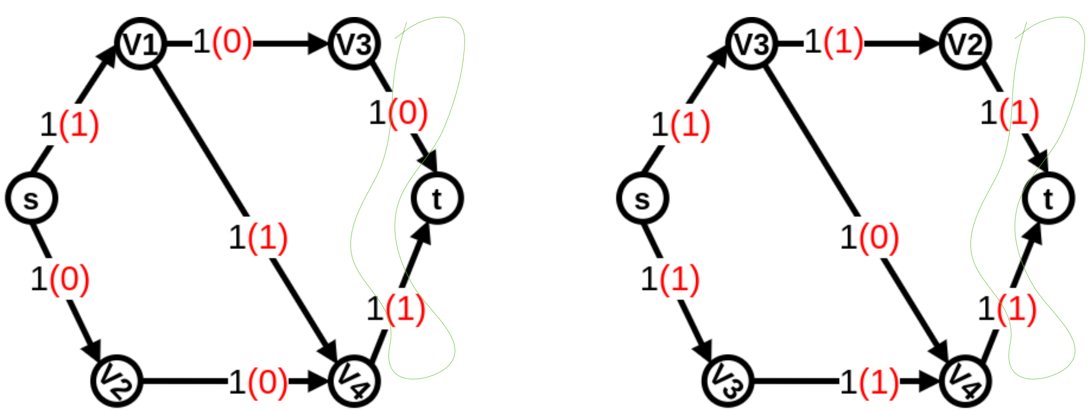
Fluxo em Redes

Fluxo maximal e fluxo máximo:

Naturalmente, todo fluxo máximo é maximal. Contudo, a recíproca não é necessariamente verdadeira:

- O valor do fluxo em A é igual a 1 (total de fluxo entrante no vértice de destino), porém, ele não é fluxo máximo.

- O fluxo exibido na figura B, na mesma rede, é que é máximo e possui valor 2.

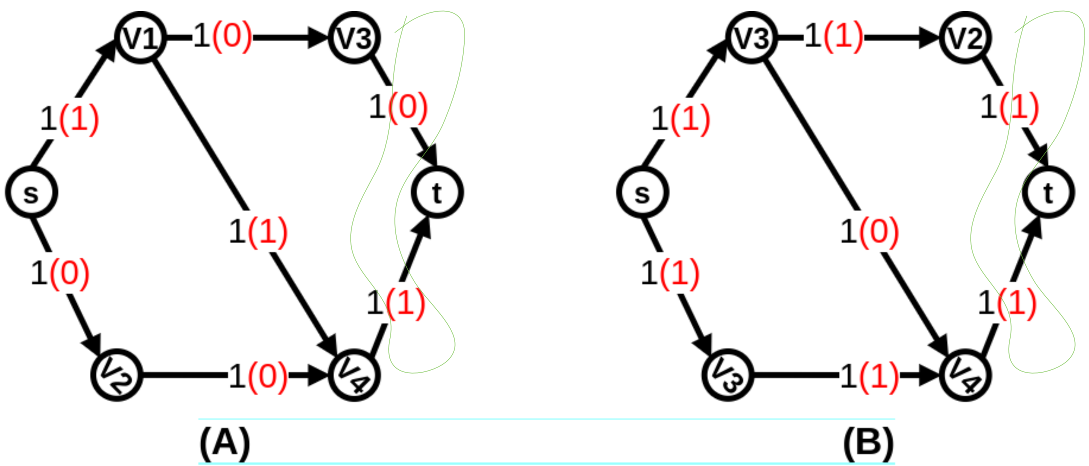


(A) (B)

Fluxo em Redes

O problema do fluxo em redes é, dentre todas as possibilidades, encontrar um fluxo legal máximo na rede!

A) fluxo = 1
B) fluxo=2

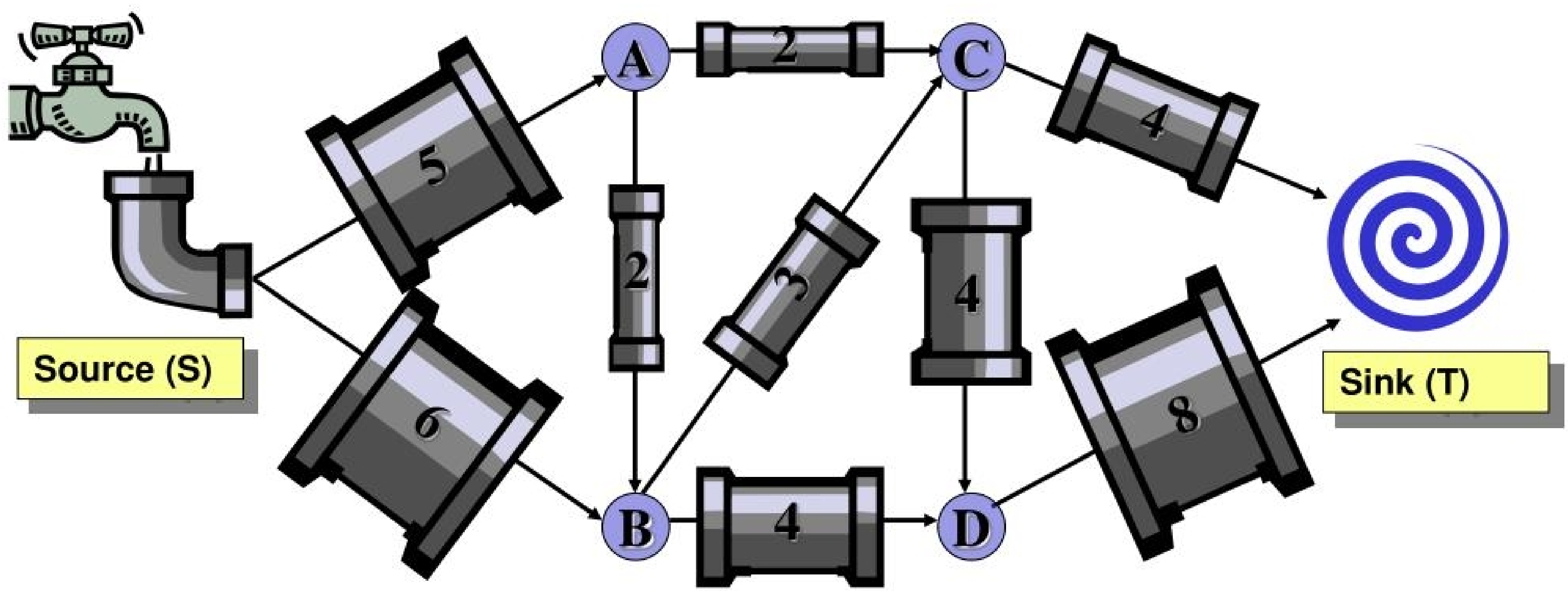


Um algoritmo guloso clássico para determinar fluxo máximo é o Ford–Fulkerson.

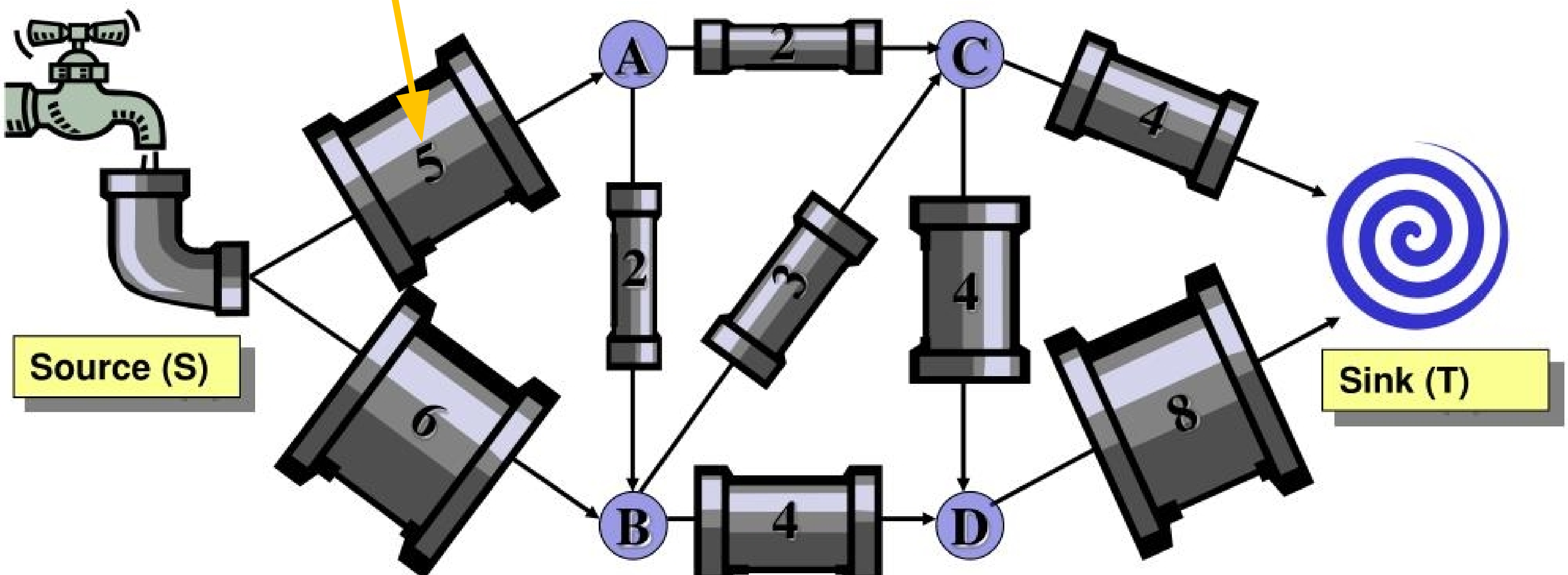
Fluxo em Redes

O problema do fluxo máximo consiste apenas em maximizar o valor do fluxo em cada aresta, considerando-se as restrições de canalização nas arestas e a lei de conservação de fluxo nos vértices. A ideia é distribuir pela rede um fluxo entrante pela fonte maximizando o uso das capacidades das arestas.

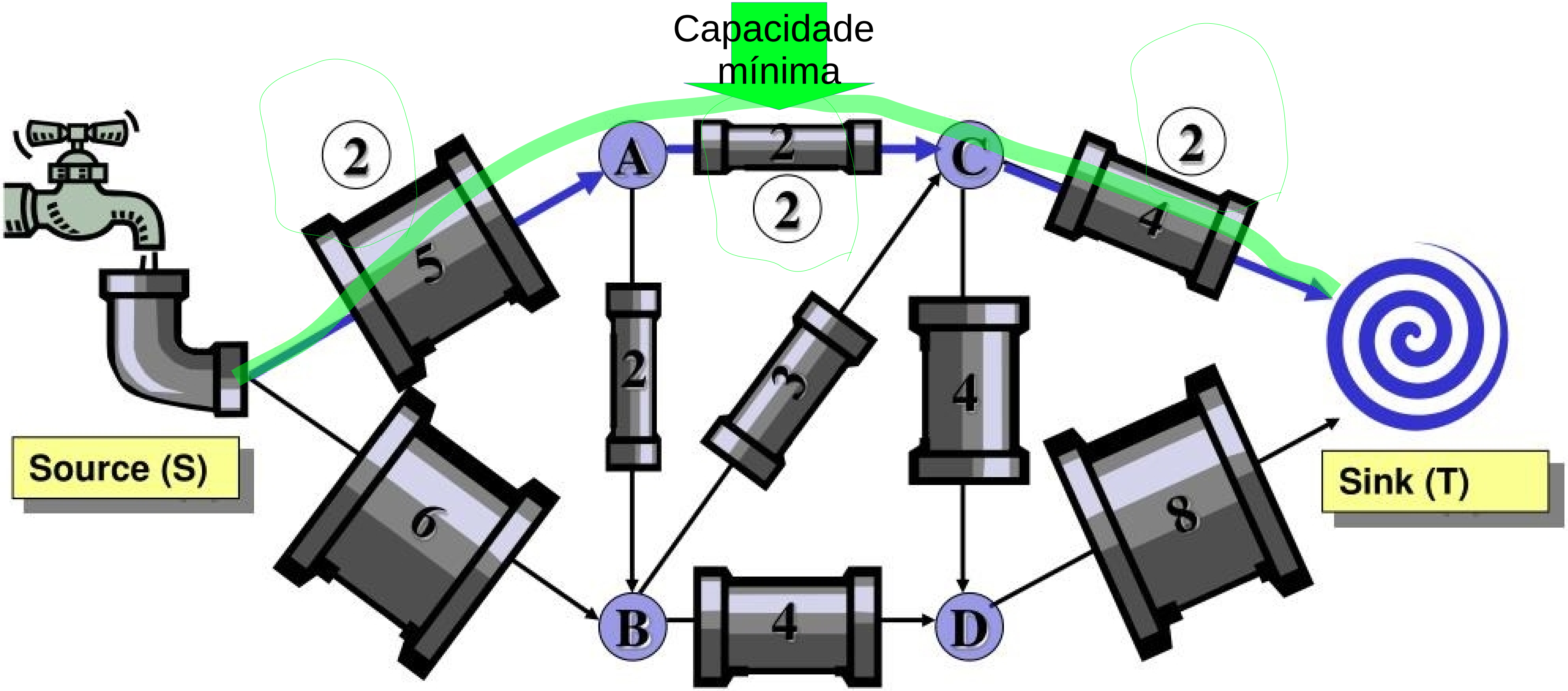
Pense em uma rede hidráulica:



Capacidade
da aresta



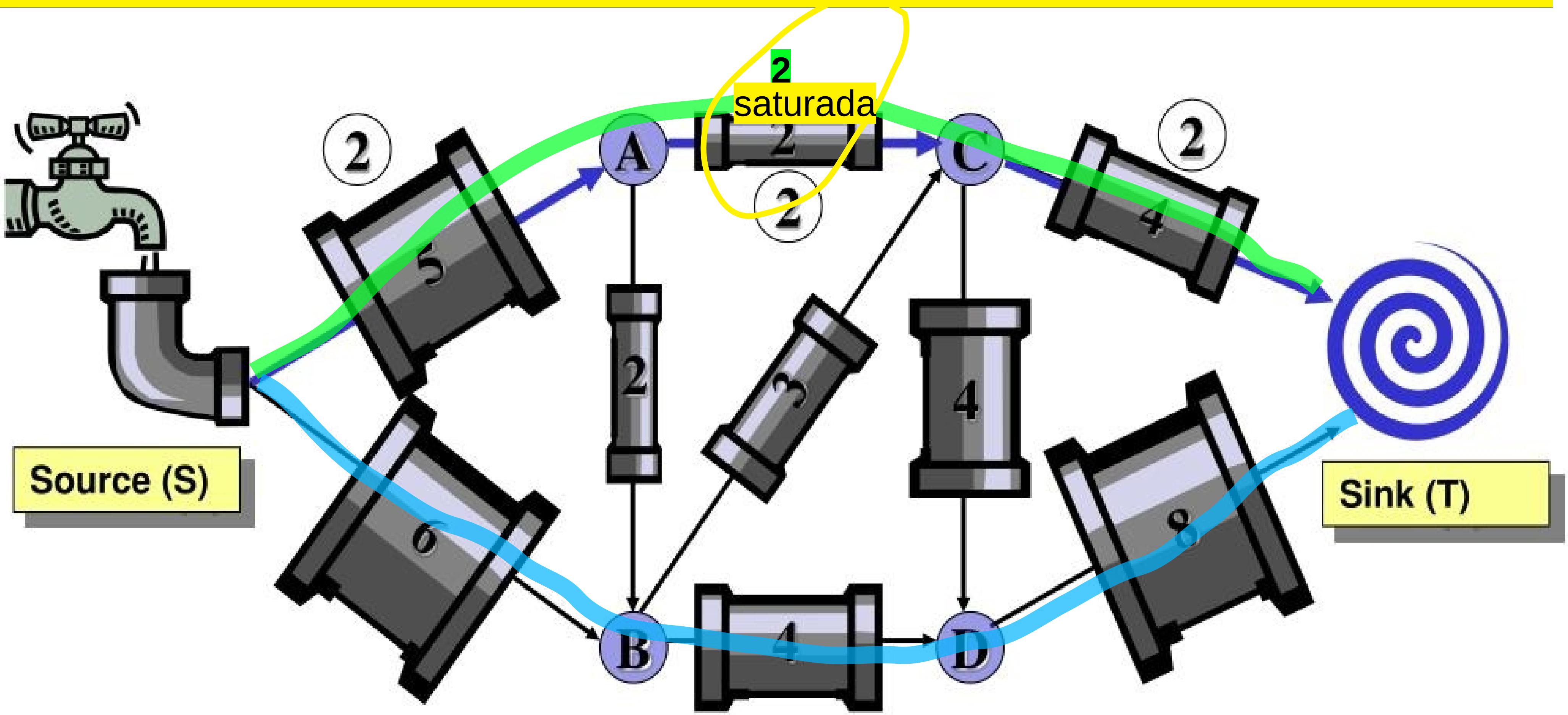
Abrindo a torneira, quanto de água flui por SACT?



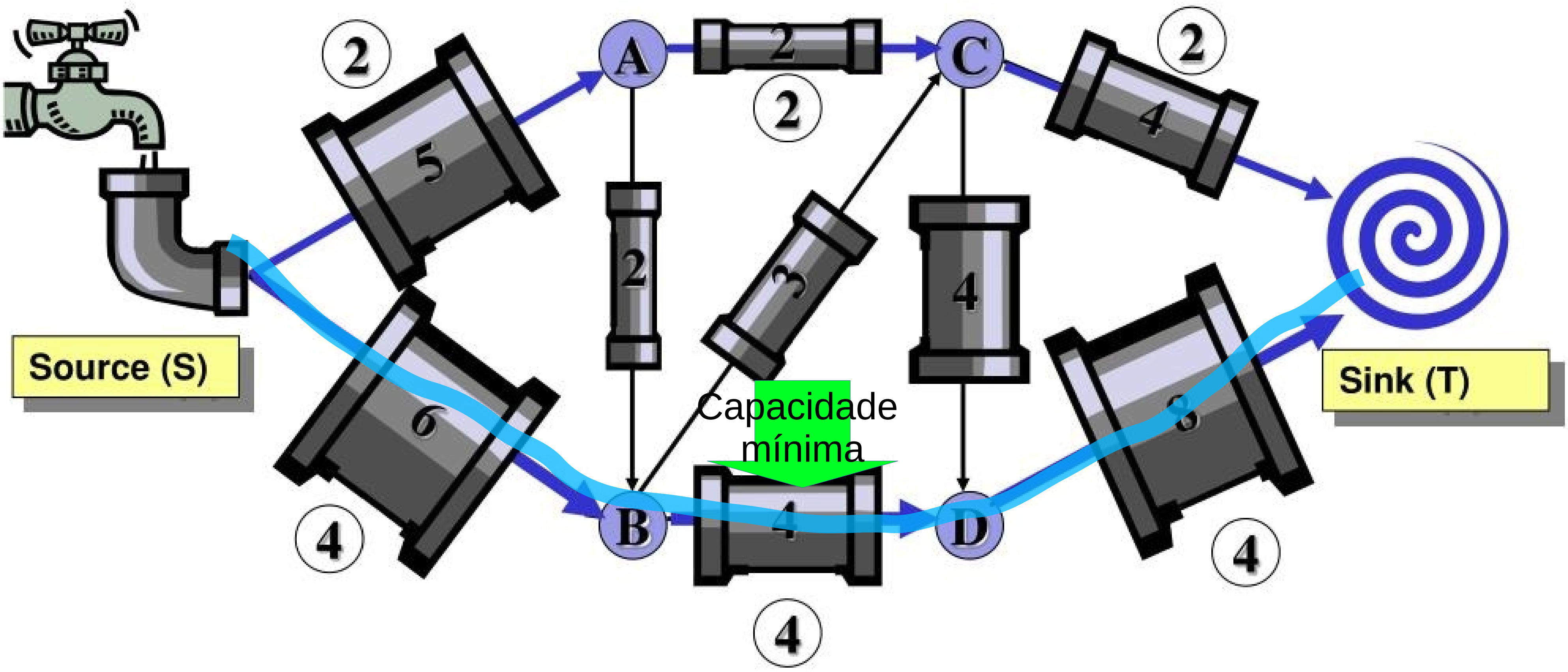
Capacidade mínima 2 determina o fluxo máximo em SACT

Network Flow

A ideia é procurar um novo caminho S até T ainda não saturado (com capacidade ociosa - *Excess capacity*) e ajustá-lo maximizando o uso das capacidades nas arestas. No caso, Iremos optar pelo caminho SBDT



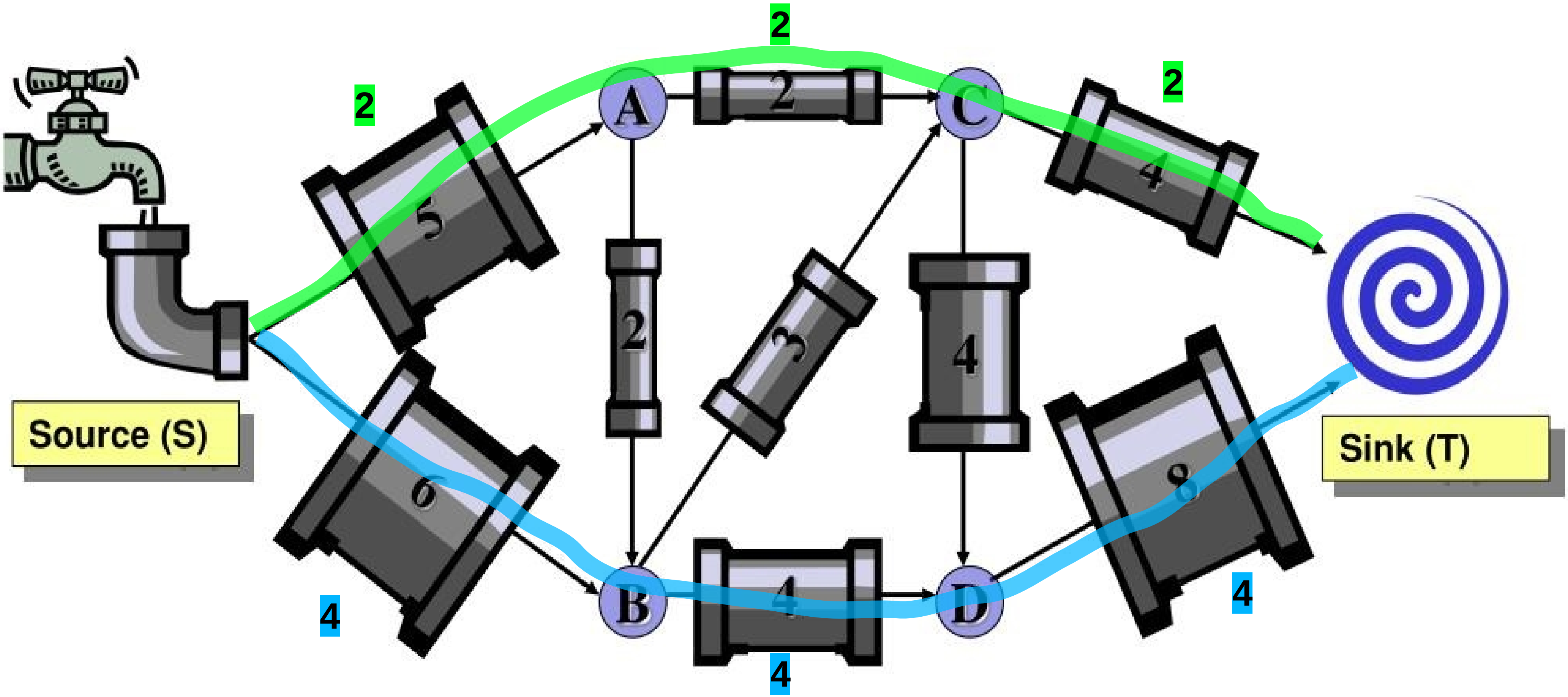
Agora considerando SBDT, qual é o fluxo máximo ao longo desse caminho?



Capacidade mínima 4 determina o fluxo máximo em SBDT

Network Flow

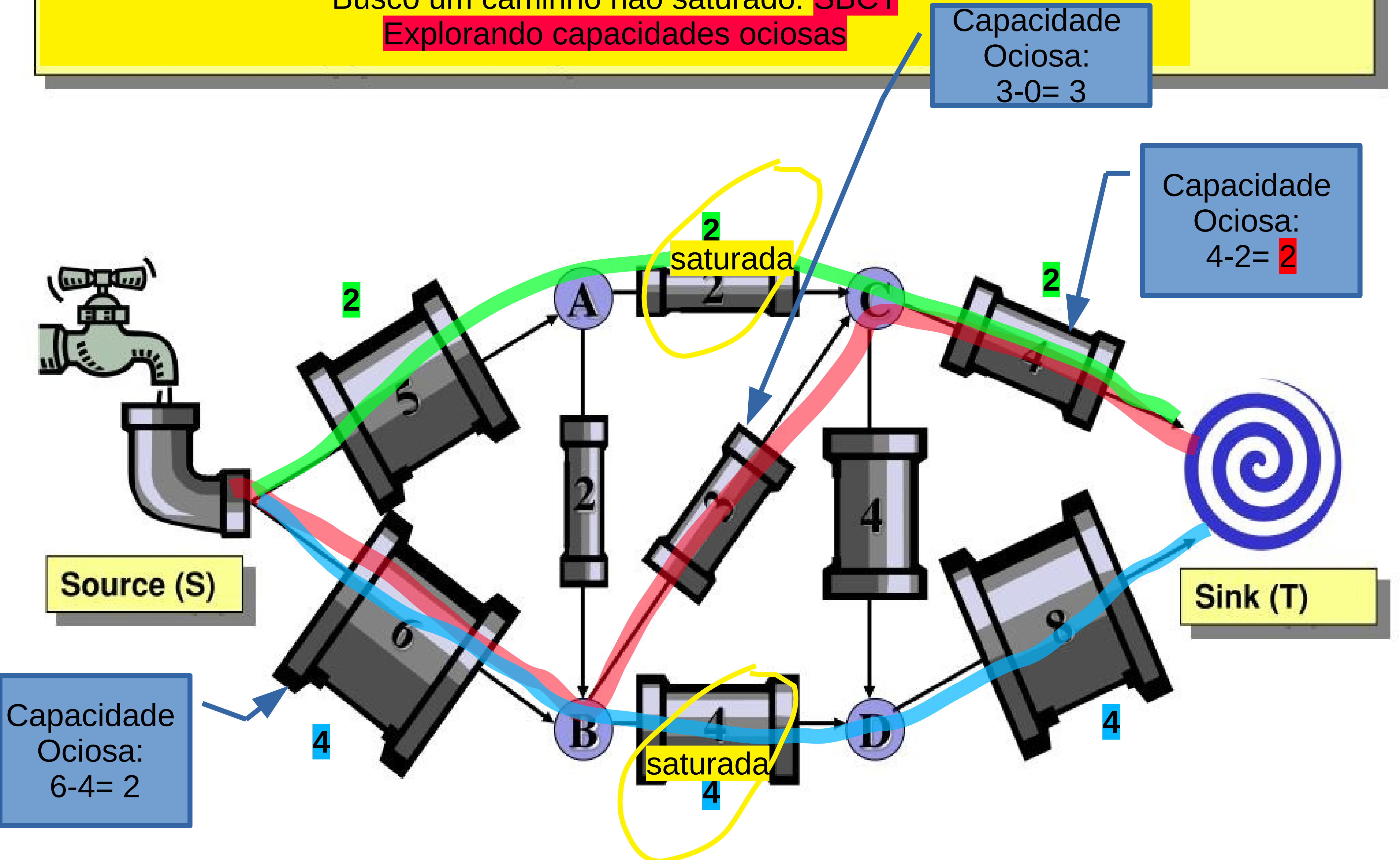
O que temos até aqui:



Ainda é possível explorar outros caminhos para maximizar o fluxo na rede? SIM!

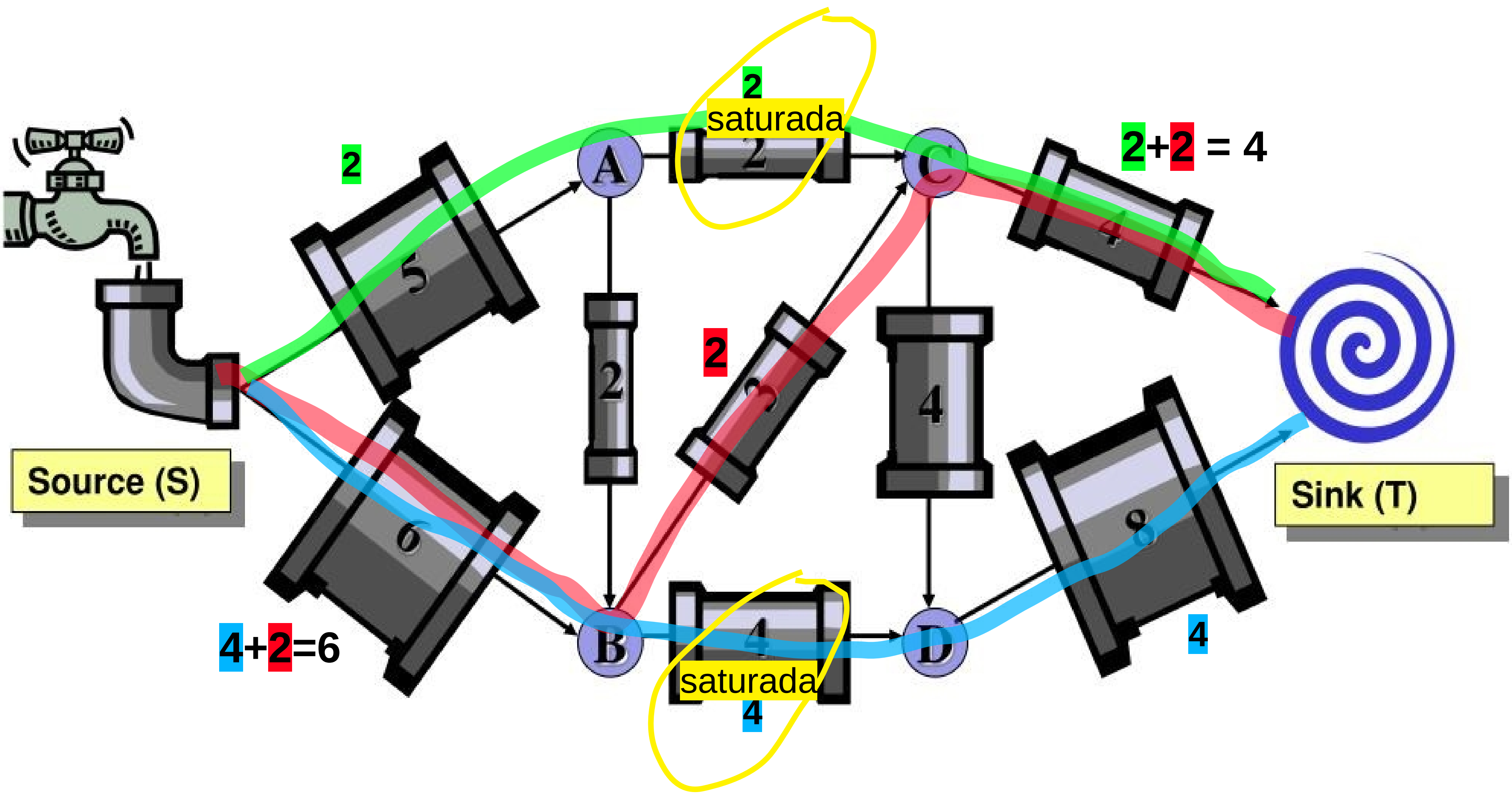
Network Flow

Busco um caminho não saturado: SBCT
Explorando capacidades ociosas



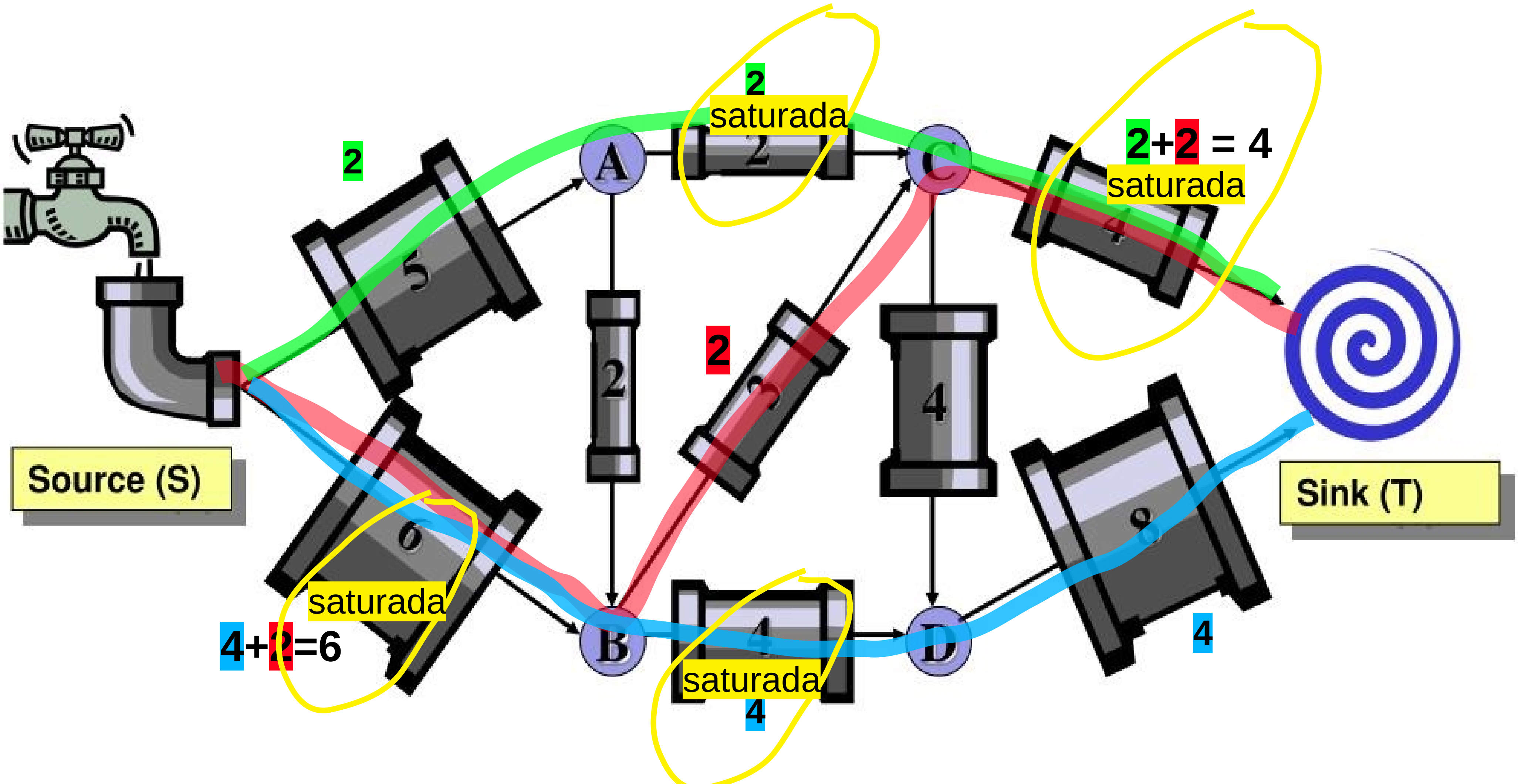
Network Flow

O fluxo máximo SBCT é igual a 2, ou seja, é igual à menor capacidade ociosa em SBCT



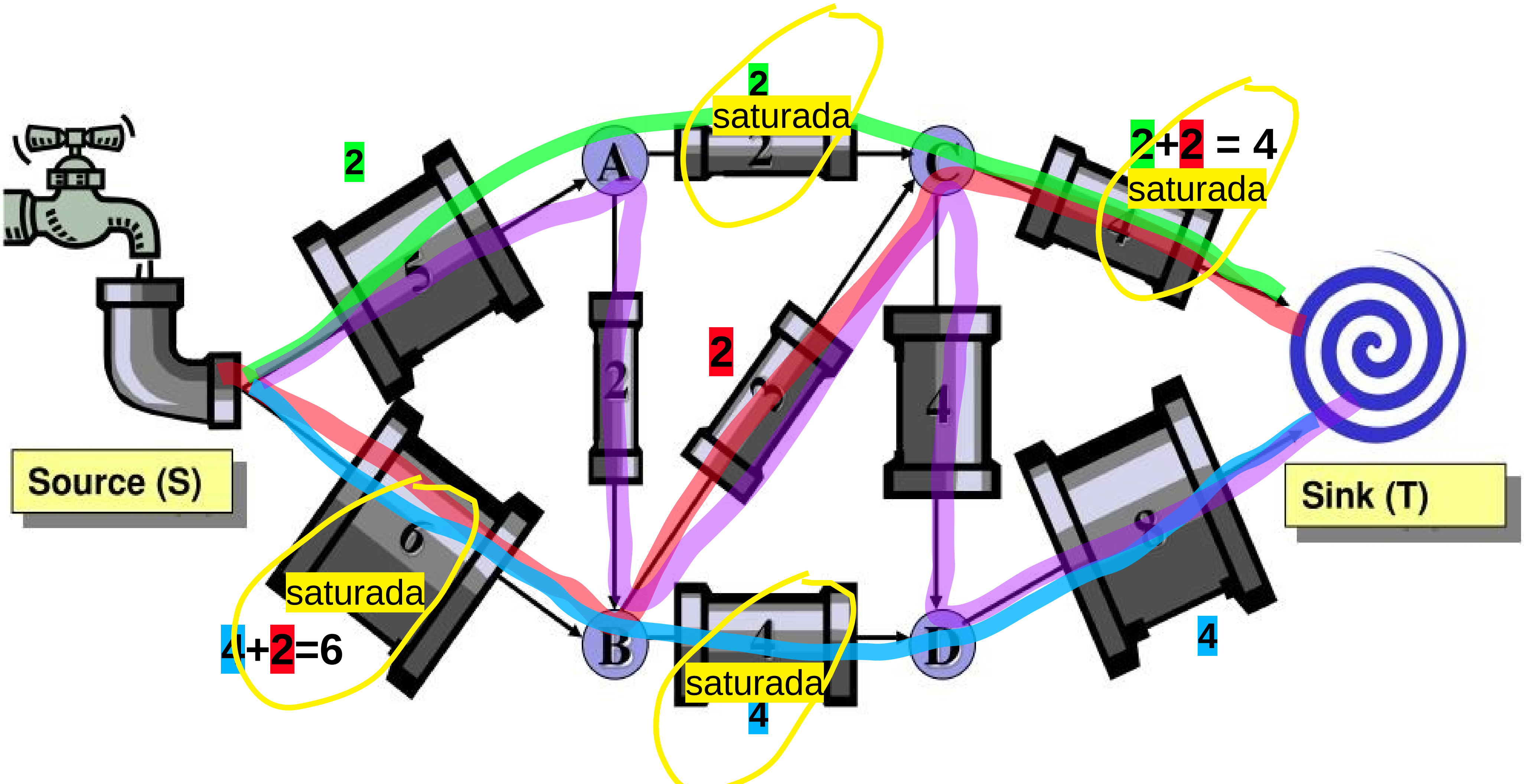
Network Flow

O que temos até aqui:



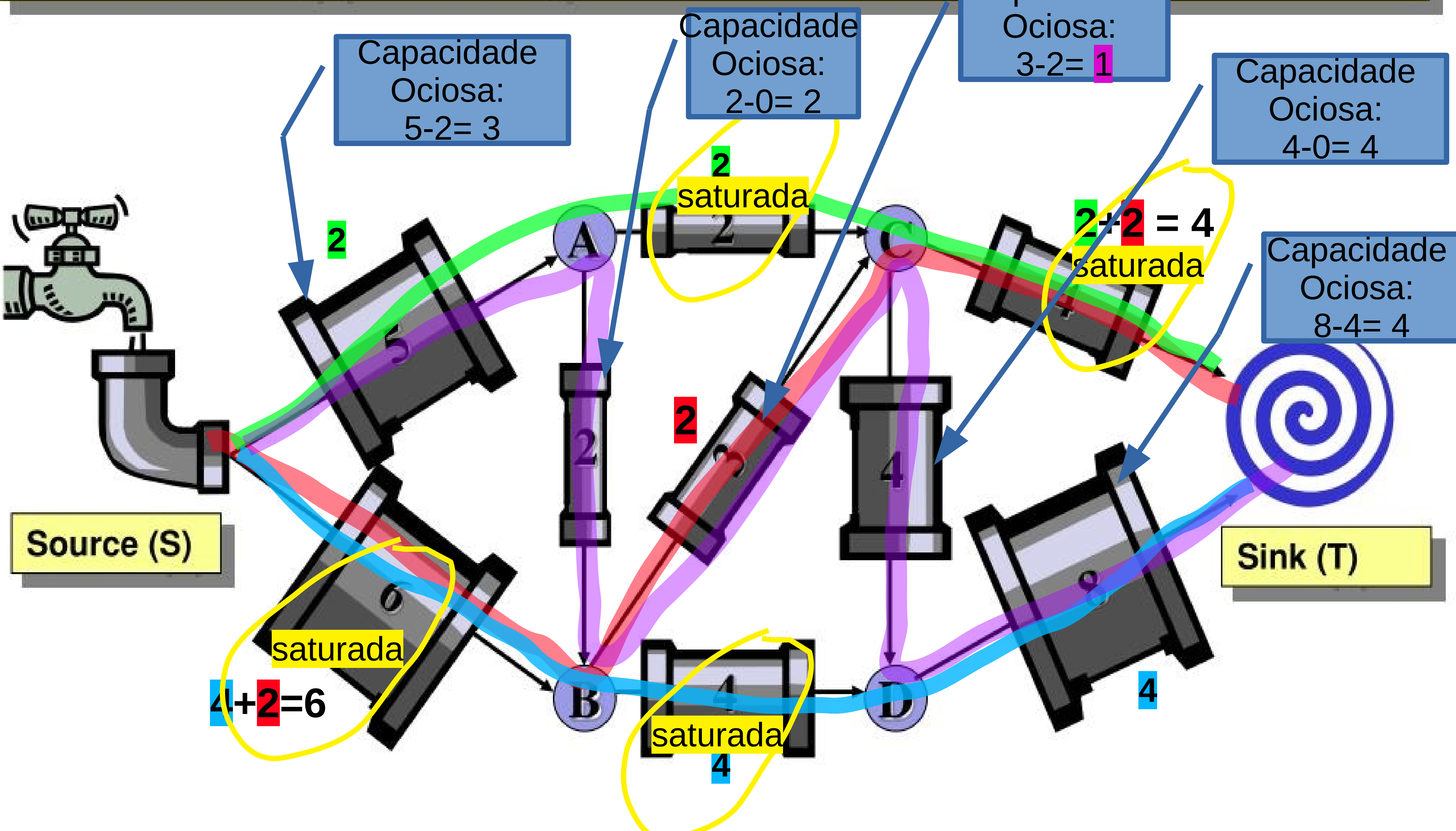
Network Flow

Buscamos um novo caminho não saturado: SABCDT



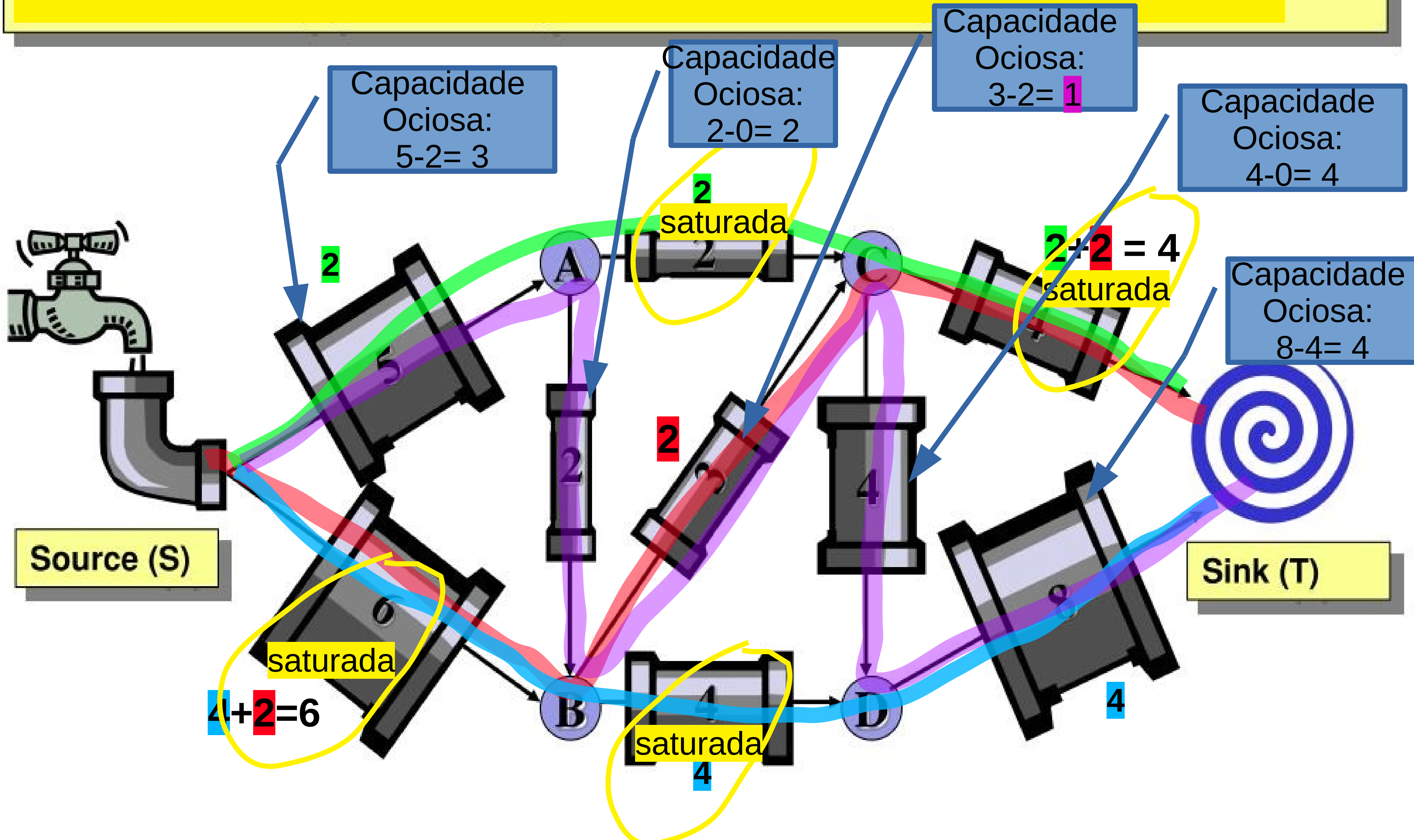
Network Flow

Um caminho não saturado: SABCDT



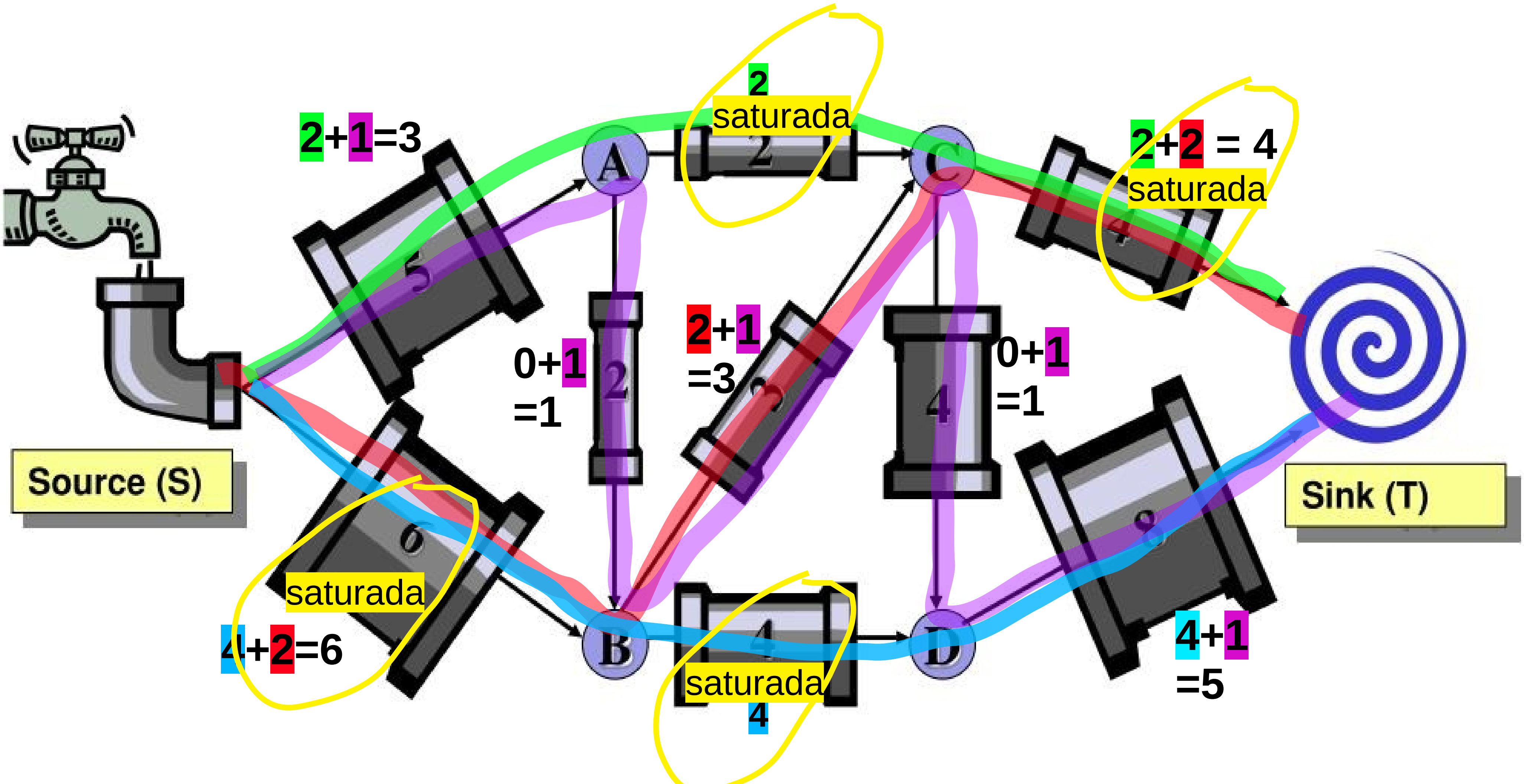
Network Flow

O fluxo máximo SABCDT é igual a 1, ou seja, a menor capacidade ociosa em SABCDT



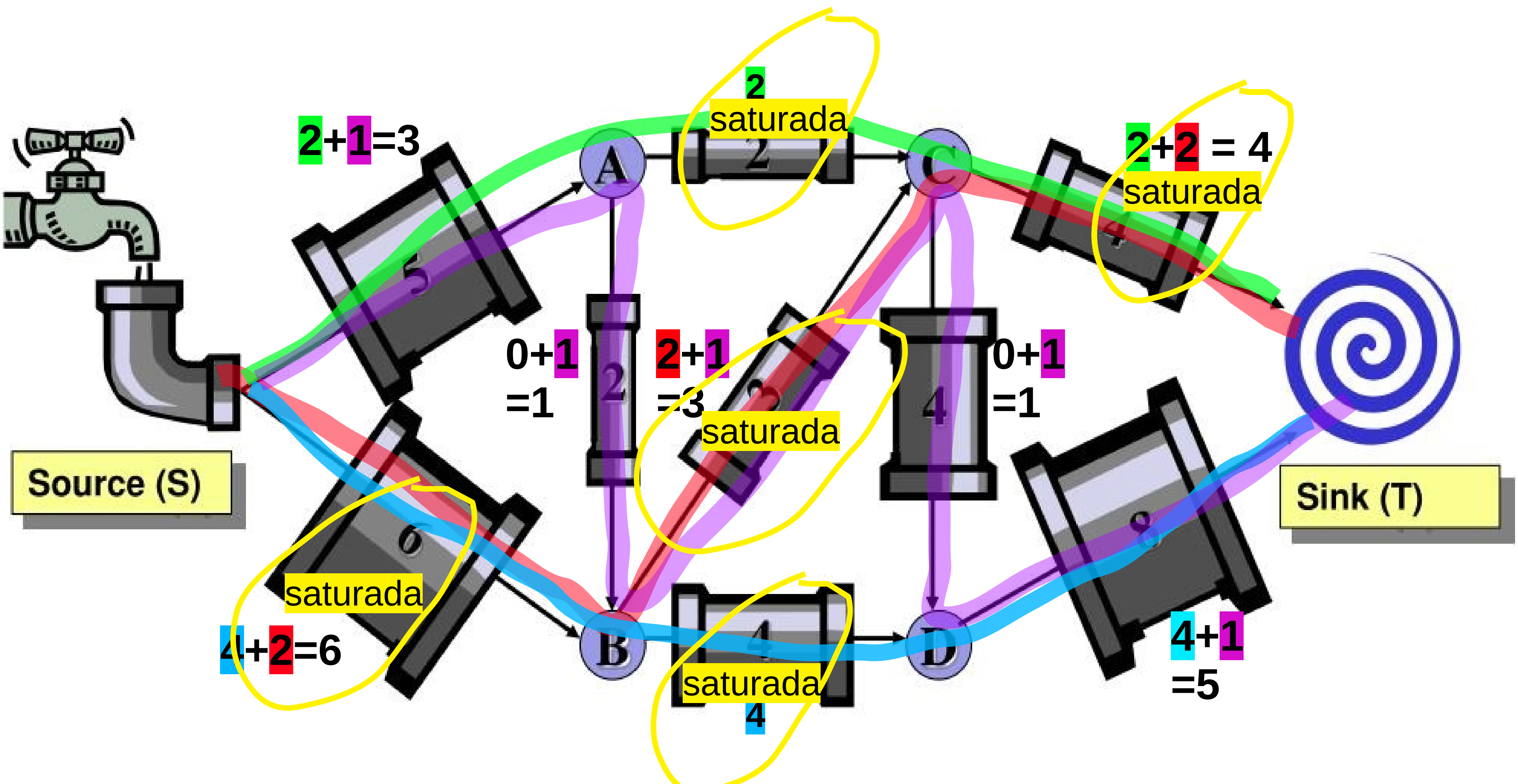
Network Flow

O fluxo máximo SABCDT é igual a 1, ou seja, a menor capacidade ociosa em SABCDT



Network Flow

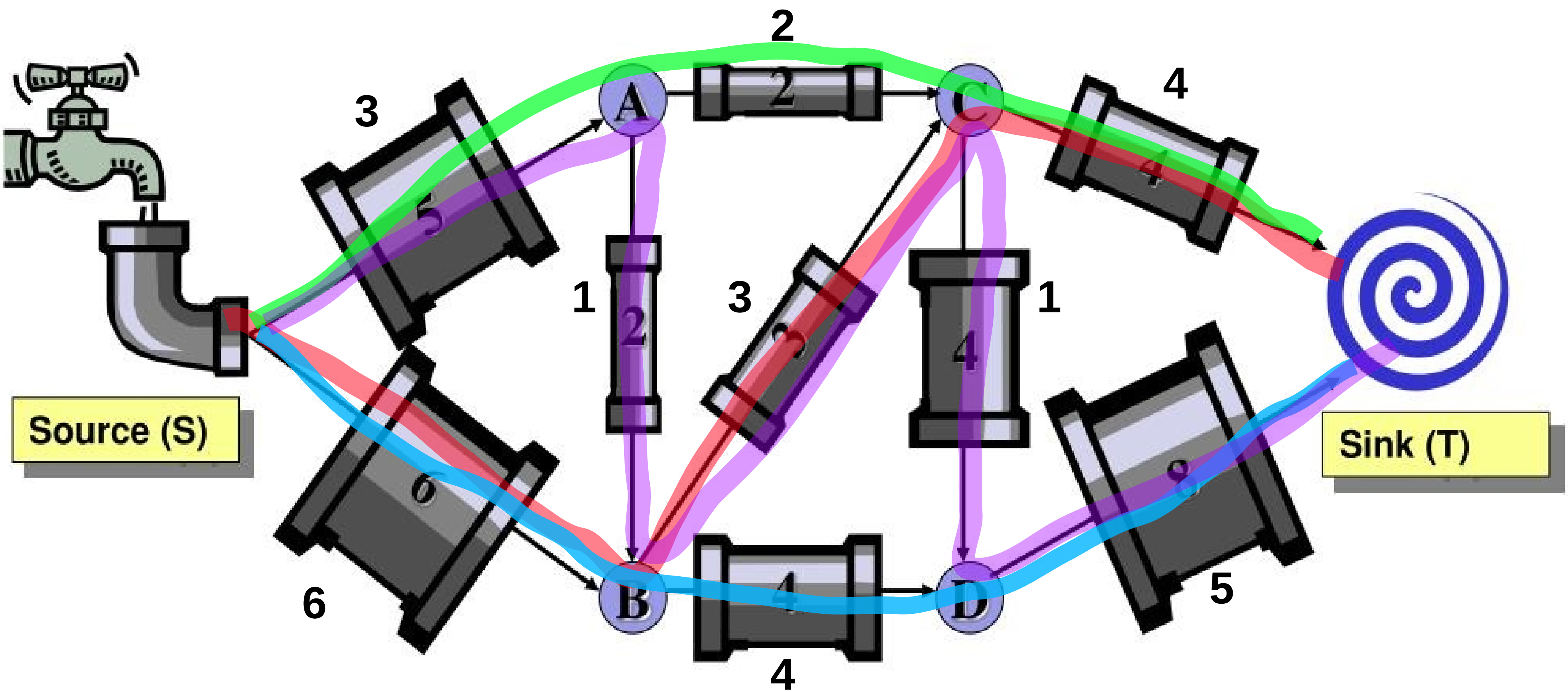
Fim: todos os possíveis caminhos entre s e t estão saturados,
contendo pelo menos uma aresta saturada, sem capacidade ociosa.



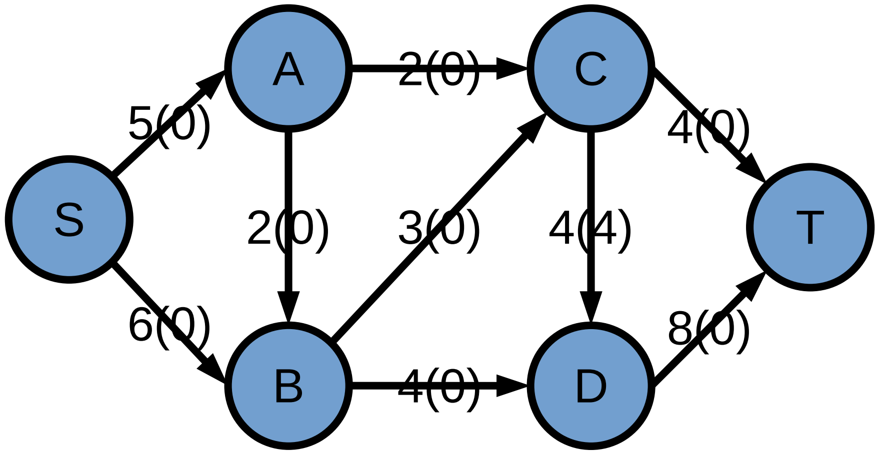
Network Flow

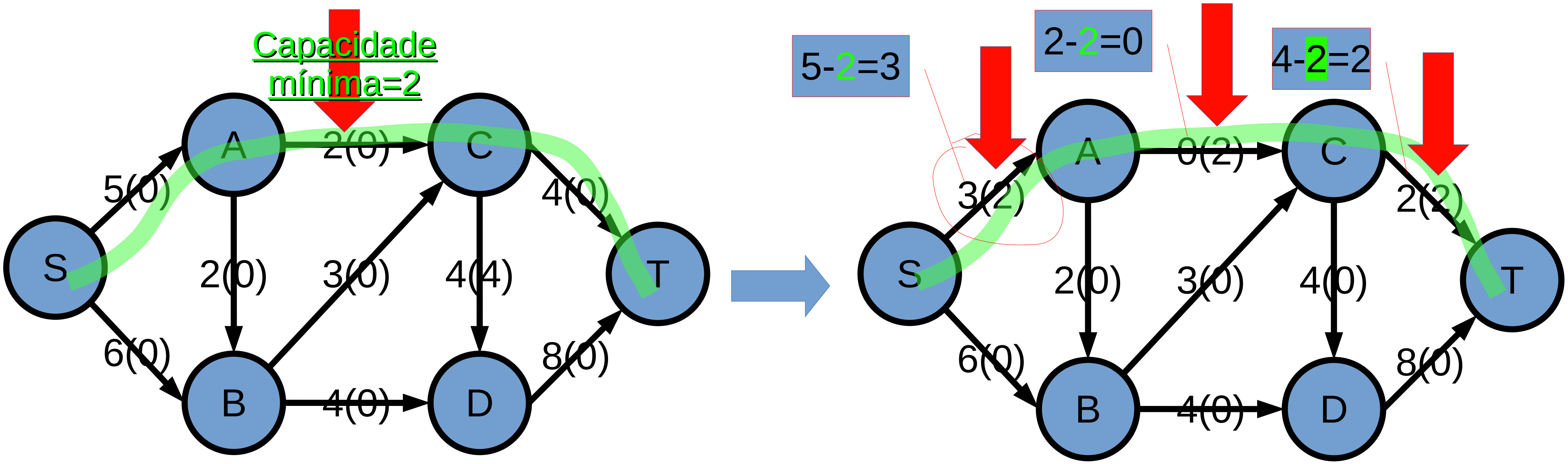
Fim: todos os possíveis caminhos entre s e t estão saturados, contendo pelo menos uma aresta saturada, sem capacidade ociosa. Temos um fluxo máximo na rede = 9, sendo validadas as propriedades que definem o fluxo em redes, particularmente:

$$\sum_{1}^{|V|} outdeg(v_i) = \sum_{1}^{|V|} indeg(v_i)$$

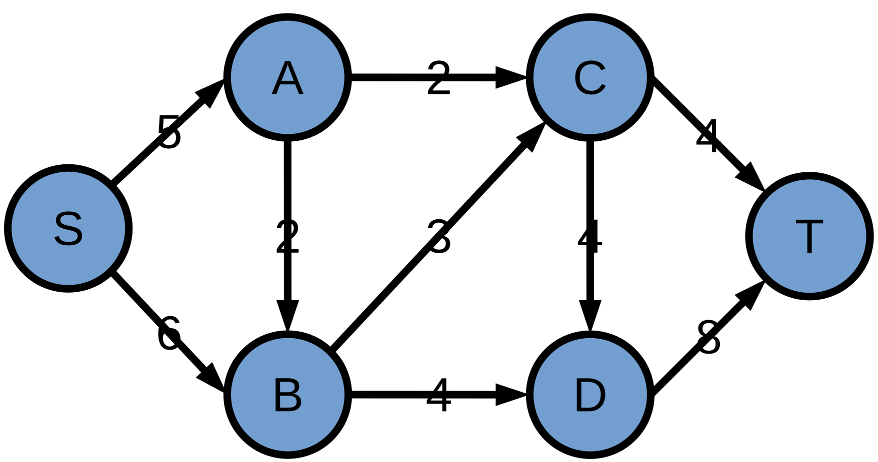


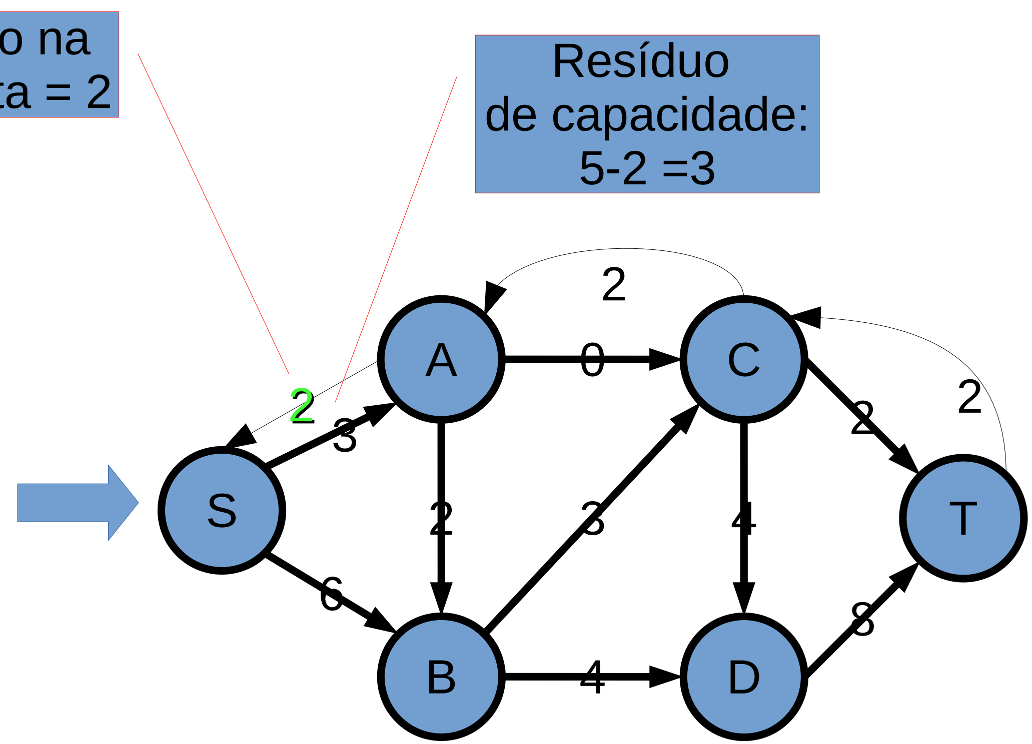
Certas implementações para determinação de fluxo máximo utilizam uma estrutura de apoio chamada rede residual, é o caso implementado por Szwarcfiter [2], a seguir é feito um exemplo:

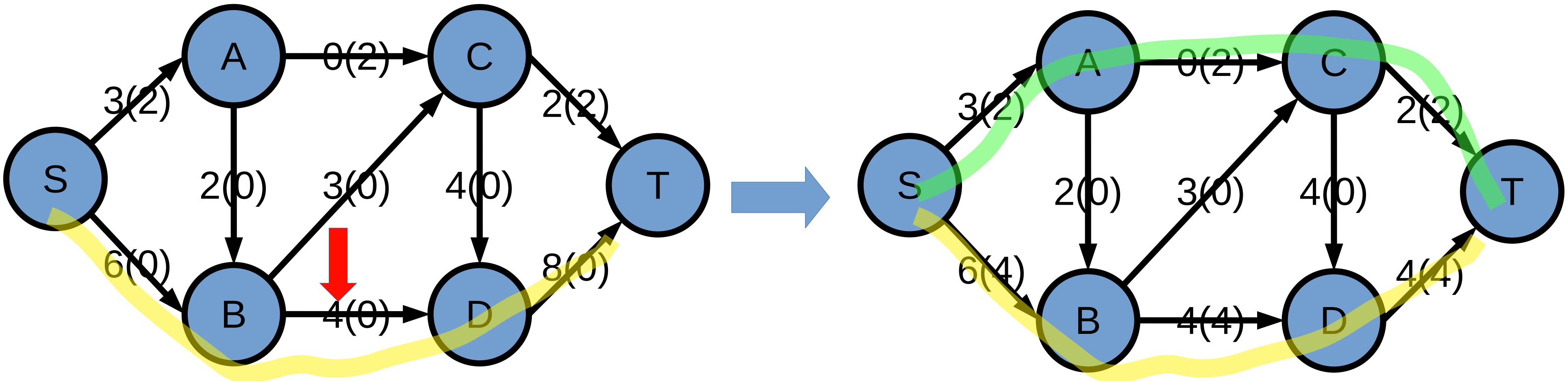




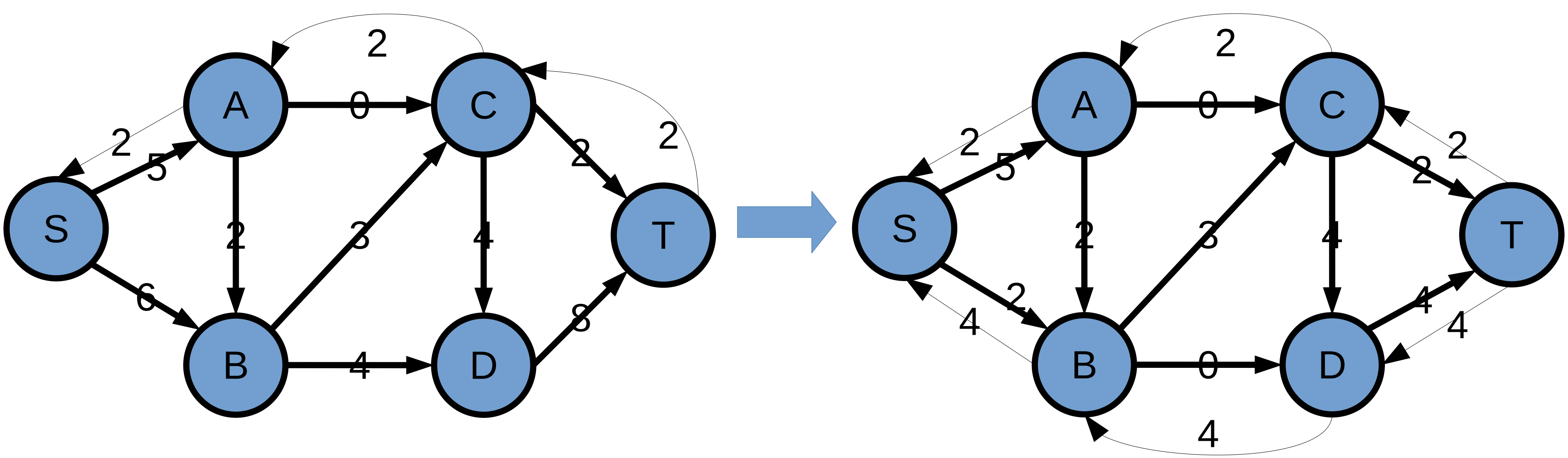
REDE RESIDUAL:

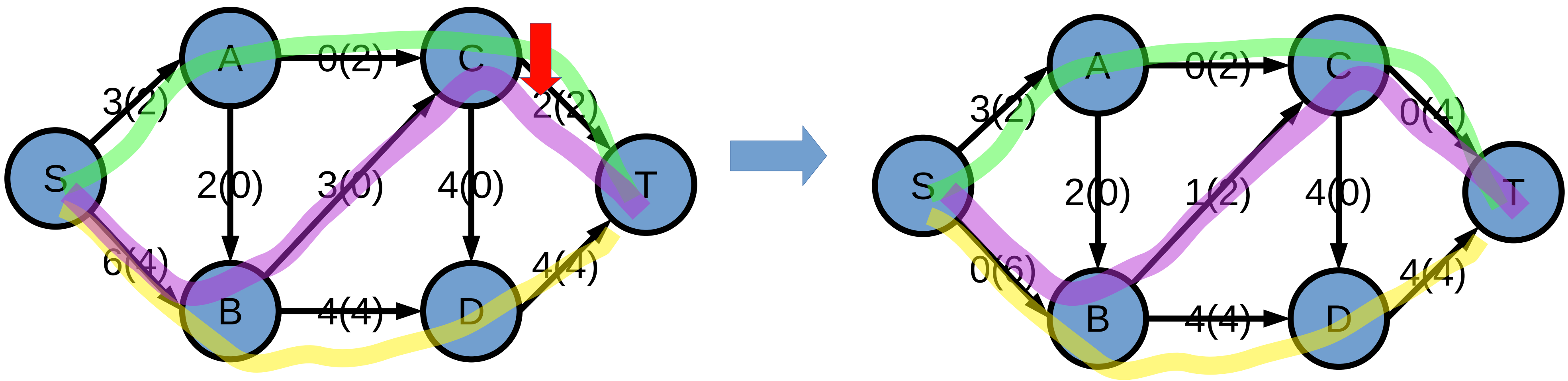




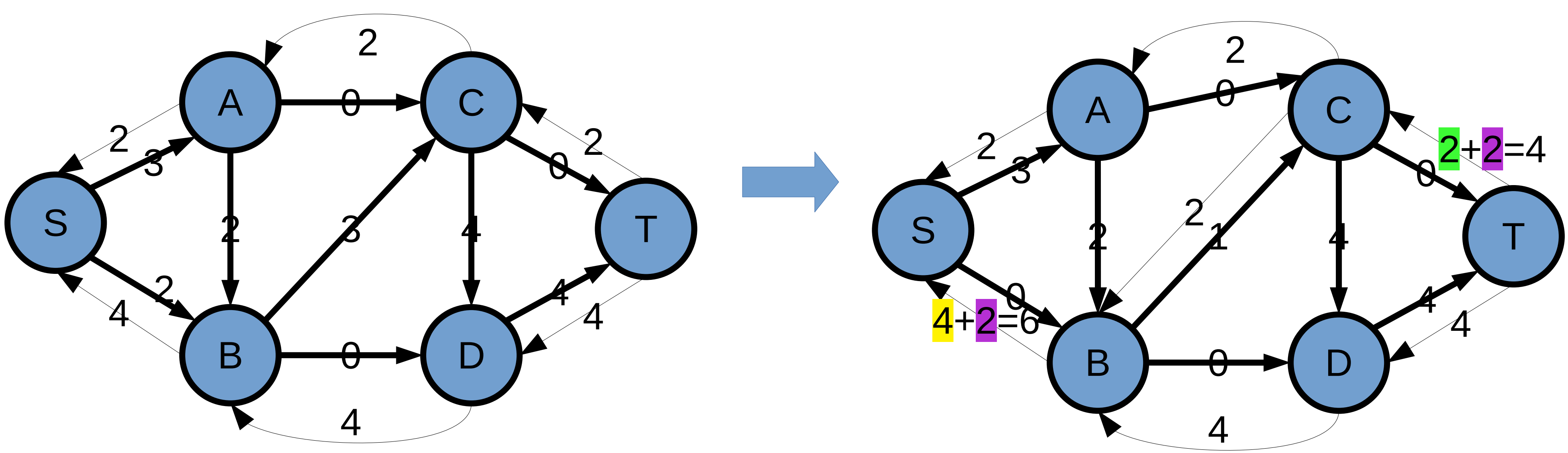


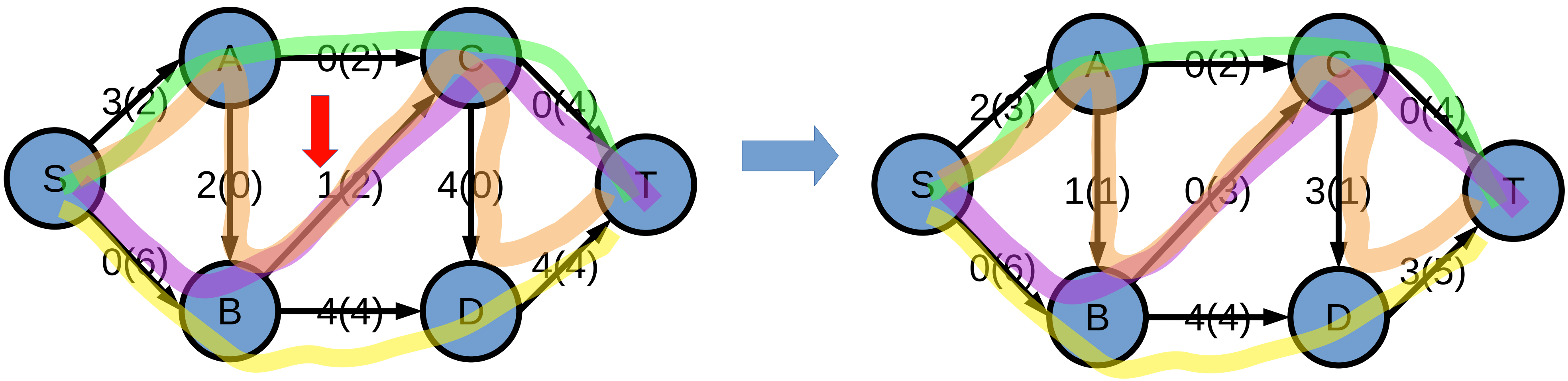
REDE RESIDUAL:



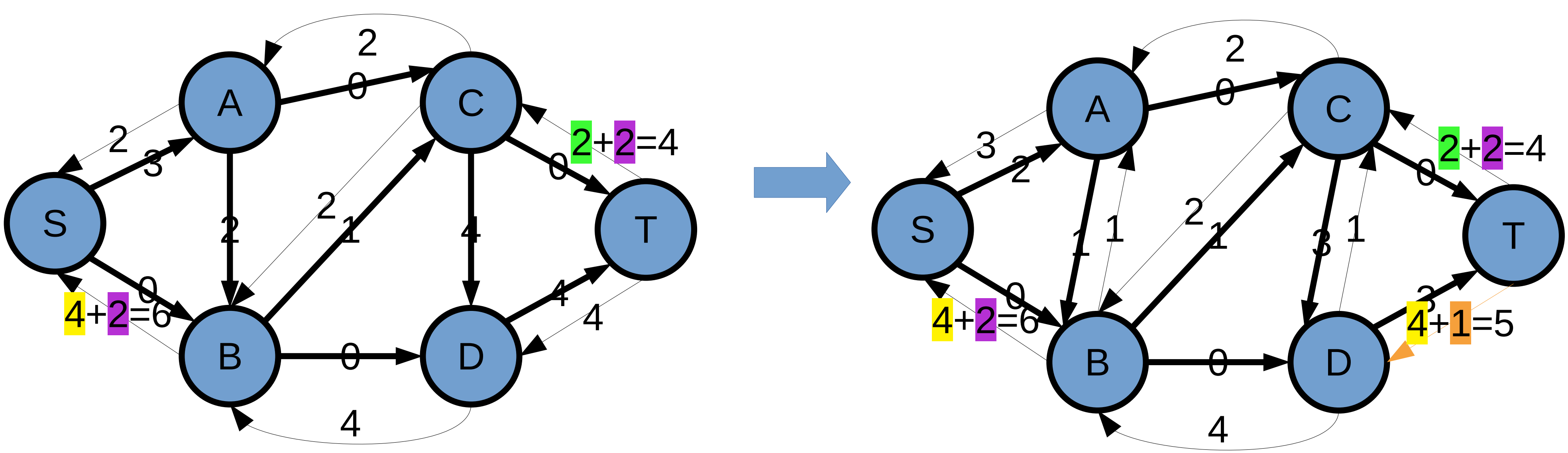


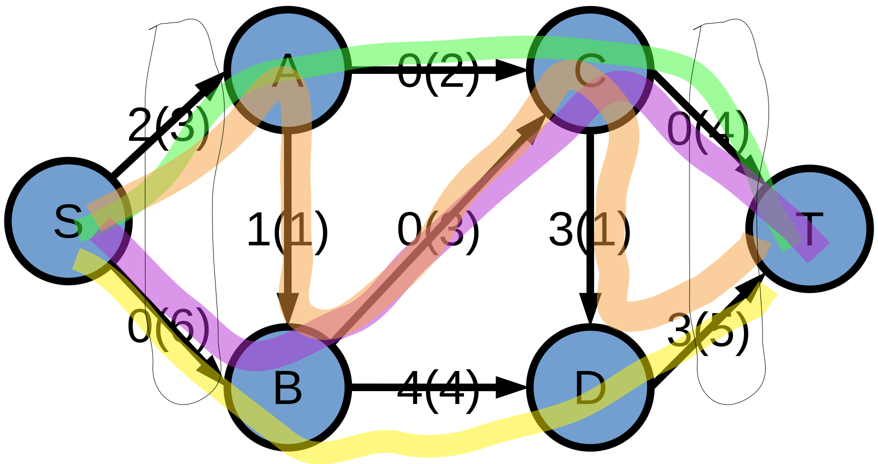
REDE RESIDUAL:





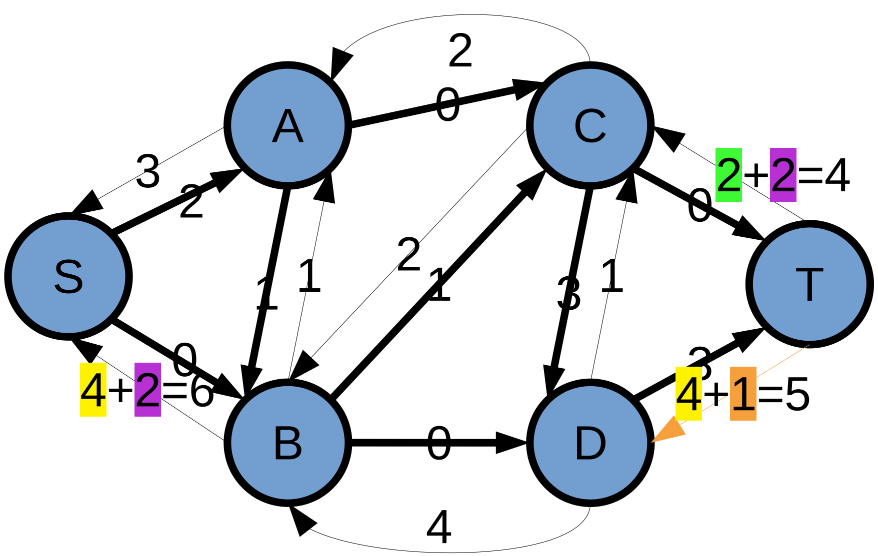
REDE RESIDUAL:





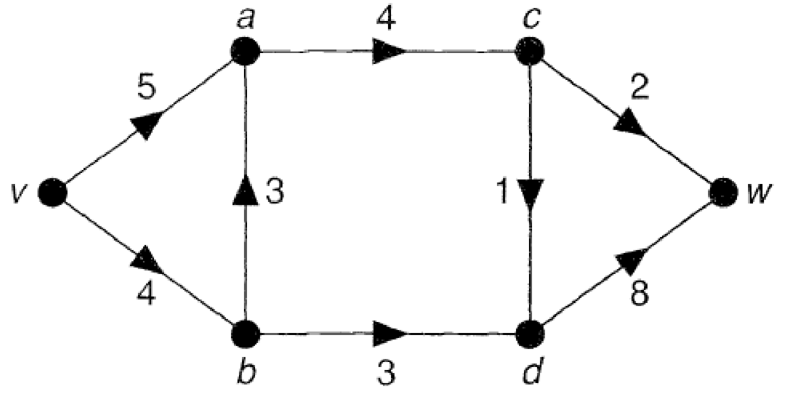
Fluxo máximo = 9

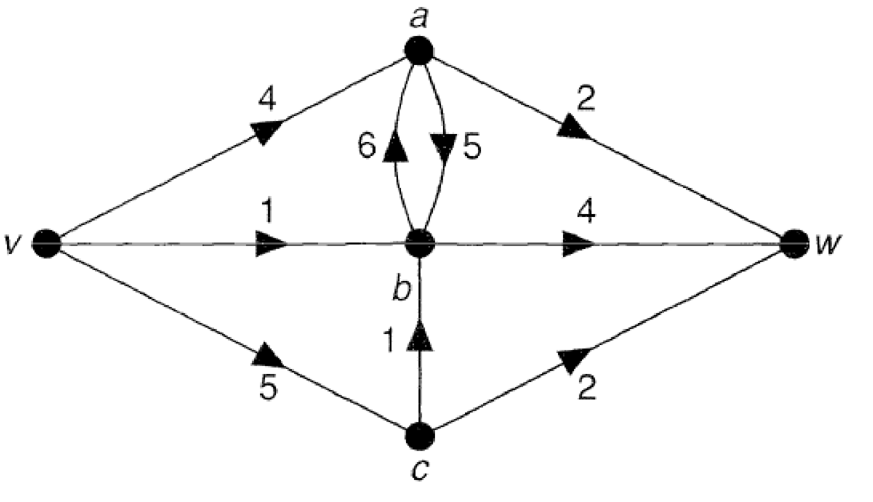
REDE RESIDUAL:



Fluxo em Redes

A simulação anterior é a base do algoritmo Ford-Fulkerson. Utilize as referências bibliográficas, estude o algoritmo e aplique nos grafos/redes abaixo para a determinação do fluxo máximo, com origem em *v* e destino em *w*.





[1] BOAVENTURA NETTO , P. O. Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos. Edgard Blucher, SP, quinta edição.

[2] SZWARCFITER, J. L. Grafos e Algoritmos Computacionais. Campus, 1986.

[3] WILSON, R.J. Introduction to Graph Theory. John Wiley & Sons Inc., 1985.
https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/wilsongraph.pdf

[4] https://www.slideserve.com/vahe/network-flow

[5] https://www.slideserve.com/adora/network-flow-back-flow-powerpoint-ppt-presentation