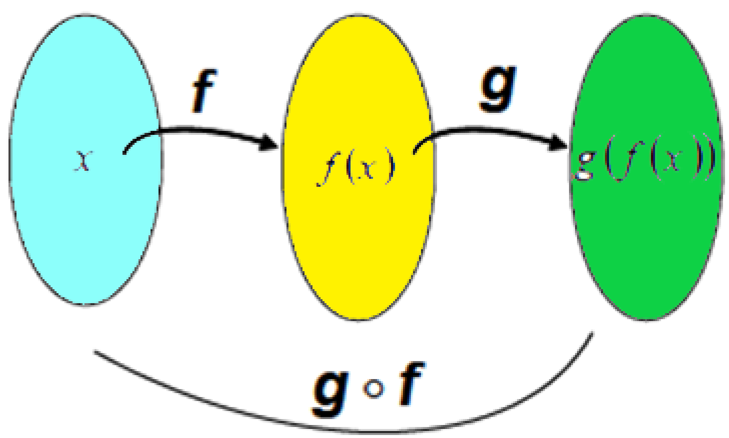
Função Composta

Definição: Dadas duas funções f e g, a **função composta** de g com f, denotada por $g \circ f$ é definida por

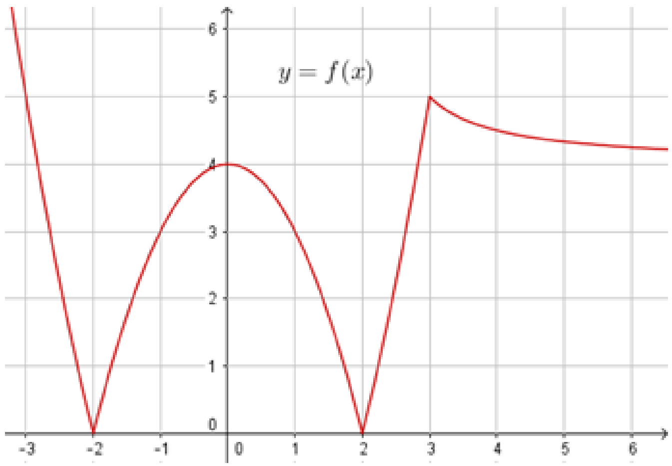
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

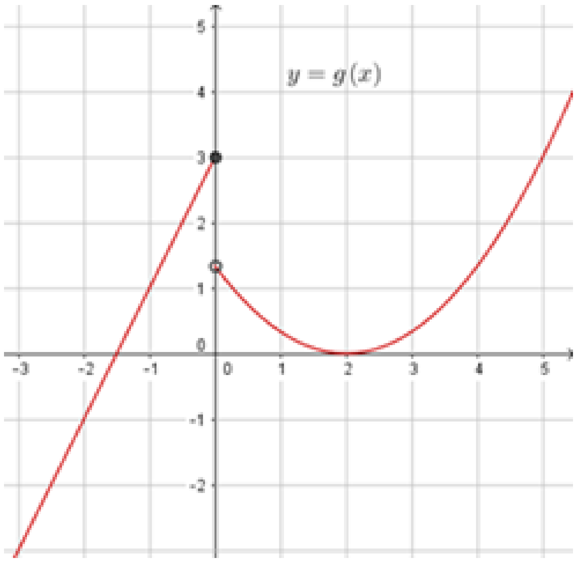


O domínio de $g \circ f$ é o conjunto de todos os pontos x do domínio de f tais que $f(x)$ está no domínio de g. Simbolicamente,

$$D(g \circ f) = \{x \in Df : f(x) \in Dg\}.$$

Exemplo. Considere as funções f e g cujos gráficos estão ilustrados abaixo.

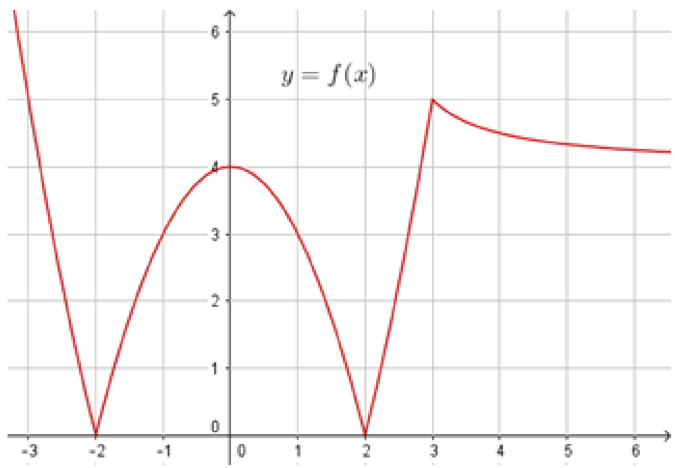


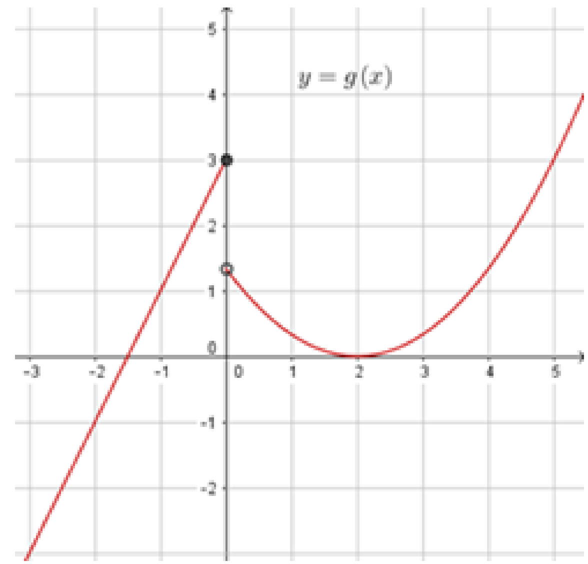


Com base nesses gráficos, obtenha:

a. $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(0) = 4$

Exemplo. Considere as funções f e g cujos gráficos estão ilustrados abaixo.



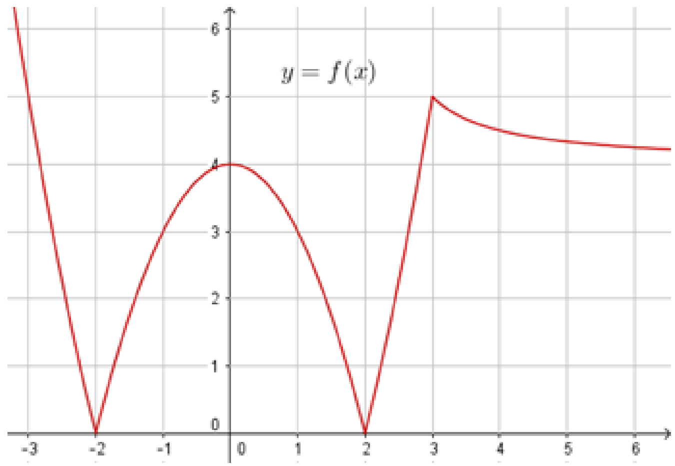


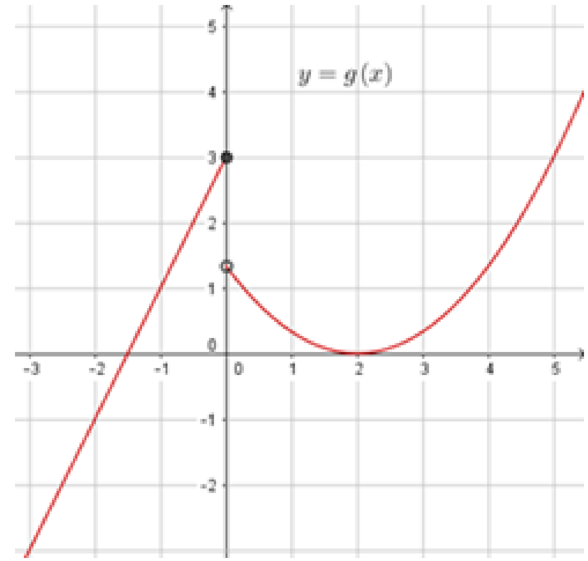
Com base nesses gráficos, obtenha:

a. $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(0) = 4$

b. $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(0) = 3$

Exemplo. Considere as funções f e g cujos gráficos estão ilustrados abaixo.





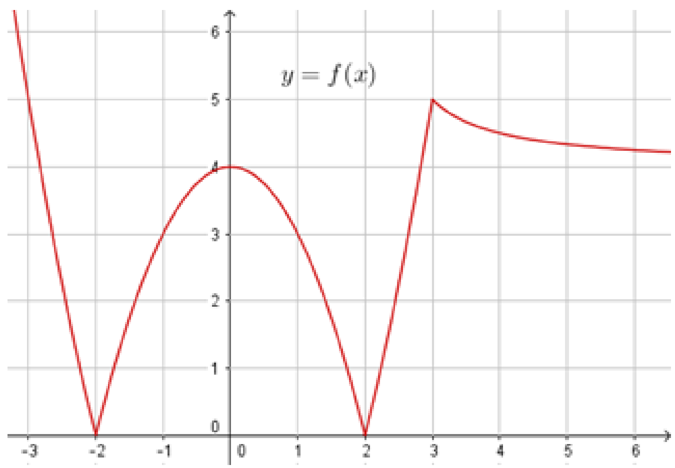
Com base nesses gráficos, obtenha:

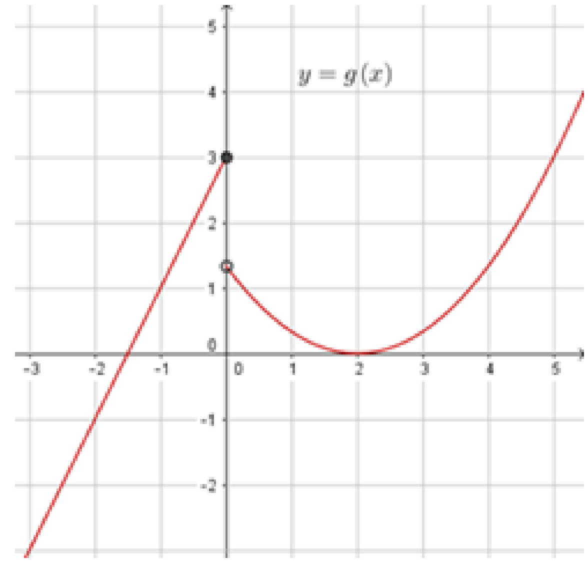
a. $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(0) = 4$

b. $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(0) = 3$

c. $(f \circ g \circ f)(-2) = f(g(f(-2))) = f(g(0)) = f(3) = 5$

Exemplo. Considere as funções f e g cujos gráficos estão ilustrados abaixo.





Com base nesses gráficos, obtenha:

d. $g\big((f \circ g)(-2) - 6\big) = g\big(f(g(-2)) - 6\big)$

$f(g(-2)) = f(-1) = 3$

$= g(3 - 6)$

$= g(-3)$

$= -3$

Exemplo 2. Se a regra da função f é "adicione 1" e a regra da função g é "multiplique por 2", determine a regra para a função fog e gof.

$(fog)(x) = f(g(x)) =$ Multiplique por 2 e adicione 1

$(gof)(x) = g(f(x)) =$ Adicione 1 e multiplique por 2

Analiticamente:

$f(x) = x+1$ e $g(x) = 2x$

$f(g(x)) = g(x) + 1 = 2x+1$

$g(f(x)) = 2f(x) = 2(x+1)$

Exemplo 3. Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$. Encontre a expressão analítica das funções e seus respectivos domínios.

a) $(fog)(x)$ b) $(gof)(x)$ c) $(fof)(x)$ d) $(gog)(x)$

a) $f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{\sqrt{2-x}} = \sqrt[4]{2-x}$

$D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2-x \geq 0$ e $\underbrace{2-x \geq 0}_{2 \geq x}\}$

$D_{fog} = (-\infty, 2]$

Exemplo 3. Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2 - x}$. Encontre a expressão analítica das funções e seus respectivos domínios.

a) $(fog)(x)$ b) $(gof)(x)$ c)$(fof)(x)$ d) $(gog)(x)$

b) $g(f(x)) = \sqrt{2 - f(x)} = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$

$D\, g \circ f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \sqrt{x} \geq 0 \text{ e } 2 - \sqrt{x} \geq 0\}$

$x \geq 0$ $\qquad$ $2 \geq \sqrt{x}$ $\quad ()^2$

$4 \geq x$

$D\, g \circ f = [0, 4]$

Exemplo 3. Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$. Encontre a expressão analítica das funções e seus respectivos domínios.

a) $(fog)(x)$ b) $(gof)(x)$ c) $(fof)(x)$ d) $(gog)(x)$

c) $f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{f(x)}} = \sqrt[4]{f(x)} = \sqrt[4]{x}$

$D_{f \circ f} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$

Exemplo 3. Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$. Encontre a expressão analítica das funções e seus respectivos domínios.

a) $(fog)(x)$ b) $(gof)(x)$ c) $(fof)(x)$ d) $(gog)(x)$

d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = \sqrt{2 - g(x)} = \sqrt{2 - \sqrt{2-x}}$

$D_{g \circ g} = \{ x \in \mathbb{R} \mid 2 - x \geq 0$ e $2 - \sqrt{2-x} \geq 0 \}$

$2 \geq x$

$2 \geq \sqrt{2-x} \quad ()^2$

$4 \geq 2 - x$

$2 \geq -x$

$-2 \leq x$

$D_{g \circ g} = [-2, 2]$

Exemplo 4. Sejam f e g as funções definidas por $f(x) = \frac{x}{2x+3}$ e $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$. Determine a função $g(x)$.

$$(fog)(x) = \frac{x+3}{x-1}$$

$$f(g(x)) = \frac{x+3}{x-1}$$

$$\frac{g(x)}{2g(x)+3} = \frac{x+3}{x-1}$$

$$Multiplicando\ por\ (2g(x)+3)(x-1)$$

$$g(x)(x-1) = (x+3)(2g(x)+3)$$

$$g(x)(x-1) = x(2g(x)+3)) + 3(2g(x)+3))$$

$$g(x)(x-1) = 2xg(x) + 3x + 6g(x) + 9$$

$$g(x)(x-1) - 2xg(x) - 6g(x) = 3x + 9$$

$$g(x)[x - 1 - 2x - 6] = 3x + 9$$

$$g(x)[-x-7] = 3x + 9$$

$$\boxed{g(x) = \frac{3x+9}{-x-7}}$$

Exemplo 5. Mostre que se $f(x)=\frac{4x}{x-3}$, então $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{-12}{(x-3)(x+h-3)}$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{4(x+h)}{(x+h)-3}-\frac{4x}{x-3}}{h}=\frac{\frac{4(x+h)(x-3)-4x(x+h-3)}{(x+h-3)(x-3)}}{h}$$

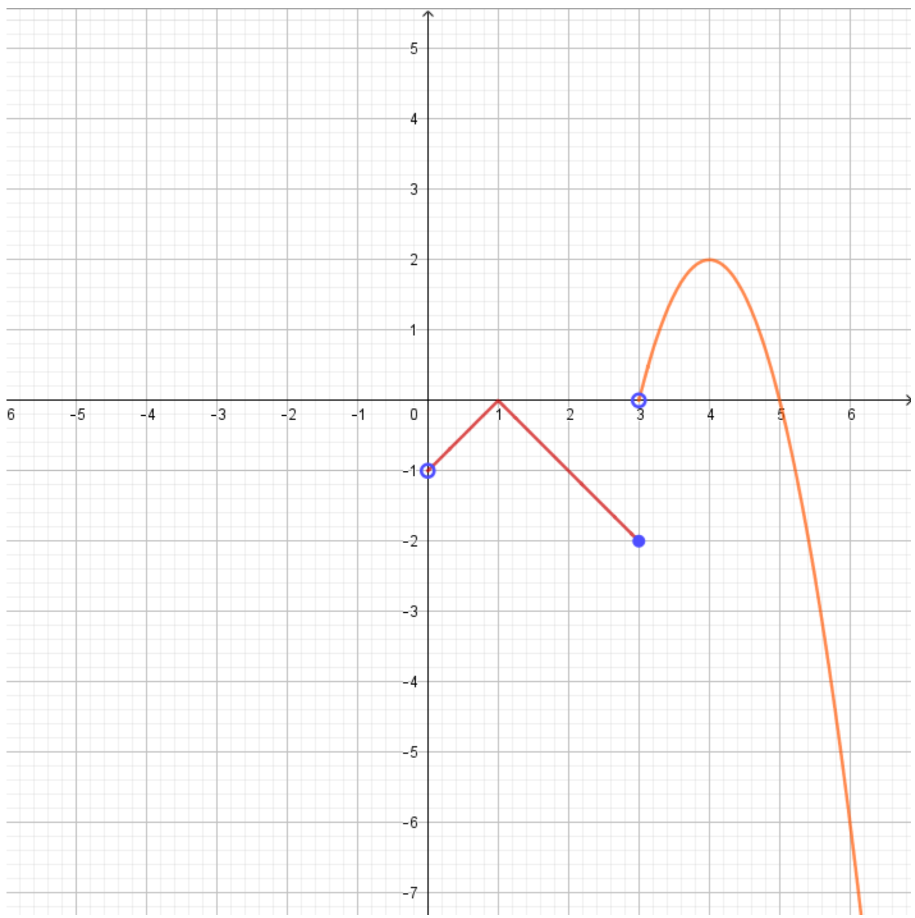
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{4(x^2-3x+hx-3h)-4x^2-4xh+12x}{(x+h-3)(x-3)}}{h}=\frac{\frac{4x^2-12x+4hx-12h-4x^2-4xh+12x}{(x+h-3)(x-3)}}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{-12h}{(x+h-3)(x-3)}}{h}=\frac{-12h}{(x+h-3)(x-3)}\frac{1}{h}=\frac{-12}{(x+h-3)(x-3)}$$

Exemplo 6.

Seja $y = f(x)$ para $x \in \mathbb{R}^*$, cujo gráfico para $x > 0$ está abaixo ilustrado. Construa a parte do gráfico desta função para as abscissas negativas, sabendo que:

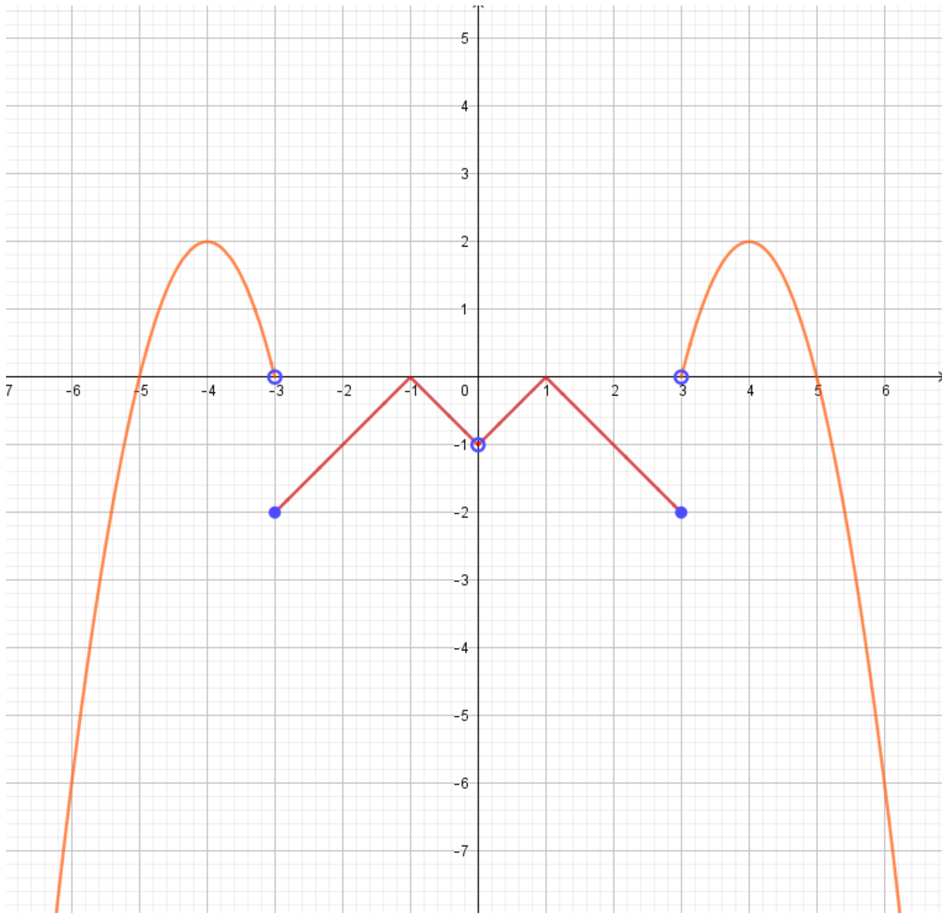
a. f é uma função par, ou seja, simétrica com relação ao eixo das ordenadas;



Exemplo 6.

Seja $y = f(x)$ para $x \in \mathbb{R}^*$, cujo gráfico para $x > 0$ está abaixo ilustrado. Construa a parte do gráfico desta função para as abscissas negativas, sabendo que:

a. f é uma função par, ou seja, simétrica com relação ao eixo das ordenadas;

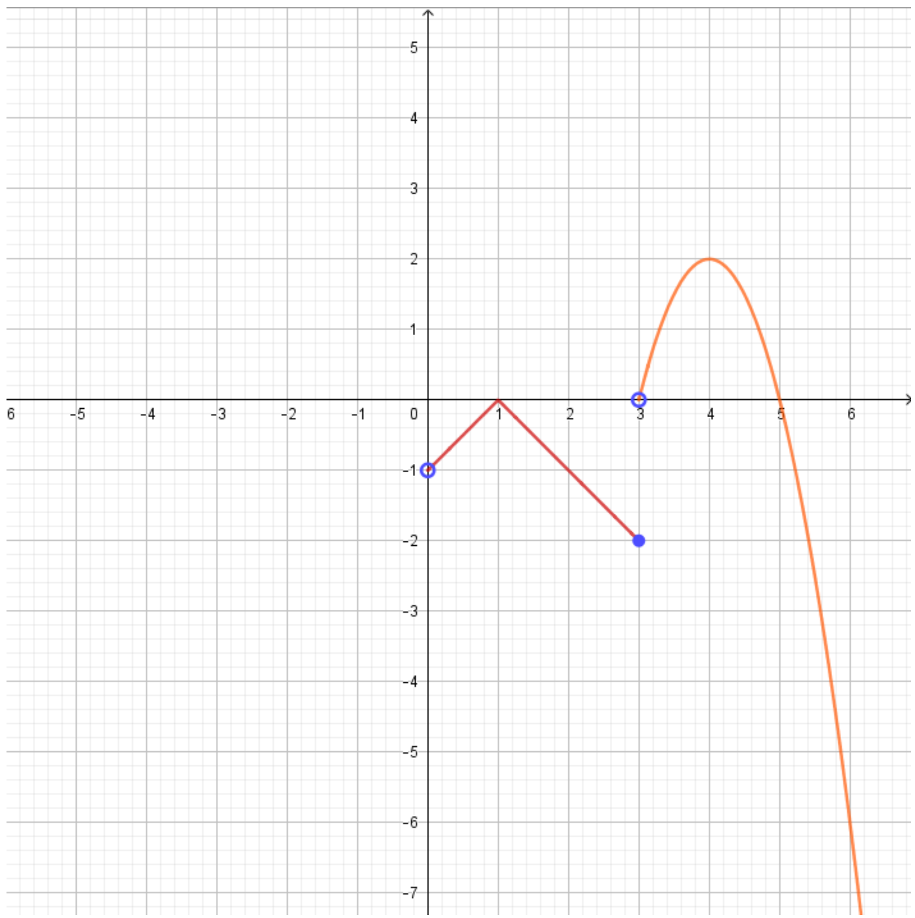


Exemplo 6.

Seja $y = f(x)$ para $x \in \mathbb{R}^*$, cujo gráfico para $x > 0$ está abaixo ilustrado. Construa a parte do gráfico desta função para as abscissas negativas, sabendo que:

a. f é uma função par, ou seja, simétrica com relação ao eixo das ordenadas;

b. f é uma função ímpar, ou seja, simétrica com relação à origem.



Exemplo 6.

Seja $y = f(x)$ para $x \in \mathbb{R}^*$, cujo gráfico para $x > 0$ está abaixo ilustrado. Construa a parte do gráfico desta função para as abscissas negativas, sabendo que:

a. f é uma função par, ou seja, simétrica com relação ao eixo das ordenadas;

b. f é uma função ímpar, ou seja, simétrica com relação à origem.