UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA	CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS (CCT) DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA (DMAT) GRUPO COLABORATIVO DE ENSINO DE ÁLGEBRA LINEAR*

GABARITO DA SEGUNDA LISTA DE EXERCÍCIOS DE ALI-001**

ESPAÇOS VETORIAIS

RESPOSTAS:

1.

a) W é fechado para a adição e não é fechado para a multiplicação por escalar.

b) W é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar.

c) W não é fechado para a adição e é fechado para a multiplicação por escalar.

d) W não é fechado para a adição e é fechado para a multiplicação por escalar.

e) W é fechado para a adição e não é fechado para a multiplicação por escalar.

f) W é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar.

g) W não é fechado para a adição e não é fechado para a multiplicação por escalar.

h) W não é fechado para a adição e não é fechado para a multiplicação por escalar.

i) W não é fechado para a adição e não é fechado para a multiplicação por escalar.

j) W não é fechado para a adição e não é fechado para a multiplicação por escalar.

k) W não é fechado para a adição e não é fechado para a multiplicação por escalar.

2.

a) W não é fechado para a adição e não é fechado para a multiplicação por escalar.

b) W não é fechado para a adição e não é fechado para a multiplicação por escalar.

c) W não é fechado para a adição e não é fechado para a multiplicação por escalar.

d) W não é fechado para a adição e não é fechado para a multiplicação por escalar.

e) W é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar.

f) W é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar.

g) W é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar.

h) W é fechado para a adição e não é fechado para a multiplicação por escalar.

i) W é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar.

j) W é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar.

k) W é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar.

* Professores participantes do Grupo Colaborativo no semestre 2023/2: Graciela Moro, Katiani da Conceição Loureiro e Marnei Luis Mandler.

3. a) $u+v=(0,-1)$ e $2.u=(-3,4)$.

b) $\overrightarrow{0_V}=(-1,2)$.

c) $-u=(-2-x,4-y)$.

d) Basta verificar que $(x,y)+(-2-x,4-y)=(-1,2)$.

e) V é um espaço vetorial.

4. V **não** é um espaço vetorial com tais operações de adição e multiplicação por escalar. O conjunto é fechado para as operações, mas não existe elemento neutro para a adição; não existe elemento oposto para a adição; e 1 não é elemento neutro para a multiplicação por escalar.

5. a) V é fechado para as operações de adição e multiplicação por escalar.

b) $\overrightarrow{0_V}=(0,1)$.

c) $-u=(-x,\frac{1}{y})$.

d) V é um espaço vetorial.

6. a) V é fechado para as operações de adição e multiplicação por escalar.

b) $\vec{0}=(-1,-1)\in V$.

c) $-u=\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)\in V$.

d) Basta notar que $1.(x,y)=((-1)^2x^1,(-1)^2y^1)=(x,y)$.

e) V é um espaço vetorial para as operações dadas.

7. V é fechado para as operações de adição e multiplicação por escalar. O elemento neutro aditivo é o polinômio nulo $0+0x$ e o elemento oposto de $p(x)=a+bx$ é o elemento $-p(x)=-b-ax$. Porém, V não é um espaço vetorial, pois não são válidas a associatividade e a comutatividade da adição.

8. a) $\overrightarrow{0_V}=\left(\frac{1}{7},2\right)\in V$ é o elemento neutro de V.

b) O oposto aditivo de $u=(x,y)\in V$ é o elemento $-u=\left(\frac{1}{49x},\frac{4}{y}\right)\in V$.

c) A propriedade não é válida, pois $k(u+v)\neq ku+kv$.

d) A propriedade não é válida, pois $(k_1+k_2)u\neq k_1u+k_2u$.

e) O conjunto W é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar não usuais.

9. a) W é um subespaço vetorial de V.

b) W não é um subespaço vetorial de V, pois não é fechado para a multiplicação por escalar.

c) W não é um subespaço vetorial de V, pois não é fechado para adição nem para a multiplicação por escalar.

d) W é um subespaço vetorial de V.

e) W é um subespaço vetorial de V.

f) W não é um subespaço vetorial de V, pois não é fechado para adição nem para a multiplicação por escalar.

g) W é um subespaço vetorial de V.

h) W é um subespaço vetorial de V.

i) W não é um subespaço vetorial de V, pois não é fechado para adição nem para a multiplicação por escalar.

j) W não é um subespaço vetorial de V, pois não é fechado para adição.

k) W é um subespaço vetorial de V.

l) W é um subespaço vetorial de V.

10. a) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x^3\}$ não é um subespaço vetorial de V, pois não é fechado para a adição nem para a multiplicação por escalar.

b) $W = \{A \in M(2,2), A^T = A\}$ é um subespaço vetorial de V.

c) W=$\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(-x) = f(x)\ \}$ é um subespaço vetorial de V.

d) W= $\{p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ p(x) = a + bx + cx^2,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ c \neq 0\}$ não é um subespaço vetorial de V, pois não é fechado para a adição e para a multiplicação por escalar.

11. a) W é um subespaço vetorial de V.

b) W não é um subespaço vetorial de V.

c) W não é um subespaço vetorial de V.

d) W é um subespaço vetorial de V.

e) W é um subespaço vetorial de V.

12. $k = -125;\ v = -35v_1 - 5v_2$.

13. B **não** é combinação linear de A_1, A_2, A_3, A_4. No entanto, C pode ser escrita de infinitas formas como combinação linear de A_1, A_2, A_3, A_4. Tais formas são dadas por $C = (2 - 3d)A_1 + (-25 - 5d)A_2 + (16 - 4d)A_3 + dA_4$, com $d \in \mathbb{R}$. Nessa situação, a matriz A_4 poderia ser descartada, sem causar prejuízo à combinação linear de C, pois tomando-se $d = 0$ tem-se que $C = 2A_1 - 25A_2 + 16A_3$.

14. Uma matriz simétrica de ordem 2×2 é da forma $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$, com $a, b, d \in \mathbb{R}$. Tal matriz pode ser escrita como

$$A = \frac{-a}{5}A_1 + \frac{b}{3}A_2 + \frac{d}{9}A_3.$$

15. $q(x)$ não pode ser escrito como combinação linear de p_1, p_2, p_3 e p_4. Já $p(x)$ pode ser escrito de infinitas formas como combinação linear de p_1, p_2, p_3 e p_4. Tais formas são dadas por

$$p(x) = \left(\frac{3}{2} - a_3\right)p_1(x) + (-4 - a_3)\,p_2(x) + a_3 p_3(x) + \left(\frac{10}{4} + a_3\right)p_4(x),$$

em que $a_3 \in \mathbb{R}$.

16. Se u e v são combinações lineares de $v_1, v_2, v_3 \in V$ então existem escalares a_1, a_2, a_3 e b_1, b_2, b_3 tais que $u = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$ e $v = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3$. Com isso, $w = -5u + 8v$ pode ser escrito como uma combinação linear de v_1, v_2, v_3 como $w = (-5a_1 + 8b_1)v_1 + (-5a_2 + 8b_2)v_2 + (-5a_3 + 8b_3)v_3$.

17. a) u, v, w são LI, pois não são coplanares. Para ver isso, basta tomar os vetores que são equipolentes a u, v, w e que possuem sua origem na origem do sistema cartesiano.

b) u, v, w são LD, pois são coplanares. Para ver isso, basta tomar os vetores que são equipolentes a u, v, w que possuem origem na origem do sistema cartesiano.

18. β é LD.

19. β é LD; $v_3 = 3v_1 + 4v_2$.

20. Uma possibilidade é $\alpha = \{(1, 1, 3), (1, 2, 1), (0, 1, 3)\}$.

21. As colunas da matriz formam um conjunto LD. O sistema homogêneo $AX = 0$ possui infinitas soluções, pois é SPI.

22. a) α é LD. b) α é LD. c) α é LI. d) α é LD.

23. Os elementos são LD.

24. Os elementos são LD.

25. a) H é um plano em $\mathbb{R}^3$ que passa pela orig. A equação do plano é $y = x$.

b) $H = ger\{(1,1,0), (0,0,1)\}$.

c) H não é gerado pelos elementos $(2, 2, 0)$ e $(-1, 1, 0)$. Tais elementos geram o plano $z = 0$.

26. a) Verdadeira. b) Verdadeira.

27. $ger\{A_1, A_2, A_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2); a + b - 2c + 2d = 0 \right\}$.

28. a) W é um subespaço vetorial de P_3. b) $W = ger\{-1 + x,\ 7 - 3x^2 + x^3\}$.

29. a) $v \in S$, pois v é uma combinação linear dos geradores de S.

b) $v = (x, y, z, t) \in S$ se e somente se $t - z = 0$, ou seja, $t = z$.

c) Uma base para S é $\beta = \{(1, -1,0,0), (0,0,1,1), (1,0,0,0)\}$ e $\dim(S) = 3$.

d) $S \neq \mathbb{R}^4$, pois $\dim(S) = 3 \neq 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$.

30. a) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. b) $\begin{bmatrix} -27 \\ -22 \\ 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

31. $U = ger\left\{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$, $W = ger\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

e $U \cap W = ger\left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$.

32. Para $k = 1$ ou $k = -\frac{3}{2}$.

33. $U \cap W = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3;\ \ c = -a \ \text{ e } \ b = 2c - 3d\}$.

34. Uma base para W é $\beta_W = \{5, -2,1,0,0), (-4,3,0,2,1)\}$ e $\dim(W) = 2$.

35. a) Uma base para W é $\beta_W = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ e $\dim(W) = 2$.

b) $\alpha = \left\{\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 24 & -2 \end{bmatrix}\right\}$ também é uma base para W.

36. a) $W = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3\ ;\ 2a - 6b + c - 8d = 0\}$.

b) Uma base para W é $\beta_W = \{1 - 2x^2, x + 6x^2, x^2 + x^3\}$ e $\dim(W) = 3$.

37.

a) Existem diversos contraexemplos. Você consegue exibir um deles?

b) Existem diversos exemplos que satisfazem a condição desejada. Você consegue exibir um deles?

38. Se $\dim(U) = 2$ e $\dim(W) = 3$, então

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 5 - \dim(U \cap W).$$

Como $U + W$ é um subespaço de $\mathbb{R}^4$, tem-se que $\dim(U + W) \leq \dim(\mathbb{R}^4) = 4$. Assim

$$\dim(U \cap W) = 5 - \dim(U + W) \geq 5 - 4 = 1.$$

Caso $\dim(U \cap W) = 2$, então obtém-se que $\dim(U + W) = 3$. Além disso, a dimensão de $U \cap W$ não pode ser 3, pois U tem dimensão 2.

39. Se $\dim(U) = 7$ e $\dim(W) = 6$, então

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 13 - \dim(U \cap W).$$

Como $U + W$ é um subespaço de P_9, tem-se que $\dim(U + W) \leq \dim(P_9) = 9 + 1 = 10$. Assim

$$dim(U \cap W) = 13 - dim(U + W) \geq 13 - 10 = 3.$$

Portanto, a interseção entre U e W é pelo menos três, o que garante que eles possuem, obrigatoriamente, pelo menos um subespaço tridimensional em comum.

40. a) Basta mostrar que W é fechado para a adição e multiplicação por escalar.

b) Uma base para W é $\beta_W = \left\{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right\}$ e $\dim(W) = 1$.

41. a) $u = (x, y, z) \in U$ se e somente se $-2x - y + 3z = 0$.

b) $u = (x, y, z) \in W$ se e somente se $5x - y + 3z = 0$.

c) $\beta_{U\cap W} = \{(0,3,1)\}$, $\dim(U \cap W) = 1$. $\beta_{U+W} = \{(1, -2,0), (1,1,1), (-1,1,2)\}$, $\dim(U + W) = 3$.

d) $U + W = \mathbb{R}^3$, pois $\dim(U + W) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. A soma não é direta, pois $U \cap W \neq \emptyset$.

42. a) Uma base para S é $\beta_S = \left\{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ e $\dim(S) = 2$.

b) Tal base para $M(2,2)$ deve ser formada por quatro matrizes LI's, sendo que duas delas devem ser os elementos obtidos no item anterior.

43. a) Uma base é $\beta_{W_1} = \{(1, 0, 0, 6), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, -3)\}$ e $\dim(W_1) = 3$.

b) Uma base é $\beta_{W_2} = \{(-25, 5, 0, -14), (15, 0, 5, 9)\}$ e $\dim(W_2) = 2$.

c) Uma base é $\beta_{W_1\cap W_2} = \{(8, 11, 21, 7)\}$ e $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$.

d) Uma base é $\beta_{W_1+W_2} = \{(1, 0, 0, 6), (0, 1, 0, 2), (0, 0,1, -3), (-25, 5, 0, -14)\}$ e $\dim(W_1 + W_2) = 4$.

44. a) W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de $M(2,2)$.

b) i) Uma base é $\beta_{W_1} = \left\{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ e $\dim(W_1) = 2$.

ii) Uma base é $\beta_{W_2} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ e $\dim(W_2) = 3$.

iii) Uma base é $\beta_{W_1\cap W_2} = \left\{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ e $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$.

iv) Uma base é $\beta_{W_1+W_2} = \left\{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ e $\dim(W_1 + W_2) = 4$.

45. a) $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W_1$ se e somente se $3a + b + 3c + d = 0$.

b) $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W_2$ se e somente se $b + 2c + 4d = 0$.

c) i) Uma base é $\beta_{W_1} = \{1 - 3x^3,\ x - x^3,\ x^2 - 3x^3\}$ e $\dim(W_1) = 3$.

ii) Uma base é $\beta_{W_2} = \{1, -2x + x^2, -4x + x^3\}$ e $\dim(W_2) = 3$.

iii) Uma base é $\beta_{W_1\cap W_2} = \{1 + 6x - 3x^2, 11x + 3x^2 + x^3\}$ e $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$.

iv) Uma base é $\beta_{W_1+W_2} = \{1 - 3x^3, x - x^3, x^2 - 3x^3,\ 1\}$ e $\dim(W_1 + W_2) = 4$.

46. a) Uma base é $\beta_{W_1} = \{1 + 2x,\ x + x^2, -x + x^3\}$ e $\dim(W_1) = 3$.

b) Uma base é $\beta_{W_2} = \{1, -3x + x^2, 4x + x^3\}$ e $\dim(W_2) = 3$.

c) Uma base é $\beta_{W_1\cap W_2} = \{-2 - 3x + x^2, 5 + 8x + 2x^3\}$ e $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$.

d) Uma base é $\beta_{W_1+W_2} = \{1 + 2x, x + x^2, -x + x^3,\ 1\}$ e $\dim(W_1 + W_2) = 4$.

47. a) Uma base é $\beta_{W_1 \cap W_2 \cap W_3} = \{(-1,-6,-2,-4,1)\}$ e $\dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3) = 1$.

b) Uma base é $\beta_{W_1+W_3} = \{(1,0,2,0,-1),(0,1,0,0,0),(0,0,0,1,0),(1,0,0,2,0),(0,0,1,0,0)\}$ e $\dim(W_1 + W_3) = 5$.

$c)$ $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^5$, pois $\dim(W_1 + W_2) = 5 = \dim(\mathbb{R}^5)$. Porém, a soma não é direta, pois $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$, já que $W_1 \cap W_2 = ger\{(0,1,0,1,0),(-1,-2,-2,0,1)\}$, ou seja, $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$.

48. a) $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in U$ se e somente se $4a - 3b + 2c = 0$.

b) i) Uma base é $\beta_U = \{1 - 2x^2,\ 2x + 3x^2,\ x^3\}$ e $\dim(U) = 3$.

ii) Uma base é $\beta_W = \{x,\ x^2,\ x^3\}$ e $\dim(W) = 3$.

iii) Uma base é $\beta_{U \cap W} = \{2x + 3x^2, x^3\}$ e $\dim(U \cap W) = 2$.

iv) Uma base é $\beta_{U+W} = \{1 - 2x^2,\ 2x + 3x^2,\ x^3,\ x\}$ e $\dim(U + W) = 4$.

49. a) Uma base é $\beta_{W_1} = \left\{\begin{bmatrix} 34 & 13 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 53 & 19 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ e $\dim(W_1) = 2$.

b) Uma base é $\beta_{W_2} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\right\}$ e $\dim(W_2) = 3$.

c) Uma base é $\beta_{W_1 \cap W_2} = \left\{\begin{bmatrix} 393 & 149 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ e $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$.

d) Uma base é $\beta_{W_1+W_2} = \left\{\begin{bmatrix} 34 & 13 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 53 & 19 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}\right\}$ e $\dim(W_1 + W_2) = 4$.

50. a) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W$ se e somente se $b - 2c + d = 0$.

b) i) Uma base é $\beta_U = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ e $\dim(U) = 3$.

ii) Uma base é $\beta_W = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ e $\dim(W) = 3$.

iii) Uma base é $\beta_{U \cap W} = \left\{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ e $\dim(U \cap W) = 2$.

iv) Uma base é $\beta_{U+W} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ e $\dim(U + W) = 4$.

51. a) i) $[I]_{\beta}^{\beta_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. ii) $[I]_{\beta_1}^{\beta} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

iii) $[I]_{\beta_2}^{\beta} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 3 \\ \sqrt{3} & -3 \end{bmatrix}$. iv) $[I]_{\beta_2}^{\beta} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

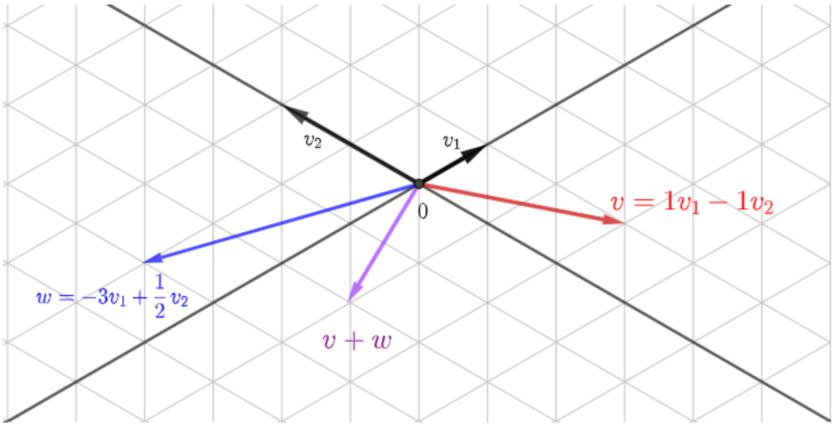
b) $[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $[v]_{\beta_1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ $[v]_{\beta_2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{3} - 2 \\ \sqrt{3} + 2 \end{bmatrix}$, $[v]_{\beta_3} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

c) i) $[u]_{\beta} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}$ ii) $[u]_{\beta_2} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2\sqrt{3} + 6 \\ -2\sqrt{3} - 62 \end{bmatrix}$ iii) $[u]_{\beta_3} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

52. a) $[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $[w]_\beta = \begin{bmatrix} -3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$.

As representações geométricas dos elementos $v,\ w$ e $v+w$ estão na figura abaixo:



53. a) $[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$.

b) $[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

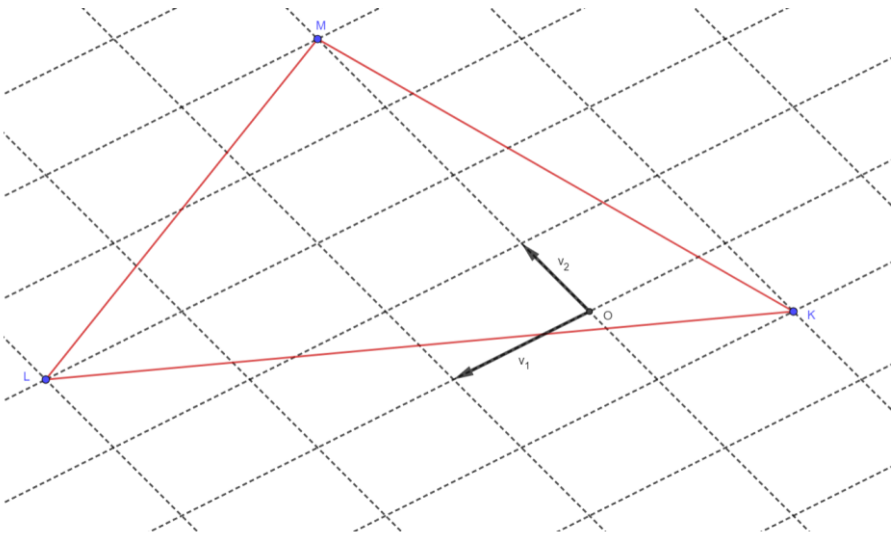
c) Em relação à base α, as coordenadas dos vetores posição dos vértices do quadrilátero $CDEF$ são:

$$[C]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad [D]_\alpha = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad [E]_\alpha = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad [F]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Em relação à base β, as coordenadas dos vetores posição dos vértices do quadrilátero $CDEF$ são:

$$[C]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad [D]_\beta = \begin{bmatrix} -16 \\ -9 \end{bmatrix}; \quad [E]_\beta = \begin{bmatrix} -19 \\ -11 \end{bmatrix}; \quad [F]_\beta = \begin{bmatrix} 20 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

d) Como $[K]_\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $[L]_\alpha = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $[M]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, os vetores posições dos vértices $K,\ L$ e M são dados, respectivamente, por $v_K = -1v_1 - 1v_2$; $v_L = 3v_1 + 2v_2$ e $v_M = 0v_1 + 4v_2 = 4v_2$. Com isso, o triângulo KLM está representado na figura abaixo:



54. a) $[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/16 \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

b) $[p]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{16} \end{bmatrix} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $[q]_\alpha = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -20 \\ 56 \\ 64 \end{bmatrix}.$

55. a) $[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -11 \end{bmatrix}$ e $[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -11/12 & -5/12 \\ 0 & 1/12 & 1/12 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 6 & -11 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

b) $[A]_\alpha = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 6\pi + 11e \\ 6\pi \\ e \end{bmatrix}.$

c) $[B]_\beta = \begin{bmatrix} 94 \\ 34 \\ 86 \end{bmatrix}.$

56. $\beta = \{(1,-2,-2),(0,1,1),(0,-1,-2)\}.$

57. a) $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\}.$

b) $[A]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$

58. a) $[I]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{3\times 3}.$

b) Basta mostrar que β é LI, pois $\dim(V) = 3$.

c) $[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$

d) $[w]_\alpha = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$

59. a) $[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 \\ -1 & -3 & -5 \\ 3 & 5 & 11 \end{bmatrix}.$ b) $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -20 \end{bmatrix}.$

c) $[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 8 & -3 & 3 \\ 4 & -18 & -6 \\ -4 & 9 & 3 \end{bmatrix}.$ d) $[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{12} \\ -\frac{7}{6} \\ \frac{5}{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -7 \\ -14 \\ 5 \end{bmatrix}.$

60.

a) Verdadeira.

b) Verdadeira.

c) Verdadeira.

d) Falsa. W é uma reta em $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem.

e) Verdadeira, pois $p(x) = -17p_1(x) + 12p_2(x)$.

f) Falsa. O conjunto β é LD.

g) Verdadeira.

h) Verdadeira.

i) Falsa. Se o conjunto β for LD, não formará uma base para o subespaço gerado.

j) Verdadeira.

k) Verdadeira.

l) Verdadeira, pois $[I]_{\beta}^{\alpha}$ e $[I]_{\alpha}^{\beta}$ são matrizes inversas e o resultado desejado decorre de propriedade de determinantes: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.