Problemas de Otimização

Exemplo 1. Um fabricante de fertilizantes constata que, se produzir x unidades de fertilizantes, pode vender seu produto a $p = 300 - \frac{x}{100}$ reais por unidade. O custo de produção (em reais) de x unidades é $C(x) = 15.000 + 125x + \frac{x^2}{40}$. Se a capacidade de produção da empresa for de, no máximo, 1.000 unidades de fertilizante num determinado intervalo de tempo especificado, quantas unidades deveriam ser manufaturadas e vendidas nesse intervalo de tempo para maximizar o lucro?

<u>**Objetivo:**</u> Encontrar x para que o lucro seja máximo.

Seja L a função lucro. Ela é definida por:

$$L(x) = valor\ arrecadado\ com\ a\ venda\ de\ x\ unidades - custo\ para\ a\ produção\ de\ x\ unidades$$

$$L(x) = x.p(x) - C(x)$$

$$L(x) = x.\left(300 - \frac{x}{100}\right) - \left(15.000 + 125x + \frac{x^2}{40}\right)$$

$$L(x) = 300x - \frac{x^2}{100} - 15.000 - 125x - \frac{x^2}{40} \Rightarrow \boxed{L(x) = -\frac{x^2}{8} + 175x - 15.000}$$

Domínio de L: $DL = [0,1000]$

Pontos críticos: c $\in DL$ tal que $L'(c) = 0$ ou $L'(c) \nexists$

$$L(x) = -\frac{x^2}{8} + 175x - 15.000 \Longrightarrow L'(x) = -\frac{1}{4}x + 175$$

$$L'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x + 175 = 0 \Longrightarrow x = 700 \in (0{,}1000)$$

$L'(x)$ existe para todos os pontos do domínio.

O único ponto crítico é 700.

Teste da 2ª Derivada:

Sejam f uma função derivável num intervalo aberto (a, b) e c um ponto crítico de f neste intervalo tal que $f'(c) = 0$, para $c \in (a, b)$. Se f admite a derivada f'' em (a, b) e:

i) Se $f''(c) < 0$, então f tem um valor **máximo relativo** em c;
ii) Se $f''(c) > 0$, então f tem um valor **mínimo relativo** em c;
iii) Se $f'(c) = 0$, então o teste é inconclusivo.

Pontos críticos: c $\in DL$ tal que $L'(c) = 0$ ou $L'(c) \nexists$

$$L(x) = -\frac{x^2}{8} + 175x - 15.000 \Longrightarrow L'(x) = -\frac{1}{4}x + 175$$

$$L'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x + 175 = 0 \Longrightarrow x = 700 \in (0{,}1000)$$

$L'(x)$ existe para todos os pontos do domínio.

O único ponto crítico é 700.

Aplicando o teste da 2ª derivada:

$L'(x) = -\frac{1}{4}x + 175 \Longrightarrow L''(x) = -\frac{1}{4} \Longrightarrow L''(700) = -\frac{1}{4} < 0 \Longrightarrow$ valor **máximo relativo**

Teorema de Weierstrass: Se f é uma função contínua, definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Então f assume seu máximo e mínimo absoluto em $[a, b]$.

Pontos críticos: c $\in DL$ tal que $L'(c) = 0$ ou $L'(c) \nexists$

$$L(x) = -\frac{x^2}{8} + 175x - 15.000 \Longrightarrow L'(x) = -\frac{1}{4}x + 175$$

$$L'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x + 175 = 0 \Longrightarrow x = 700 \in (0,1000)$$

$L'(x)$ existe para todos os pontos do domínio.

O único ponto crítico é 700.

Aplicando o teste da 2ª derivada:

$L'(x) = -\frac{1}{4}x + 175 \Longrightarrow L''(x) = -\frac{1}{4} \Longrightarrow L''(700) = -\frac{1}{4} < 0 \Longrightarrow$ valor **máximo relativo**

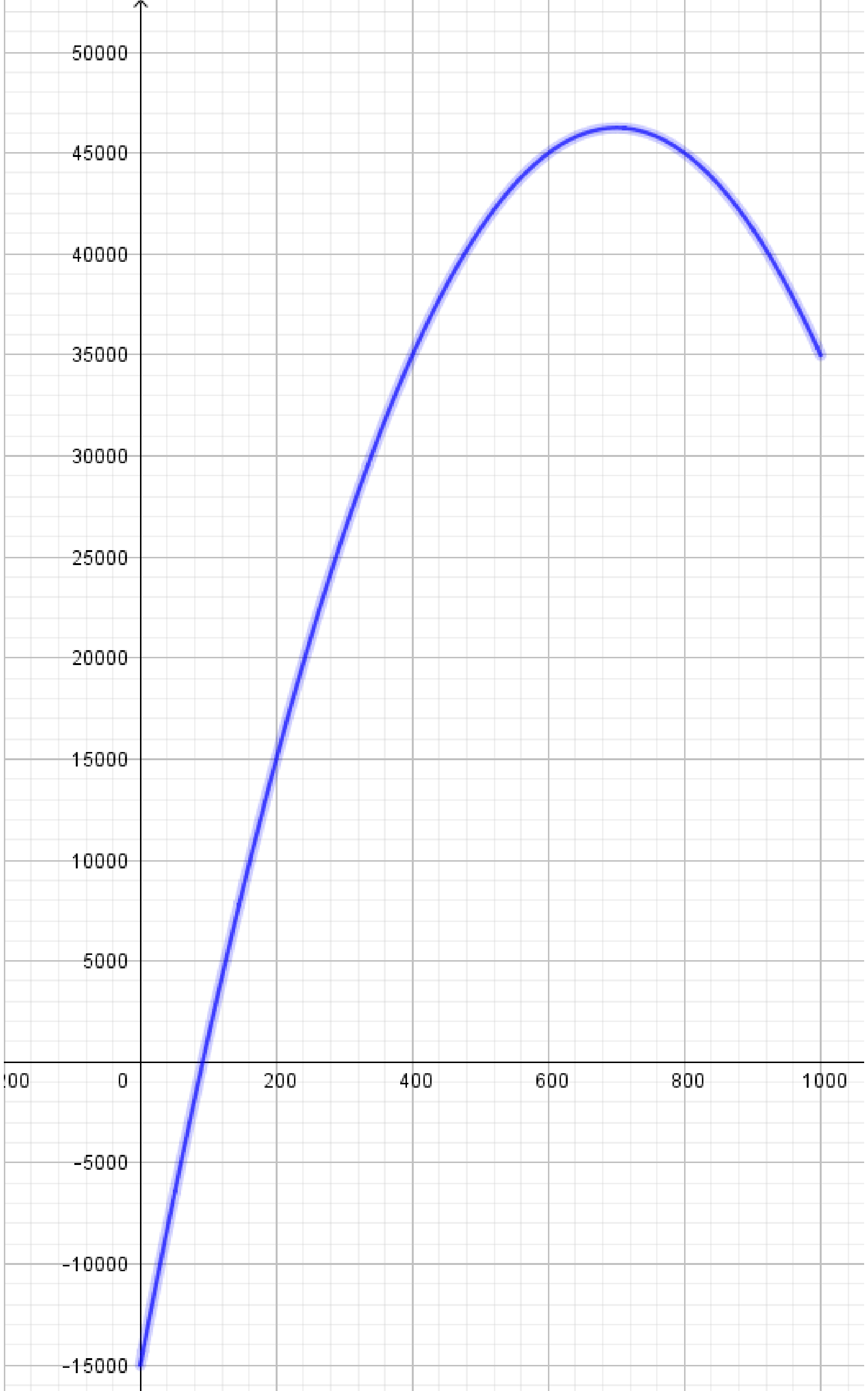
Comparando os valores das imagens da função L nos extremos do intervalo de definição de L com a imagem do máximo relativo:

$L(0) = -15.000$

$L(700) = 46.250$ $\Rightarrow$ 700 é o **máximo absoluto**

$L(1000) = 35.000$

Conclusão:
O lucro máximo é obtido ao se produzir 700 unidades de fertilizantes.



50000
45000
40000
35000
30000
25000
20000
15000
10000
5000
-5000
-10000
-15000
200
0
200
400
600
800
1000

Exemplo 2. O Departamento de Estradas registrou, por várias semanas, a velocidade do tráfego fluindo numa rodovia após uma saída. Os dados sugerem que a velocidade do tráfego na saída é aproximadamente $f(t) = t^3 - 10{,}5t^2 + 30t + 20\ km/h$, onde t é o número de horas após o meio dia. Use a teoria de derivadas para determinar em que horário, entre 15 e 18 horas, o tráfego se move mais rápido e a que horas ele se move mais lentamente?

<u>**Objetivo:**</u> Encontrar t para que o tráfego seja mais rápido/lento.

Temos que:

$$f(t) = t^3 - 10{,}5t^2 + 30t + 20\ ,\ t \in [3{,}6]$$

Ponto crítico:

$$f'(t) = 3t^2 - 21t + 30 \quad \Rightarrow \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 21t + 30 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} t = 2 \notin (3{,}6) \\ t = 5 \in (3{,}6) \end{cases}$$

f' existe para todo $t \in (3{,}6)$.

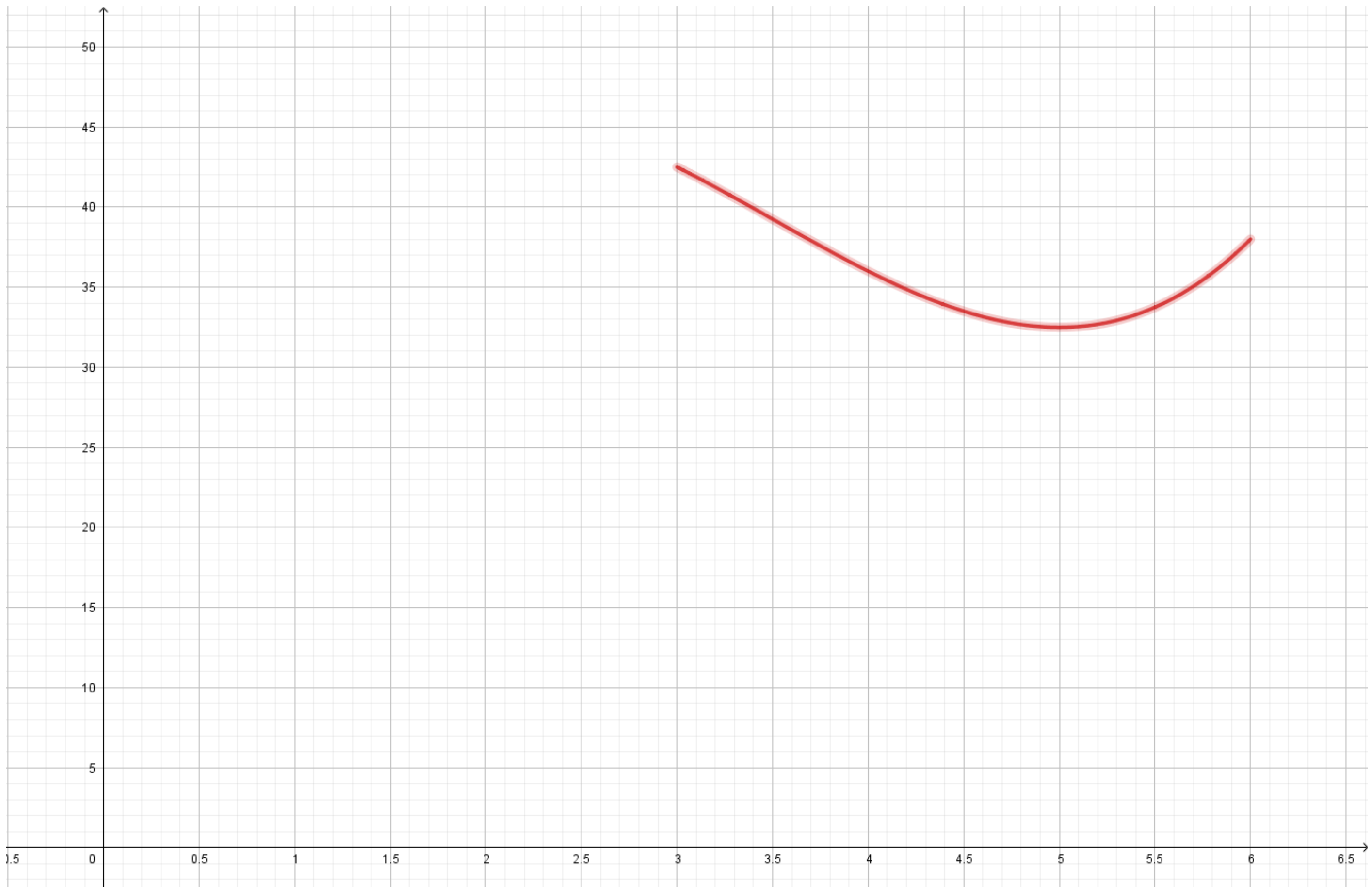
Pelo teste da 2ª derivada, temos que: $f''(t) = 6t^2 - 21$

$f''(5) = 6(5)^2 - 21 > 0 \Longrightarrow$ **mínimo local**

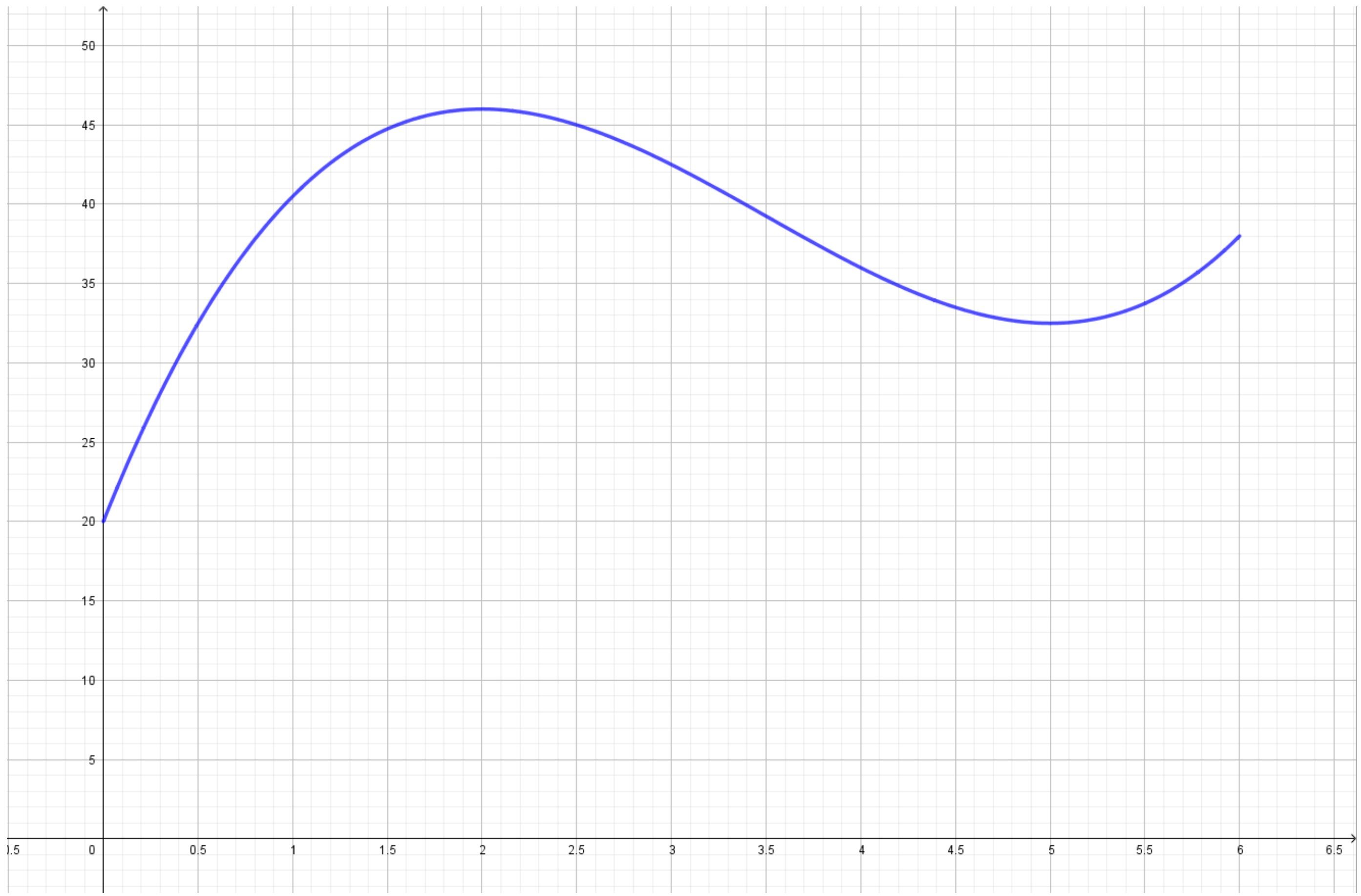
Pelo teorema de Weierstrass, temos que: $f(3) = 42{,}5 \Longrightarrow$ **máximo global**

$f(5) = 32{,}5 \Longrightarrow$ **mínimo global**

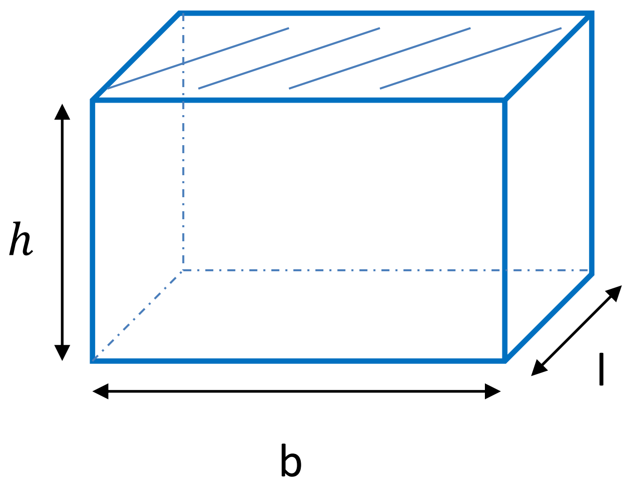
$f(6) = 38$



50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5


50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
6.5

Exemplo 3. Deseja-se constuir um reservatório, sem tampa, no formato de uma paralelepipedo reto cuja capacidade é de 10 m³ cujo comprimento da base é o dobro da largura. Sabendo que o material para constuir a base e as laterais custam, respectivamente, 10 e 6 reais por metro quadrado, determine as dimensões que minimizam o custo do reservatório.



Dados: $\begin{cases} b = 2l \\ V = 10m^3 \end{cases}$

Objetivo: Determinar b, l e h que minimizam o custo.

Seja C a função custo.

$$C = 10\,.\,área\ da\ base + 6\,.\,área\ lateral$$

$$C = 10\,.\,bl + 12lh + 12bh$$

$$C = 10\,.\,(2l)l + 12lh + 12(2l)h$$

$$C = 20l^2 + 36\,lh$$

O volume da caixa é dado por:

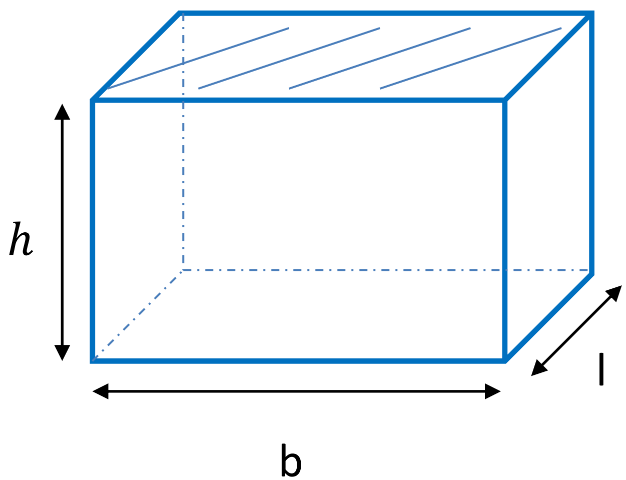
$$V = área\ da\ base\,.\,altura$$

$$V = blh \Longrightarrow V = 2l^2h \Longrightarrow 10 = 2l^2h \Longrightarrow h = \frac{5}{l^2}$$

Substituindo esta informação na função custo, temos que:

$$C = 20l^2 + 36l\frac{5}{l^2} \Longrightarrow C = 20l^2 + \frac{180}{l}$$

Exemplo 3. Deseja-se constuir um reservatório, sem tampa, no formato de uma paralelepipedo reto cuja capacidade é de 10 m³ cujo comprimento da base é o dobro da largura. Sabendo que o material para constuir a base e as laterais custam, respectivamente, 10 e 6 reais por metro quadrado, determine as dimensões que minimizam o custo do reservatório.



Dados: $\begin{cases} b = 2l \\ V = 10m^3 \end{cases}$

Objetivo: Determinar b, l e h que minimizam o custo.

$$C = 20\,l^2 + \frac{180}{l}, \qquad l \in (0, +\infty)$$

Ponto crítico: $C'(l) = 40l - \dfrac{180}{l^2}$

$$C'(l) = 0 \Leftrightarrow 40l - \frac{180}{l^2} = 0 \Rightarrow \frac{40l^3 - 180}{l^2} = 0$$

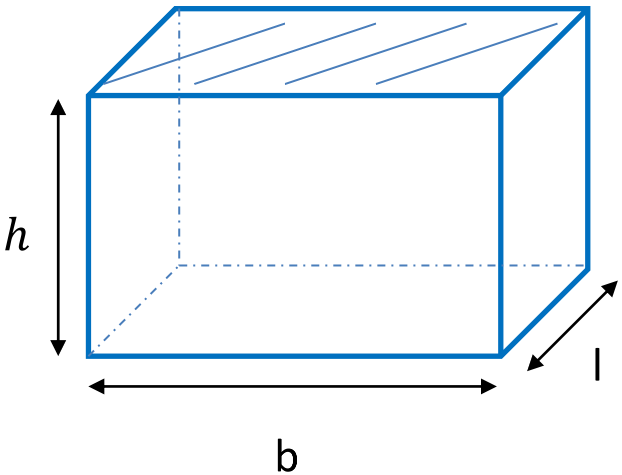
$$\Longrightarrow l = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \in (0, +\infty)$$

Teste da 2ª derivada:

$$C''(l) = 40 + \frac{360}{l^3}$$

$$C''\left(\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\right) = 40 + \frac{360}{\left(\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\right)^3} > 0 \Longrightarrow mínimo\ local$$

Exemplo 3. Deseja-se constuir um reservatório, sem tampa, no formato de uma paralelepipedo reto cuja capacidade é de 10 m³ cujo comprimento da base é o dobro da largura. Sabendo que o material para constuir a base e as laterais custam, respectivamente, 10 e 6 reais por metro quadrado, determine as dimensões que minimizam o custo do reservatório.



Dados: $\begin{cases} b = 2l \\ V = 10m^3 \end{cases}$

Objetivo: Determinar b, l e h que minimizam o custo.

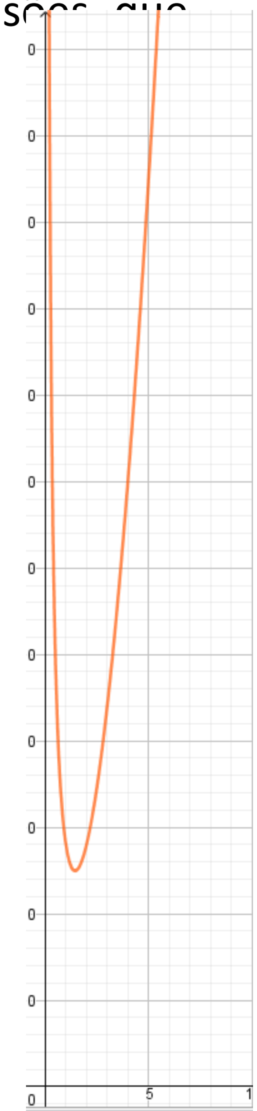
Verificando se é mínimo absoluto.

$$\lim_{l \to 0^+} \left(20\, l^2 + \frac{180}{l} \right) = +\infty$$

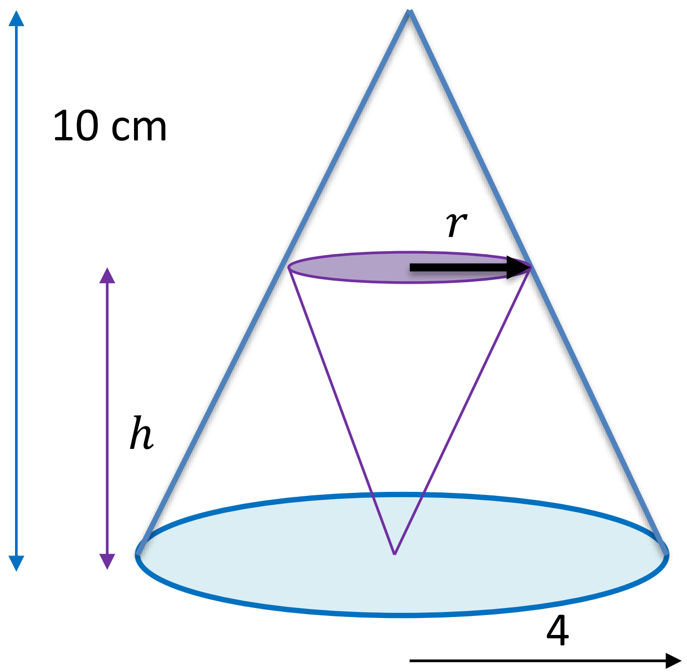
$$\lim_{l \to +\infty} \left(20\, l^2 + \frac{180}{l} \right) = +\infty$$

Conclusão:

Como $\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$ é mínimo local e os limites nos extremos do intervalos é +infinito então $\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$ é mínimo absoluto.



Exemplo 4. Um cone com altura h está inscrito em outro cone, de 10 cm de altura e 4 cm de raio da base, de forma que seu vértice esteja no centro da base do cone maior. Determine as dimensões para que o cone interno tenha volume máximo.

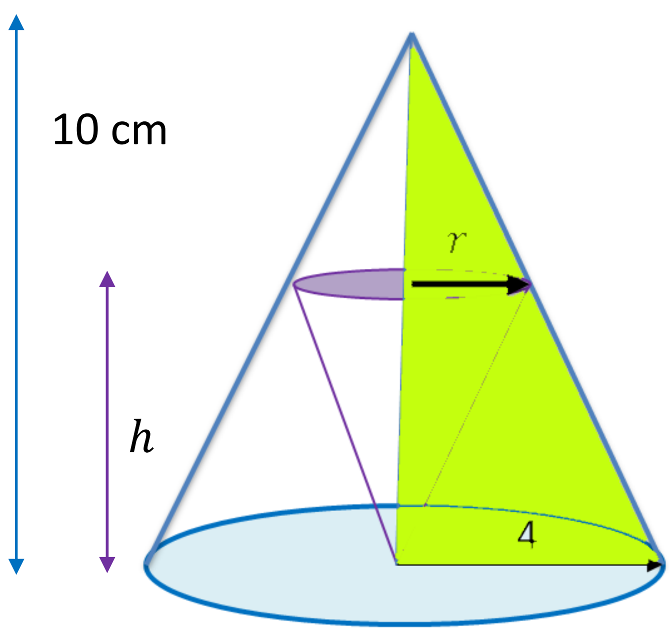


<u>Objetivo:</u> Determinar r e h que maximizam o volume do cone interno.

O volume do cone interno é

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

Exemplo 4. Um cone com altura h está inscrito em outro cone, de 10 cm de altura e 4 cm de raio da base, de forma que seu vértice esteja no centro da base do cone maior. Determine as dimensões para que o cone interno tenha volume máximo.



Objetivo: Determinar r e h que maximizam o volume do cone interno.

O volume do cone interno é

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

Por semelhança de triângulos, temos que:

$$\frac{10-h}{10} = \frac{r}{4} \Longrightarrow r = \frac{40-4h}{10}$$

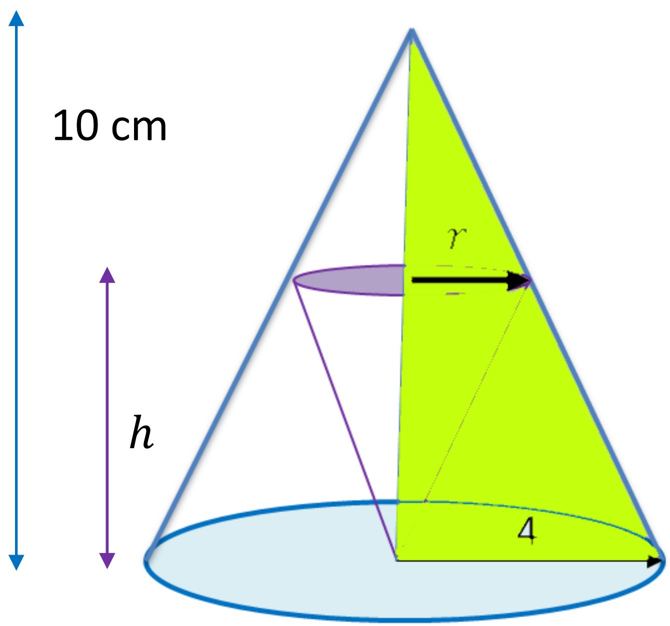
Substituindo este resultado em V, temos que:

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{40-4h}{10}\right)^2 h$$

$$V = \frac{\pi}{300} h(40-4h)^2, h \in [0,10]$$

$$V = \frac{\pi}{300}(1600h - 320h^2 + 16h^3)$$

Exemplo 4. Um cone com altura h está inscrito em outro cone, de 10 cm de altura e 4 cm de raio da base, de forma que seu vértice esteja no centro da base do cone maior. Determine as dimensões para que o cone interno tenha volume máximo.



Objetivo: Determinar r e h que maximizam o volume do cone interno.

Ponto crítico:

$$V'(h) = \frac{\pi}{300}(1600 - 640h + 48h^2)$$

$$V'(h) = 0 \Leftrightarrow 1600 - 640h + 48h^2 = 0$$

$$\Rightarrow 100 - 40h + 3h^2 = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{h = 10} \; ou \; h = \frac{10}{3}$$

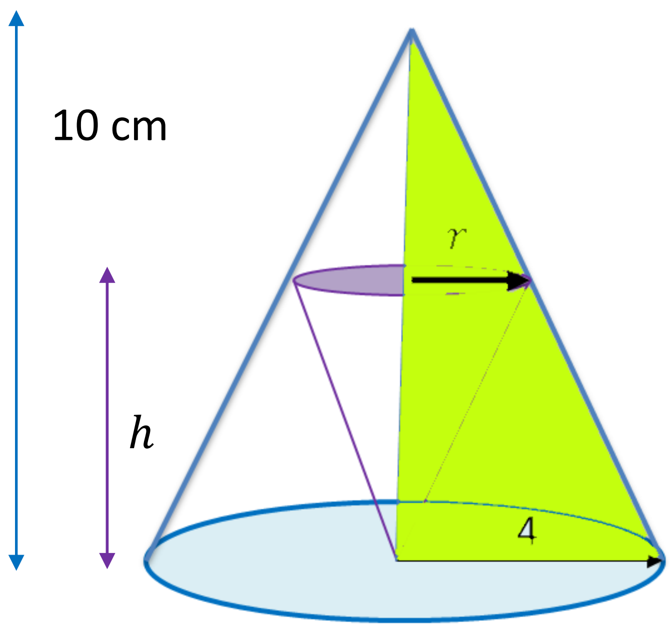
Pelo teste da 2ª derivada, temos que:

$$V''(h) = \frac{\pi}{300}(-640 + 96h)$$

$$V''\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{\pi}{300}(-640 + 320) < 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{máximo\ relativo}$$

Exemplo 4. Um cone com altura h está inscrito em outro cone, de 10 cm de altura e 4 cm de raio da base, de forma que seu vértice esteja no centro da base do cone maior. Determine as dimensões para que o cone interno tenha volume máximo.



Objetivo: Determinar r e h que maximizam o volume do cone interno.

Pelo teorema de Weierstrass, temos que a função tem seus extremos absolutos no intervalo fechado.

$$V(0) = 0$$

$$V\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{\pi}{300}\frac{10}{3}\left(40 - 4\frac{10}{3}\right)^2 \Rightarrow \boldsymbol{máximo\ absoluto}$$

$$V(10) = 0$$

Assim, temos que:

$$r = \frac{40 - 4\frac{10}{3}}{10} = \frac{80}{30} = \frac{8}{3}$$

Conclusão: As dimensões que maximizam o volume do cone interno são $r = \frac{8}{3}$ cm e $h = \frac{10}{3}\ cm$.