Exemplo:

Seja f a função definida por $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. Investigue o que podemos falar a respeito das imagens da função f para valores de x que estejam muito próxima de 2.

Por aproximação:

x	1	1,5	1,75	1,9	1,975	1,99	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001	2,01	2,25	2,5	2,75	3
$f(x)$	3	3,5	3,75	3,9	3,975	3,99	3,999	3,9999		4,0001	4,001	4,01	4,25	4,5	4,75	5

f se aproxima de 4 quando x se aproxima de 2, **por valores menores** que 2.

Matematicamente, dizemos que:
Se $x \to 2^-$, então $f(x) \to 4$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$$

f se aproxima de 4 quando x se aproxima de 2, **por valores maiores** que 2.

Matematicamente, dizemos que:
Se $x \to 2^+$, então $f(x) \to 4$.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$$

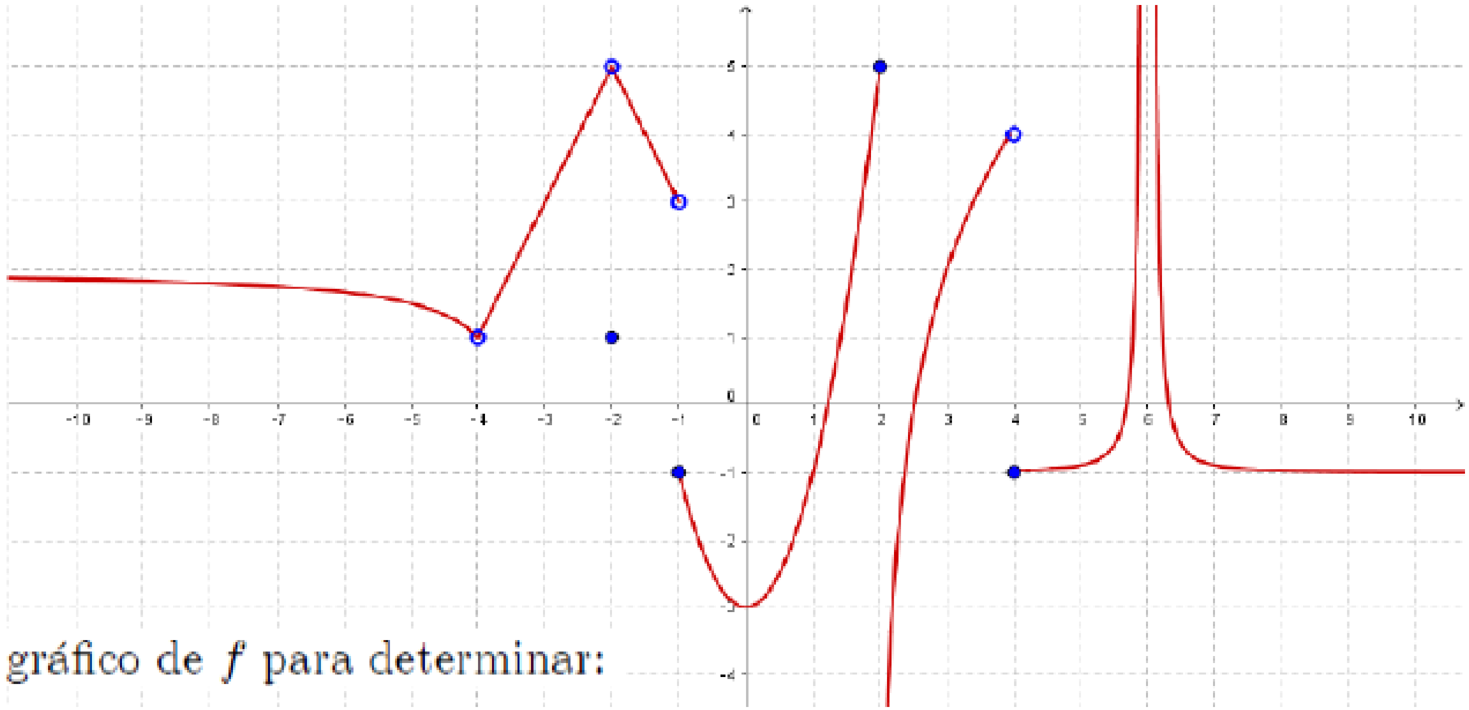
$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

Relação entre limites laterais e bilaterais:

O *limite bilateral* existe se, e somente se, existirem os limites laterais e forem iguais.

$$\underbrace{\lim_{x\to a} f(x) = L}_{\text{Limite bilateral}} \Leftrightarrow \underbrace{\lim_{x\to a^-} f(x)}_{\text{Limite lateral pela esquerda}} = \underbrace{\lim_{x\to a^+} f(x)}_{\text{Limite lateral pela direita}} = L.$$

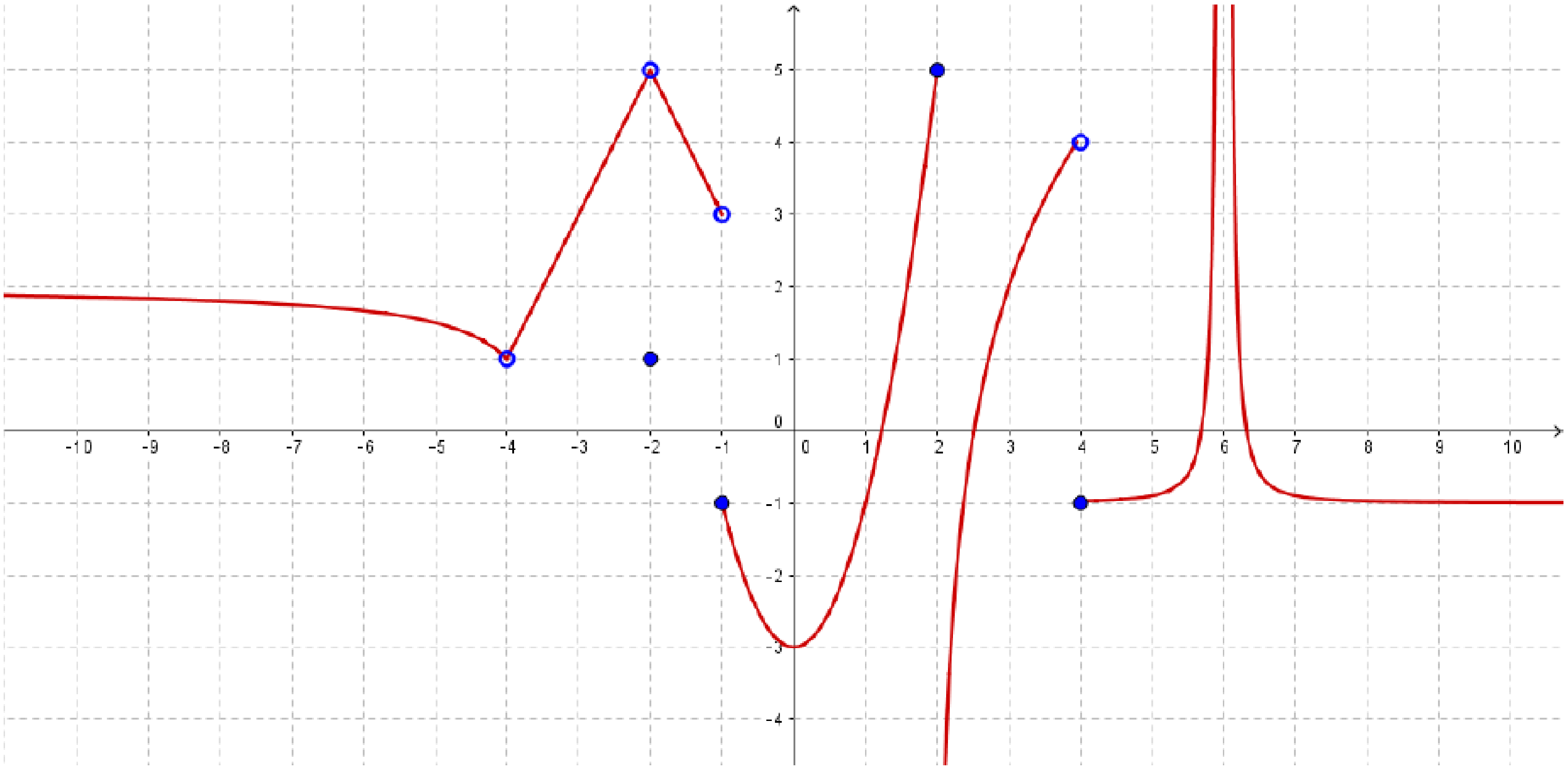
1. Considere o gráfico da função f ilustrado na figura abaixo.



Use o gráfico de f para determinar:

$\lim\limits_{x\to -4^-} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to -4^+} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to -4} f(x)$	$f(-4)$
$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to -2} f(x)$	$f(-2)$
$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to -1} f(x)$	$f(-1)$
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$	$f(0)$
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$	$f(2)$
$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to 4} f(x)$	$f(4)$
$\lim\limits_{x\to 6^-} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to 6^+} f(x) =$	$\lim\limits_{x\to 6} f(x)$	$f(6)$

1. Considere o gráfico da função f ilustrado na figura abaixo.



Agora, olhando para x (de)crescendo muito, o que podemos falar a respeito de $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$?

Limites no infinito:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$$

Função Contínua

Intuitivamente,

uma **função é contínua** nos pontos que **não apresenta** salto nem buraco, nem limite infinito.

Matematicamente, dizemos que uma função:

$$\boxed{\textbf{Definição: } f(x) \text{ é } \textbf{contínua } \textit{no ponto } c \text{ se, e somente se, } \lim_{x \to c} f(x) = f(c).}$$

Forma equivalente de definir função contínua é:

Definição: f é **contínua** em $x = c$ se, e somente se, as três condições são satisfeitas:

i. $f(c)$ está definida;

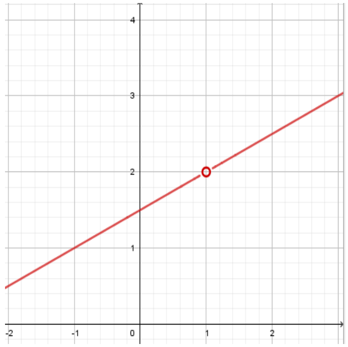
ii. $\lim_{x \to c} f(x)$ existe, ou seja, se $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$;

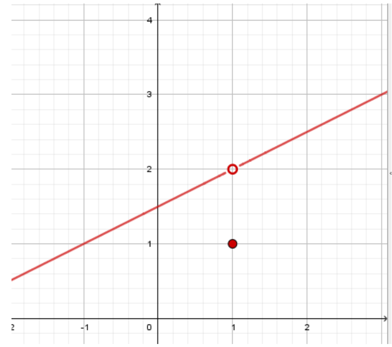
iii. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Se alguma destas condições não for satisfeita, dizemos que f é uma função **descontínua** em $x = c$.

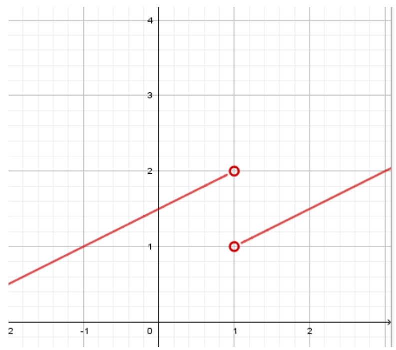
Classificações das descontinuidades:

I - **Removível:** se $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, mas é diferente de $f(a)$; ou, se $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe e $f(a)$ não está definida.

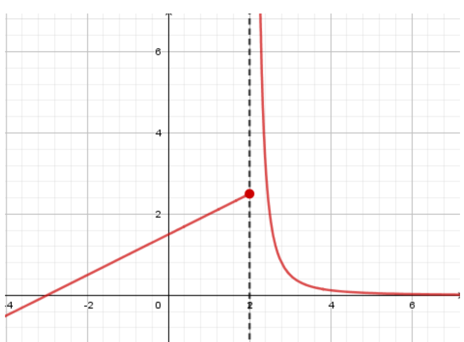


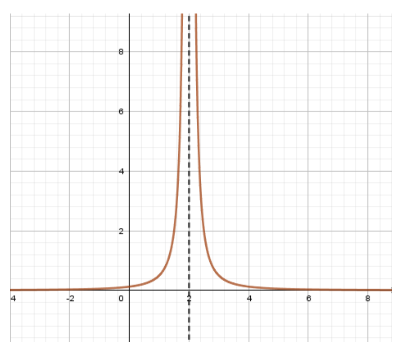


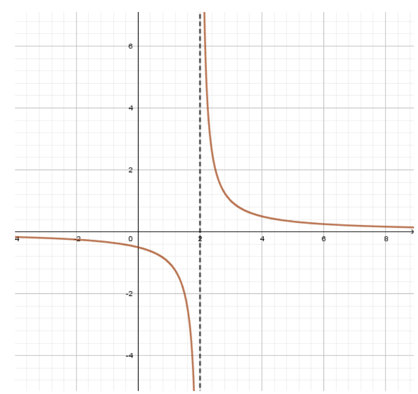
II - **Primeira Espécie** ou **Salto:** se os dois limites laterais existem, mas são distintos.



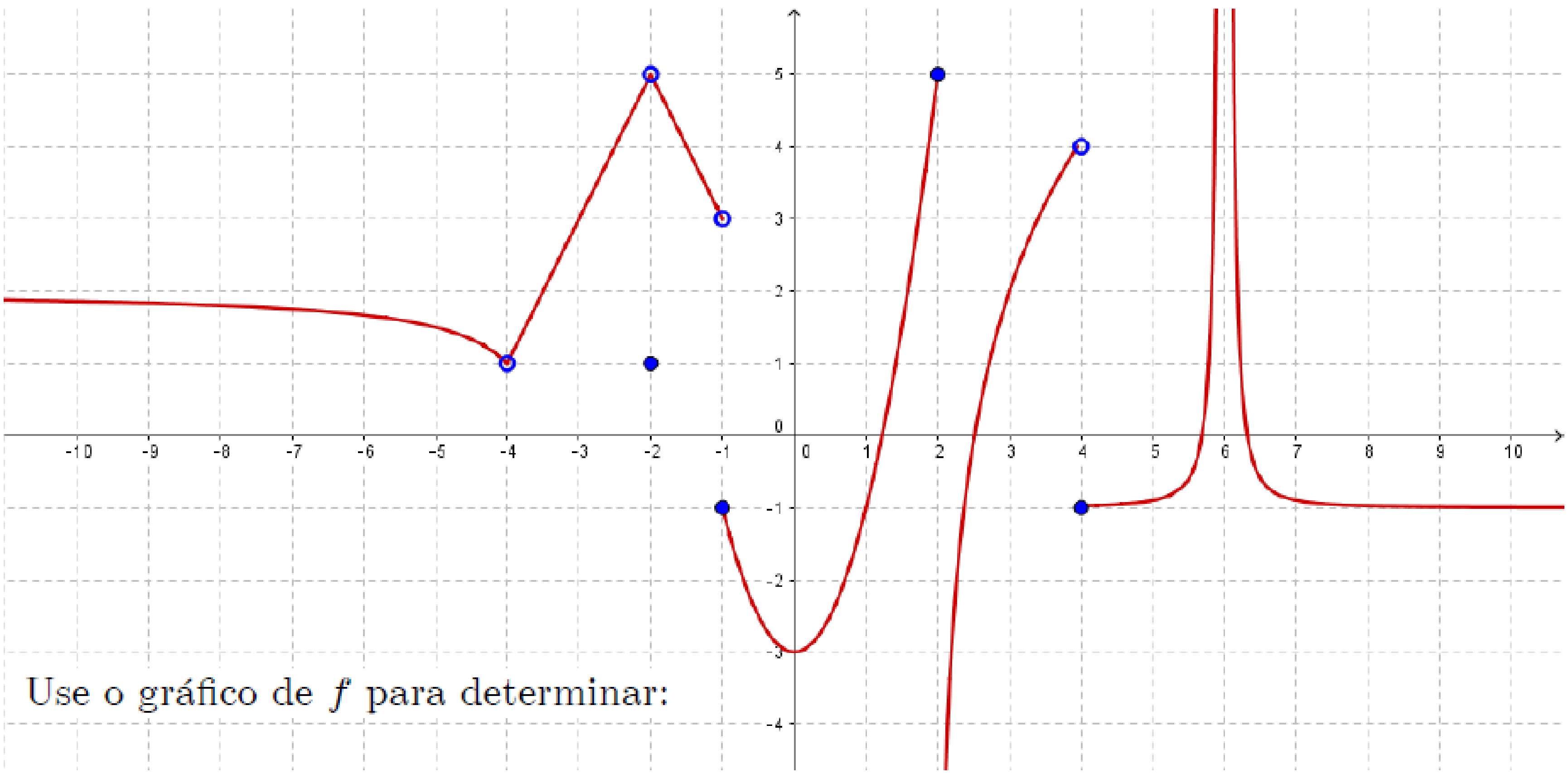
III - **Segunda espécie ou infinita:** se um ou ambos os limites laterais são limites infinitos.







1. Considere o gráfico da função f ilustrado na figura abaixo.



Use o gráfico de f para determinar:

Limites Laterais:

$$\lim_{x\to -4^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x\to -4^+} f(x) = 1$$

Limites bilateral:

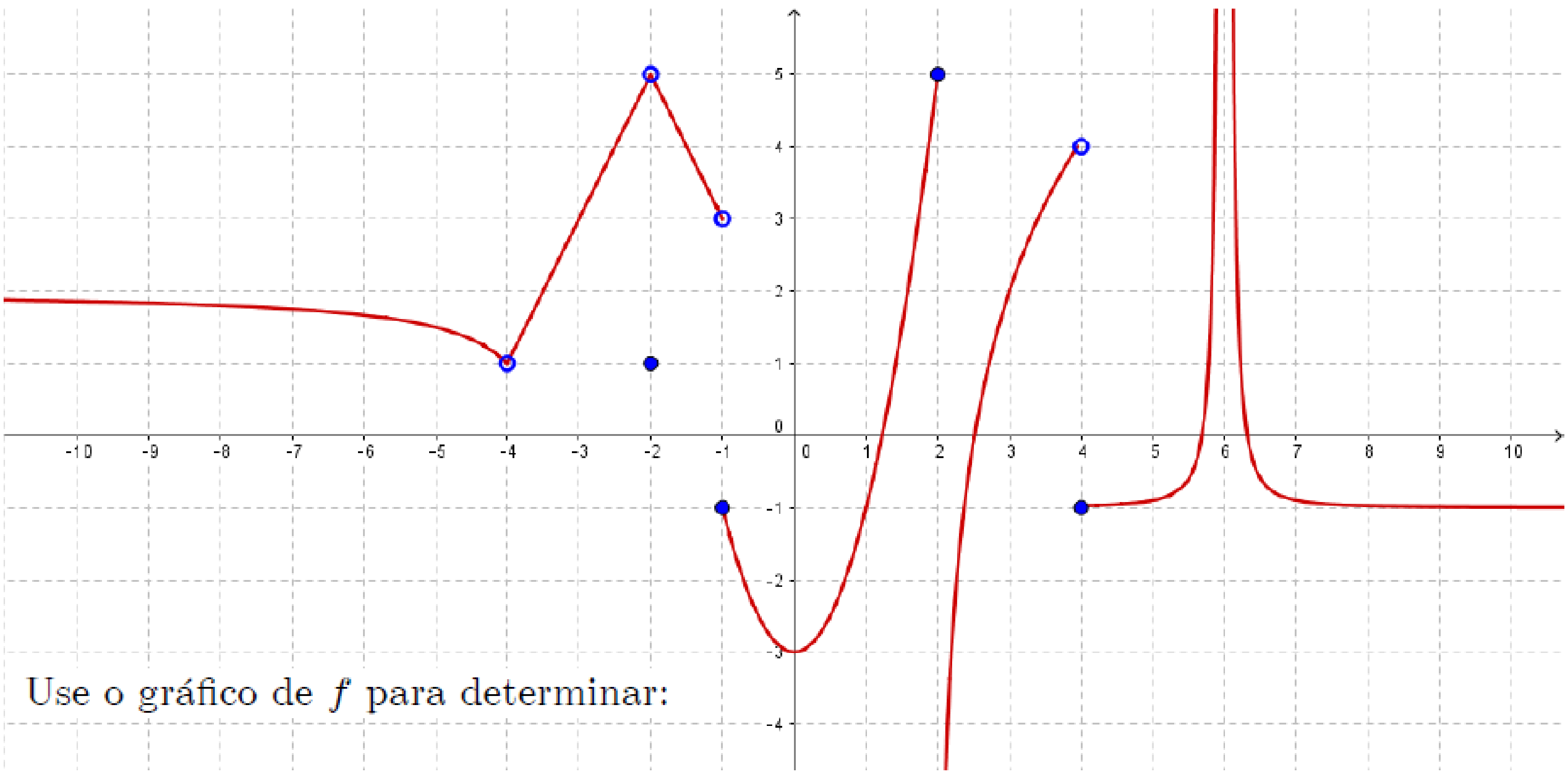
$$\lim_{x\to -4} f(x) = 1$$

Imagem de f:

$f(-4)$ não definida

Descontinuidade do tipo removível, pois $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$ existe, mas -4 não pertence do domínio da função.

1. Considere o gráfico da função f ilustrado na figura abaixo.



Use o gráfico de f para determinar:

Limites Laterais:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = 5$$

Limites bilateral:

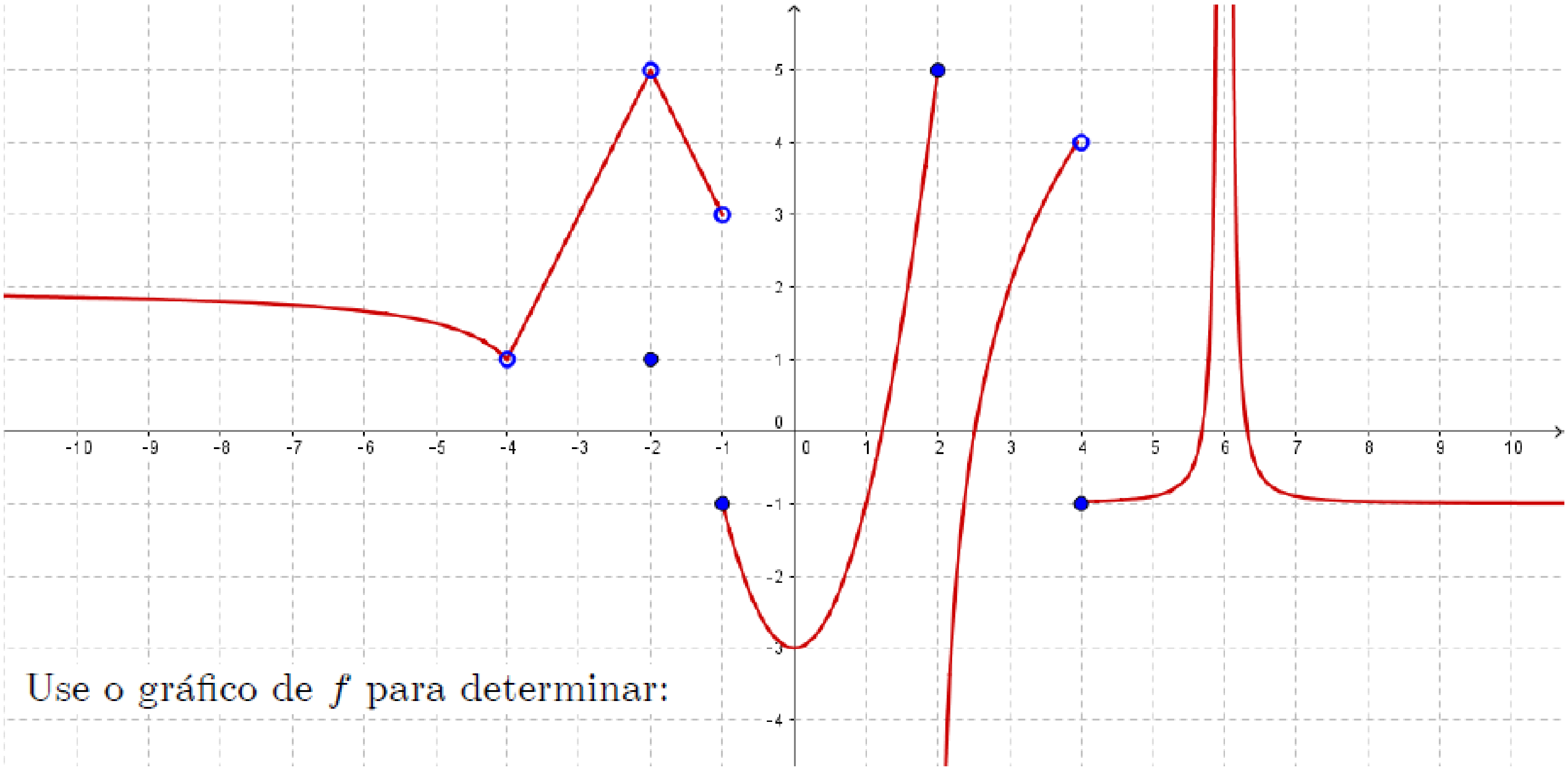
$$\lim_{x \to -2} f(x) = 5$$

Imagem de f:

$$f(-2) = 1$$

Descontinuidade do tipo removível, pois $\lim_{x \to -2} f(x)$ existe, mas é diferente de $f(-2)$.

1. Considere o gráfico da função f ilustrado na figura abaixo.



Use o gráfico de f para determinar:

Limites Laterais:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -1$$

Limites bilateral:

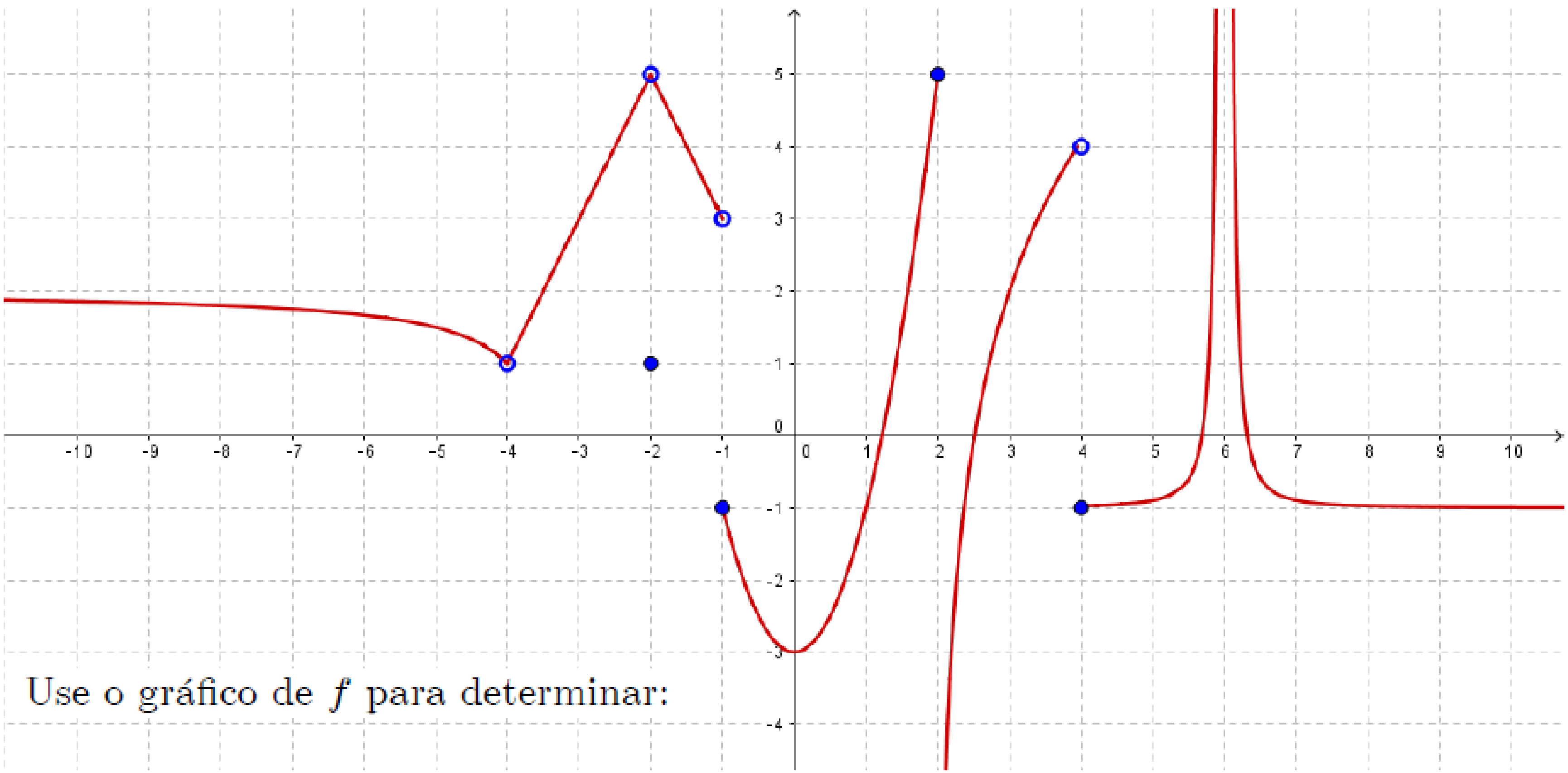
$\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ não existe

Imagem de f:

$$f(-1) = -1$$

Descontinuidade do tipo salto, pois os limites lateriais existem, mas possuem valores diferentes.

1. Considere o gráfico da função f ilustrado na figura abaixo.



Use o gráfico de f para determinar:

Limites Laterais:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -3$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -3$$

Limites bilateral:

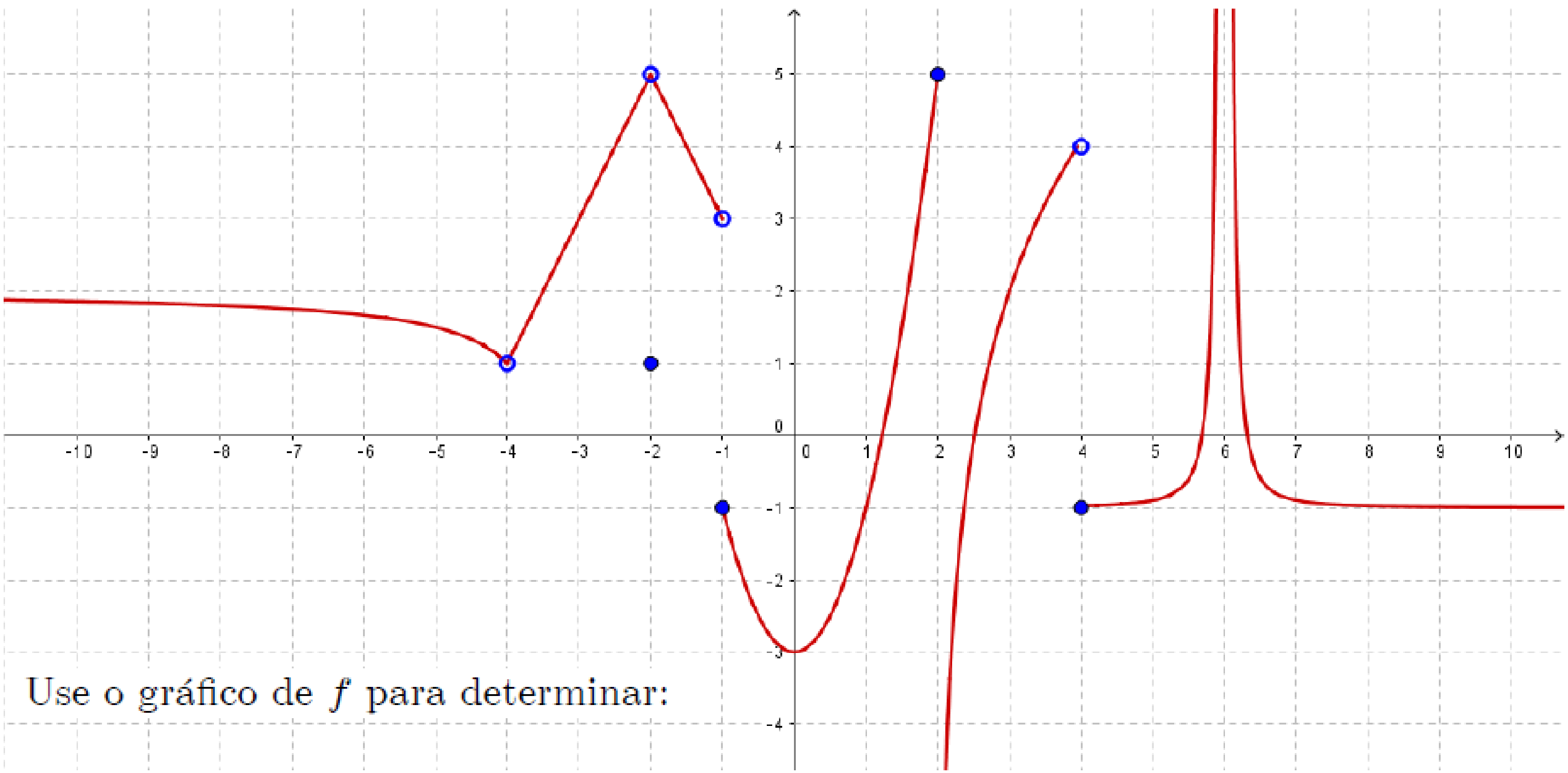
$$\lim_{x \to 0} f(x) = -3$$

Imagem de f:

$$f(0) = -3$$

A função é contínua em $x = 0$, pois $\lim_{x \to 0} f(x) = -3 = f(0)$.

1. Considere o gráfico da função f ilustrado na figura abaixo.



Use o gráfico de f para determinar:

Limites Laterais:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$$

Limites bilateral:

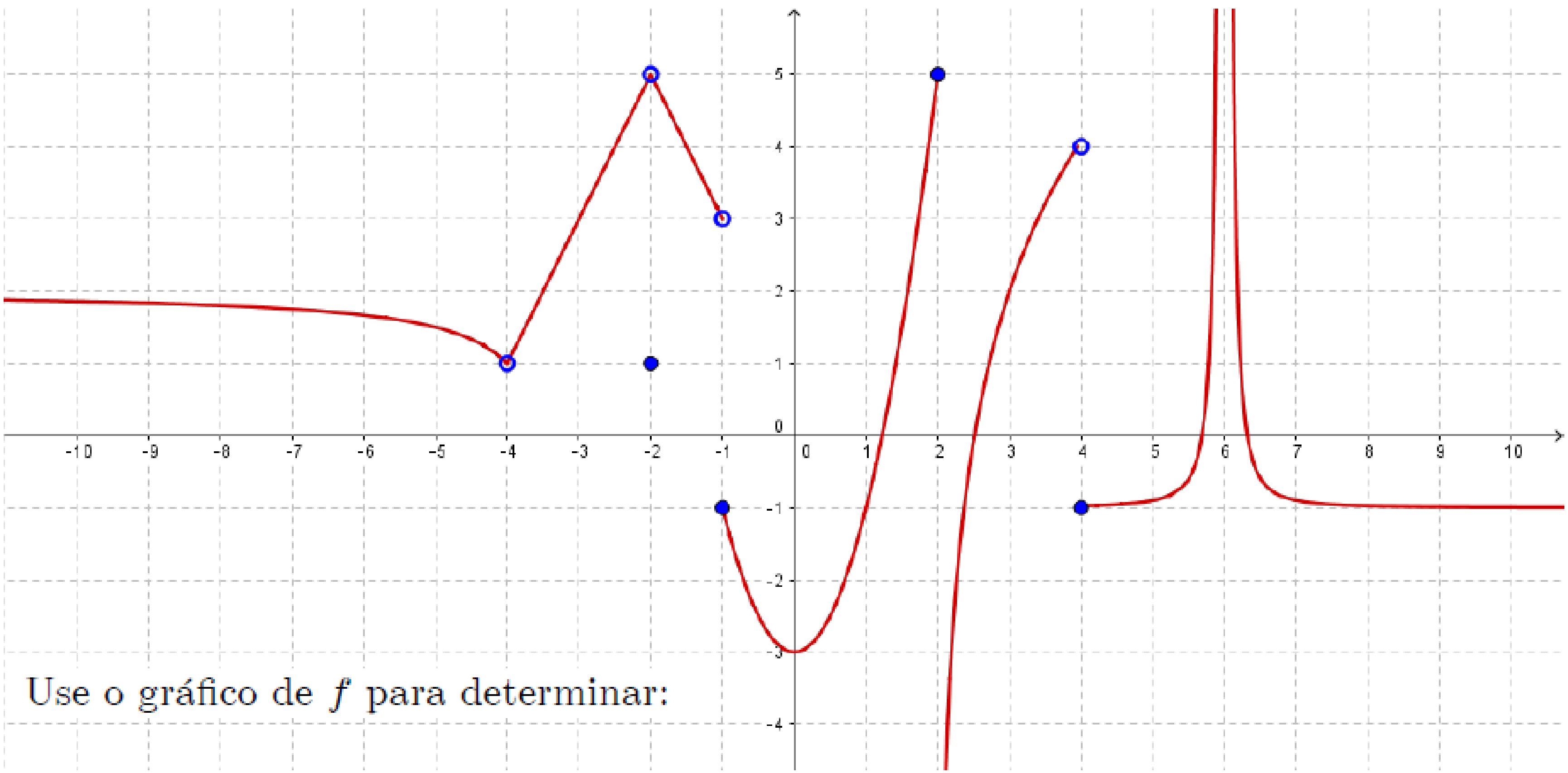
$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ não existe

Imagem de f:

$$f(2) = 5$$

Descontinuidade do tipo infinita, pois $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

1. Considere o gráfico da função f ilustrado na figura abaixo.



Use o gráfico de f para determinar:

Limites Laterais:

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = -1$$

Limites bilateral:

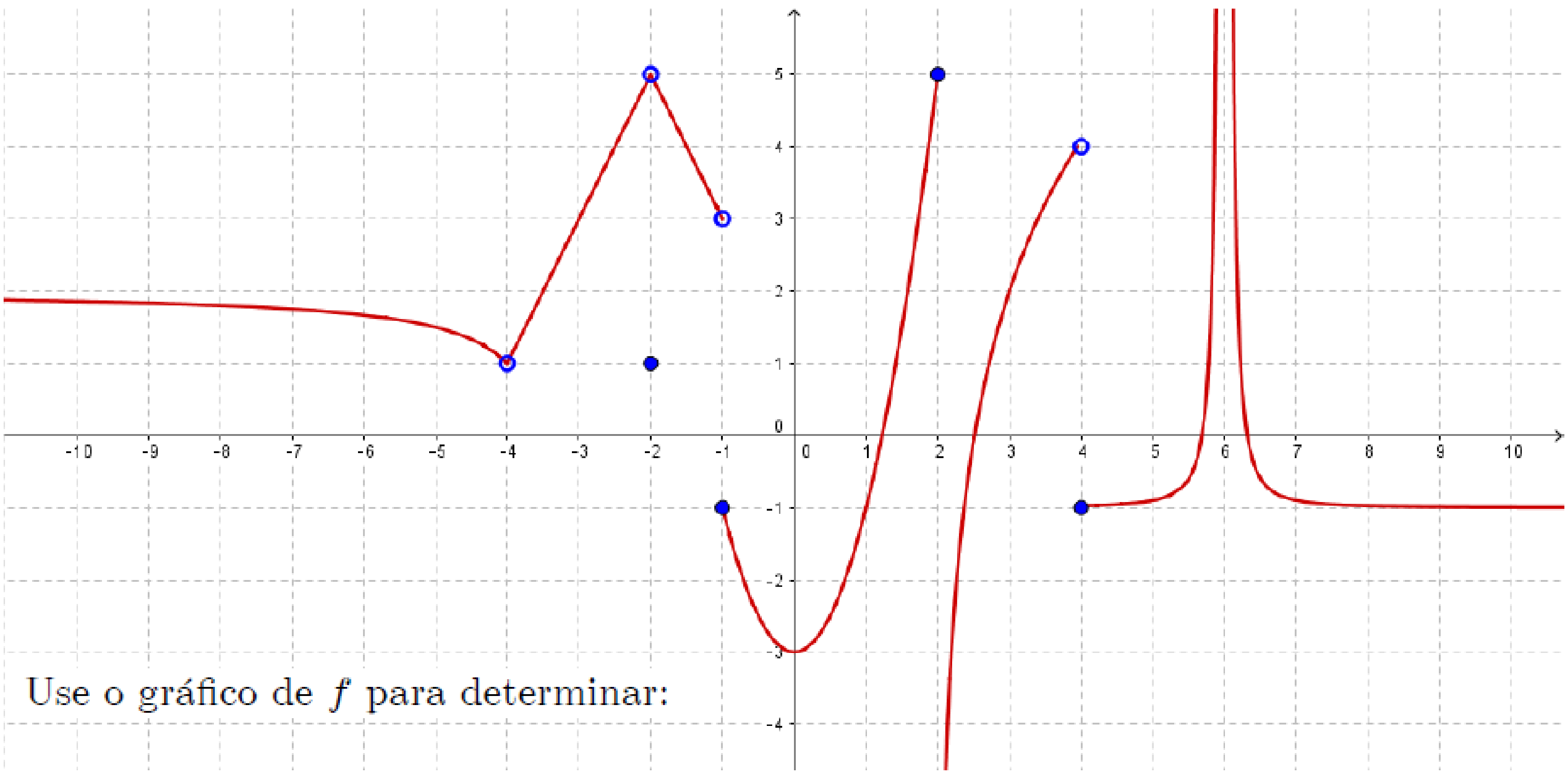
$\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ não existe

Imagem de f:

$$f(4) = -1$$

Descontinuidade do tipo salto, pois os limites lateriais existem, mas possuem valores diferentes.

1. Considere o gráfico da função f ilustrado na figura abaixo.



Use o gráfico de f para determinar:

Limites Laterais:

$$\lim_{x \to 6^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 6^+} f(x) = +\infty$$

Limites bilateral:

$$\lim_{x \to 6} f(x) = +\infty$$

Imagem de f:

$f(6)$ não definida

Descontinuidade do tipo infinita, pois $\lim_{x \to 6} f(x) = +\infty$