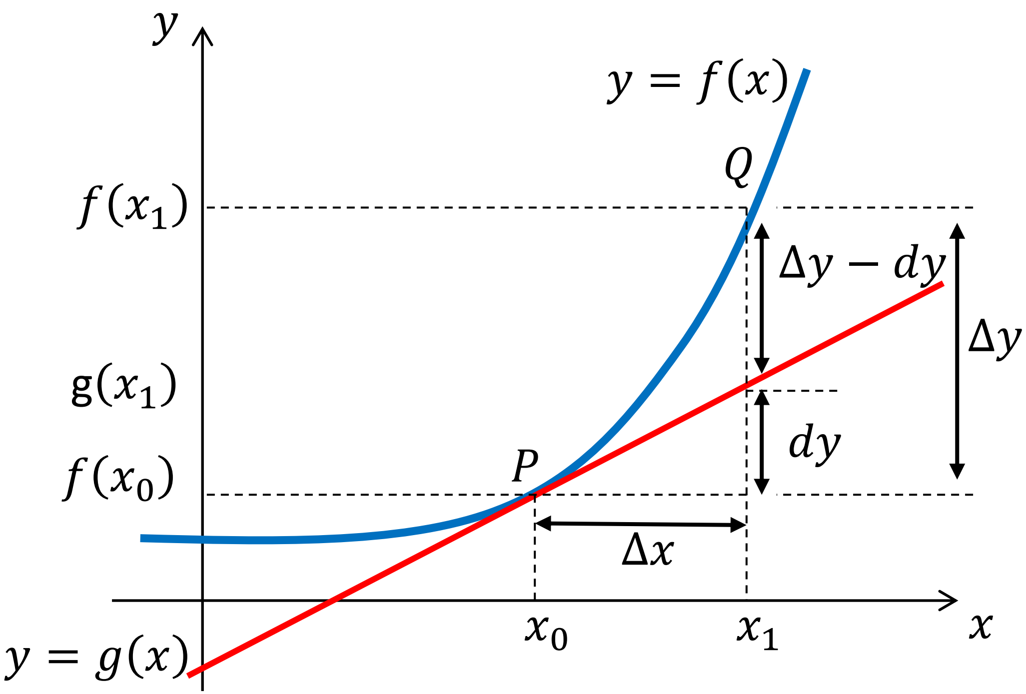
Diferencial e Aproximação Linear Local

Seja $y = f(x)$ a função diferenciável e $y = g(x)$ a reta tangente ao gráfico de f no ponto P.



A equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é dada por

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \qquad \Rightarrow y = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{g(x)}$$

Note que:

$$dy = g(x_1) - f(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\underbrace{(x_1 - x_0)}_{\Delta x} - f(x_0) \quad \Rightarrow \boxed{dy = f'(x_0)\,\Delta x}$$

Definição 1: Se $y = f(x)$ é uma função diferenciável então definimos *diferencial de* x e *o diferencial de* y, respectivamente, como

$$dx = \Delta x \qquad \text{e} \qquad dy = f'(x)\,dx.$$

Observe que para valores de x próximos de x_0, tem-se que o imagem de g é muito próxima da imagem de f no ponto P. Então, na vizinhança de P segue que $g(x_1) \approx f(x_1)$

Fazendo a substituição na expressão analítica de g, temos que, localmente:

$$f(x_1) \approx g(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \qquad \Rightarrow f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x.$$

Esta aproximação é chamada de *aproximação linear local* e é melhor a medida que $x \to x_0$, ou seja, quando $\Delta x \to 0$.

Como $\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$, podemos escrever a aproximação como

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x}$$

Exemplo 1. Use a aproximação linear local para encontrar o valor aproximado de:

a. $\sqrt[5]{32,5}$

Pela aproximação linear local, sabemos que: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

Note que: $32,5 = 32 + 0,5 = x_0 + \Delta x$

Temos que: $f(32,5) \approx f(32) + f'(32)(0,5)$

Como $f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$ ⇒ $f'(x) = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

Dessa forma, temos que:

$$\sqrt[5]{32,5} \approx \sqrt[5]{32} + \frac{1}{5\sqrt[5]{32^4}}(0,5) = 2 + \frac{1}{5\,.\,16}(0,5) = 2 + \frac{0,5}{80}$$

⇒ $\boxed{\sqrt[5]{32,5} \approx 2,00625}$

Valor exato: $\sqrt[5]{32,5}$ =2,00621129

Comparando os dois valores: $|2,00625 - 2,00621129\,| = 3.871 \times 10^{-5} = 0,00003871$

b. $cos(61°)$

Note que: $61° = 60° + 1° = \frac{\pi}{3} + "1°"$

Fazendo a conversão de graus para radianos:

$1°$	———	$\Delta x \; rad$
$180°$	———	$\pi \; rad$

$\Rightarrow$ $\boxed{\Delta x = \frac{\pi}{180} \text{ rad}}$

Pela aproximação linear local, sabemos que: $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

$$f(61°) \approx f(60°) + f'(60°)\frac{\pi}{180}$$

Como $f(x) = \cos(x)$ $\Rightarrow$ $f'(x) = -sen(x)$

$$cos(61°) \approx cos(60°) - sen(60°)\frac{\pi}{180}$$

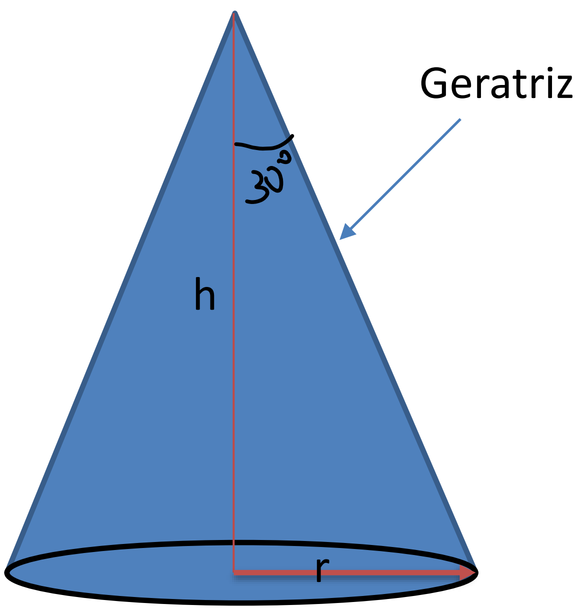
$$\boxed{cos(61°) \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} \approx 0.48489}$$

Valor exato: $cos(61°) = 0.48481$

Comparando os valores:

$$|0.48489 - 0.48481| = 0{,}00008$$

Exemplo 2. Na medida que a areia escoa de um recipiente, forma um monte cônico cuja geratriz sempre forma um ângulo de 30º com a altura (eixo de simetria) desse. Supondo que num dado instante o raio é 10 cm, **use diferenciais** para aproximar a variação do volume que ocasiona um aumento de 0,25 cm no tamanho do raio desse monte.



Dado: $r = 10\ cm$

Objetivo: dV para $\Delta r = 0{,}25 cm$

Por diferenciais, sabemos que:

$$dV = V'(r)dr$$

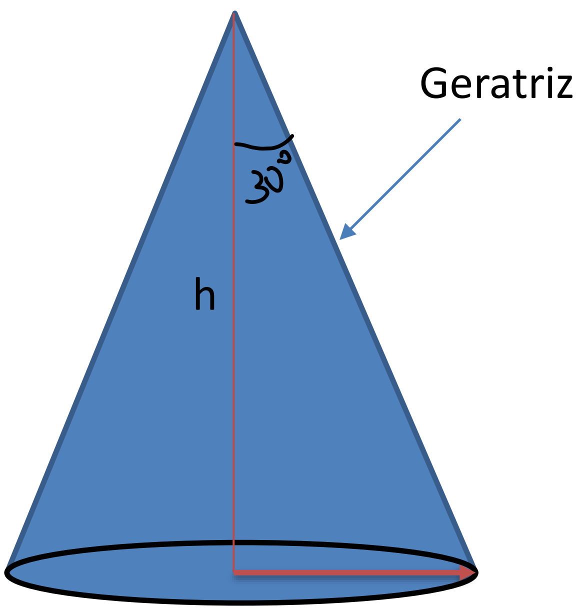
O volume de um cone é dado por:

$$\mathrm{V} = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

Sabemos que:

$$\mathrm{tg}(30°) = \frac{r}{h} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{r}{h}$$

Exemplo 2. Na medida que a areia escoa de um recipiente, forma um monte cônico cuja geratriz sempre forma um ângulo de 30º com a altura (eixo de simetria) desse. Supondo que num dado instante o raio é 10 cm, **use diferenciais** para aproximar a variação do volume que ocasiona um aumento de 0,25 cm no tamanho do raio desse monte.



Substituindo (2) em (1), temos que:

$$\mathrm{V} = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} r^2 \sqrt{3}\, r \Rightarrow \boxed{V = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} r^3}$$

Derivando com relação a r, temos que:

$$V'(r) = \frac{dV}{dr} = \sqrt{3}\pi r^2$$

Por diferenciais, sabemos que:

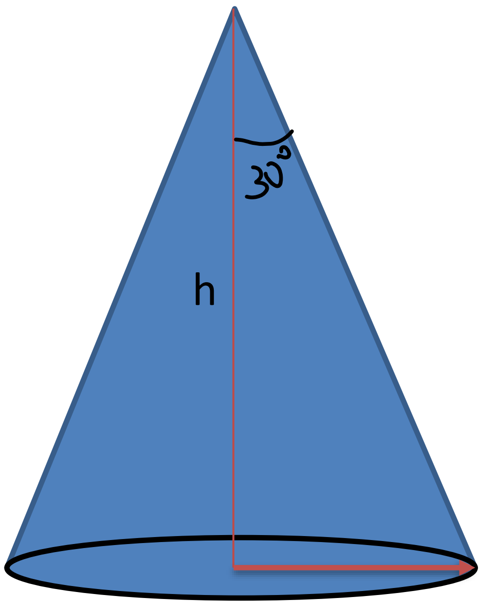
$$dV = \sqrt{3}\pi r^2 dr$$

Para $r = 10\ cm$ e $dr = 0{,}25\ cm$, temos que:

$$dV = \sqrt{3}\pi(10^2)(0{,}25) \Rightarrow \boxed{dV = 136{,}03\ cm^3}$$

Exemplo 2. Na medida que a areia escoa de um recipiente, forma um monte cônico cuja geratriz sempre forma um ângulo de 30º com a altura (eixo de simetria) desse. Supondo que num dado instante o raio é 10 cm, **use diferenciais** para aproximar a variação do volume que ocasiona um aumento de 0,25 cm no tamanho do raio desse monte.

$$V = \frac{\sqrt{3}\pi}{3} r^3$$



Valor exato: $\Delta V = V(r + \Delta r) - V(r)$

$$\Delta V = V(10{,}25) - V(10)$$

$$\Delta V = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}(10{,}25)^3 - \frac{\sqrt{3}\pi}{3}(10)^3$$

$$\boxed{\Delta V = 139.46}$$

Comparando com o diferencial:

$$\boxed{dV = 136{,}03\ cm^3}$$

$$\boxed{|\Delta V - dV| = |139{,}46 - 136{,}03| = 3{,}43\ cm^3}$$

Problema:

Sabendo que f e g são funções diferenciáveis em $x = x_0$, que f' e g' são funções contínuas em $x = x_0$ e que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, determine $L = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Como $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0 \qquad (1)$

não é possível usar a proporidade de que limite do quociente é igual ao quociente de limites, pois o denominador é zero. Logo, precisamos trabalhar com a função quociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Para isso, analisemos as informações que nos foram dadas.

Pela aproximação linear local, sabemos que:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \Rightarrow f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ g(x_0 + \Delta x) &\approx g(x_0) + g'(x_0)\Delta x \Rightarrow g(x) \approx g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) \end{aligned} \qquad (2)$$

Como f e g são diferenciáveis em $x = x_0$, por teorema, também são contínuas em $x = x_0$, ou seja,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ e } \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0). \qquad (3)$$

Usando (1) ,em (3) segue que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = f(x_0) \text{ e } \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 = g(x_0). \qquad (4)$$

Sustituindo (4) em (2), temos que:

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0)}_{\mathbf{0}} + f'(x_0)(x - x_0) \text{ e } g(x) \approx \underbrace{g(x_0)}_{\mathbf{0}} + g'(x_0)(x - x_0)$$

Usando (5) no cálculo do limite, temos que:

$$L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{g'(x_0)(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \qquad (6)$$

Como foi suposto que f' e g' são funções contínuas, pela definição de continuidade, segue que:

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0) \text{ e } \lim_{x \to x_0} g'(x) = g'(x_0). \qquad (7)$$

Usando (7) em (6) , segue que:

$$L = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f'(x)}{\lim_{x \to x_0} g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Conclusão:

$$L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Longrightarrow$$ **Regra de L'Hopital.**

Teorema: REGRA DE L'HOPITAL

Se f e g são duas funções com primeiras derivadas contínuas em $x = x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ e $\forall\ x \neq x_0$, $g'(x) \neq 0$ e $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir então

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Observação:

Esta regra pode ser aplicada somente para indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$. As demais formas indeterminadas devem ser transformadas nas indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ mediante manipulações algébricas.

Exemplos:

1. Prove os limites notáveis utilizando a regra de L'Hôpital.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = \frac{0}{0}$

Aplicando a regra de L'Hopital, temos que:

$$L = \lim_{u \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x} = \dfrac{0}{0}$

$$\mathrm{L} = \lim_{x \to 0} \frac{-\mathrm{sen}(x)}{1} = -\mathrm{sen}(0) = 1$$

$c)$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \dfrac{0}{0}$

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{a^x \ln(a)}{1} = a^0 \ln(a) = \ln(a)$$