Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Série Harmônica
Séries Hiper-harmônicas
Critério da Comparação

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 do dia 30 de setembro de 2024.

UDESC

Critério da Integral - Revisão

Critério da Integral para convergência de Séries Numéricas

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série de termos positivos $(u_n \geq 0)$ e decrescentes $(u_{n+1} \leq u_n \ \forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Considere $f: [1, +\infty)$ uma função contínua, positiva e decrescente tal que $f(n) = u_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Sob essas condições, considere a integral imprópria

$$I = \int_1^{+\infty} f(x)dx \, .$$

i) Se I diverge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ também diverge.

ii) Se I converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ também converge.

Exercício 1: Verifique se a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$$

é convergente ou divergente.

Série Harmônica

A série harmônica é a série mais "famosa" da Matemática. Consiste na soma dos inversos de todos os naturais não nulos, dada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

O estudo da convergência/divergência da série harmônica é obtido pelo Critério da Integral. As hipóteses do Critério da Integral estão satisfeitas para $f(x) = \frac{1}{x}$. Como

$$I = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty} \ln(|x|)\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \ln(|b|) - \ln(1) = +\infty$$

é divergente, a série harmônica também diverge.

Observações:

- A série harmônica é mais um contraexemplo para o Critério do Termo Geral, pois ainda que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, ela não converge.
- Para ver uma outra justificativa para a divergência da série harmônica, assista ao vídeo da Khan Academy: https://youtu.be/KDeZ-0jB7Eo.
- Para saber mais sobre a relação entre a Série Harmônica e os Acordes Musicais Harmônicos de uma corda em vibração, assista ao vídeo www.youtube.com/watch?v=OipPCVpnkCQ.

Séries Hiper-Harmônicas (ou Séries-p)

As séries hiper-harmônicas (ou p-séries) são as séries da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

com $p \in \mathbb{R}$ fixado, $com\ p \neq 1$ e $p \neq 0$.

Para $p < 0$ a p-série é divergente pelo Critério do Termo Geral:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to+\infty} n^{-p} = +\infty \qquad \text{pois } -p > 0.$$

Para $p > 0$, é possível utilizar o Critério da Integral para $f(x) = \dfrac{1}{x^p} = x^{-p}$:

$$I = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-p} dx = \lim_{b\to+\infty} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^b = \frac{1}{-p+1}\left(\lim_{b\to+\infty} b^{-p+1} - 1\right)$$

Como $p \neq 1$, temos que $-p + 1 \neq 0$ e assim

$$\lim_{b\to+\infty} b^{-p+1} = \begin{cases} +\infty, se & -p+1 > 0 \\ 0 \quad se & -p+1 < 0 \end{cases}.$$

Portanto, a integral imprópria e a p-série convergem se, e somente se, $-p + 1 < 0$, ou seja, se e somente se, $p > 1$.

Séries Hiper-Harmônicas (ou Séries-p)

Observação:

- O caso $p = 1$ recai na Série Harmônica, que é divergente.

Critério das p-Séries:
Uma p −Série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e é divergente se $p < 1$.

Exemplo 1: As p −Séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^7} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{2}}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\pi}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1,000001}}$$

São todas convergentes, pois $p > 1$

Exemplo 2: As p −Séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2/7}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{-7}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sqrt{1/2}}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{0,999999}}$$

São todas divergentes, pois $p \leq 1$

Critério da Comparação

Critério da Comparação: Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ séries tais que $0 \leq u_n \leq y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

i) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ converge então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ também converge.

ii) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ também diverge.

Observação: A ideia subjacente ao Critério de Comparação é bastante intuitiva. No item (i) basta pensar que se uma soma é positiva e menor do que um valor finito, então ela também é finita. E para o item (ii) basta pensar que se uma soma é maior do que um valor infinito, ela também é infinita.

Para ver outra justificativa para o Critério da Comparação, veja ao vídeo do Canal Me Salva: youtube.com/watch?v=Kq0HJJiFHdk

O critério da comparação é útil quando o termo geral da série possui vários termos (com somas ou diferenças) e podemos “descartar” alguns termos até chegar em uma expressão mais simples.

Critério da Comparação

Exercício 2) Verifique se são convergentes ou divergentes:

a) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n^3 - 2}{4n^9 + 3n^2 + 1}$$

b) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^7 + 2e^n + n^2}{9n^8 - 5}$$

c) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n - n}{5^{n+1} + n!}$$

d) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^n + 4n^3 + 5}{2^{2n-1} - \sqrt{n}}$$

e) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9n^4 - 6n^2 - 1}{8n^5 + 2n^3 + 3}$$

Exemplos Resolvidos

Exemplo 3: Verifique se são convergentes ou divergentes:

a) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

Solução: Temos que $u_n = \frac{n}{n^2+1} \geq 0$. Tomando $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ temos que $f(n) = u_n$ e f é positiva e decrescente para $x \in [1, +\infty)$. Para comprovar que f é decrescente, veja que a derivada de f é negativa:

$$f'(x) = \frac{1.(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-2x^2}{(x^2+1)^2} < 0 \quad para\, x \geq 1.$$

Portanto, as hipóteses do Critério da Integral estão satisfeitas. Como

$$I = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{x}{x^2+1} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_2^{b^2+1} \frac{1}{2u} du = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(u)\Big|_2^{b^2+1}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(b^2+1) - \frac{1}{2}\ln(2) = +\infty - \frac{1}{2}\ln(2) = +\infty$$

Como a integral I é divergente, a série dada também diverge. Portanto, apesar da série ter chance de convergir (por satisfazer a condição necessária), ela é divergente.

Exemplo Resolvido

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{3n}}$

Solução: Temos que $u_n = \frac{1}{e^{3n}} \geq 0$. Tomando $f(x) = \frac{1}{e^{3x}} = e^{-3x}$ temos que $f(n) = u_n$ e $f(x)$ é positiva e decrescente para $x \in [1, +\infty)$. Para comprovar que f é decrescente, veja que derivada de f é negativa:

$$f'(x) = -3e^{-3x} < 0 \quad para\, x \geq 1.$$

Portanto, as hipóteses do Critério da Integral estão satisfeitas. Como

$$I = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b e^{-3x}dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{3} e^{-3x} \Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{3} e^{-3b} + \frac{1}{3} e^{-3}$$

$$= 0 + \frac{1}{3} e^{-3} = \frac{1}{3} e^{-3}$$

Como a integral I é convergente, a série dada também converge.

Note que a integral converge para $\frac{1}{3} e^{-3}$ mas não podemos afirmar para qual valor a série converge. Somente sabemos que existe o valor da sua soma.

Exemplo Resolvido

Exemplo 4) Verifique se são convergentes ou divergentes:

a) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^7 - 1}{n^9 + \sqrt{n} + 2}$$

Solução: Veja que $n^9 + \sqrt{n} + 2 \geq n^9$ e com isso,

$$\frac{1}{n^9 + \sqrt{n} + 2} \leq \frac{1}{n^9}$$

pois quanto maior o denominador, menor é o quociente. Além disso, $n^7 - 1 \leq n^7$. Logo

$$0 \leq \frac{n^7 - 1}{n^9 + \sqrt{n} + 2} \leq \frac{n^7}{n^9} = \frac{1}{n^2}.$$

Como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

é convergente (pois é uma p −Série com $p = 2 > 1$), a série dada é menor do que uma série convergente, portanto por comparação, também converge.

Exemplo Resolvido

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5 + e^n}{2n^6 - 1}$

Solução: Veja que $n^5 + e^n \geq n^5$. Além disso, $2n^6 - 1 \leq 2n^6$ e então

$$\frac{1}{2n^6 - 1} \geq \frac{1}{2n^6}$$

pois quanto menor o denominador, maior é o quociente. Assim

$$\frac{n^5 + e^n}{2n^6 - 1} \geq \frac{n^5}{2n^6} = \frac{1}{2} . \frac{1}{n}$$

ou seja

$$0 \leq \frac{1}{2} . \frac{1}{n} \leq \frac{n^5 + e^n}{2n^6 - 1} .$$

Como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} . \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

é divergente (pois é a série harmônica multiplicada por uma constante), a série dada é maior do que uma divergente. Portanto, por comparação, também diverge.