UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Centro de Ciências Tecnológicas - CCT - Joinville
Departamento de Matemática

Lista 4 de Cálculo Diferencial e Integral II

Integrais Triplas

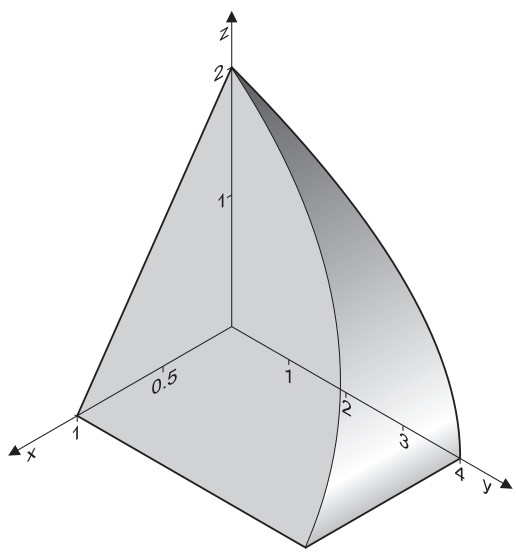
1. Calcular $I = \iiint\limits_T (x-1)dV$, sendo T a região do espaço delimitada pelos planos $y=0$, $z=0$, $y+z=5$ e pelo cilindro parabólico $z=4-x^2$.

2. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$ e $z=0$, com $a,b,c>0$.

3. Considere o sólido delimitado inferiormente por $y+2z=6$, superiormente por $z=6$ e lateralmente pelo cilindro que contorna a região delimitada por $y=x^2$ e $y=4$. Calcule a massa deste sólido, sabendo que sua densidade é dada por $f(x,y,z)=2y+z$.

4. A figura abaixo mostra o sólido cujo volume pode ser calculado pela expressão

$$V=\int_0^1\int_0^{2-2x}\int_0^{4-z^2} dydzdx.$$



Reescreva esta expressão como uma integral tripla equivalente, usando coordenadas cartesianas de cinco formas distintas.

5. Represente geometricamente o sólido cujo volume pode ser calculado pela expressão

$$V=\int_0^4\int_0^{\sqrt{4-z}}\int_0^{8-2z} dydxdz.$$

A seguir, reescreva esta expressão, como uma integral tripla equivalente, usando coordenadas cartesianas de cinco formas distintas.

6. Represente geometricamente o sólido cujo volume pode ser calculado pela expressão

$$V = \int_0^2 \int_0^{2+x^2} \int_0^{4-x^2} dzdydx + \int_0^2 \int_{2+x^2}^{6} \int_0^{6-y} dzdydx$$

e a seguir reescreva esta expressão utilizando uma única integral tripla em coordenadas cartesianas.

7. Reescreva a expressão

$$I = \int_{-1}^0 \int_0^{x+1} \int_0^{8-x^2-y^2} ydzdydx + \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{8-x^2-y^2} ydzdydx$$

como uma única integral tripla, em coordenadas cartesianas.

8. Reescreva a expressão

$$I = \int_{-1}^1 \int_0^{x^2+4} \int_0^{1-x^2} dzdydx + \int_{-1}^1 \int_{x^2+4}^{5} \int_0^{5-y} dzdydx$$

como uma única integral tripla em coordenadas cartesianas, de três formas distintas.

9. Determine a massa do sólido delimitado no primeiro octante simultaneamente pelas superfícies $x^2 + z^2 = 4$, $x + y = 2$ e $x + 2y = 6$, sabendo que $f(x, y, z) = 12z$ é a sua função densidade.

10. Determinar o volume do sólido interior as superfícies $b^2(x^2 + y^2) + a^2z^2 = a^2b^2$ e $x^2 + y^2 = ax$.

11. Determinar o volume do sólido interior as superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ e $x^2 + y^2 = 2z$.

12. Seja S o sólido delimitado pelas superfícies $z = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$ e $z = x^2 + y^2$. Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ para que a massa de S seja igual a $\pi\left(\sqrt{82} - 1\right)$, sabendo que a densidade em cada ponto de S é dada por $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (x^2 + y^2)^2}}$.

13. Represente geometricamente o sólido cuja massa é descrita, em coordenadas cilíndricas, pela expressão $M = \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2}^{4-r^2} \sqrt{4 + r^2 - z}\, dzdrd\theta$. A seguir, reescreva esta expressão utilizando um outro sistema de coordenadas.

14. Nos itens abaixo escreva em coordenadas retangulares as integrais dadas em coordenadas esféricas.

    (a) $I = 2 \displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \sqrt{9 - \rho^2} \sin\phi d\rho d\phi d\theta$.

    (b) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^4 \sqrt{4 - \rho^2} \rho \sin\phi d\rho d\phi d\theta$.

15. Represente geometricamente o sólido cujo volume pode ser calculado pela expressão

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_1^2 \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta.$$

A seguir, reescreva esta expressão em coordenadas cilíndricas.

16. Utilize coordenadas esféricas para calcular a massa do sólido situado acima do cone $z^2 = x^2 + y^2$ e interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$, sabendo que sua densidade de massa é dada por $d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

17. Utilize coordenadas esféricas para resolver a seguinte integral tripla

$$I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_{1}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2+z^2)^2} dzdydx.$$

18. Represente geometricamente o sólido cuja massa é calculada, em coordenadas esféricas, pela expressão

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_{\frac{\sqrt{3}}{\cos\phi}}^{\sqrt{\frac{5}{\cos^2\phi + 2\sin^2\phi}}} \rho d\rho d\phi d\theta.$$

A seguir, reescreva esta expressão em coordenadas cilíndricas.

19. Represente geometricamente o sólido cuja massa pode ser calculada, em coordenadas cilíndricas, pela expressão

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{10-3r^2}} (r+z) dzdrd\theta.$$

A seguir, reescreva esta expressão em coordenadas esféricas.

20. Escreva, em coordenadas cartesianas e em coordenadas esféricas, a integral que permite calcular o volume do **menor** sólido delimitado simultaneamente pelas superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 8z$.

21. Calcule o volume do sólido que está situado acima de $z = 0$ e que é simultaneamente interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e ao hiperbolóide de uma folha $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

22. Considere o sólido delimitado inferiormente por $z = 2x^2 + 2y^2$ e superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Escreva a integral que permite calcular o volume deste sólido em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas.

23. Considere o sólido delimitado inferiormente por $2z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e superiormente por $z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}$. Escreva a integral que permite calcular o volume deste sólido em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas.

24. Escreva, em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas, as integrais que permitem calcular a massa do sólido situado simultaneamente no interior das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ e $z = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$, sabendo que sua função densidade é $f(x, y, z) = \dfrac{(x^2 + y^2)z^2}{\cos(x^2 + y^2 + z^2)}$.

25. Escreva $I = \iiint\limits_S f(x, y, z)dV$, em três sistemas de coordenadas distintas, sendo S sólido situado simultaneamente no interior de $x^2+y^2+z^2 = 2z$ e de $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ e $f(x, y, z) = \dfrac{e^{x^2+y^2+z^2}}{x + y + z}$.

26. O volume de um sólido S é dado pela expressão

$$V = \int_0^{\frac{2}{a}} \int_{-\sqrt{\frac{4}{a^2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{4}{a^2}-x^2}} \int_{a\sqrt{x^2+y^2}}^{6-a^2x^2-a^2y^2} dzdydx,$$

sendo a um número real positivo.

(a) Escreva o volume do sólido usando coordenadas cilíndricas.

(b) Determine o valor de a para que o volume do sólido S seja igual a $\frac{16\pi}{3}$.

Respostas

1. $I = -\frac{544}{15}$

2. $V = \frac{abc}{6}$

3. $M = 400$

4. $V = \displaystyle\int_0^2 \int_0^{\frac{2-z}{2}} \int_0^{4-z^2} dydxdz$

$V = \displaystyle\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \int_0^{\frac{2-z}{2}} dxdzdy$

$V = \displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-z^2} \int_0^{\frac{2-z}{2}} dxdydz$

$V = \displaystyle\int_0^1 \int_0^{-4x^2+8x} \int_0^{2-2x} dzdydx + \int_0^1 \int_{-4x^2+8x}^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} dzdydx$

$V = \displaystyle\int_0^4 \int_0^{1-\frac{1}{2}\sqrt{4-y}} \int_0^{\sqrt{4-y}} dzdxdy + \int_0^4 \int_{1-\frac{1}{2}\sqrt{4-y}}^1 \int_0^{2-2x} dzdxdy$

5. $V = \displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^{8-2z} dydzdx$

$V = \displaystyle\int_0^4 \int_0^{8-2z} \int_0^{\sqrt{4-z}} dxdydz$

$V = \displaystyle\int_0^8 \int_0^{\frac{8-y}{2}} \int_0^{\sqrt{4-z}} dxdzdy$

$V = \displaystyle\int_0^2 \int_0^{2x^2} \int_0^{4-x^2} dzdydx + \int_0^2 \int_{2x^2}^8 \int_0^{\frac{8-y}{2}} dzdydx$

$V = \displaystyle\int_0^8 \int_0^{\sqrt{\frac{y}{2}}} \int_0^{\frac{8-y}{2}} dzdxdy + \int_0^8 \int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^2 \int_0^{4-x^2} dzdxdy$

6. $V = \displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^{6-z} dydzdx$

7. $I = \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} \int_0^{8-x^2-y^2} ydzdxdy$

8. $I = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{5-z} dydzdx = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} \int_0^{5-z} dydxdz = \int_0^1 \int_0^{5-z} \int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} dxdydz$

9. $M = 44$

10. $V = \frac{2a^2b(3\pi-4)}{9}$

11. $V = \frac{4\pi(8\sqrt{2}-7)}{3}$

12. $a = 3$

13. $M = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} \frac{\sqrt{4+x^2+y^2-z}}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dzdydx$

14. (a) $I = \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \frac{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}}{x^2+y^2+z^2} dzdydx$

    (b) $I = \int_0^{\sqrt{12}} \int_0^{\sqrt{12-x^2}} \int_{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \frac{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dzdydx -$

    $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{3x^2+3y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \frac{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dzdydx$

15. $V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}r}^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}r}^{\sqrt{1-r^2}} rdzdd\theta$

    ou $V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}} \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}r}^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta.$

16. $M = \frac{16}{5}\pi\left(8-\sqrt{2}\right)$

17. $I = \frac{1}{3}\pi^2 - \frac{1}{4}\sqrt{3}\pi$

18. $M = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5-2r^2}} dzdrd\theta$

19. $\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\sqrt{\frac{10}{\cos^2\phi+3\sin^2\phi}}} (\sin\phi+\cos\phi)\rho^2 d\rho d\phi d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{3\cos\phi}{\sin^2\phi}} (\sin\phi+\cos\phi)\rho^2 d\rho d\phi d\theta$

20. Cartesianas $V = \int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} \int_{-\sqrt{12-x^2}}^{\sqrt{12-x^2}} \int_{4-\sqrt{16-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} dzdydx$

    Esféricas: $V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^4 \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{8\cos\phi} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta.$

21. $V = 18\pi - \frac{32}{3}\pi$

22. Cartesianas $V = \displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{-\sqrt{\frac{3}{4}-y^2}}^{\sqrt{\frac{3}{4}-y^2}} \int_{2x^2+2y^2}^{\sqrt{3-x^2-y^2}} dzdydx$

Cilíndricas $V = \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{2r^2}^{\sqrt{3-r^2}} rdzdrd\theta$

Esféricas: $V = \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\sqrt{3}} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}\cot\phi\csc\phi} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$

23. Cartesianas $V = \displaystyle\int_{-4}^{4} \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \int_{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}^{6-\sqrt{x^2+y^2}} dzdydx$

Cilíndricas $V = \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{4} \int_{\frac{r}{2}}^{6-r} rdzdrd\theta$

Esféricas $V = \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\arctan 2} \int_0^{\frac{6}{\cos\phi+\sin\phi}} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$

24. Cartesianas $M = \displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}}^{2+\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{(x^2+y^2)z^2}{\cos(x^2+y^2+z^2)} dzdydx$

Cilíndricas $M = \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{2} \int_{1+\frac{1}{2}r}^{2+\sqrt{4-r^2}} \frac{r^3z^2}{\cos(r^2+z^2)} dzdrd\theta$

Esféricas $M = \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{2}{2\cos\phi-\sin\phi}}^{4\cos\phi} \frac{\rho^6 \sin^3\phi\cos^2\phi}{\cos(\rho^2)} d\rho d\phi d\theta$

25. Cartesianas $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{2-\sqrt{x^2-y^2}} \frac{e^{x^2+y^2+z^2}}{x+y+z} dzdydx$

Cilíndricas $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{1} \int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{2-r} \frac{e^{r^2+z^2}}{r\cos\theta + r\sin\theta + z} rdzdrd\theta$

Esféricas $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{2}{\cos\phi+\sin\phi}} \frac{e^{\rho^2}}{\sin\phi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta + \cos\phi} \rho\sin\phi d\rho d\phi d\theta$

$\displaystyle + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\phi} \frac{e^{\rho^2}}{\sin\phi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta + \cos\phi} \rho\sin\phi d\rho d\phi d\theta$

26. (a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{a}{2}} \int_{ar}^{6-a^2r^2} rdzdrd\theta$ (b) $a = 1$