Logaritmos e Função Logaritmo.

① $\log_2\left(\sqrt[3]{\dfrac{a^4\cdot\sqrt{a+b}}{b^2\cdot\sqrt[3]{b\cdot c}}}\right)^2 \Rightarrow \log_2\left(\left(\dfrac{a^4\cdot\sqrt{a+b}}{b^2\cdot\sqrt[3]{b\cdot c}}\right)^{1/3}\right)^2$

$\Rightarrow \log_2\left(\dfrac{a^4\cdot\sqrt{a+b}}{b^2\cdot\sqrt[3]{b\cdot c}}\right)^{2/3} \Rightarrow 2/3\cdot\log_2\left(\dfrac{a^4\cdot\sqrt{a+b}}{b^2\cdot\sqrt[3]{b\cdot c}}\right)$

$\Rightarrow 2/3\cdot\log_2\left(\dfrac{a^4\cdot(a+b)^{1/2}}{b^2\cdot\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{c}}\right) \Rightarrow 2/3\cdot\log_2\left(\dfrac{a^4\cdot(a+b)^{1/2}}{b^2\cdot b^{1/3}\cdot c^{1/3}}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2/3\cdot\log_2\left(\dfrac{a^4\cdot(a+b)^{1/2}}{b^{7/3}\cdot c^{1/3}}\right) \Rightarrow 2/3\log_2\left(a^4\cdot(a+b)^{1/2}\right) - 2/3\log_2\left(b^{7/3}\cdot c^{1/3}\right)$

$\Rightarrow 2/3\left[\log_2 a^4 + \log_2 (a+b)^{1/2} - \log_2 b^{7/3} - \log_2 c^{1/3}\right]$

$\Rightarrow 2/3\left[4\log_2 a + 1/2\log_2(a+b) - 7/3\log_2 b - 1/3\log_2 c\right]$

② a) $f(x) = \ln(1+x)$

$f^{-1}(x) \Rightarrow x = \ln(1+y)$

$\Rightarrow x = \log_e(1+y)$

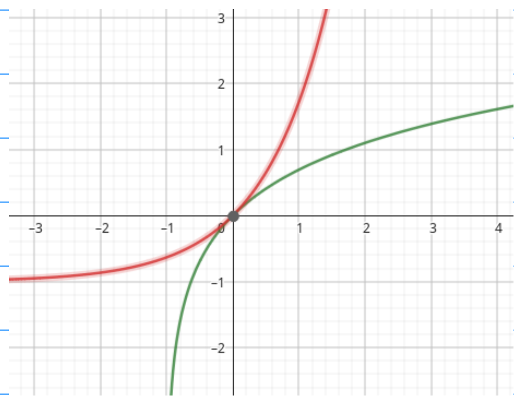
$\Rightarrow e^x = (1+y)$

$\Rightarrow y = e^x - 1$

$1+x>0$

$x>-1$ logo $D(f): (-1,+\infty) = Im_{f^{-1}}$

$D(f^{-1}): \mathbb{R} = Im(f)$ //



b) $g(x) = e^{2x} - 1$

$x = e^{2y} - 1$

$(x+1) = e^{2y}$

$\log_e(x+1) = \log_e e^{2y}$

$= 2y \cdot \log_e e$

$\log_e(x+1) = 2y$

$(x+1) > 0$ $\qquad y = \dfrac{\log_e(x+1)}{2}$

$x > -1$ //

$D(g) = \mathbb{R} = Im(g^{-1})$

$D(g^{-1}) = Im(g) = (-1, +\infty)$

$f^{-1}(x): \dfrac{\ln(x+1)}{2} : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ //

?

como?

c) $h(x) = \log_3(1-3x)$

$x = \log_3(1-3y)$

$3^x = 1-3y$

$3^x - 1 = -3y$

$3y = 1 - 3^x$

$y = \dfrac{1-3^x}{3}$

$D(h) \Rightarrow 1-3x > 0$

$3x < 1$

$x < 1/3$

$(-\infty, 1/3)$

$= Im(h^{-1})$

$D(h^{-1}) = \mathbb{R} = Im(h)$ //

③ $f(t) = 9e^{-t/3} + 1$

$f(x) = 9e^{-x/3} + 1$

$x = 9e^{-y/3} + 1$

$\dfrac{x-1}{9} = e^{-y/3} \Rightarrow \dfrac{-y}{3} = \log_e\left(\dfrac{x-1}{9}\right)$

$\Rightarrow y = -3\ln\left(\dfrac{x-1}{9}\right)$ //

$(f^{-1}) = g$

$g(t) = -3\ln\left(\dfrac{x-1}{9}\right)$

④ a) $f(x) = \sqrt{\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)}$

$\left(\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) \geq 0\right) \land \left(\log_{1/2} x > 0\right) \land (x > 0)$

I $\qquad$ II $\qquad$ III

II $\log_{1/2} x > 0 \Rightarrow x > 1/2^0$

$x > 1$ //

(III) $\log_2(\log_{1/2} x) \geqslant 0$

$\log_{1/2} x \geqslant 2^0 \Rightarrow \log_{1/2} x \geqslant 1 \Rightarrow x \leq 1/2$

Pq inverte?//

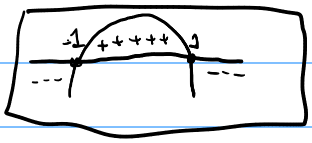
Fazendo a interseção de I, II, III tem $D(f) = (0, 1/2)$

(b) $f(x) = e^{\sqrt{1-x^2} \cdot \ln(x^2-3x+4)}$

(I) $1 - x^2 \geqslant 0$

raízes: 1 e -1//

$x^2 \leq 1$



$[-1, 1]$//

(II) $x^2 - 3x + 4 > 0$

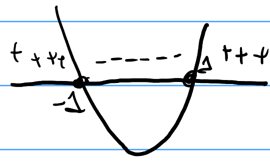
sem raízes

c) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\ln(1+x^2)}}$ $\Rightarrow$ ~~$\ln(1+x^2) > 0$~~

~~e $1 + x^2 > 0$~~

~~raízes 1 e -1~~

~~$(-\infty, -1) \cap (1, +\infty)$~~



?

se $x = 0$ $\log_e 1 = 0$

porém não pode na fração//

d) $h(x) = \dfrac{\ln(x^2 - 3x + 2)}{\sqrt{e^x - 1}}$ $\Rightarrow$ $e^x - 1 > 0$

$e^x > 1$

$x > \log_e 1$

$x > 0$

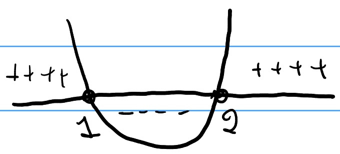
Expressão	Propriedades Utilizadas	Único Loga
$\log_3 x - \log_3 2$	Logaritmo do quociente	lo
$\log_{\frac{1}{3}} 5 + \log_{\frac{1}{3}} 4$	Logaritmo do produto	lo
$\log_5 3 + \log_5 x - \log_5 4$	Logaritmo do produto e do quociente	log
$\frac{1}{5} \cdot \log 3$	Logaritmo da potência	lo
$3 \cdot \log_2 x + 4 \cdot \log_2 2$	Logaritmo da potência e do produto	log
$1 + \log_3 5$	Logaritmo do produto	lo

$x^2 - 3x + 2 > 0$

raízes: 2 e 1

$3 \pm \sqrt{9 - 8}$

$\dfrac{3 \pm 1}{2} = 2$ e 1//



$((-\infty, 1) \cup (2, +\infty)) \cap (0, +\infty)$

$\Rightarrow (0, 1) \cup (2, +\infty)$

(5) Resolva o Sistema $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 1 & \text{(I)} \\ \log_9 x + \log_3 y = 1 & \text{(II)} \end{cases}$

(I) $\log_2 x + \log_4 y = 1$

$\Rightarrow \log_2 x + \dfrac{\log_2 y}{\log_2 4} = 1$

$\Rightarrow \log_2 x + \dfrac{\log_2 y}{2} = 1$

$\log_2 x = \dfrac{-\log_2 y}{2} + 1$

$x = 2^{\frac{-\log_2 y}{2} + 1}$

$x = \sqrt{2^{-\log_2 y + 1}}$

$x = \sqrt{\dfrac{1}{2^{\log_2 y + 1}}} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{1}{2^{\log_2 2y}}}$ //

(II) $\log_9 \sqrt{\frac{1}{2^{\log_2 2y}}} + \log_3 y = 1$

$\log_9 \sqrt{\frac{1}{2^{\log_2 2y}}} + \dfrac{\log_9 y}{\log_9 3} = 1$

$\dfrac{\log_9 3 . \left(\log_9 \sqrt{\frac{1}{2^{\log_2 2y}}}\right) + \log_9 y}{\log_9 3} = 1$

(7) a) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

$f(-x) = \log_e\left(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}\right)$ // $\Rightarrow \ln\left(-x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

∴ nem par nem ímpar

? b) não entendi.

c) $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow h(-x) \Rightarrow \dfrac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} \Rightarrow \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} \Rightarrow \dfrac{-(e^x - e^{-x})}{2}$

$h(x) = h(-x)$ ∴ a função é ímpar!

(8) Determine o valor do produto $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \ldots \log_{63} 64$.

$$\ldots \log_{61} 62 \cdot \log_{62} 63 \cdot \log_{63} 64 = \ldots \log_{61} 62 \cdot \log_{62} 63^{\log_{63} 64} = \log_{62} 64$$

$$\Rightarrow \log_{61} 62 \cdot \log_{62} 64 \Rightarrow \log_{61} 62^{\log_{62} 64} = \ldots \log_{60} 61 \cdot \log_{61} 64$$

portando ao final teremos $\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6 \cdot \overbrace{\log_2 2}^{1} = 6$ //

(9) $f(x) = 1 - 3\log_{1/2}(1-2x)$. Determine f^{-1}:

$$f^{-1}(x) \Rightarrow x = 1 - 3 \cdot \log_{1/2}(1-2y) \Rightarrow -3\log_{1/2}(1-2y) = x - 1$$

$$\Rightarrow -3\log_{2^{-1}}(1-2y) = x - 1 \Rightarrow -\log_{1/2}(1-2y) = \frac{x-1}{3}$$

$$\Rightarrow -(1-2y) = (1/2)^{\frac{x-1}{3}}$$

$$1 - 2y = -(1/2)^{\frac{x+1}{3}}$$

$$-2y = 1 - (1/2)^{\frac{x+1}{3}}$$

$$-y = \frac{1 - (1/2)^{\frac{x+1}{3}}}{2}$$

$$y = -\frac{1 - (1/2)^{\frac{x+1}{3}}}{2}$$ //

?

(10) 10. Analise se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta:

(V) A função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-5)$ é decrescente e seu gráfico intercepta o eixo das abscissas no ponto $P(6,0)$. (a)

(F) A função $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}$ é a inversa da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-5)$. (b)

(F) A imagem da inversa da função $f(x) = \ln(2x-1)$ é $\Re$. (c)

(F) O domínio da função $h(x) = \log_{x-2}(8-2^x)$ é $(-\infty, 3)$. (D)

R.: V, F, F, F

a) $f(x) = \log_{1/2}(x-5)$ é decrescente pois a base do logaritmo é >0 e <1 //

b) $f(x) = \log_{1/2}(x-5) \Rightarrow x = \log_{1/2}(y-5) \Rightarrow y - 5 = (1/2)^x$

$y = (1/2)^x + 5$ //

c) $f(x) = \ln(2x-1) \Rightarrow D_f = Im_{f^{-1}} \Rightarrow 2x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1/2$ //

d) $h(x) = \log_{x-2}(8-2^x)$ $D_h = (-\infty, 3)$

$8-2^x > 0$ e $x-2>0$ e $x-2 \neq 1$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

$8 > 2^x$ $x > 2$ $x \neq 3$,,

$\log_2 8 > x$ $D(h) = (2, 3)$

$x < 3$,,