Álgebra Linear

Diagonalização de Operadores Lineares

Professora: Graciela Moro

UDESC

Diagonalização de Operadores

Definição: Se $T : V \longrightarrow V$ possui uma base formada por autovetores de T, dizemos que T é um operador ***diagonalizável.***

Definição: Sejam $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um operador diagonalizável e $\mathcal{B}$ uma base de autovetores de T. Então,

(i) $D = [T]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz diagonal.

(ii) A matriz $P = [I]_C^{\beta}$ de mudança de base de $\mathcal{B}$ para a base canônica C, satisfaz $D = P^{-1}[T]P$. Dizemos que a matriz P **diagonaliza** [T].

Exemplos

Exemplo 1: Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (-2x + 2y - 3z, 2x + y - 6z, -x - 2y)$.

a) Determine os autovalores e os autoespaços de T.
b) Determine se T é diagonalizável. Em caso afirmativo, determine uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T e determine a matriz T com relação a esta base.
c) Se T for diagonalizável, determine a matriz diagonalizadora P de T.

Exemplo 2: Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (4x + 2y, -x + y, y + 2z)$.

a) Determine os autovalores e os autoespaços de T.
b) Determine se T é diagonalizável. Em caso afirmativo, determine uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T e determine a matriz T com relação a esta base.
c) Se T for diagonalizável, determine a matriz diagonalizadora P de T.

Calculando potências de uma matriz

O Cálculo de potência de matrizes é uma tarefa de custo computacional muito elevado, pois é necessário calcular $m-1$ *produtos de matrizes para calcular* A^m. *Entretanto, se soubermos que* A *é uma matriz diagonalizável, o cálculo de* A^m *fica bastante simplificado.*

Teorema

Seja A *é uma matriz quadrada* $n \times n$ *e* k *um número inteiro. Se* v *é autovetor de* A *associado ao autovalor* λ *então* v *também é autovetor de* A^k *associado ao autovalor* λ^k.

Demonstração

or definição, se v é autovetor de A associado ao autovalor λ então $Av = \lambda v$.

Multiplicando por A ambos os lados da igualdade, tem-se

$$A^2 v = A\lambda v = \lambda(Av) = \lambda^2 v$$

Novamente, multiplicando por A ambos os lados

$$A^3 v = A\lambda^2 v = \lambda^2(Av) = \lambda^3 v$$

Generalizando esta idéia para k vezes, obtemos

$$(\underbrace{A \cdot A \cdot ..... \cdot A}_{k-1 \text{ vezes}})Av = (\underbrace{A \cdot A \cdot ..... \cdot A}_{k-1 \text{ vezes}})\lambda v \Rightarrow A^k v = \lambda^k v$$

concluindo assim nossa demonstração.

Assim, todo autovetor de A é também autovetor de A^k e portanto, se a matriz A é diagonalizável, A e A^k possuem a mesma matriz diagonalizadora P. O próximo teorema nos diz como obter a matriz A^k para todo k inteiro.

Teorema

Seja A é uma matriz quadrada $n \times n$ diagonalizável então existe uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $A^k = PD^kP^{-1}$, para todo k inteiro.

Demonstração

Se A é diagonalizável, então existe uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $A = PDP^{-1}$. Assim,

$$\begin{aligned} A^k &= A.A.A \cdots A \\ &= (PDP^{-1}).(PDP^{-1}).(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^kP^{-1} \end{aligned}$$

$\square$

Isso sugere que para calcularmos A^k podemos diagonalizar A, obtendo P e D, depois calcular D^k, e o resultado será igual a PD^kP^{-1}. Como D é diagonal e sua diagonal é formada pelos autovalores de A, pelo teorema anterior tem-se

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

.

Exemplo 23. *Calcule A^{20} onde* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Exercícios

9. (ENADE) Seja A uma matriz quadrada de ordem n.

   (a) Se λ é um autovalor de A, mostre que 2λ é um autovalor de $2A$.

   (b) Se λ é um autovalor de A, mostre que λ^2 é um autovalor de A^2.

Seja T um operador linear que duplica e inverte o sentido do vetor $u=(1,1,1)$, preserva o comprimento do vetor $v=(0,1,0)$ e triplica o comprimento do vetor $w=(0,-1,1)$. Encontre a expressão do operador T^{28}.

36. Seja $T: V \to V$ o operador linear que tem autovalores $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \ldots, \lambda_n = n$ associados aos autovetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, respectivamente. Sabendo que $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e que $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}$, determine $[T(v)]_\beta$.