Revisão

Função Par:

$f(x) = f(-x), \forall x \in Df$ ⇨ simetria com relação ao eixo *y*

Função Ímpar:

$f(x) = -f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in Df$ ⇨ simetria com relação à origem

Função Inversa:

$$(g \circ f)(x) = x, \forall x \in Df,$$
$$(f \circ g)(y) = y, \forall y \in Dg,$$

⇨

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x, \forall x \in Df,$$
$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x, \forall x \in Df^{-1}.$$

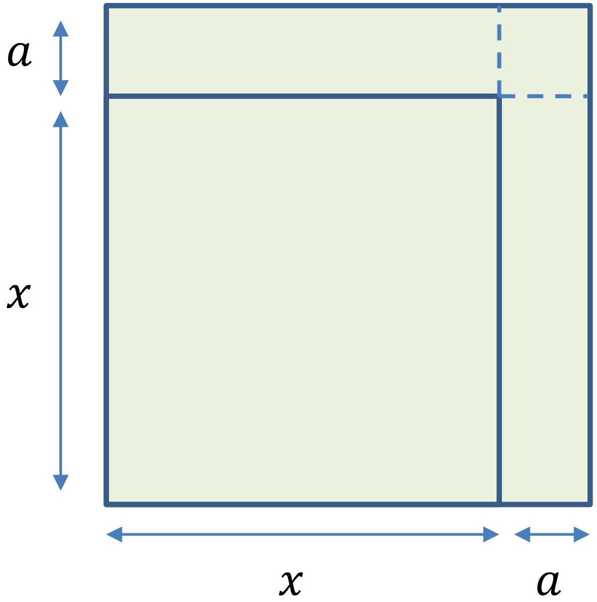
Trocando x por y e denotando g por f^{-1}

Revisão

Técnica de Completar Quadrados

$$Ax^2 + Bx + C = A(x + a)^2 + D$$

$$x^2 + 2ax + a^2$$



Exemplo. Use a técnica de completar quadrados para mostrar que as translações horizontal e vertical correspondem, respectivamente, a abscissa e a ordenada do vértice da parábola.

Forma geral de uma função quadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Completando quadrados: $(x + A)^2 = x^2 + 2Ax + A^2$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$f(x) = a\left(x^2 + 2\underbrace{\boxed{\frac{b}{2a}}}_{A}x\right) + c$$

$$f(x) = a\left(x^2 + 2\underbrace{\boxed{\frac{b}{2a}}}_{A}x + \underbrace{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{A^2 - A^2 = 0}\right) + c$$

$$f(x) = a\left(\underbrace{x^2 + 2\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$f(x) = a\left(x - \underbrace{\boxed{-\frac{b}{2a}}}_{x_v}\right)^2 + \underbrace{\left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)}_{\frac{-\Delta}{4a} = y_v}$$

Comparando essa expressão com $f(x) = a(x - C)^2 + \mathrm{K}$

Concluímos que: $C = -\frac{b}{2a} = x_v$ e $K = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = y_v$

Portanto, **as translações horizontal e vertical** correspondem, respectivamente, a **abscissa e ordenada do vértice**.

Já que estamos com “tudo pronto” para encontrar as raízes de uma função quadrática, façamos:

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

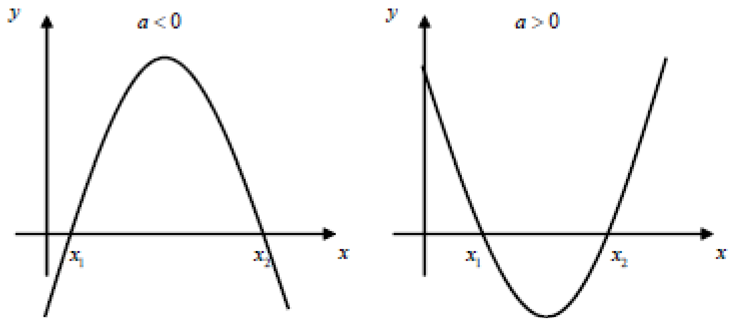
$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow$$

Fórmula de Bháskara

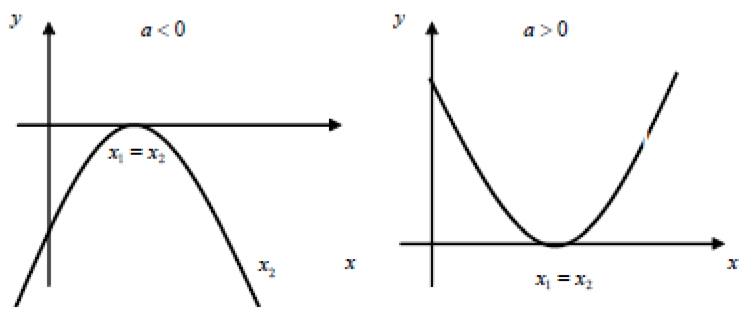
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Definindo $\Delta = b^2 - 4ac$.

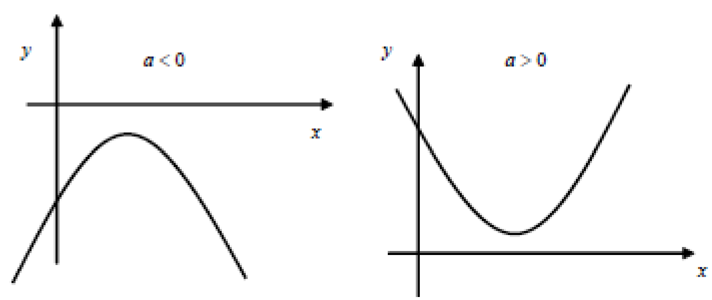
1. Se $\Delta > 0$, então há duas raízes reais e distintas



2. Se $\Delta = 0$, então há duas raízes reais e iguais



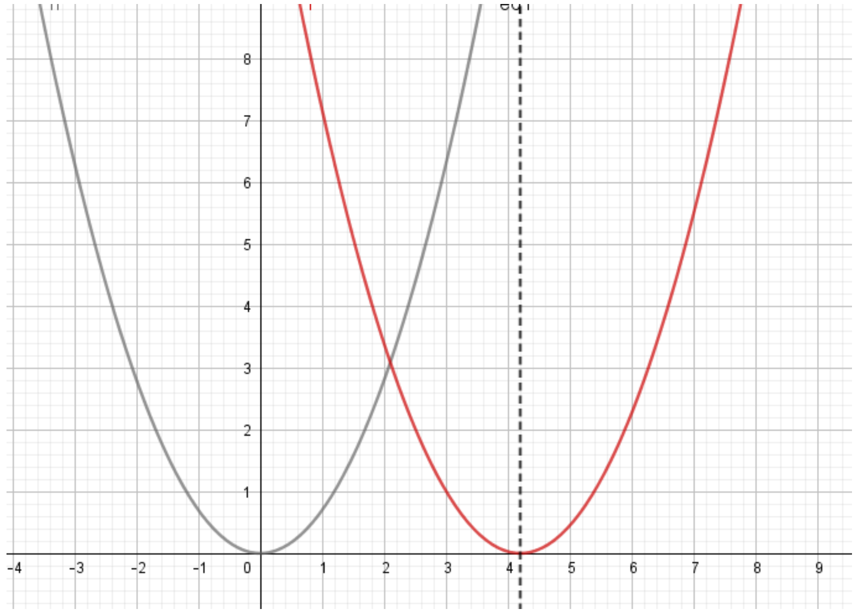
3. Se $\Delta < 0$, então há duas raízes complexas conjugadas,



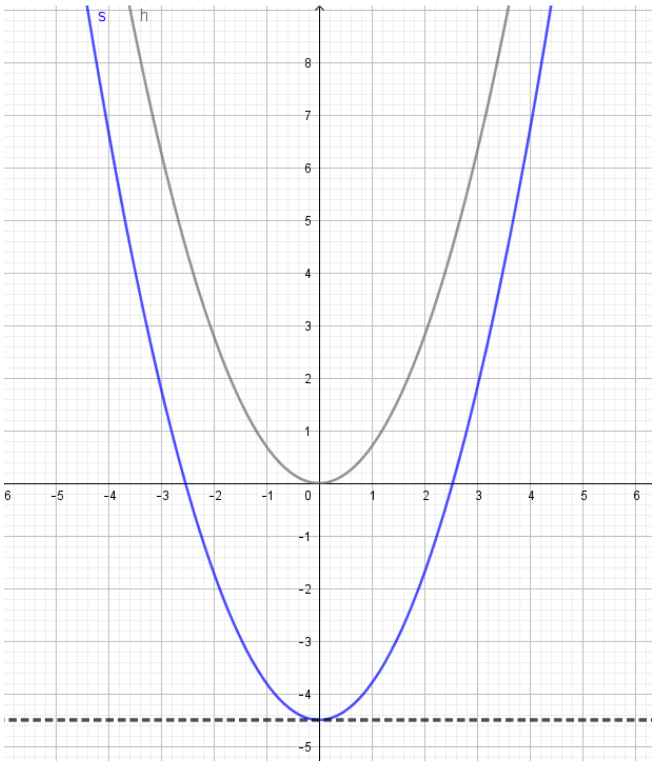
Translações

Seja $\mathrm{y} = f(x) = ax^2$.
O gráfico dessa função é uma parábola com a concavidade voltada para cima.

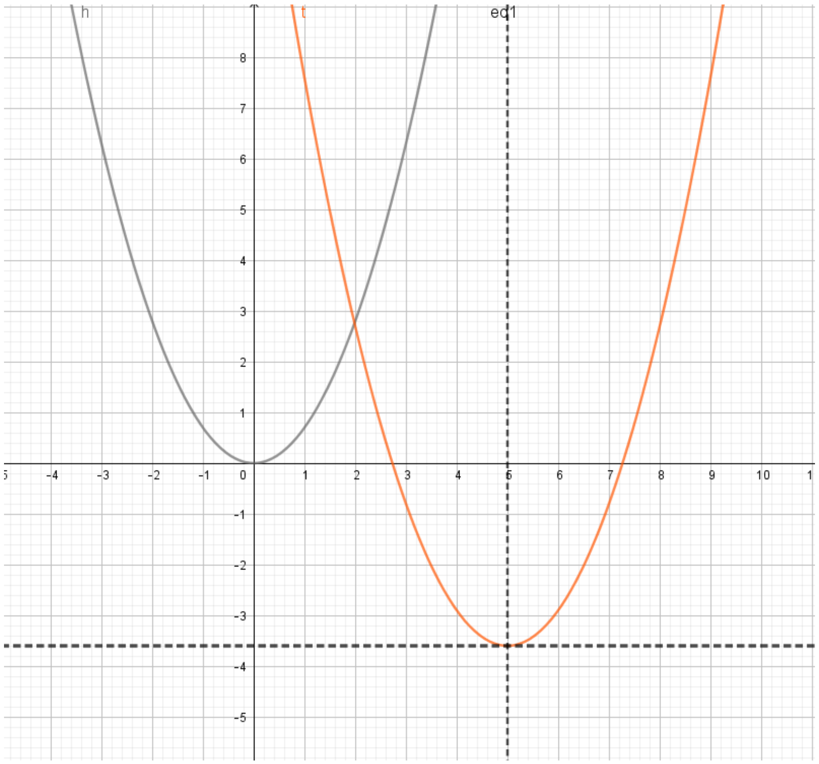
Ao considerar $\mathrm{y} = f(x - c)$ tem-se um translação horizontal de c unidades para a direita, se $c > 0$, e, para a esquerda, se $c > 0$



Ao considerar $\mathrm{y} = f(x) + k$ tem-se um translação vertical de k unidades para cima, se k> 0, e, para baixo, se $\mathrm{k} > 0$

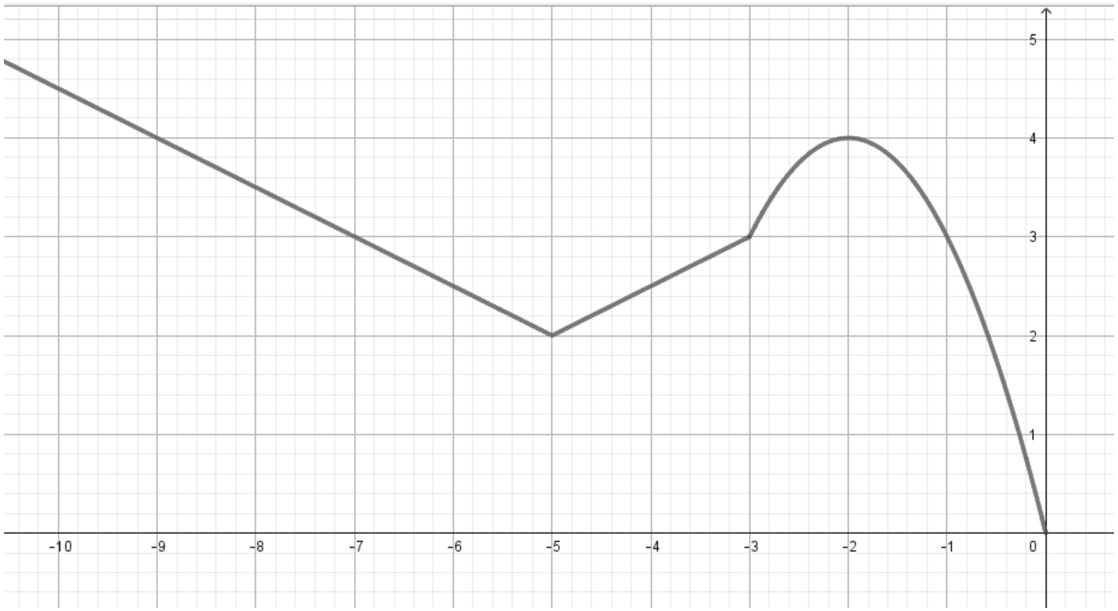


Ao considerar $\mathrm{y} = f(x - c) + k$ tem-se um translação horizontal de c unidades e uma translação vertical de k unidades.



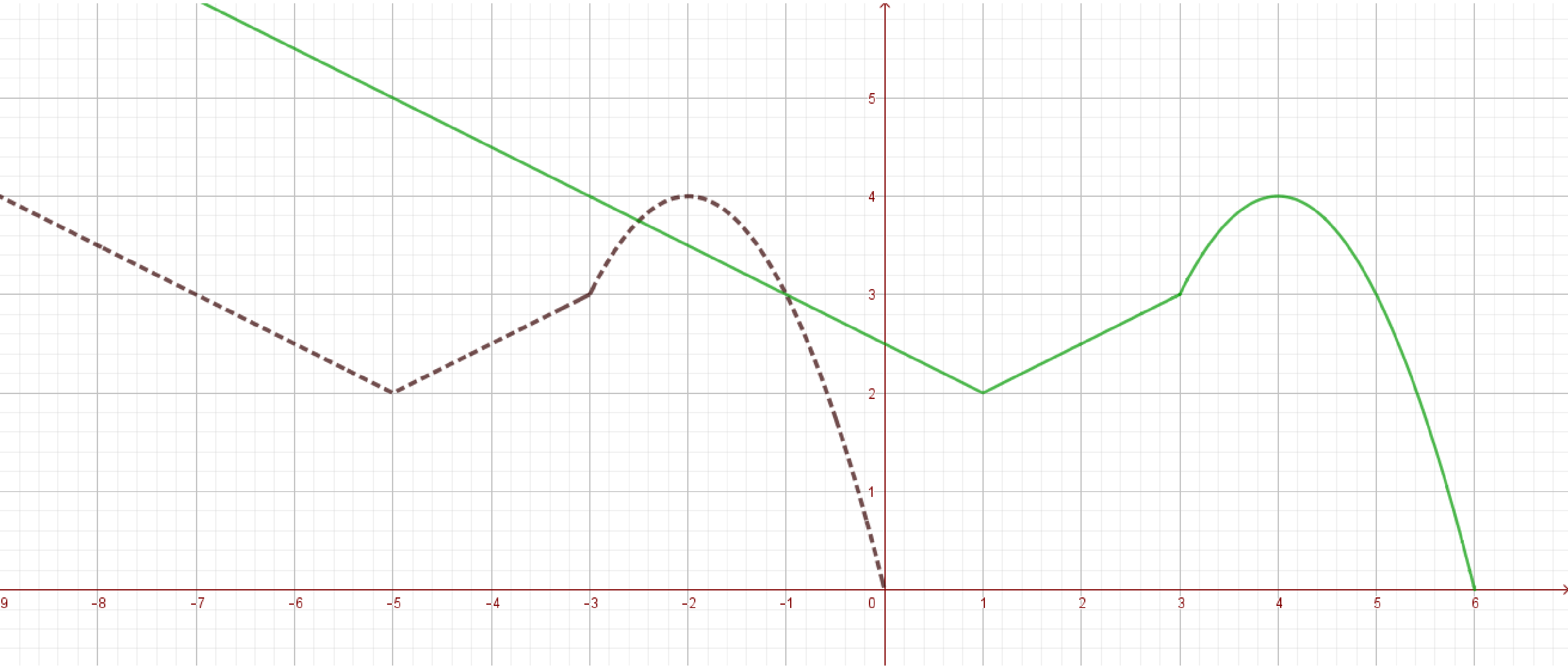
As observações acerca das translações horizontal e vertical se preservar para qualquer função. Basta utilizar uma função mais simples associada, que se conheça o gráfico. As características da função inicial, após aplicar translações são preservadas.

Exemplo. A Figura a seguir apresenta o gráfico da função f para $x \leq 0$.

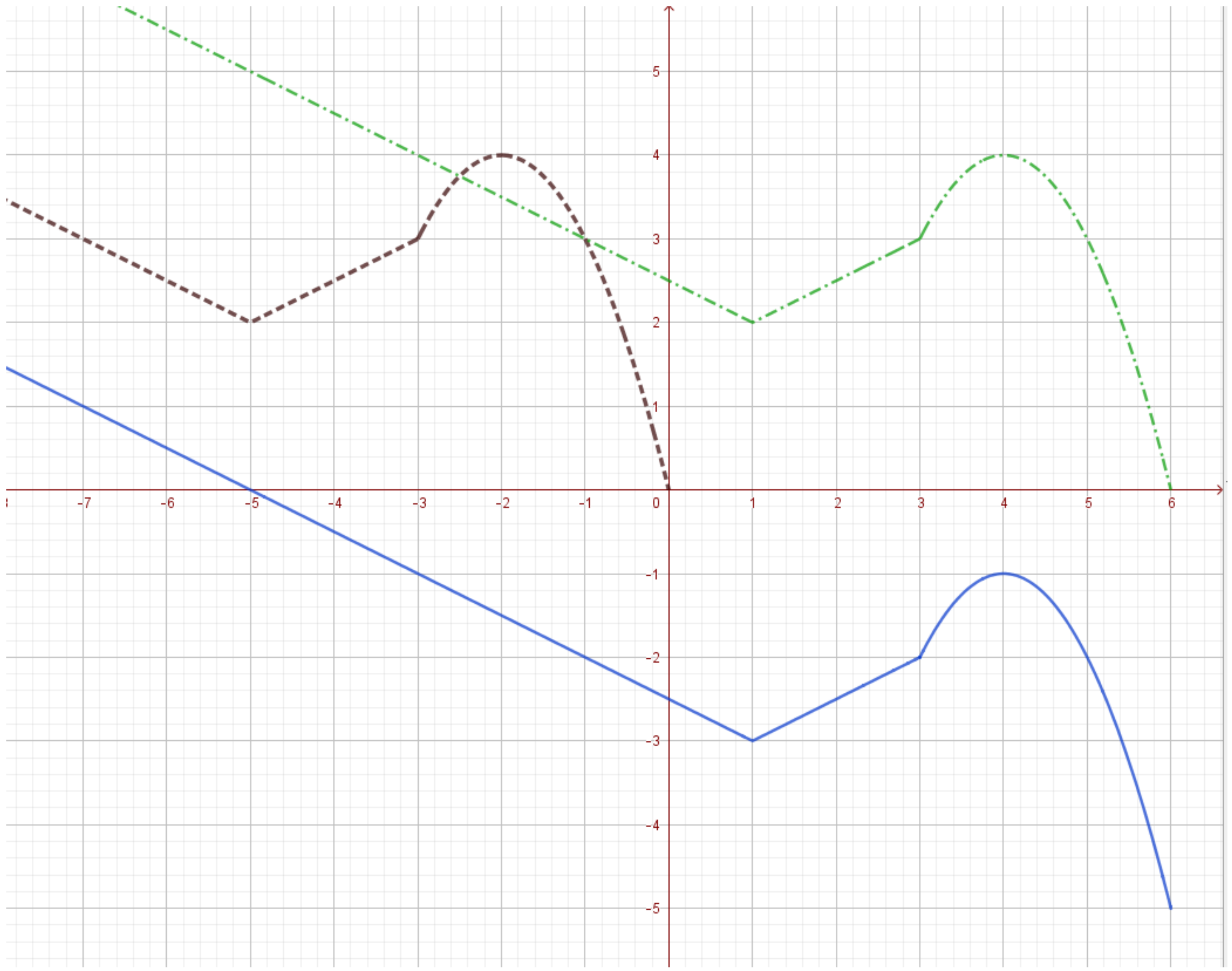


Represente o gráfico de g sabendo que $g(x) = f(x-6) - 5$.

$y = f(x-6)$ $\Rightarrow$ translação horizontal de 6 unidades para a direita.



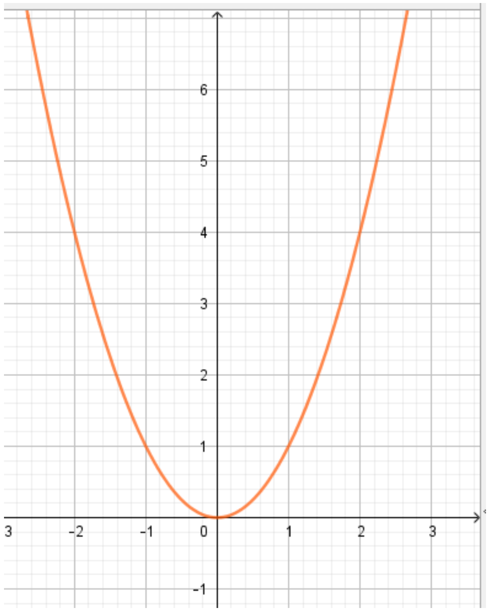
$y = f(x-6) - 5$ ⟹ translação vertical de 6 unidades para baixo.



Exemplo.

Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1 - |x|, \text{ se } -1 < x < 2 \\ -2 + \sqrt{x-2}, \text{ se } 2 < x < 6 \\ \frac{1}{x-8}, \text{ se } x \geq 7 \end{cases}$. A seguir, dê o domínio e a imagem desta função.

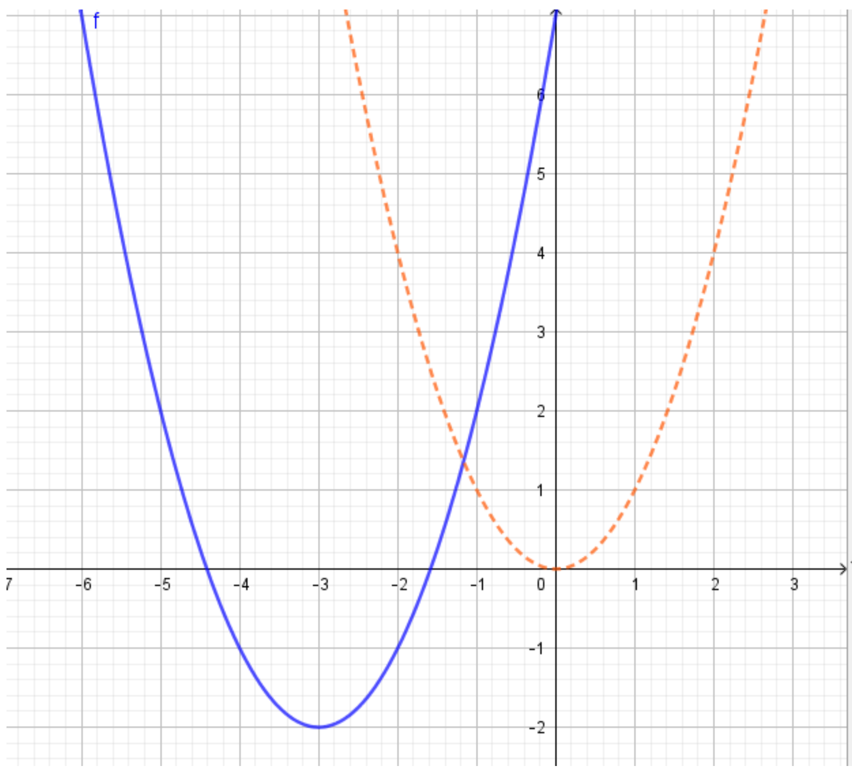
Para $x \leq -1$, temos que: $f(x) = (x+3)^2 - 2$



Exemplo.

Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1 - |x|, \text{ se } -1 < x < 2 \\ -2 + \sqrt{x-2}, \text{ se } 2 < x < 6 \\ \frac{1}{x-8}, \text{ se } x \geq 7 \end{cases}$. A seguir, dê o domínio e a imagem desta função.

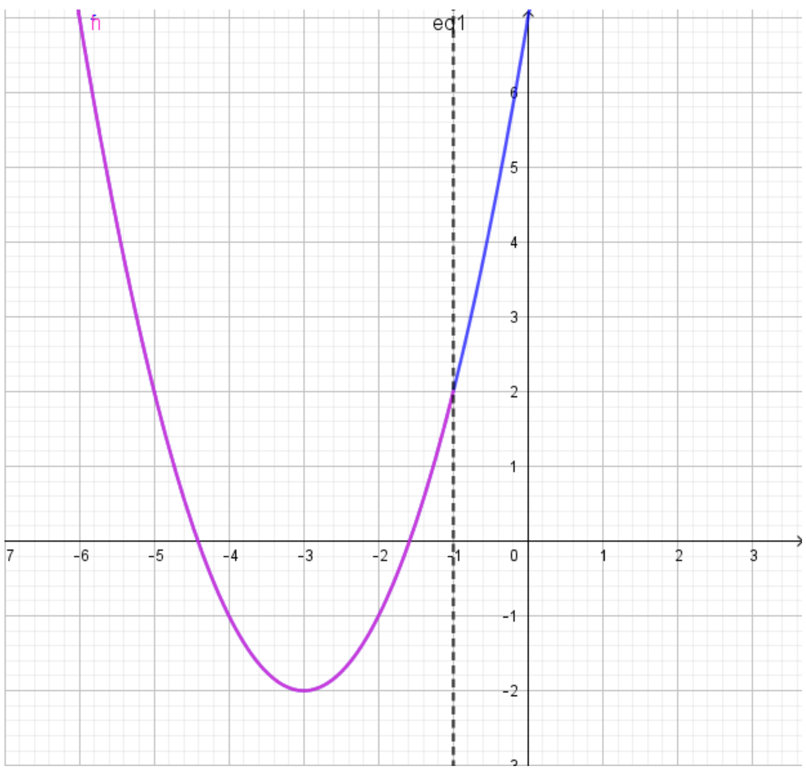
Para $x \leq -1$, temos que: $f(x) = (x+3)^2 - 2$



Exemplo.

Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1 - |x|, \text{ se } -1 < x < 2 \\ -2 + \sqrt{x-2}, \text{ se } 2 < x < 6 \\ \frac{1}{x-8}, \text{ se } x \geq 7 \end{cases}$. A seguir, dê o domínio e a imagem desta função.

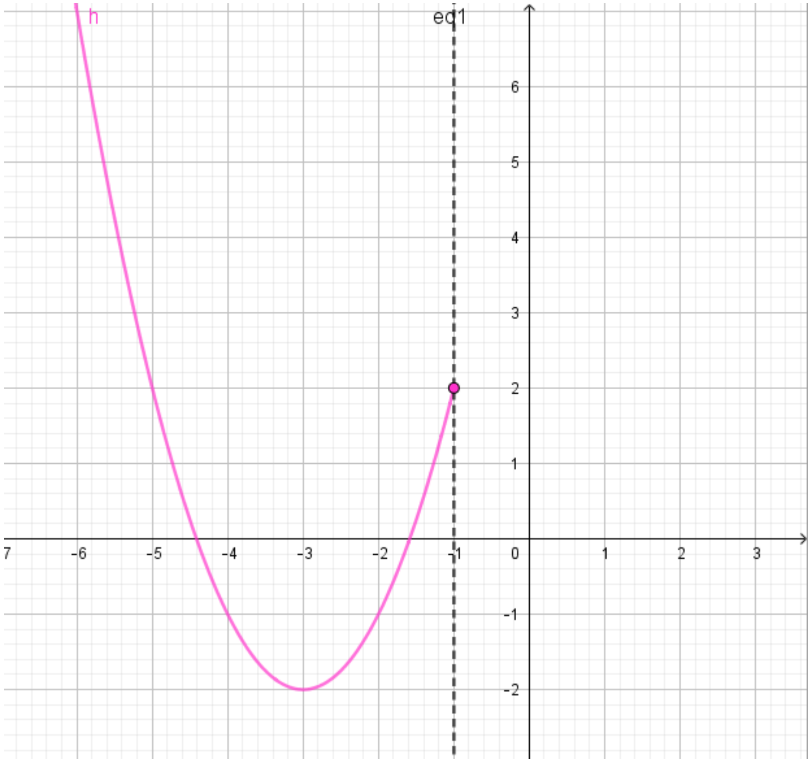
Para $x \leq -1$, temos que: $f(x) = (x+3)^2 - 2$



Exemplo.

Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1 - |x|, \text{ se } -1 < x < 2 \\ -2 + \sqrt{x-2}, \text{ se } 2 < x < 6 \\ \frac{1}{x-8}, \text{ se } x \geq 7 \end{cases}$. A seguir, dê o domínio e a imagem desta função.

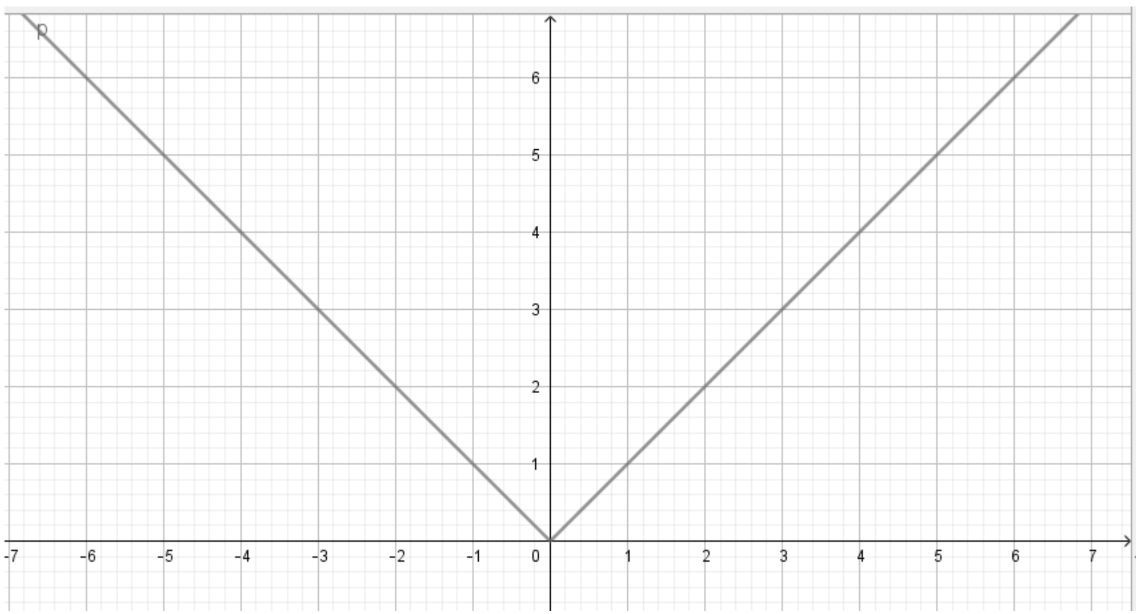
Para $x \leq -1$, temos que: $f(x) = (x+3)^2 - 2$



Exemplo.

Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1 - |x|, \text{ se } -1 < x < 2 \\ -2 + \sqrt{x-2}, \text{ se } 2 < x < 6 \\ \frac{1}{x-8}, \text{ se } x \geq 7 \end{cases}$. A seguir, dê o domínio e a imagem desta função.

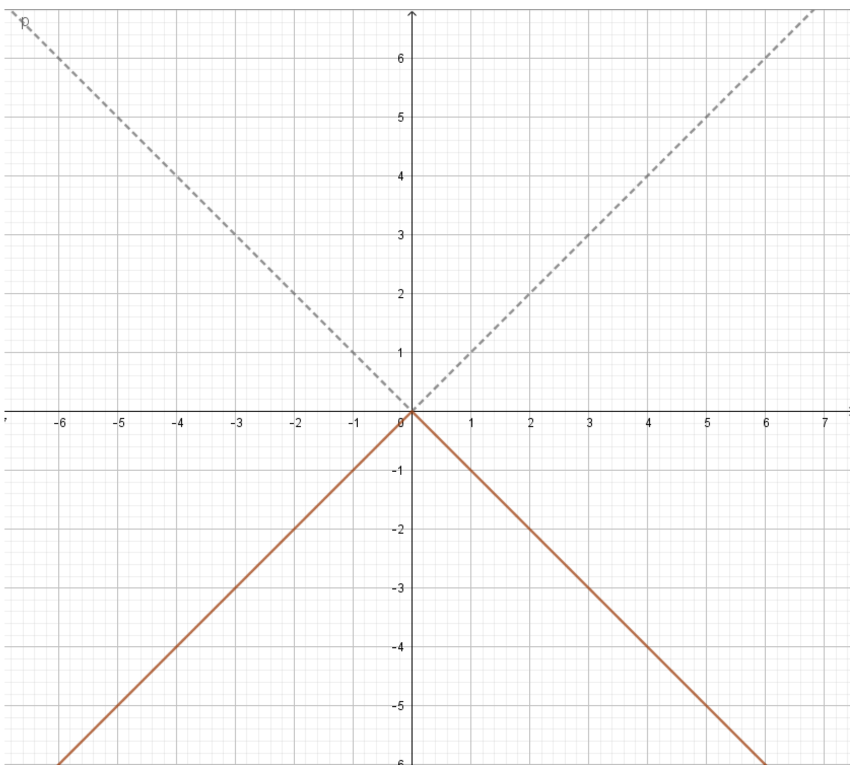
Para $-1 < x < 2$, temos que: $f(x) = 1 - |x|$



Exemplo.

Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1 - |x|, \text{ se } -1 < x < 2 \\ -2 + \sqrt{x-2}, \text{ se } 2 < x < 6 \\ \frac{1}{x-8}, \text{ se } x \geq 7 \end{cases}$. A seguir, dê o domínio e a imagem desta função.

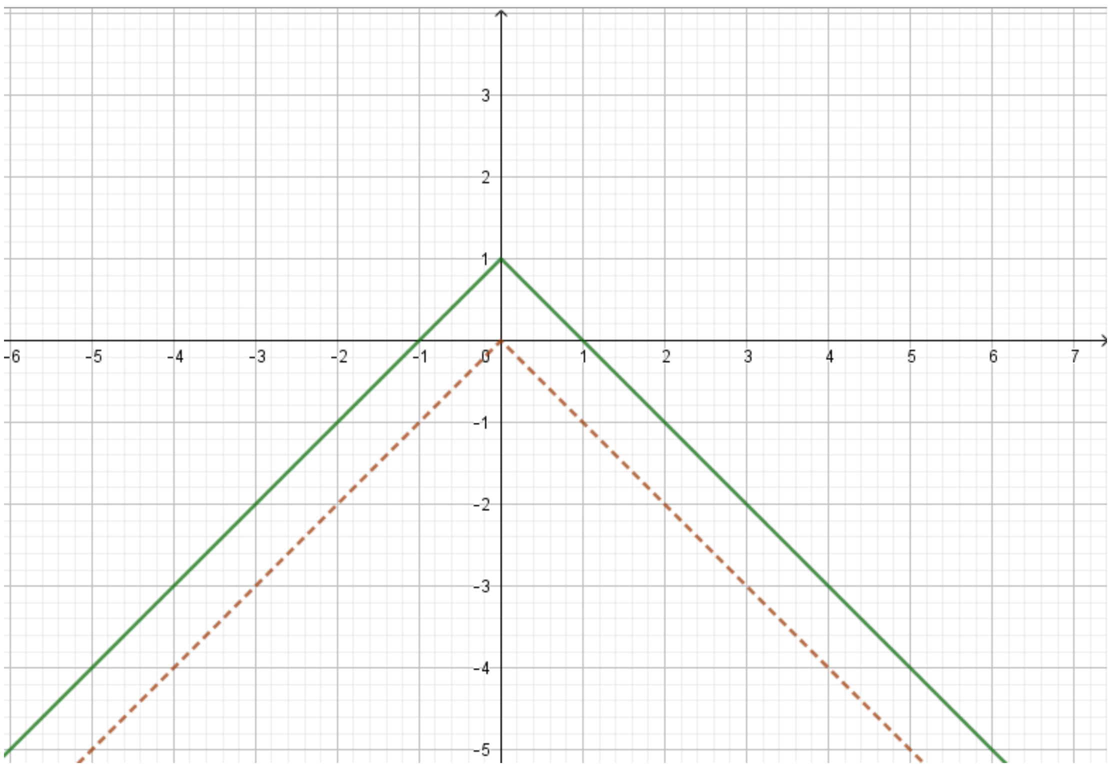
Para $-1 < x < 2$, temos que: $f(x) = 1 - |x|$



Exemplo.

Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1 - |x|, \text{ se } -1 < x < 2 \\ -2 + \sqrt{x-2}, \text{ se } 2 < x < 6 \\ \frac{1}{x-8}, \text{ se } x \geq 7 \end{cases}$. A seguir, dê o domínio e a imagem desta função.

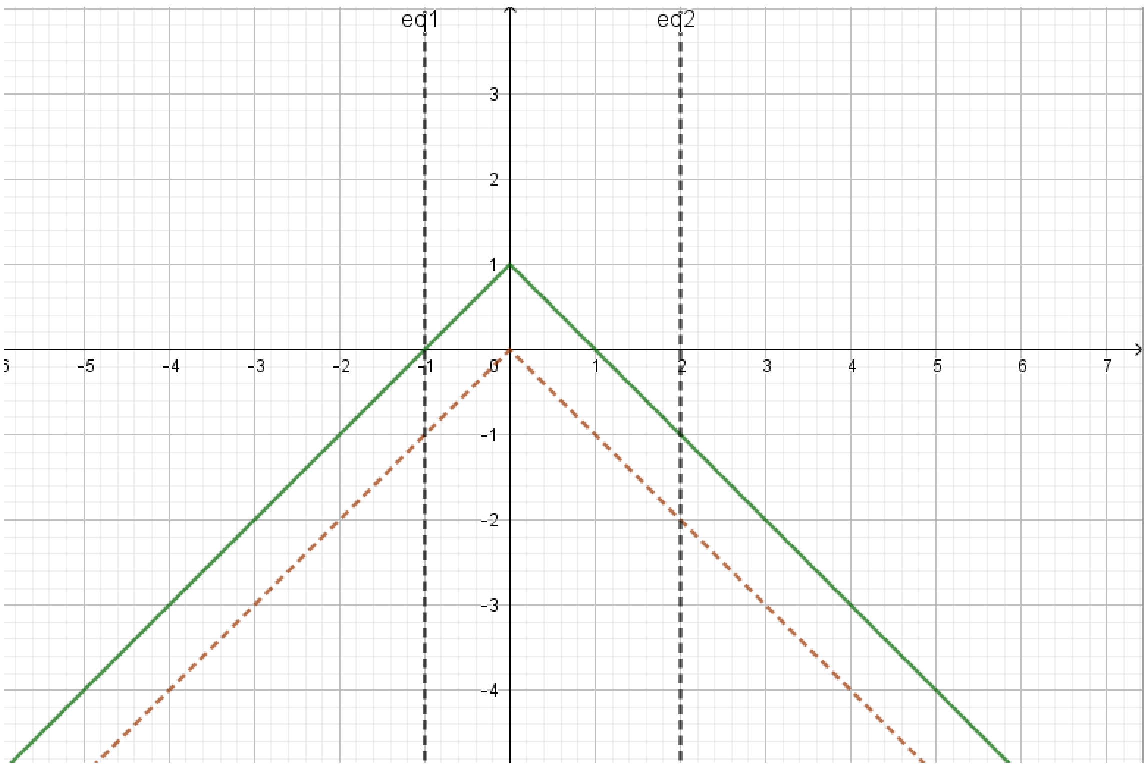
Para $-1 < x < 2$, temos que: $f(x) = 1 - |x|$



Exemplo.

Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1 - |x|, \text{ se } -1 < x < 2 \\ -2 + \sqrt{x-2}, \text{ se } 2 < x < 6 \\ \frac{1}{x-8}, \text{ se } x \geq 7 \end{cases}$. A seguir, dê o domínio e a imagem desta função.

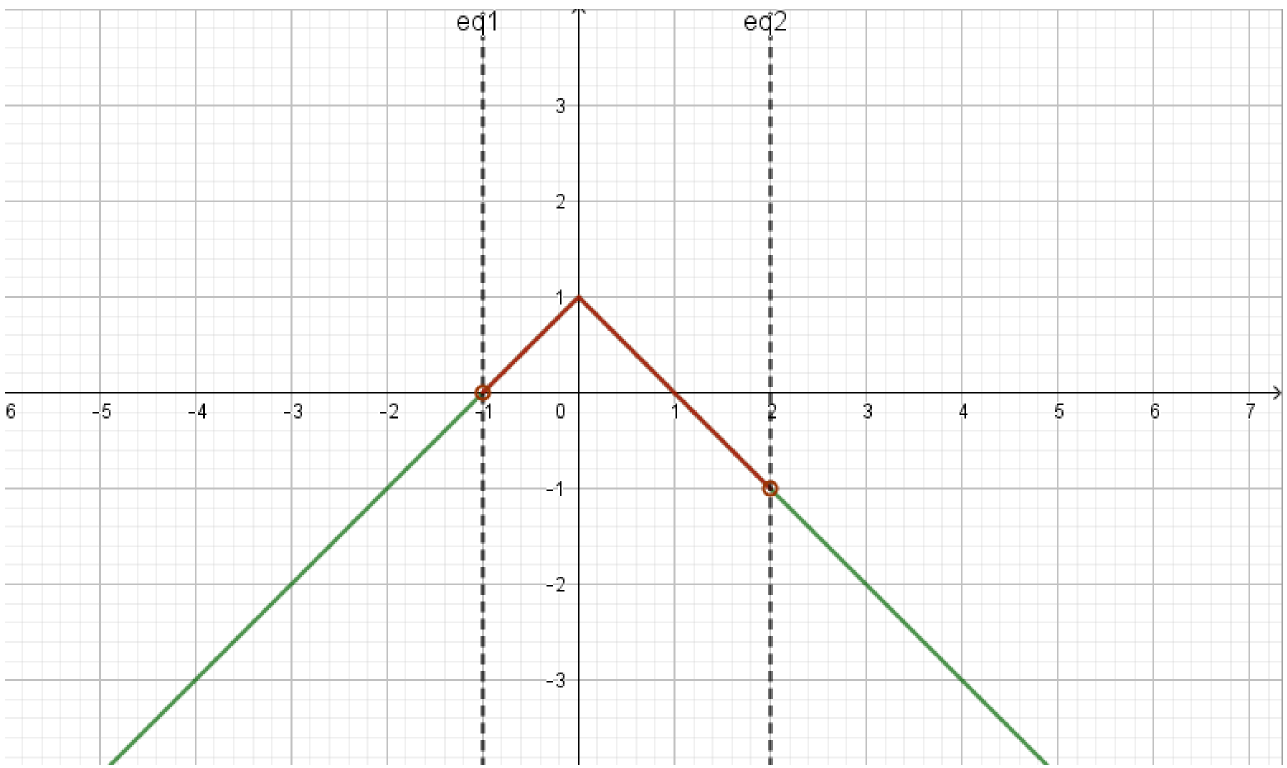
Para $-1 < x < 2$, temos que: $f(x) = 1 - |x|$



Exemplo.

Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1 - |x|, \text{ se } -1 < x < 2 \\ -2 + \sqrt{x-2}, \text{ se } 2 < x < 6 \\ \frac{1}{x-8}, \text{ se } x \geq 7 \end{cases}$. A seguir, dê o domínio e a imagem desta função.

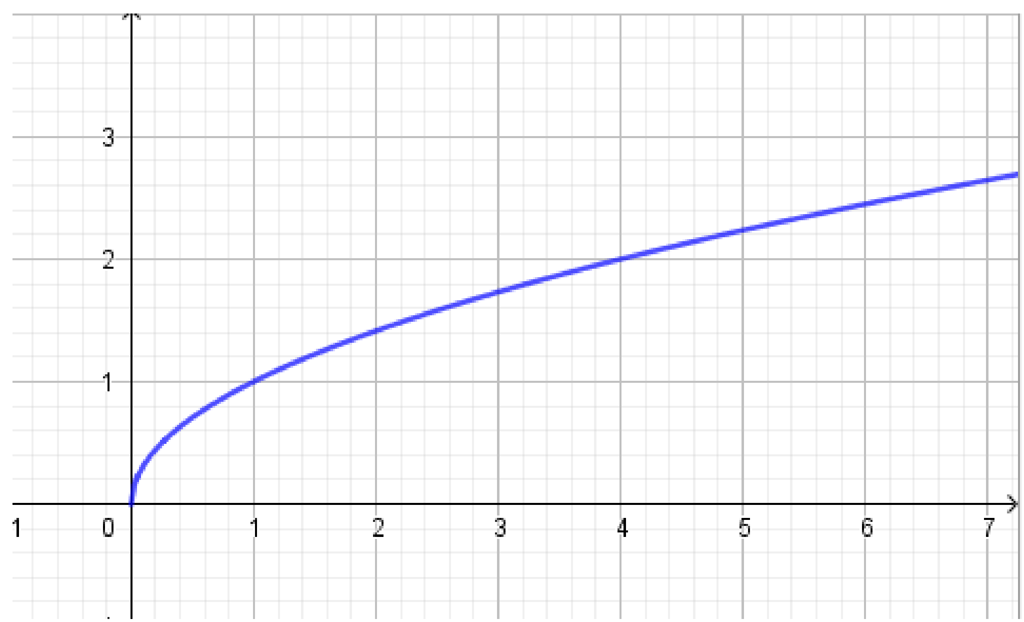
Para $-1 < x < 2$, temos que: $f(x) = 1 - |x|$



Exemplo.

Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1 - |x|, \text{ se } -1 < x < 2 \\ -2 + \sqrt{x-2}, \text{ se } 2 < x < 6 \\ \frac{1}{x-8}, \text{ se } x \geq 7 \end{cases}$. A seguir, dê o domínio e a imagem desta função.

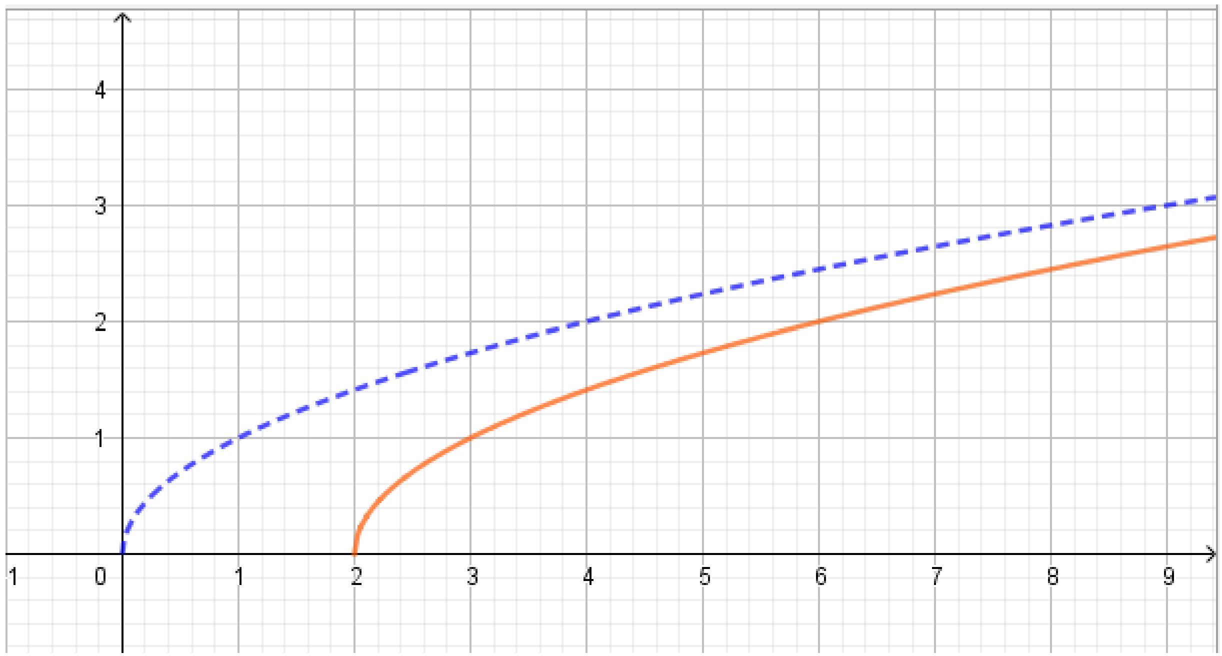
Para $2 < x < 6$, temos que: $f(x) = -2 + \sqrt{x-2}$



Exemplo.

Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1 - |x|, \text{ se } -1 < x < 2 \\ -2 + \sqrt{x-2}, \text{ se } 2 < x < 6 \\ \frac{1}{x-8}, \text{ se } x \geq 7 \end{cases}$. A seguir, dê o domínio e a imagem desta função.

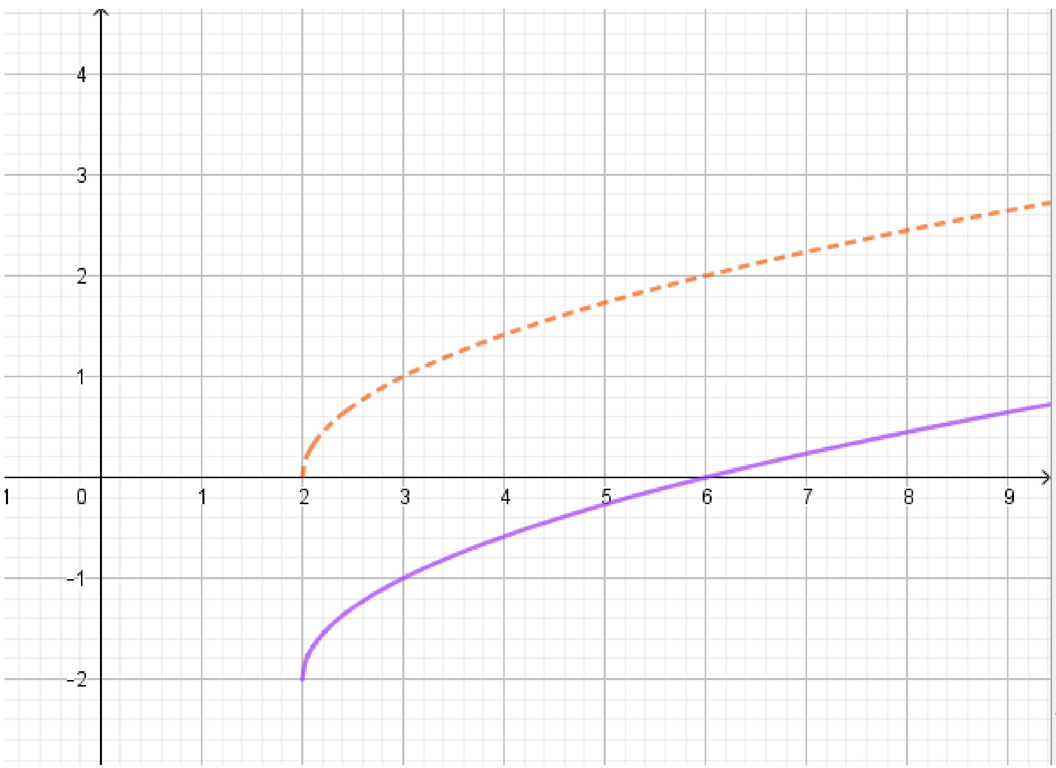
Para $2 < x < 6$, temos que: $f(x) = -2 + \sqrt{x-2}$



Exemplo.

Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1 - |x|, \text{ se } -1 < x < 2 \\ -2 + \sqrt{x-2}, \text{ se } 2 < x < 6 \\ \frac{1}{x-8}, \text{ se } x \geq 7 \end{cases}$. A seguir, dê o domínio e a imagem desta função.

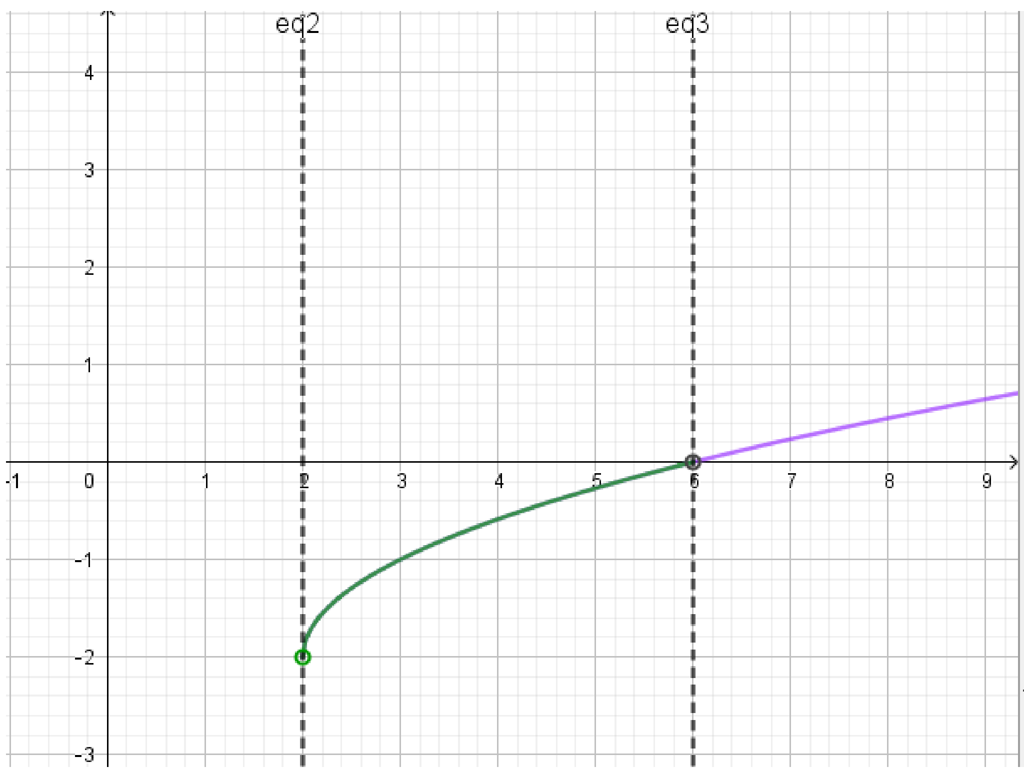
Para $2 < x < 6$, temos que: $f(x) = -2 + \sqrt{x-2}$



Exemplo.

Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1 - |x|, \text{ se } -1 < x < 2 \\ -2 + \sqrt{x-2}, \text{ se } 2 < x < 6 \\ \frac{1}{x-8}, \text{ se } x \geq 7 \end{cases}$. A seguir, dê o domínio e a imagem desta função.

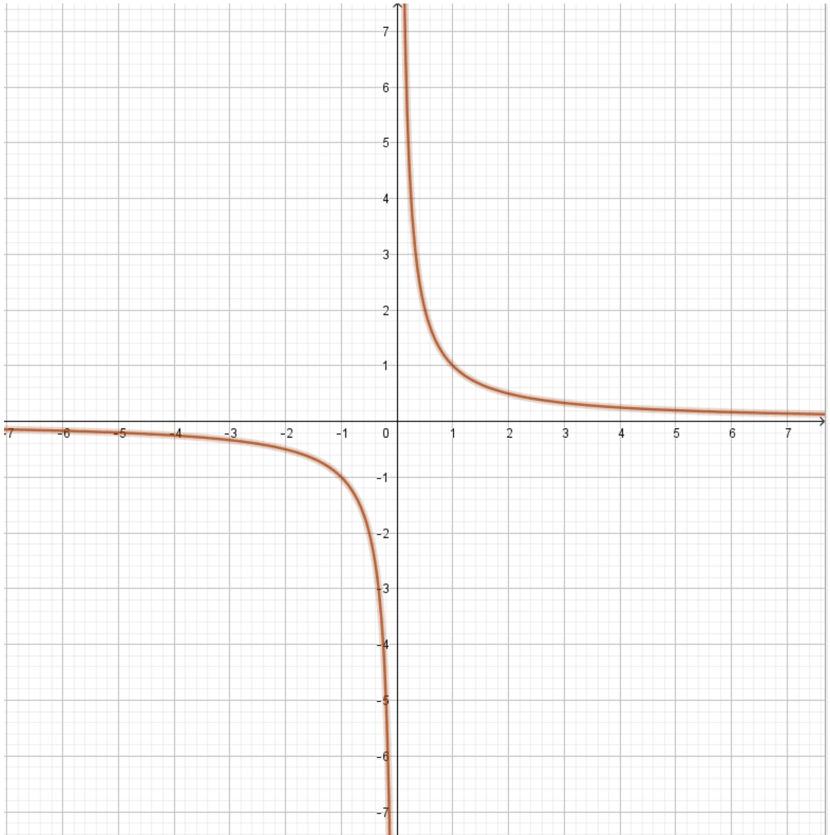
Para $2 < x < 6$, temos que: $f(x) = -2 + \sqrt{x-2}$



Exemplo.

Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1 - |x|, \text{ se } -1 < x < 2 \\ -2 + \sqrt{x-2}, \text{ se } 2 < x < 6 \\ \frac{1}{x-8}, \text{ se } x \geq 7 \end{cases}$. A seguir, dê o domínio e a imagem desta função.

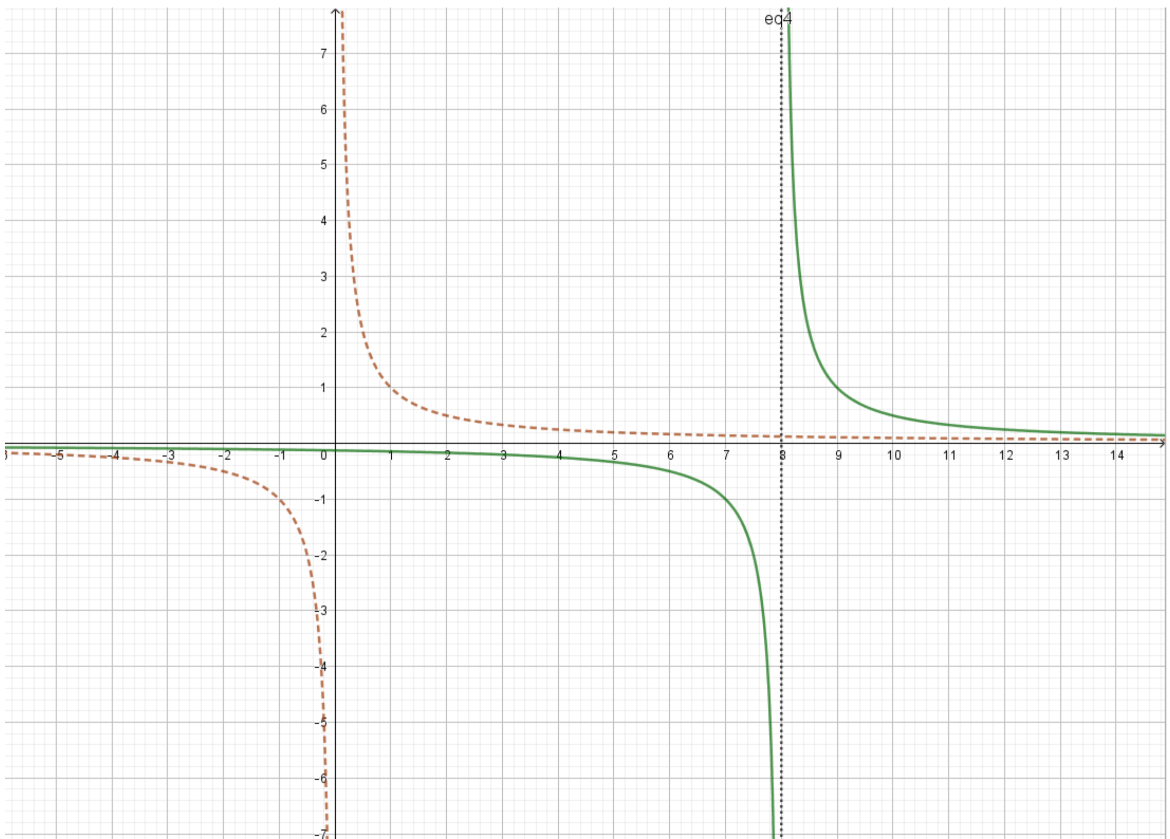
Para $x \geq 7$, temos que: $f(x) = \frac{1}{x-8}$



Exemplo.

Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1 - |x|, \text{ se } -1 < x < 2 \\ -2 + \sqrt{x-2}, \text{ se } 2 < x < 6 \\ \frac{1}{x-8}, \text{ se } x \geq 7 \end{cases}$. A seguir, dê o domínio e a imagem desta função.

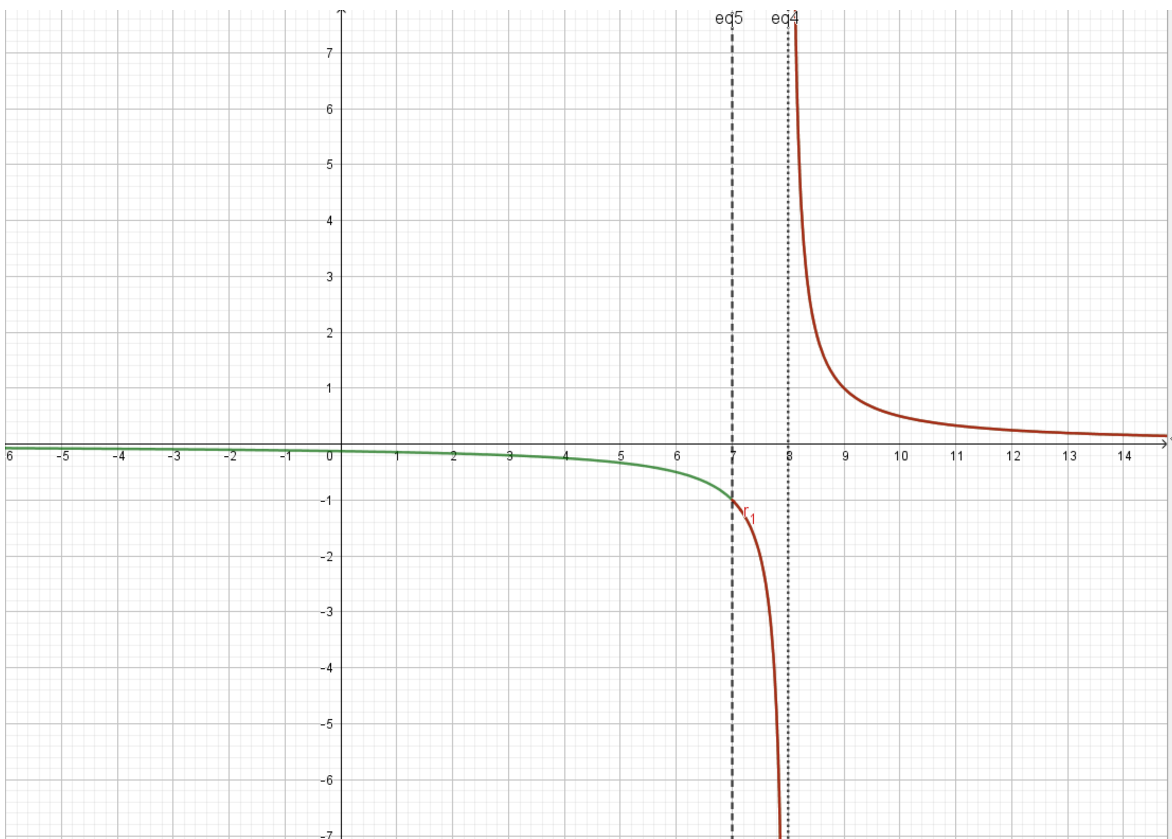
Para $x \geq 7$, temos que: $f(x) = \frac{1}{x-8}$



Exemplo.

Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1 - |x|, \text{ se } -1 < x < 2 \\ -2 + \sqrt{x-2}, \text{ se } 2 < x < 6 \\ \frac{1}{x-8}, \text{ se } x \geq 7 \end{cases}$. A seguir, dê o domínio e a imagem desta função.

Para $x \geq 7$, temos que: $f(x) = \frac{1}{x-8}$



Exemplo.

Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 2, \text{ se } x \leq -1 \\ 1 - |x|, \text{ se } -1 < x < 2 \\ -2 + \sqrt{x-2}, \text{ se } 2 < x < 6 \\ \frac{1}{x-8}, \text{ se } x \geq 7 \end{cases}$. A seguir, dê o domínio e a imagem desta função.