AULA 02 - TEORIA DOS ERROS

TIPOS DE ERROS

1- INCERTEZA DOS DADOS: CAUSADO POR ERROS NOS DADOS DE ENTRADA.

EQ. QUEDA LIVRE

$$h = h_0 + v_0 . t + \frac{1}{2} g t^2$$

CONSIDERE:

$g = 10 \, m/s^2$

$h_0 = 0 \, m$

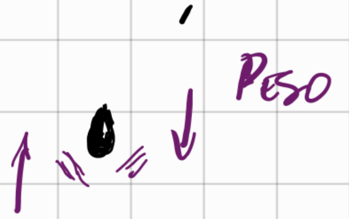
$V_0 = 0 \, m/s$

CALCULE h PARA $t_1 = 4s$ e $t_2 = 4{,}25s$

ERRO DE 6,25%

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{2} . 10 . 4^2 = 80m \\ h_2 &= \frac{1}{2} . 10 . (4{,}25)^2 = 90{,}3 \, m \end{aligned}\right\} \text{ERRO DE } 12{,}9\%$$

2. MODELO MATEMÁTICO: CAUSADO POR SIMPLIFICAÇÕES E OU GENERALIZAÇÕES



F_{at} = FORÇA DE RESISTÊNCIA DO AR

QUANDO $\vec{P} = F_{at} \rightarrow F_R = 0N$

SE $F_R = 0 \rightarrow a = 0 \, m/s^2$

LOGO, SE $a = 0 \rightarrow V = cte$

VELOCIDADE LIMITE

$F_R = K . V^2$

$V = V_0 + g . t$ NÃO EXPRESSA A REALIDADE.

3. ERROS DE ARREDONDAMENTO. RELACIONADO ÀS LIMITAÇÕES EXISTENTES NA FORMA DE REPRESENTAR NÚMEROS EM COMPUTADORES E CALCULADORAS...

ACELERAÇÃO DA GRAVIDADE NA LINHA DO EQUADOR A NÍVEL DO MAR: $g = 9{,}7803 \ m/s^2$

g: VARIA DE ACORDO COM LATITUDE E ALTITUDE.

3.1. REGRAS DE ARREDONDAMENTO

i) SE O ALGARISMO QUE VEM DEPOIS DA ÚLTIMA CASA DECIMAL A SER CONSIDERADA FOR MENOR QUE 5, O ÚLTIMO ALGARISMO DE INTERESSE É MANTIDO.

ii) ... SE FOR MAIOR QUE 5, O ÚLTIMO ALGARISMO DE INTERESSE É ACRESCIDO EM UMA UNIDADE.

iii) ... SE FOR IGUAL A 5:
- SEGUIDO DE ZEROS: ARREDONDAR PARA O PAR MAIS PRÓXIMO
- SEGUIDO DE nºs DIFERENTES DE ZERO: O ÚLTIMO ALGARISMO DE INTERESSE É ACRESCIDO EM UMA UNIDADE.

EX. $x = 1,2507815690...$

ARREDONDAR C/ 4 CASAS DECIMAIS APÓS A VÍRGULA $x = 1,2508$

- - - - - - - C/ 5 CASAS - - - - - - - - - APÓS A VÍRGULA $x = 1,25078$

EX. $x = 23,013500000...$

ARREDONDAR C/ 3 CASA DECIMAIS APÓS A VÍRGULA $x = 23,014$

4. ERROS DE TRUNCAMENTO: SURGEM QUANDO APROXIMAMOS UM CONCEITO MATEMÁTICO FORMADO POR UMA SEQUÊNCIA MATEMÁTICA INFINITA DE PASSOS POR UM PROCEDIMENTO FINITO.

$$e^x = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}_{\text{SÉRIE DE MACLAURIN}} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots$$

EX. CALCULAR UMA APROXIMAÇÃO PARA e^3 TRUNCANDO A SÉRIE NO 6° TERMO COM 5 CASAS DECIMAIS APÓS A VÍRGULA

$$e^3 \simeq 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!}$$

$$e^3 = 1,00000 + 3,00000 + 4,50000 + \ldots$$
$$4,50000 + 3,37500 + 2,02500$$

$$e^3 \simeq 18,40000$$ SE $e^3 = 20,085536923\ldots$

ENTÃO: ERRO = 8.4%

COMO QUANTIFICAR O ERRO?

ERRO ABSOLUTO

$$E_A = |x - \bar{x}|$$

VALOR EXATO VALOR APROXIMADO

ERRO RELATIVO $$E_R = \frac{|x - \bar{x}|}{|x|} \times 100 = W\%$$

VANTAGEM: ADIMENSIONAL

EX: CALCULE O ERRO ABSOLUTO E RELATIVO NOS SEGUINTES CASOS

$x_1 = 2196,25$ $\bar{x}_1 = 2164,18$

$$E_A = 32,07$$
$$E_R = \frac{32,07}{2196,25} \times 100 = 1,46\%$$

$x_2 = 0,9650$ $\bar{x}_2 = 0,9132$

$$E_A = 0,0518$$
$$E_R = \frac{0,0518}{0,9650} \times 100 = 5,37\%$$

NORMA: FORMA DE EXPRESSAR A MAGNITUDE DE UM VETOR

$$\|\vec{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$$

x = VETOR

NORMA EUCLIDIANA $p=2$

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

NORMA INFINITA

$$\|\vec{x}\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

USANDO NORMA VETORIAL PARA CALCULAR ERROS.

$$E_A = \|x - \bar{x}\|_p$$

$$E_R = \frac{\|x - \bar{x}\|_p}{\|x\|_p}$$

EX: se $V_1 = \begin{bmatrix} 2{,}15 \\ 4{,}18 \\ 1{,}06 \end{bmatrix}$ e $\bar{V_1} = \begin{bmatrix} 2{,}10 \\ 4{,}02 \\ 2{,}20 \end{bmatrix}$

CALCULE O ERRO ABSOLUTO E RELATIVO USANDO NORMA EUCLIDIANA E INFINITA

$$|V_1 - \bar{V}_1| = \begin{bmatrix} 0{,}05 \\ 0{,}16 \\ 0{,}14 \end{bmatrix}$$

NORMA EUCLIDIANA

$$EA = \| V_1 - \bar{V}_1 \|_2 = \sqrt{0{,}05^2 + 0{,}16^2 + 0{,}14^2}$$

$$EA = 0{,}21840\ldots = 0{,}22$$

$$ER = \frac{\| V_1 - \bar{V}_1 \|_2}{\| V_1 \|_2} = ?$$

$$\| V_1 \|_2 = 4{,}8185578\ldots = 4{,}82$$

ASSIM $ER = \dfrac{0{,}21840\ldots}{4{,}81855\ldots} = 4{,}53\%$

PARA NORMA INFINITA

$$EA = \| V_1 - \bar{V}_1 \|_\infty = 0{,}16$$

SE $\| V_1 \|_\infty = 4{,}18$ $\quad ER = \dfrac{0{,}16}{4{,}18} = 3{,}83\%$

EFEITOS NUMÉRICOS

1 CANCELAMENTO: ACONTECE QUANDO DOIS NÚMEROS APROXIMADAMENTE IGUAIS SÃO SUBTRAÍDOS

EX
$$\begin{cases} 0{,}003x_1 + 30x_2 = 5{,}001 & (1) \\ 1x_1 + 4x_2 = 1 \quad (\times -0{,}003) & (2) \end{cases}$$

$$29{,}988x_2 = 4{,}998$$

$$x_2 = 0{,}16666\ldots$$

$$\boxed{x_2 = 0{,}167}$$

SUBSTITUINDO EM 1

$$0{,}003x_1 + 30 \cdot \underbrace{x_2}_{0{,}167} = 5{,}001$$

$$\boxed{x_1 = 3}$$

SUBSTITUINDO EM 2

$$1x_1 + 4 \cdot \underbrace{x_2}_{0{,}167} = 1$$

$$\boxed{x_1 = 0{,}332}$$

OBS: A SOLUÇÃO EXATA PARA O SISTEMA É

$$x_1 = 1/3$$

$$x_2 = \frac{1}{6}$$

2. MAL CONDICIONAMENTO: SE PEQUENAS VARIAÇÕES NOS DADOS DE ENTRADA PRODUZIREM GRANDES VARIAÇÕES NOS RESULTADOS, DIZEMOS QUE O PROBLEMA É MAL CONDICIONADO.

EX: CONSIDERE O SISTEMA LINEAR $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 0{,}98 \end{pmatrix} \quad e \quad b = \begin{pmatrix} 1{,}99 \\ 1{,}97 \end{pmatrix}$$

NESTE CASO A SOLUÇÃO É: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

NO ENTANTO, SE $b = \begin{pmatrix} 1{,}99 \\ 1{,}98 \end{pmatrix}$ ENTÃO:

$$x = \begin{pmatrix} 100 \\ -99 \end{pmatrix}$$

3. INSTABILIDADE NUMÉRICA: OCORRE QUANDO ERROS DE TRUNCAMENTO, ARREDONDAMENTO OU INSTABILIDADE NO MÉTODO NUMÉRICO TORNAM-SE SIGNIFICATIVOS AO LONGO DAS ITERAÇÕES