Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Aplicações de Derivadas Parciais:
taxas relacionadas
plano tangente a uma superfície

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 do dia 06 de novembro de 2024.

UDESC

Derivadas Parciais de Funções Compostas

- Em CDI-1, a derivada de uma composição entre funções reais de uma única variável real, digamos $g(x) = f(u(x))$, é dada por

$$g'(x) = f'\big(u(x)\big) \cdot u'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

- Vamos generalizar essa ideia para as derivadas parciais de compostas entre funções reais de duas (ou mais) variáveis reais.
- Note que, em CDI-2, tanto a função “de fora” quanto a função “de dentro” da composição podem depender de duas variáveis reais! Por isso, consideraremos que

$$f = f(u,v) \quad \text{com} \quad u = u(x,y) \quad \text{e} \quad v = v(x,y)$$

para formar a função composta

$$f(x,y) = f\big(u(x,y), v(x,y)\big).$$

- Para obter as derivadas parciais de tal função composta, temos um teorema:

A Regra da Cadeia para funções compostas

Teorema: Derivadas Parciais de Funções Compostas

Se $f = f(u, v)$ é uma função diferenciável, com $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ funções diferenciáveis , então:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

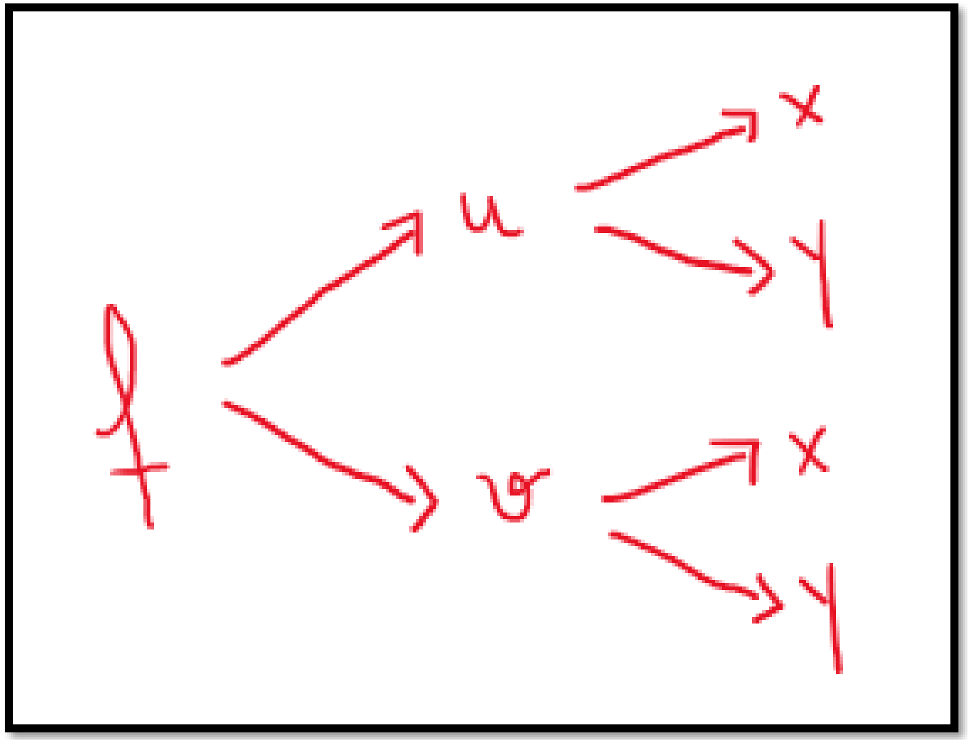
e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

- Veja que as expressões dadas pelo teorema correspondem, em cada parcela, à derivada parcial da função "de fora" f, multiplicada pela derivada parcial da função "de dentro" (ou u ou v).
- Como temos duas funções "dentro de f", precisamos usar esse procedimento duas vezes e somar tais parcelas.
- Essa é uma generalização natural da Regra da Cadeia estudada em CDI-1!

Diagrama para a Regra da Cadeia

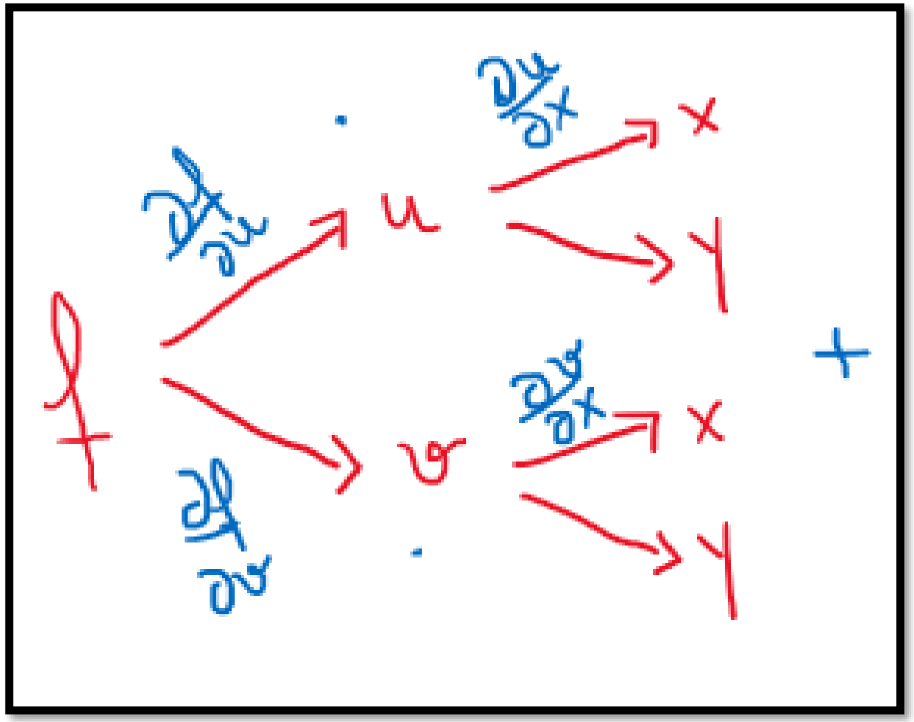
- Fica simples entender as expressões do Teorema por meio de um diagrama, em que estabelecemos a dependência entre as variáveis de f:



- Chamamos esse diagrama de "Diagrama em árvore de f".
- Veja que o diagrama estabelece uma dependência intermediária de f em termos de u e v, que por sua vez, dependem de x e y.
- Para interpretar o diagrama, veja que há dois "ramos" que ligam f às variáveis independentes x e y.

Diagrama para a Regra da Cadeia

- Assim, para calcular (por exemplo) a derivada parcial de f em relação a x, precisamos derivar parcialmente seguindo cada um dos ramos que ligam f a x.
- As derivadas parciais obtidas por ramos distintos devem ser somadas.
- E seguindo um mesmo ramo, as derivadas parciais devem ser multiplicadas, e calculadas de forma que, cada função situada à esquerda seja derivada em relação à variável situada à sua direita:



- Além disso, para calcular a derivada parcial de f em relação a u, basta considerar v como constante. Da mesma forma, para obter $\frac{\partial f}{\partial v}$ basta tomar u como constante.

Diagrama para a Regra da Cadeia

- O Teorema anterior pode ser facilmente generalizado para funções de três ou mais variáveis.
- Nesses casos, basta adaptar o diagrama em árvore para as funções envolvidas, usando tantos ramos quanto necessários.

Exercício 1) Considere a função

$$f(u, v, w) = u^5 v^7 w^4 + \cos(u^2 v^3 w)$$

em que

$$u = u(x, y) = x^3 \operatorname{sen}(3y) - xy^2$$

$$v = v(x, y, z) = x^6 y^2 + 3x - 2y$$

$$w = w(x, y, z) = x^2 \sqrt{y} + e^{3xy}$$

Determine as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Taxas Relacionadas

A regra da cadeia é útil para resolvermos problemas que envolvem relações entre taxas de variação de diferentes grandezas. Em geral, tais problemas envolvem a variação da grandeza em relação ao tempo. Vejamos exemplos:

Exercício 2) Em um circuito elétrico, a corrente I é dada em função da força eletromotriz V, da resistência R e da indutância L por

$$I = \frac{V}{\sqrt{7R^2 + 16L^2}}$$

Suponha que, em certo instante, V é igual a 216 *volts*, R é igual a 4 *ohms* e L é igual a 3 *henrys*.

Nesse mesmo instante, R **decresce** a uma taxa de 0,1 *ohms* por *segundo* e L **aumenta** a uma razão de 0,25 *henrys* por *segundo.*

Se, nesse mesmo instante, a voltagem **aumentar** a uma razão de $0{,}5$ $volts$ por segundo, qual será a variação na corrente desse circuito?

Taxas Relacionadas

Exercício 3) Suponha que altura e o raio de cone circular reto variam em relação ao tempo. Em certo instante, a altura é igual a 15 cm e o raio igual a 3 cm.

a) Determine e interprete a expressão que define a variação para o volume desse cone.

b) Determine a taxa de variação do volume do cone no instante em que a altura está aumentando a uma razão de 0,4 cm por segundo e o raio está diminuindo à taxa de 0,4 cm por segundo.

c) Se o raio aumentar a uma razão de 0,3 cm por segundo, que variação a altura do cone deve sofrer para que o seu volume não se altere?

Interpretação Geométrica das Derivadas Parciais

- Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais.
- Considere S a superfície que representa o gráfico de f, dada por

$$z = f(x, y).$$

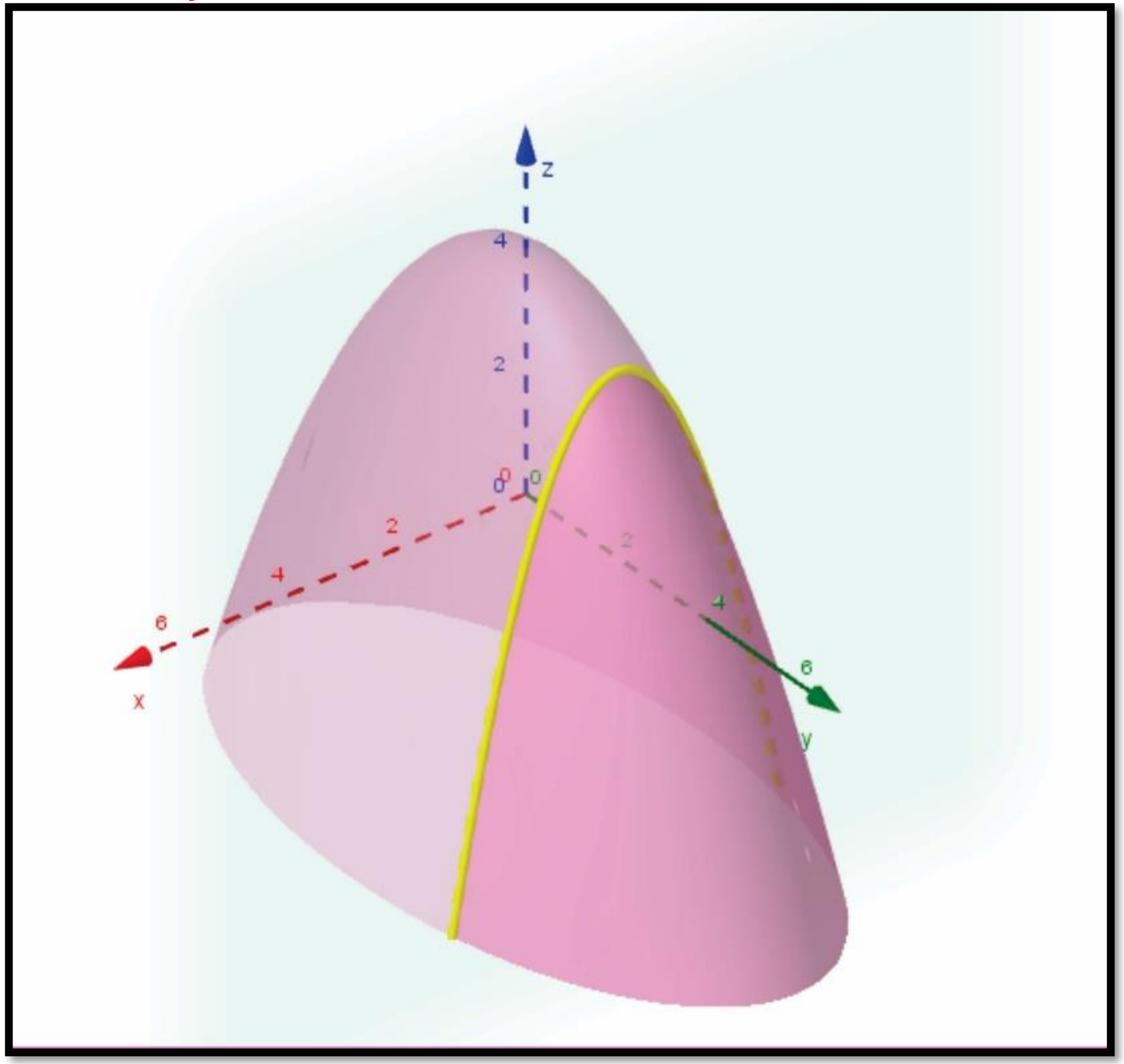
- Seja $P(x_0, y_0, z_0) \in S$, ou seja, tal que

$$z_0 = f(x_0, y_0).$$

- Questão:

Qual a equação do plano que é tangente

à superfície S em P?



Interpretação Geométrica das Derivadas Parciais

- Fazendo $y = y_0$, obtemos uma curva $C_1 \subset S$ dada por

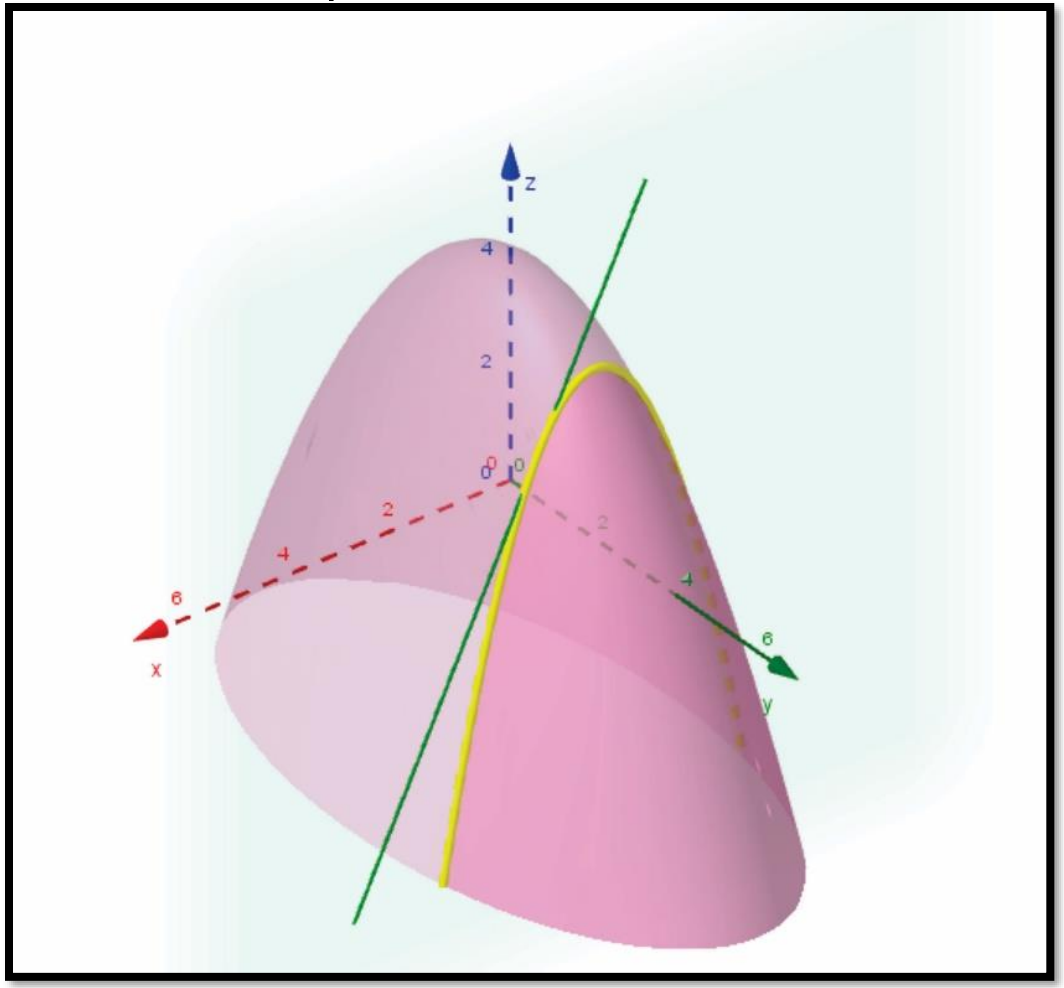
$$C_1 : \begin{cases} z(x) = f(x, y_0) \\ y = y_0 \end{cases} \quad \text{tal que } P \in C_1.$$

O coeficiente angular da reta que é tangente a C_1 em P é dado por

$$z'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

A equação dessa reta tangente é dada por

$$\boldsymbol{t_1} : \begin{cases} z - z_0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).(x - x_0) \\ \\ y = y_0 \end{cases}$$



O vetor diretor dessa reta tangente é dado por

$$\overrightarrow{b_1} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right).$$

Interpretação Geométrica das Derivadas Parciais

- Analogamente, fazendo $x = x_0$, obtemos uma curva $C_2 \subset S$ dada por

$$C_2: \begin{cases} x = x_0 \\ z(y) = f(x_0, y) \end{cases} \quad \text{tal que } P \in C_2.$$

- O coeficiente angular da reta que é tangente a C_2 em P é

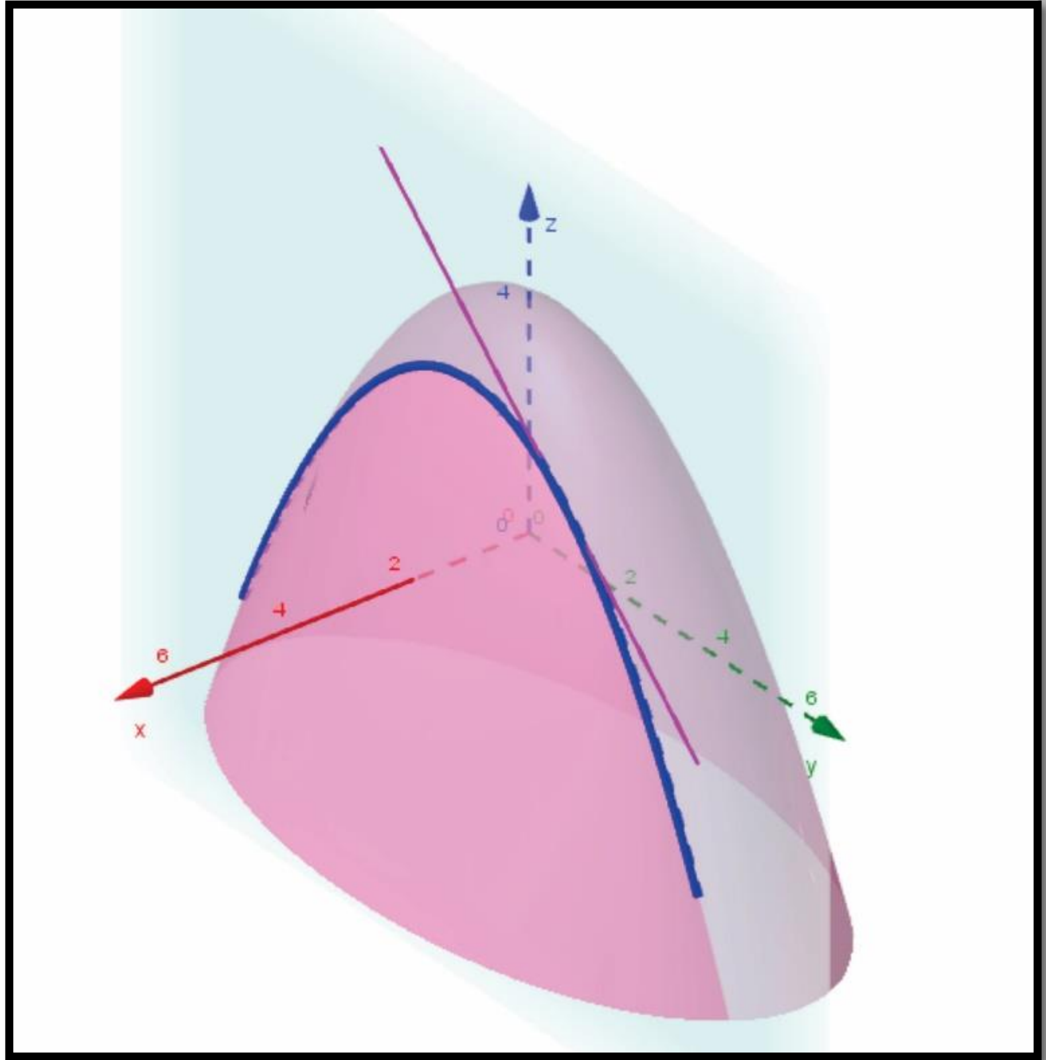
$$z'(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

E equação dessa reta tangente é dada por

$$\boldsymbol{t_2}: \begin{cases} x = x_0 \\ z - z_0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).(y - y_0) \end{cases}$$

O vetor diretor dessa reta tangente é dado por

$$\overrightarrow{b_2} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right).$$



Determinando a equação do Plano Tangente

- Como os vetores diretores $\overrightarrow{b_1} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)$ e $\overrightarrow{b_2} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$ são

não colineares (linearmente independentes), eles determinam (geram) um único plano que passa por P.

- Tal plano é chamado de "Plano Tangente a S em $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$".

- O vetor normal a esse plano é

$$\vec{n} = \overrightarrow{b_1} \times \overrightarrow{b_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1\right).$$

- Portanto, a equação geral do plano tangente a S em P é dada por

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).y + 1.z + d = 0$$

em que $d \in \mathbb{R}$ é calculado sabendo que $P\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$ pertence a tal plano tangente.

Exemplos

Exercício 4) Determine a equação do plano que é tangente à superfície

$$-x^3y^2 + 7x^2y - 2xy - 4z + 8 = 0$$

no ponto $P(-2, -3, -4)$.

Exercício 5) Encontre todos os pontos pertencentes à superfície $z = 5x^2 - 7y^2$ nos quais o seu plano tangente é paralelo ao plano

$$40x - 21y + 3z = 6.$$

Exemplos Resolvidos

Exemplo 1) Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função

$$f(x,y) = \cos(xy) \cdot \ln(x^2 + y^2 + 1).$$

Solução: Tomando y como constante e utilizando a regra do produto, obtemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(xy).\,y \cdot \ln(x^2 + y^2 + 1) + \cos(xy)\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Tomando x como constante, obtemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(xy)x \cdot \ln(x^2 + y^2 + 1) + \cos(xy)\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Agora, note que, se reescrevermos f como

$$f(u,v) = \cos(u) \cdot \ln(v)$$

considerando $u(x,y) = xy$ e $v(x,y) = x^2 + y^2 + 1$, as derivadas parciais de f podem ser escritas, a partir da regra do produto, como:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(u).\ln(v).\,y + \cos(u).\frac{1}{v}.\,2x = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(u).\ln(v).\,x + \cos(u)\frac{1}{v}.\,2y = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

Exemplos Resolvidos

Exemplo 2) Considere a função

$$f = f(u, v, w) = u^2v^3w + \sin(uvw)$$

onde

$$u = u(x, y, z) = x^2\cos(y^2z) - y^3e^{xz}$$

$$v = v(x, y, z) = x^4yz + e^{2xyz}$$

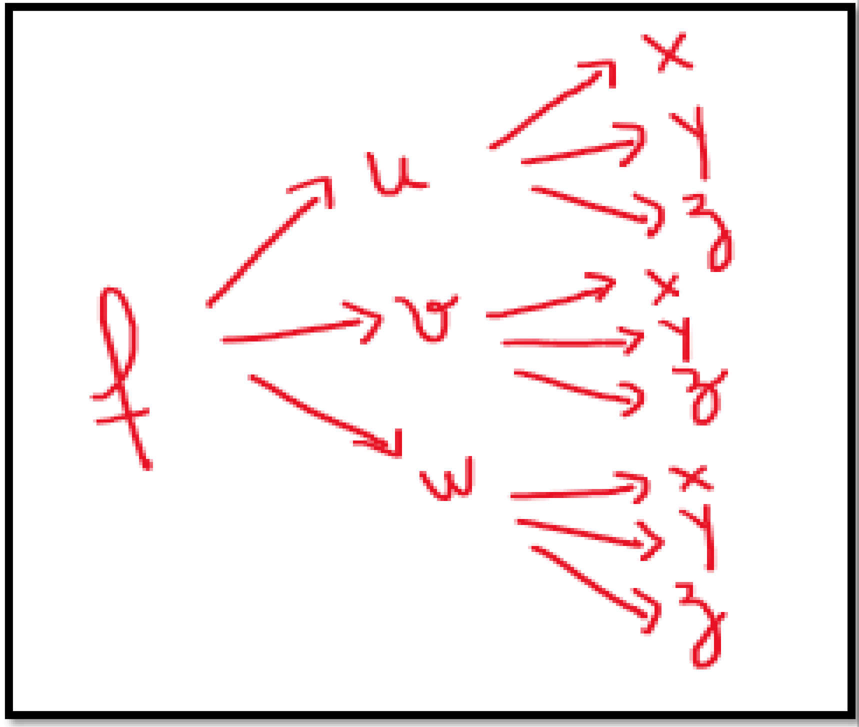
$$w = w(x, y, z) = x^3y^7z + 3xyz$$

Determine as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Solução: Veja que poderíamos substituir as expressões de u, v e w em f, mas a expressão obtida seria muito grande e seria fácil errar as derivadas.

Exemplos Resolvidos

- Em vez disso, vamos organizar as derivadas usando o diagrama em árvore para f:



- Interpretando o diagrama, vemos que temos três ramos que ligam f a x. Logo, obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} . \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} . \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} . \frac{\partial w}{\partial x}$$

Calculando cada uma das derivadas parciais, obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2uv^3w + vw.\cos(uvw)).(2x\cos(y^2z) - y^3ze^{xz})$$

$$+(3u^2v^2w + uw.\cos(uvw)).(4x^3yz + 2yze^{2xyz})$$

$$+(u^2v^3 + uv.\cos(uvw)).(3x^2y^7z + 3yz).$$

Exemplos Resolvidos

Seguindo a mesma lógica para a derivada parcial em relação a y, obtemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

Calculando as derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2uv^3w + vw.\cos(uvw)).(2x^2yz\,sin(y^2z) - 3y^2e^{xz})$$

$$+ (3u^2v^2w + uw.\cos(uvw)).(x^4z + 2xze^{2xyz})$$

$$+ (u^2v^3 + uv.\cos(uvw)).(7x^3y^6z + 3xz).$$

Da mesma forma, para a derivada parcial em relação a z, obtemos que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial z}$$

cujas derivadas são deixadas como exercício.

Exemplos Resolvidos

Exemplo 3) Seja f uma função diferenciável qualquer e considere

$$g(x,y,z) = x^{13} f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{z}, \frac{z}{x}\right).$$

Verifique se g satisfaz a equação diferencial parcial $x\dfrac{\partial g}{\partial x} + y\dfrac{\partial g}{\partial y} + z\dfrac{\partial g}{\partial z} = 13g$.

Solução: Note que g é um produto de uma função polinomial (x^{13}) por uma função composta genérica. Vamos organizar essa composição, definindo novas funções intermediárias, dadas por

$$u = u(x,y) = \frac{y}{x} \qquad v = v(x,z) = \frac{x}{z} \qquad w = w(x,z) = \frac{z}{x}.$$

Com isso, temos que

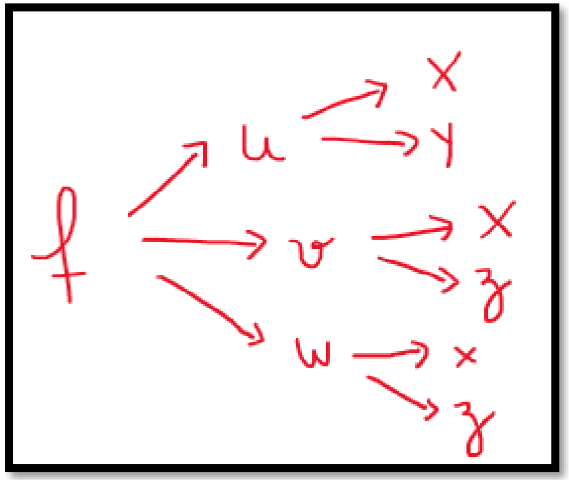
$$g = x^{13} f(u,v,w).$$

Essa expressão facilita o cálculo das derivadas parciais de g. Note que para derivá-la em relação a x, precisamos usar a regra do produto para obter que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 13x^{12} f + x^{13}\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Ainda não calculamos a derivada parcial de f. Para fazer isso, construímos o seu diagrama:

Exemplos Resolvidos



Interpretando o diagrama, vemos três ramos que dependem de x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{-y}{x^2} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{1}{z} + \frac{\partial f}{\partial w}.\frac{-z}{x^2}$$

Deixamos as derivadas parciais de f indicadas, pois não a conhecemos. Assim, temos que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 13x^{12}f + x^{13}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} = 13x^{12}f + x^{13}\left(\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{-y}{x^2} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{1}{z} + \frac{\partial f}{\partial w}.\frac{-z}{x^2}\right)$$

$$= 13x^{12}f - yx^{11}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{x^{13}}{z}\frac{\partial f}{\partial v} - zx^{11}\frac{\partial f}{\partial w}.$$

Agora, para derivar parcialmente g em relação a y, veja que não precisamos usar a regra do produto (pois x^{13} é uma constante em relação à y). Além disso, pelo diagrama de f, vemos que temos um único ramo que liga f a y. Assim:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x^{13}\frac{\partial f}{\partial y} = x^{13}\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y} = x^{13}\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{1}{x} = x^{12}\frac{\partial f}{\partial u}.$$

Exemplos Resolvidos

Por fim, para derivar parcialmente g em relação a z, também não precisamos usar a regra do produto. E pelo diagrama de f, vemos que temos dois ramos que ligam f a z. Assim:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = x^{13}\frac{\partial f}{\partial z} = x^{13}\left(\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}.\frac{\partial w}{\partial z}\right) = x^{13}\left(\frac{\partial f}{\partial v}.\frac{-x}{z^2} + \frac{\partial f}{\partial w}.\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{-x^{14}}{z^2}\frac{\partial f}{\partial v} + x^{12}\frac{\partial f}{\partial w}.$$

Substituindo as derivadas parciais de g na equação que desejamos verificar, obtemos que

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} + z\frac{\partial g}{\partial z} = x.\left(13x^{12}f - yx^{11}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{x^{13}}{z}\frac{\partial f}{\partial v} - zx^{11}\frac{\partial f}{\partial w}\right) + y.x^{12}\frac{\partial f}{\partial u} +$$

$$+z\left(\frac{-x^{14}}{z^2}\frac{\partial f}{\partial v} + x^{12}\frac{\partial f}{\partial w}\right) =$$

$$= 13x^{13}f - yx^{12}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{x^{14}}{z}\frac{\partial f}{\partial v} - zx^{12}\frac{\partial f}{\partial w} + yx^{12}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{-x^{14}}{z}\frac{\partial f}{\partial v} + zx^{12}\frac{\partial f}{\partial w}$$

$$= 13x^{13}f + 0 = 13g.$$

Portanto, g satisfaz a equação diferencial indicada!

Exemplos Resolvidos

A regra da cadeia é útil para resolvermos problemas que envolvem relações entre taxas de variação de diferentes grandezas. Em geral, tais problemas envolvem a variação da grandeza em relação ao tempo. Vejamos exemplos:

Exemplo 4) Um circuito elétrico simples consiste em um resistor R e uma força eletromotriz V. Em certo instante, V é igual a 80 $volts$ e está **decrescendo** a uma taxa de 5 $volts\ por\ minuto$, enquanto R é igual a $40\ ohms$ e está **crescendo** a uma razão de $2\ ohms\ por\ minuto$. Determine a variação da corrente nesse instante, sabendo que a corrente I desse circuito é dada por

$$I = \frac{V}{R}.$$

Solução: Note que a resistência e a força eletromotriz dependem apenas do tempo, enquanto a corrente depende de duas variáveis (V e R).
Interpretando os dados (e desprezando suas unidades) do enunciado, temos que

$$V = 80 \qquad R = 40$$

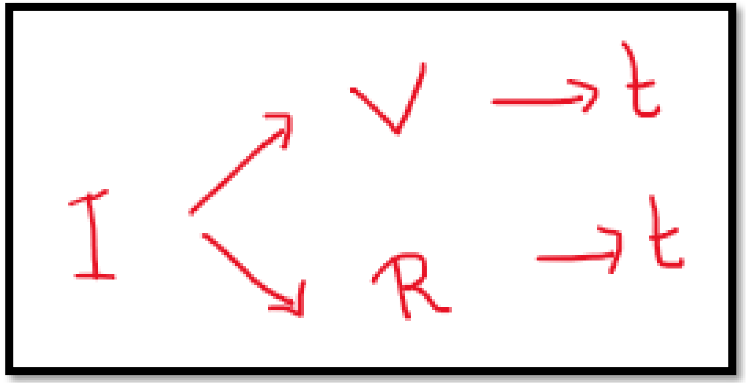
$$\frac{dV}{dt} = -5 \qquad \frac{dR}{dt} = +2.$$

Exemplos Resolvidos

Note que o sinal da derivada indica se a grandeza está crescendo (quando positivo) ou decrescendo (quando negativo).

Para obter a variação da corrente no instante considerado, basta calcular $\frac{dI}{dt}$.

Como a variação das grandezas estão relacionadas, montamos o diagrama para I, em relação ao tempo t:



Portanto, obtemos, pela regra da cadeia, que:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial V} . \frac{dV}{dt} + \frac{\partial I}{\partial R} . \frac{dR}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dV}{dt} - \frac{V}{R^2}\frac{dV}{dt}$$

$$= \frac{1}{40} . -5 - \frac{80}{40^2} . 2 = \frac{-1}{8} - \frac{1}{10} = \frac{-9}{40}.$$

Com isso, a corrente está decrescendo a uma taxa de 0,225 amperes por minuto.

Exemplos Resolvidos

Exemplo 5) A altura e o raio de cone reto variam em relação ao tempo. Em certo instante, a altura é igual a 10 cm e o raio igual a 5 cm.

a) Determine e interprete a expressão que define a variação para o volume desse cone.

b) Determine a taxa de variação do volume do cone no instante em que a altura está aumentando a uma razão de 0,5 cm por segundo e o raio está diminuindo à taxa de 0,3 cm por segundo.

c) Se o raio aumentar a uma razão de 0,7 cm por segundo, que variação a altura do cone deve sofrer para que o seu volume não se altere?

d) O que ocorreria com a variação do cone caso a sua altura fosse igual a 5 cm e o raio igual a 12 cm? Interprete a expressão obtida.

Solução: A altura h e o raio r do cone dependem apenas do tempo t, enquanto o volume

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

depende de duas variáveis (h e r). Interpretando os dados (e desprezando suas unidades) do enunciado, temos que

$$h = 10 \qquad r = 5.$$

Exemplos Resolvidos

a) Para obter a variação do volume do cone, basta calcular $\frac{dV}{dt}$.

Como a variação das grandezas estão relacionadas, montamos o diagrama para V, em relação ao tempo t:

$$\begin{tikzcd} & h \arrow[r] & t \\ V \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & r \arrow[r] & t \end{tikzcd}$$

Portanto, pela regra da cadeia:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial h}.\frac{dh}{dt} + \frac{\partial V}{\partial r}.\frac{dr}{dt} = \frac{\pi r^2}{3}\frac{dh}{dt} + \frac{2\pi r h}{3}\frac{dr}{dt}$$

$$= \frac{\pi 5^2}{3}\frac{dh}{dt} + \frac{2\pi 5.10}{3}\frac{dr}{dt} = \frac{25\pi}{3}\frac{dh}{dt} + \frac{100\pi}{3}\frac{dr}{dt}$$

$$= \frac{25\pi}{3}\frac{dh}{dt} + \frac{4.25\pi}{3}\frac{dr}{dt}.$$

E interpretando essa expressão vemos que o volume do cone é quatro vezes mais sensível à variações no raio do cone do que à mesmas variações na altura.

Exemplos Resolvidos

b) Interpretando o enunciado, obtemos que $\dfrac{dh}{dt} = +0{,}5$ e $\dfrac{dr}{dt} = -0{,}3.$
Logo a variação no volume é dada por

$$\frac{dV}{dt} = \frac{25\pi}{3}\frac{dh}{dt} + \frac{100\pi}{3}\frac{dr}{dt} = \frac{25\pi}{3}0{,}5 + \frac{100\pi}{3}(-0{,}3) = \frac{-35\pi}{6}.$$

Que significa que o volume do cone está decrescendo à taxa de $\frac{35\pi}{6}$ centímetros cúbicos por segundo.

c) Interpretando o enunciado, queremos obter $\frac{dh}{dt}$ quando $\frac{dr}{dt} = +0{,}7$ e de tal forma que o volume do cone não se altere.

Quando o volume não se altera, ele permanece constante em relação ao tempo e, com isso, temos que $\frac{dV}{dt} = 0$. Portanto, substituindo na expressão obtida no item a, obtemos

$$0 = \frac{25\pi}{3}\frac{dh}{dt} + \frac{100\pi}{3}0{,}7 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dh}{dt} = -2{,}8\,.$$

Portanto, a altura deve diminuir à razão de 2,8 centímetros por segundo.

Exemplos Resolvidos

d) Se $h = 5$ cm e $r = 12$ cm, então a variação do seu volume é dada por

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial h}.\frac{dh}{dt} + \frac{\partial V}{\partial r}.\frac{dr}{dt} = \frac{\pi r^2}{3}\frac{dh}{dt} + \frac{2\pi rh}{3}\frac{dr}{dt}$$

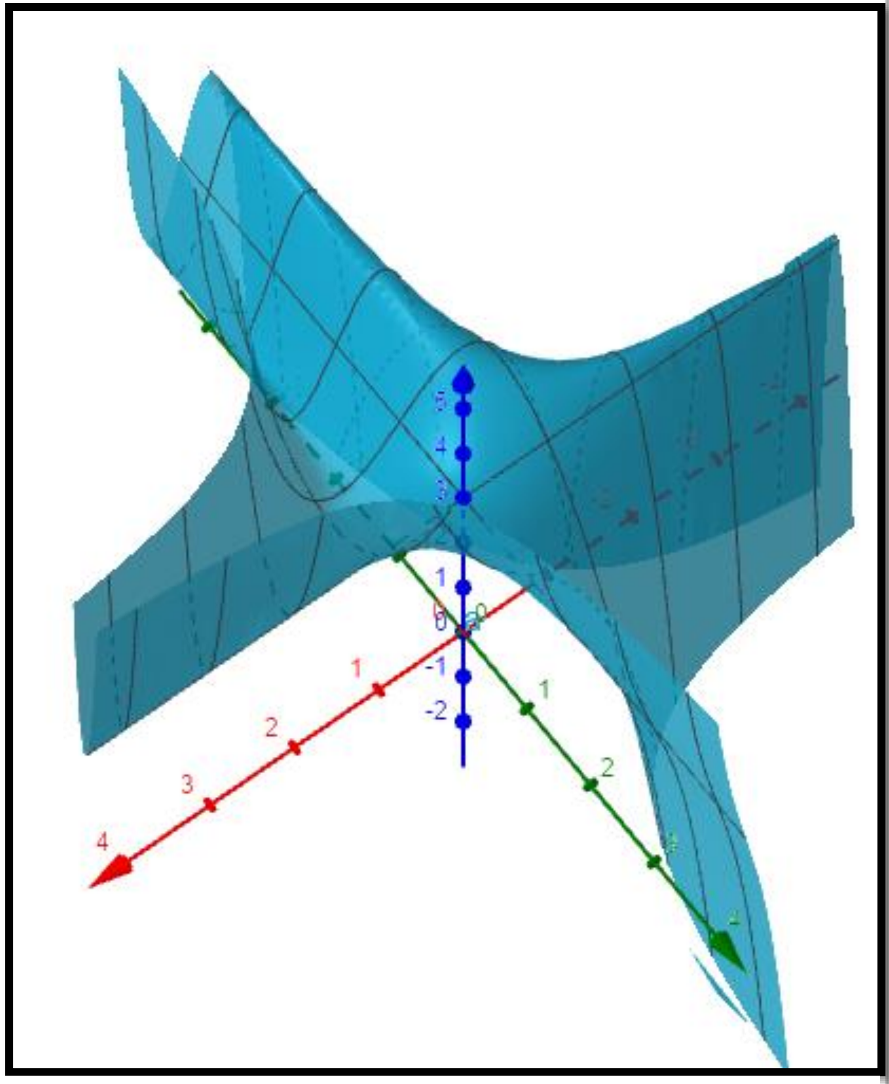
$$= \frac{\pi 12^2}{3}\frac{dh}{dt} + \frac{2\pi 12.5}{3}\frac{dr}{dt} = \frac{144\pi}{3}\frac{dh}{dt} + \frac{120\pi}{3}\frac{dr}{dt}.$$

Interpretando essa expressão, vemos que o volume do cone passaria a ser 1,2 vezes mais sensível à variações em sua altura do que a mesmas variações no seu raio.

Exemplo 6) Determine a equação do plano que é tangente à superfície

$$2x^3y^2 + 3xy - 2z + 6 = 0$$

no ponto $P(-1, 2, -4)$.



Solução: Precisamos determinar $f(x, y)$. Temos que

$$f(x, y) = z = \frac{2x^3y^2 + 3xy + 6.}{2}$$

As derivadas parciais de f são

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{6x^2y^2 + 3y}{2}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4x^3y + 3x}{2}$$

Aplicando em $(x_0, y_0) = (-1,2)$ obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = \frac{6(-1)^2 2^2 + 3.2}{2} = \frac{30}{2} = 15 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = \frac{4(-1)^3 2 + 3.(-1)}{2} = \frac{-11}{2}$$

Exemplos Resolvidos

Portanto a equação do plano tangente desejado é dada por

$$-15x - \left(\frac{-11}{2}\right)y + z + d = 0$$

Como o ponto de tangência $P(-1, 2, -4)$ pertence ao plano, obtemos que

$$-15.(-1) + \frac{11}{2}.2 + (-4) + d = 0$$

Ou seja

$$d = -15 - 11 + 4 =$$

Portanto, a equação do plano tangente é

$$-15x + \frac{11}{2}y + z - 22 = 0$$

Ou seja

$$-30x + 11y + 2z = 44.$$

Exemplos Resolvidos

Exemplo 7) Encontre todos os pontos da superfície $z = 5x^2 - 2y^2$ nos quais o seu plano tangente é paralelo ao plano

$$8x - 2y + \frac{1}{3}z = 1.$$

Solução: Seja $f(x, y) = z = 5x^2 - 2y^2$. Queremos obter $P(x_0, y_0, z_0)$ tal que

$$z_0 = f(x_0, y_0) = 5(x_0)^2 - 2(y_0)^2$$

e de tal maneira que o plano tangente ao gráfico de f em P seja paralelo ao plano dado.

Sabemos que dois planos são paralelos se e somente se seus vetores normais forem paralelos. O normal ao plano dado é

$$n_1 = \left(8, -2, \frac{1}{3}\right)$$

e o normal ao plano tangente de f em P é

$$n_2 = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1\right).$$

Queremos que

$$n_2 = c . n_1 \qquad \text{com } c \in \mathbb{R}.$$

Exemplos Resolvidos

Como $f(x,y) = 5x^2 - 2y^2$ temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 10x_0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -4y_0$$

Assim

$$n_2 = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1\right) = (-10x_0, 4y_0, 1).$$

Então

$$n_2 = c.n_1 \qquad \Rightarrow \qquad (-10x_0, 4y_0, 1) = c\left(8, -2, \frac{1}{3}\right)$$

fornece

$$\begin{cases} -10x_0 = 8c \\ 4y_0 = -2c \\ 1 = \frac{1}{3}c \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad y_0 = \frac{-1}{2}c = \frac{-3}{2} \qquad x_0 = \frac{-4}{5}c = \frac{-12}{5}$$

$$c = 3$$

Exemplos Resolvidos

Portanto

$$x_0 = \frac{-12}{5} \qquad e \qquad y_0 = \frac{-3}{2}$$

Ainda precisamos obter z_0. Como

$$z_0 = 5(x_0)^2 - 2(y_0)^2$$

temos que

$$z_0 = 5\left(\frac{-12}{5}\right)^2 - 2\left(\frac{-3}{2}\right)^2$$

$$= 5.\frac{144}{25} - 2.\frac{9}{4}$$

$$= \frac{144}{5} - \frac{9}{2} = \frac{243}{10}$$

Portanto, obtemos somente um ponto que satisfaz a condição desejada, dado por

$$P\left(\frac{-12}{5}, \frac{-3}{2}, \frac{243}{10}\right).$$

Exemplos Resolvidos

Exemplo 8) Considere S como a superfície $z = 2x^2 + 2y^2$. Determine um ponto $P \in S$ de tal forma que o plano tangente a S em P contenha os pontos $A(1,1,-1)$ e $B(-1,1,1)$.

Solução: Temos que S é o gráfico de $f(x,y) = z = 2x^2 + 2y^2$.

Note que

$$A(1,1,-1) \notin S \qquad \text{pois} \qquad 2.1^2 + 2.1^2 = 4 \neq -1.$$

$$B(-1,1,1) \notin S \qquad \text{pois} \qquad 2.(-1)^2 + 2.1^2 = 4 \neq 1.$$

Seja $P(x_0, y_0, z_0) \in S$ o ponto de tangência desejado. Logo

$$z_0 = f(x_0, y_0) = 2{x_0}^2 + 2{y_0}^2$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 4x_0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 4y_0$$

O plano tangente a S em P é dado por

$$-4x_0 x - 4y_0 y + z + d = 0.$$

Exemplos Resolvidos

Como desejamos que $A(1,1,-1)$, $B(-1,1,1)$ e $P(x_0, y_0, 2{x_0}^2 + 2{y_0}^2)$ devam pertencer ao plano tangente

$$-4x_0x - 4y_0y + z + d = 0$$

temos que

$$\begin{cases} -4x_0.1 - 4y_0.1 - 1 + d = 0 \\ -4x_0.(-1) - 4y_0.1 + 1 + d = 0 \\ -4x_0x_0 - 4y_0y_0 + 2{x_0}^2 + 2{y_0}^2 + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad d = 2{x_0}^2 + 2{y_0}^2$$

Então

$$\begin{cases} -4x_0 - 4y_0 - 1 + 2{x_0}^2 + 2{y_0}^2 = 0 \\ 4x_0 - 4y_0 + 1 + 2{x_0}^2 + 2{y_0}^2 = 0 \end{cases}$$

Subtraindo as equações obtemos

$$-8x_0 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{-1}{4}$$

E substituindo na primeira:

$$-4\left(\frac{-1}{4}\right) - 4y_0 - 1 + 2\left(\frac{-1}{4}\right)^2 + 2{y_0}^2 = 0.$$

Exemplos Resolvidos

Assim

$$-4\left(\frac{-1}{4}\right)-4y_0-1+2\left(\frac{-1}{4}\right)^2+2{y_0}^2=0$$

$$1-4y_0-1+\frac{1}{8}+2{y_0}^2=0 \qquad 2{y_0}^2-4y_0+\frac{1}{8}=0$$

E então

$$y_0=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4.2.1/8}}{2.2}=\frac{4\pm\sqrt{15}}{4}=1\pm\frac{1}{4}\sqrt{15}$$

Além disso, como $z_0={2x_0}^2+2{y_0}^2$ temos que

Para $y_0=1+\frac{1}{4}\sqrt{15}$ temos

$$z_0=2\left(\frac{-1}{4}\right)^2+2\left(1+\frac{1}{4}\sqrt{15}\right)^2=4+\sqrt{15}$$

E para $y_0=1-\frac{1}{4}\sqrt{15}$ temos

$$z_0=2\left(\frac{-1}{4}\right)^2+2\left(1-\frac{1}{4}\sqrt{15}\right)^2=4-\sqrt{15}$$

Portanto obtemos dois pontos: $P_1\left(\frac{-1}{4},1+\frac{1}{4}\sqrt{15},4+\sqrt{15}\right)$ e $P_2\left(\frac{-1}{4},1-\frac{1}{4}\sqrt{15},4-\sqrt{15}\right)$