

## C  pulo 2 - Limites.

**Limites laterais:** Seja  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b_1$  e  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b_2$ .  
Estes limites laterais podem:

- Ser iguais, se  $b_1 = b_2$ ;
- Diferentes, se  $b_1 \neq b_2$ ;
- Pode existir um e outro n  o
- Ambos n  o existirem.

**Limites Bilaterais:**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

**Propriedades de limites:**

1.  $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ ;
2.  $\lim [K \cdot f(x)] = K \lim f(x)$ ;
3.  $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$ ;
4.  $\lim \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ , se  $\lim g(x) \neq 0$ ;
5.  $\lim [f(x)]^n = (\lim f(x))^n$  com  $n \in \mathbb{N}$ ;
6.  $\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$ ;
7.  $\lim (\ln f(x)) = \ln(\lim f(x))$ , se  $\lim f(x) > 0$ ;
8.  $\lim (\cos f(x)) = \cos(\lim f(x))$ ;
9.  $\lim (\sin f(x)) = \sin(\lim f(x))$ ;
10.  $\lim e^{f(x)} = e^{\lim f(x)}$ ;

**Limite pela defini  o:** Considerando  $y = f(x)$  em uma vizinhan  a do ponto  $a$  ou para certos pontos desta vizinhan  a. A fun  o  $y = f(x)$ , tende ao limite  $b$ , quando  $x$  tende para  $a$ , se para todo e qualquer

n  mero positivo  $\epsilon$ , por pequeno que seja,    poss  vel indicar um n  mero positivo  $\delta$  tal que, para todo e qualquer  $x \neq a$  que satisfa  a  $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$ .  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , ou  $f(x) \rightarrow b$  se  $x \rightarrow a$ .

Resumindo:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ se } 0 < |x - a| < \delta \text{ ent  o } |f(x) - b| < \epsilon.$$

**Limites Infinitos:**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \text{ se } 0 < |x - a| < \delta, \text{ ent  o } f(x) > M.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N < 0, \exists \delta > 0, \text{ se } 0 < |x - a| < \delta, \text{ ent  o } f(x) < N.$$

**Limites no Infinito:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists M > 0, \text{ se } x > M, \text{ ent  o } |f(x) - b| < \epsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N < 0, \text{ se } x < N, \text{ ent  o } |f(x) - b| < \epsilon$$

**Limites Infinitos no Infinito**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists m > 0, \text{ se } x > m, \text{ ent  o } f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N < 0, \exists m > 0, \text{ se } x > m, \text{ ent  o } f(x) < N$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n < 0, \text{ se } x < n, \text{ ent  o } f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N < 0, \exists n < 0, \text{ se } x < n, \text{ ent  o } f(x) < N$$

**Limites Indeterminados**

$$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 \cdot (\pm\infty), +\infty - \infty, 0^0, 1^{\pm\infty} \text{ e } (\pm\infty)^0.$$

**Limites Not  veis**

$$\textcircled{1} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

$$\textcircled{3} \lim_{u \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{u} \right)^u = e$$

$$\textcircled{2} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u} = 0$$

$$\textcircled{4} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{a^u - 1}{u} = \ln a$$

**Continuidade de uma Fun  o:** Uma fun  o    continua no ponto em que  $x = a$ , se e somente se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

**Tipos de descontinuidade:**

• Remov  vel: Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  e  $L \neq f(a)$ .

• Salto: Se  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ , com  $L_1 \neq L_2$ .

• Infinita: Se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ .

**Continuidade em Intervalos:**  $f(x)$     dita continua em um intervalo fechado  $[a, b]$ , se as seguintes condi  es forem satisfeitas.

    $f$     continua em  $(a, b)$

    $f$     continua    direita de  $a$

    $f$     continua    esquerda de  $b$