Integrais

Definição 1: Uma função $F(x)$ é chamada de primitiva ou antiderivada da função $f(x)$ em um intervalo I se
$F'(x) = f(x), \forall x \in I$.

Definição 2: Se $F(x)$ é uma primitiva ou antiderivada de $f(x)$ a expressão $F(x)+c$ é definida como sendo a integral indefinida da função $f(x)$ e é denotada por:
$$\int f(x)\,dx = F(x)+c$$

Propriedades de uma Integral Indefinida

I) $\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \quad \forall c \in \mathbb{R}$

II) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Integrais Imediatas

1. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1;$
2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c;$
3. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c$
4. $\int e^u\,du = e^u + c$
5. $\int \operatorname{sen}(u)\,du = -\cos(u) + c;$
6. $\int \cos(u)\,du = \operatorname{sen}(u) + c;$
7. $\int \sec^2(u)\,du = tg(u) + c;$
8. $\int \operatorname{cossec}^2(u)\,du = -\operatorname{cotg}(u) + c;$
9. $\int \dfrac{du}{u^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{u}{a}\right) + c;$
10. $\int \sec(u)\,du = \ln|\sec(u) + tg(u)| + c;$
11. $\int \operatorname{cossec}(u)\,du = \ln|\operatorname{cossec}(u) - \operatorname{cotg}| + c;$

Técnicas de Integração

- **Integração por substituição:**
$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx = F(g(x)) + c$$
definindo $u = g(x)$, então $du = g'(x)\,dx$, Dessa forma:
$$\int f(u)\,du = F(u) + c.$$

Etapas:
1- Escolha $u = g(x)$
2- Calcule $du = g'(x)\,dx$
3- Substitua $u = g(x)$ e $du = g'(x)\,dx$
4- Calcule a integral resultante
5- Substitua u por $g(x)$.

- **Integração por partes:** sendo $u = u(x)$ e $v = v(x)$
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$
Uma estratégia é usar $\overset{\xrightarrow{dv}}{\underset{\xleftarrow[u]{}}{\text{LIATE}}}$

L — Logarítmicas
I — Inversas Trigonométricas
A — Algébricas
T — Trigonométricas
E — Exponenciais

Integração de Funções Trigonométricas

- Integrais do tipo $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ e $\int \cos^n x\,dx$
- Para $n \geq 2$:
  - $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow$ se n for ímpar.
  - $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) \\ \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) \end{array}\right\}$ se n for par

- Integração de função envolvendo se e cosseno de arcos diferentes $m \neq n$

I- $\operatorname{sen}(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}((m+n)x) + \operatorname{sen}((m-n)x)]$

II- $\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx) = \frac{1}{2}[\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)]$

III- $\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}[\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)]$

- Integrais do tipo $\int tg^n x\,dx$ e $\int \operatorname{cotg}^n x\,dx$, onde n é inteiro positivo
  - $tg^2 x = \sec^2 x - 1$ e $\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x - 1$ que tem por finalidade obter $\int tg^m x \sec^2 x\,dx$ e $\int \operatorname{cotg}^m x \operatorname{cossec}^2 x\,dx$.

- Integrais do tipo $\int \sec^n x\,dx$ e $\int \operatorname{cossec}^n x\,dx$, onde n é um inteiro positivo
  - $\sec^n x = \sec^{n-2} x \sec^2 x$ ou $\operatorname{cossec}^n x = \operatorname{cossec}^{n-2} x \operatorname{cossec}^2 x\,dx$ e utilizar: $\sec^2 x = tg^2 x + 1$ e $\operatorname{cossec}^2 x = \operatorname{cotg}^2 x + 1$

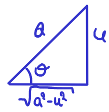
- Integrais do tipo $\int tg^m(x)\sec^n x\,dx$ e $\int \operatorname{cotg}^m x \operatorname{cossec}^n x\,dx$
  - Quando m for par e n for ímpar, a integral deve ser resolvida por integração por partes. Nos demais casos sai por substituição.

Integrais Por Substituição trigonométrica

- Quando temos $(a^2-u^2)^{n/2}$, $(a^2+u^2)^{n/2}$ ou $(u^2-a^2)^{n/2}$, $n \in \mathbb{N}$ e $a \neq 0$. Usamos $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ou $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

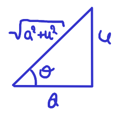
I) O integrando contém a expressão $(a^2-u^2)^{n/2}$:
- $u = a\operatorname{sen}\theta \rightarrow du = a\cos\theta\,d\theta$:
$(a^2-u^2)^{n/2} = (a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta)^{n/2} = [a^2(1-\operatorname{sen}^2\theta)]^{n/2} \Rightarrow$
$= (a^2\cos^2\theta)^{n/2} = a^n\cos^n\theta$

Como $\operatorname{sen}\theta = u/a$, então $\theta = \operatorname{arcsen}(u/a)$



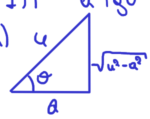
II) O integrando contém a expressão $(a^2+u^2)^{n/2}$:
- $u = a\,tg\theta \rightarrow du = a\sec^2\theta\,d\theta$:
$(a^2+u^2)^{n/2} = (a^2 + a^2 tg^2\theta)^{n/2} = (a^2(1+tg^2\theta))^{n/2} = (a^2\sec^2\theta)^{n/2} \Rightarrow$
$= a^n\sec^n\theta$

Como $tg\theta = u/a$ então $\theta = \operatorname{arctg}(u/a)$



III) O integrando contém a expressão $(u^2-a^2)^{n/2}$:
$u = a\sec\theta \rightarrow du = a\sec\theta\,tg\theta\,d\theta$
$(u^2-a^2)^{n/2} = (a^2\sec^2\theta - a^2)^{n/2} = (a^2(\sec^2\theta - 1))^{n/2} = a^n tg^n\theta$

Como $\sec\theta = u/a$ então $\theta = \operatorname{arcsec}(u/a)$



Integração de Funções Racionais Através da Decomposição em Frações Parciais

Seja $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$

• grau de $p(x)$ > grau de $q(x)$ $\rightarrow$ $\begin{array}{l|l} p(x) & q(x) \\ \hline R(x) & Q(x) \end{array}$

$f(x) = Q(x) + \dfrac{R(x)}{q(x)}$ //

Decomposição de Frações Parciais

I- Se $x = -b/a$ é a raiz de multiplicidade r do polinômio $q(x)$. Se o polinômio $q(x)$ apresenta o fator $(ax+b)^r$ se $x = -b/a$ é raiz de multiplicidade $\dfrac{A_1}{(ax+b)}$ r então para cada fator $(ax+b)^r$ serão somadas r parcelas:

$$F(x) = \frac{A_1}{(ax+b)} \quad \frac{A_2}{(ax+b)^2} \quad \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{A_r}{(ax+b)^r}$$

II- Se $q(x)$ apresenta fatores quadráticos irredutíveis, ou seja $\Delta < 0$, para cada fator quadratico irredutíve $(ax^2+bx+c)^r$ serão somadas r parcelas da forma:

$$F(x) = \frac{A_1x + B_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2+bx+c)^r}$$

Triângulo de Pascal

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Regras de Derivação

: seja $K \in \mathbb{R}$, $u = u(x)$ e $v = v(x)$:

1. $(K)' = 0$
2. $(u^n)' = n u^{n-1} u'$
3. $(Kv)' = K v'$
4. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
5. $(u \cdot v)' = u v' + u' \cdot v$
6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$
7. $(a^u)' = u' \cdot a^u \ln(a)$
8. $(e^u)' = u' e^u$
9. $(\text{sen}(u))' = u' \cos(u)$
10. $(\cos(u))' = -u' \text{sen}(u)$
11. $(\text{tg}(u))' = u' \sec^2(u)$
12. $(\text{cotg}(u))' = -u' \text{cossec}^2(u)$
13. $(\sec(u))' = u' \sec(u) \cdot \text{tg}(u)$
14. $(\text{cossec}(u))' = -u' \text{cossec}(u) \text{cotg}(u)$
15. $(\text{senh}(u))' = u' \cosh(u)$
16. $(\cosh(u))' = u' \text{senh}(u)$
17. $(\text{tgh}(u))' = u' \text{sech}^2(u)$
18. $(\text{cotgh}(u))' = -u' \text{cossech}^2(u)$
19. $(\text{sech}(u))' = -u' \text{sech}(u) \cdot \text{tgh}(u)$
20. $(\text{cossech}(u))' = -u' \text{cossech}(u) \cdot \text{cotg}(u)$
21. $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$
22. $(\log_K u)' = \dfrac{u'}{u} \log_K e$
23. $(\text{arcsen}(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
24. $(\text{arcos}(u))' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
25. $(\text{arctg}(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
26. $(\text{arccotg}(u))' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
27. $(\text{arsec}(u))' = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$
28. $(\text{arccsc}(u))' = -\dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$