# Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

## Área de curvas em coordenadas polares

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 de 09 de setembro de 2024.

UDESC

# Aplicações da Integral Definida: área em polares

## Revisão de Coordenadas Polares:

O sistema polar é definido por um ponto fixo (o polo), denotado por $O$, e uma semirreta horizontal (o eixo polar), denotada por $\overrightarrow{OA}$.

As coordenadas polares de um ponto $P$ consistem na distância de $O$ à $P$ e no ângulo (em radianos) formado entre o eixo polar e o segmento $\overline{OP}$, medido no sentido anti-horário.

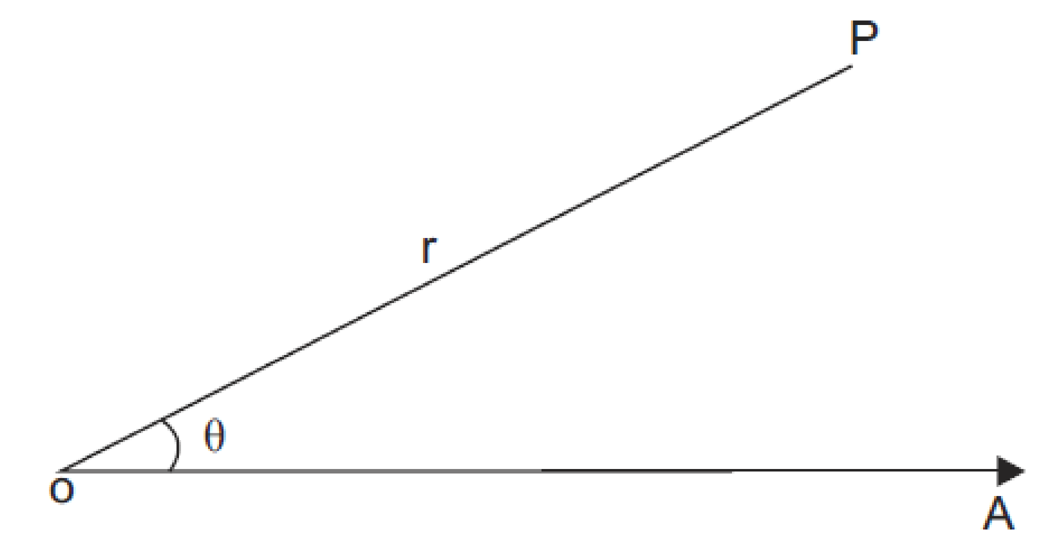



Figura 1: Ponto $P$ usando coordenadas polares

$P(r, \theta)$

$r = |\overline{OP}|$

$\theta = \mathrm{A\hat{O}}P = \hat{a}ng(\overline{OA}, \overline{OP})$

# Relação entre os Sistemas Polar e Cartesiano

Para transitarmos entre o sistema polar e o sistema cartesiano, fazemos a origem do sistema cartesiano coincidir com o polo; e o eixo positivo do $x$ coincidir com o eixo polar.

Com isso, as relações existentes entre as coordenadas cartesianas de um ponto $P(x, y)$ e as suas coordenadas polares $P(r, \theta)$ são obtidas pela trigonometria de um triângulo retângulo:

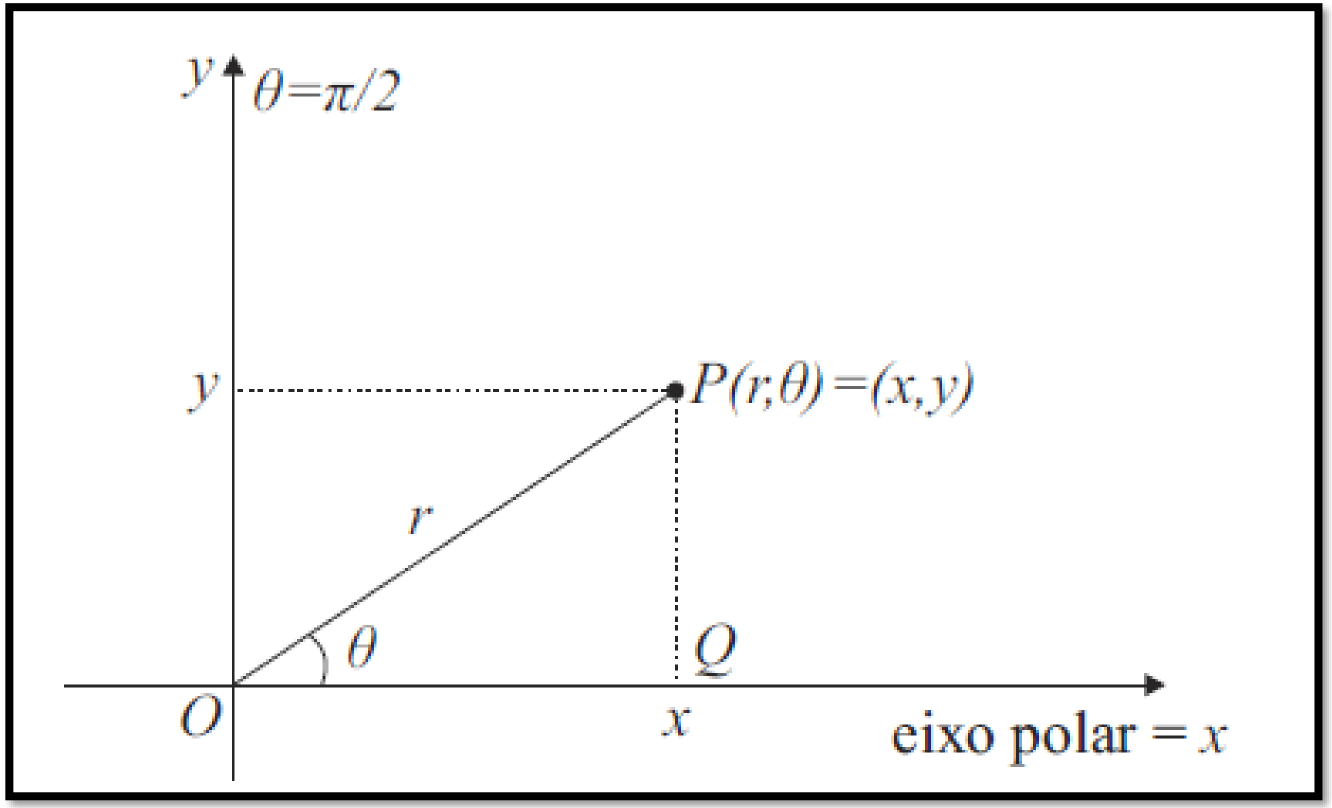
$$x = rcos(\theta)$$

$$y = r\text{sen}(\theta)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

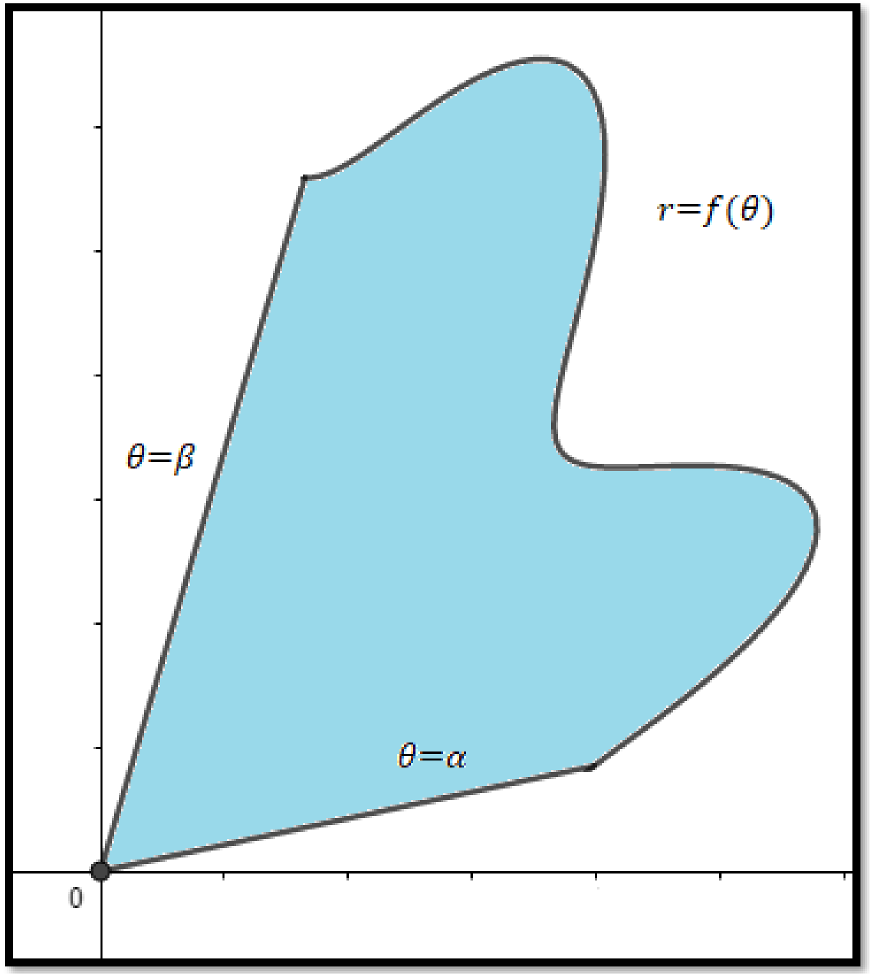
$$tg(\theta) = \frac{y}{x}$$

$$\theta = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$



# Área de uma Região Polar

Seja $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ uma função contínua em coordenadas polares, cujo gráfico corresponde à curva $r=f(\theta)$, exibida na figura abaixo:

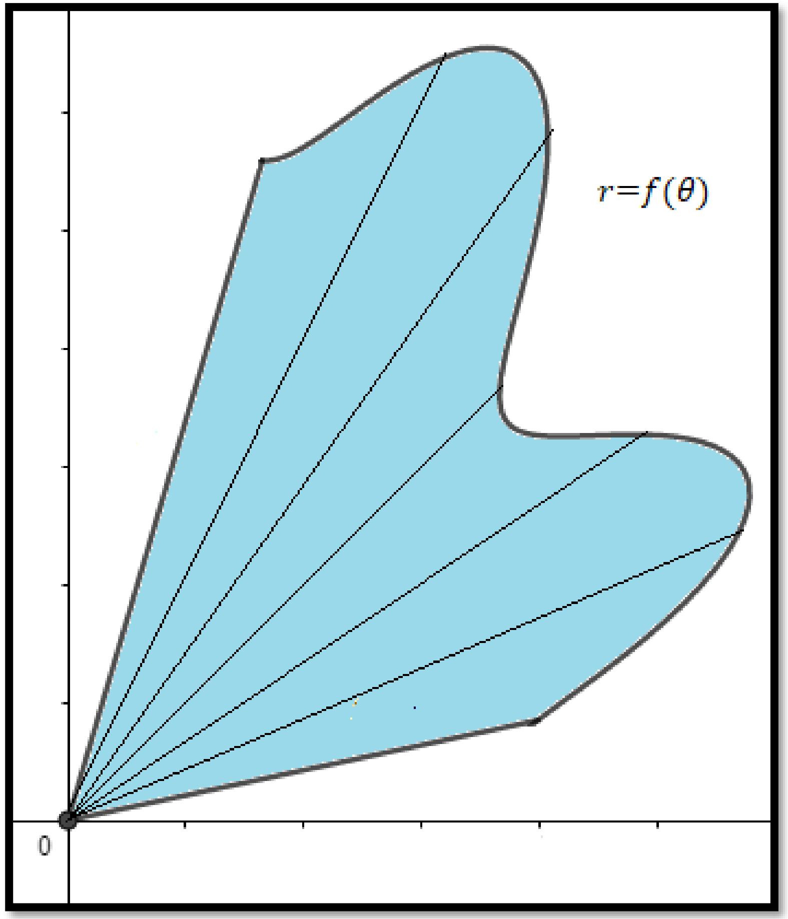



Questão: Qual a área da região $R$ delimitada pelos arcos $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ e pelos raios

$r=0$ e $r=f(\theta)$?

# Área de uma Região Polar

Para obter uma expressão para a área desejada, seguiremos o método infinitesimal:




1º Passo: Dividimos a região $R$ em "$n$ pedaços" tomando

$$\Delta\theta = \frac{\beta - \alpha}{n}:$$

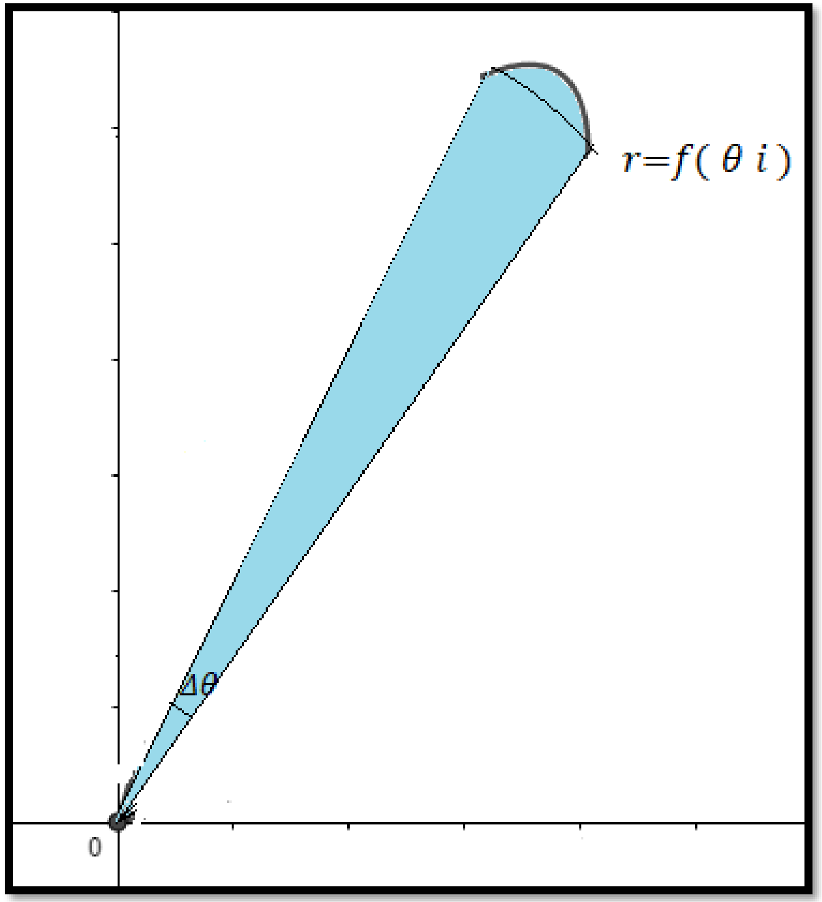
2º Passo: Somamos as áreas de todos os pedaços:

$$área(R) = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n \ = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

em que $A_i$ representa a área do "$i$-ésimo pedaço".

# Área de uma Região Polar

3º Passo: Aproximamos a área do “$i$-ésimo pedaço” pela área de uma figura geométrica conhecida:




Utilizando a aproximação de $A_i$ pela área de um setor circular de raio $r_i = f(\theta_i)$ e ângulo interno igual a $\Delta\theta$, obtemos que

$$A_i \approx A_{setor\ circular} = \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta = \frac{1}{2} f(\theta_i)^2 \Delta\theta.$$

# Área de uma Região Polar

Substituindo na expressão obtida anteriormente, obtemos que

$$área(R) = \sum_{i=1}^{n} A_i \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f(\theta_i)^2 \Delta\theta.$$

Soma de Riemann em coordenadas polares

4º Passo: Melhoramos a aproximação obtida.

Para isso, fazemos a quantidade de “pedaços” ficar cada maior, ou seja, tomamos $n \to +\infty$.

Com isso, obtemos:

$$área(R) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f(\theta_i)^2 \Delta\theta \ .$$

Portanto:

$$área(R) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta \ = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta \, .$$

Lembre que $f(\theta) = r$ é a distância da curva ao polo!

que é a expressão que permite calcular a área de regiões polares.

# Exercícios

Exercício 1) Calcule a área da região polar que é interna à curva $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta)$.

Solução: O exercício foi resolvido durante a aula.

Exercício 2) Escreva as integrais que permitem calcular a área da região polar que está situada:

a) simultaneamente no interior de $r = 2 + 2\cos(\theta)$ e de $r = 4 - 2\cos(\theta)$.

b) no interior de $r = 2 + 2\cos(\theta)$ e, simultaneamente, no exterior de $r = 4 - 2\cos(\theta)$.

c) no interior de $r = \sqrt{3}\cos(4\theta)$ e, simultaneamente, no exterior de $r = \frac{3}{2}$.

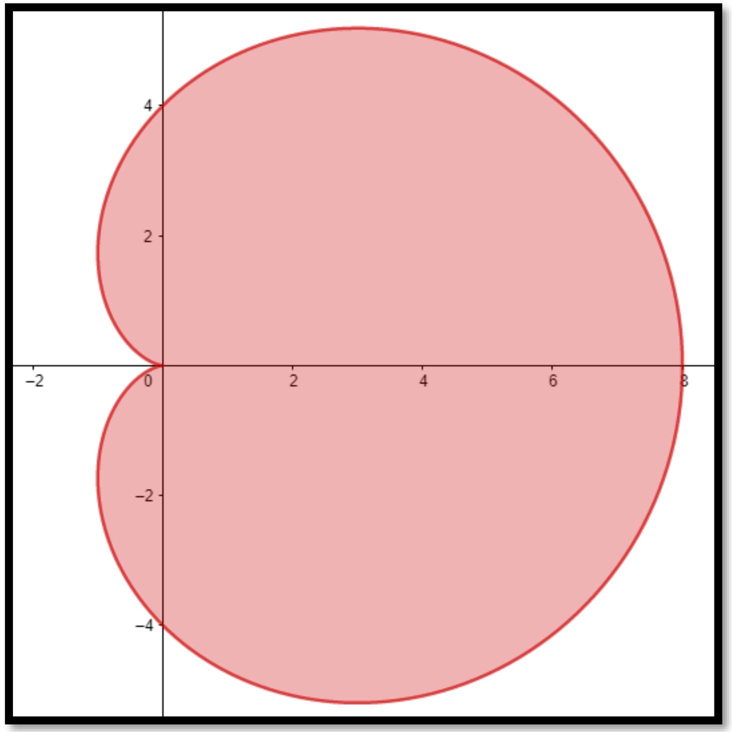
d) simultaneamente no interior de $r = 3 - 2\operatorname{sen}(\theta)$ e de $r = 4\operatorname{sen}(\theta)$.

# Exemplos

Exemplo 1) Calcule a área da região polar que é interna à curva $r = 4 + 4\cos(\theta)$.

Solução: Representando geometricamente a curva:

| $\theta$ | $r = 4 + 4\cos(\theta)$ |
|---|---|
| $0$ | $4 + 4 = 8$ |
| $\pi/2$ | $4 + 0 = 4$ |
| $\pi$ | $4 + 4.(-1) = 0$ |
| $3\pi/2$ | $4 + 4.0 = 4$ |
| $2\pi$ | $4 + 4 = 8$ |




Como aqui temos uma única curva, não há interseção a ser feita.

Por isso, interpretamos geometricamente a região para obter os limitantes de integração:

$$\theta \in [0{,}2\pi].$$

Portanto

$$\acute{a}rea(R) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (4 + 4\cos(\theta))^2 d\theta.$$

Por simetria:

$$2.\frac{1}{2}\int_0^{\pi} (4 + 4\cos(\theta))^2 d\theta$$

Resolvendo a integral:

$$\text{área}(R) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (4+4\cos(\theta))^2 d\theta \ = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [16 + 32\,cos(\theta) + 16\cos^2(\theta)] d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[16 + 32\cos(\theta) + 16\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [16 + 32\cos(\theta) + 8 + 8\cos(2\theta)]\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [24 + 32\cos(\theta) + 8\cos(2\theta)]\, d\theta$$

$$= 12\theta + 16\,\text{sen}(\theta) + 4.\frac{\text{sen}(2\theta)}{2}\bigg|_0^{2\pi}$$

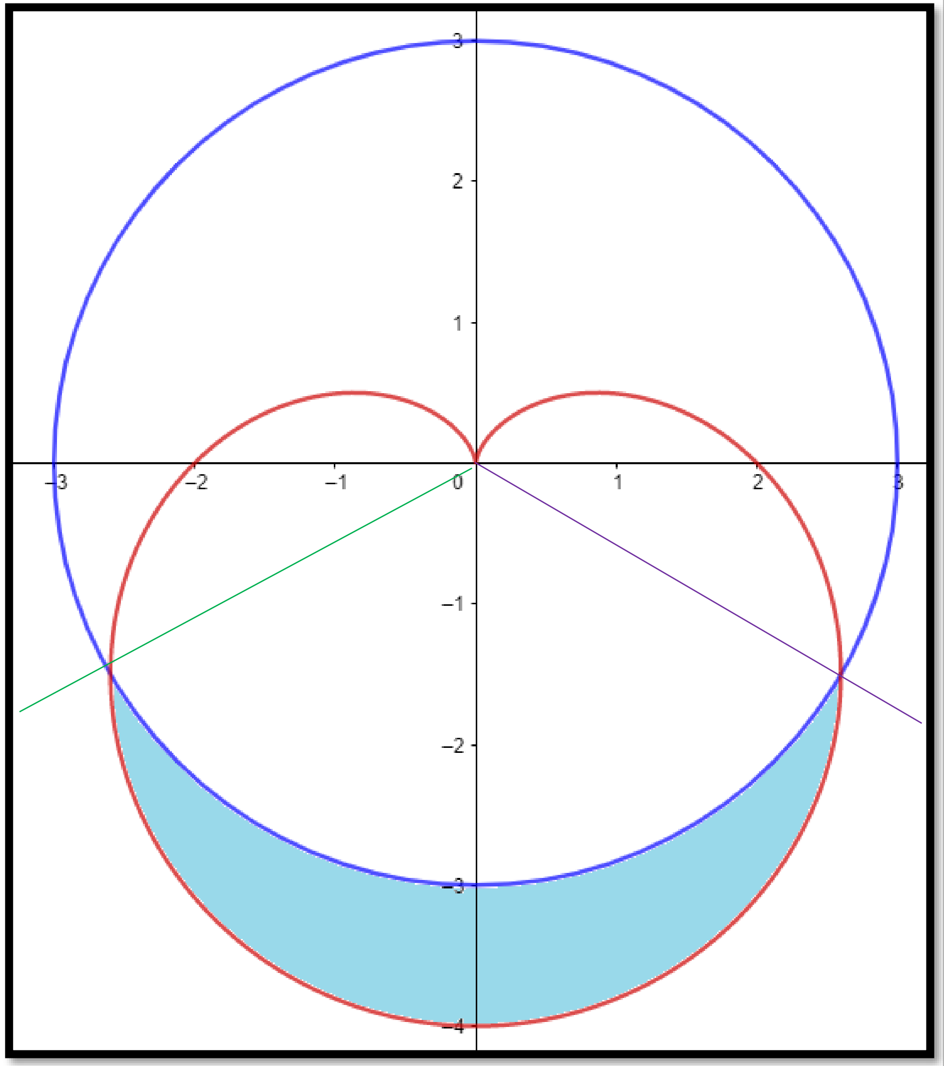
$$= 12.2\pi + 16\,\text{sen}(2\pi) + 2\,\text{sen}(4\pi) - (0 + 16\,\text{sen}(0) + 4\,\text{sen}(0))$$

$$= 24\pi + 0 + 0 - 0 - 9 + 0 \quad = 24\pi.$$

# Exemplo

Exemplo 2) Calcule a área da região que é simultaneamente interior à $r = 2 - 2\text{sen}(\theta)$ e exterior à $r = 3$.

Solução: Representando geometricamente a região:




Precisamos da interseção para obter os limitantes de integração:

$$2 - 2\text{sen}(\theta) = 3 \quad \Rightarrow \quad -2\text{sen}(\theta) = 1$$

ou seja

$$\text{sen}(\theta) = \frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{6}$$

Portanto

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \qquad \theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

Assim, consideramos

$$\theta \in \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right].$$

Note que, nesse exemplo, a região polar não se estende desde o eixo polar.

Por isso, precisamos fazer uma diferença de áreas:
Note que a curva externa (mais distante do polo) é dada por

$$r_{ext} = 2 - 2\text{sen}(\theta).$$

e a curva interna (mais próxima do polo) é dada por

$$r_{int} = 3.$$

Portanto, a área desejada é dada por:

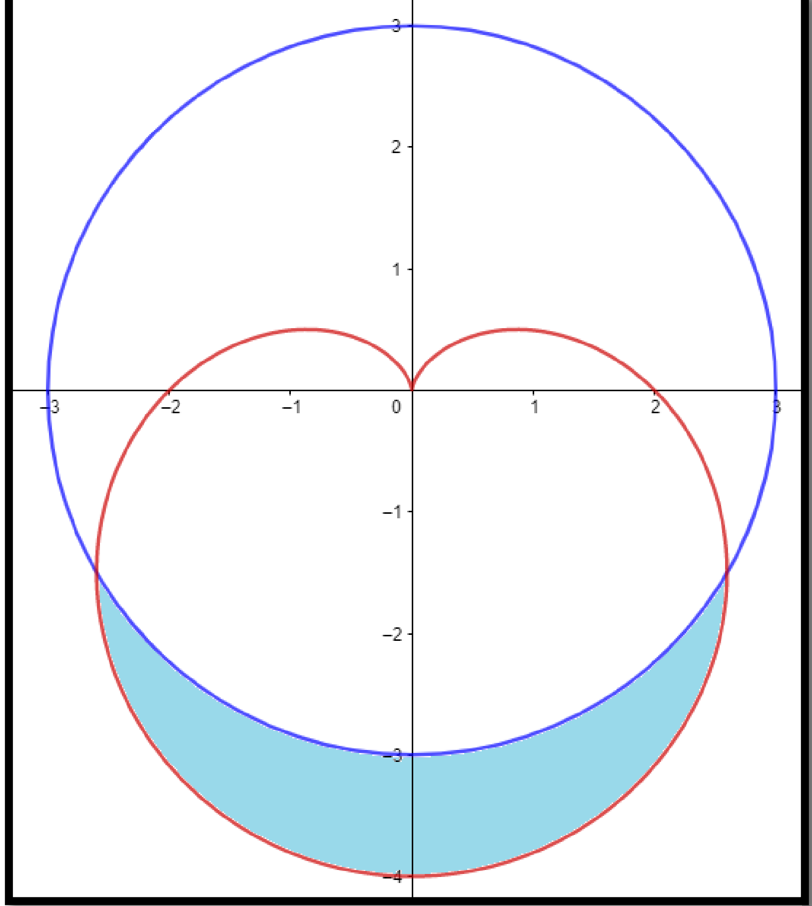
$$A(R) = A_{ext} - A_{int}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} (2 - 2\text{sen}(\theta))^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} (3)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} [(2 - 2\text{sen}(\theta))^2 - (3)^2] d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} [4 - 8\,\text{sen}(\theta) + 4\text{sen}^2(\theta) - 9] d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \left[-8\,\text{sen}(\theta) + \frac{4(1 - \cos(2\theta))}{2} - 5\right] d\theta.$$



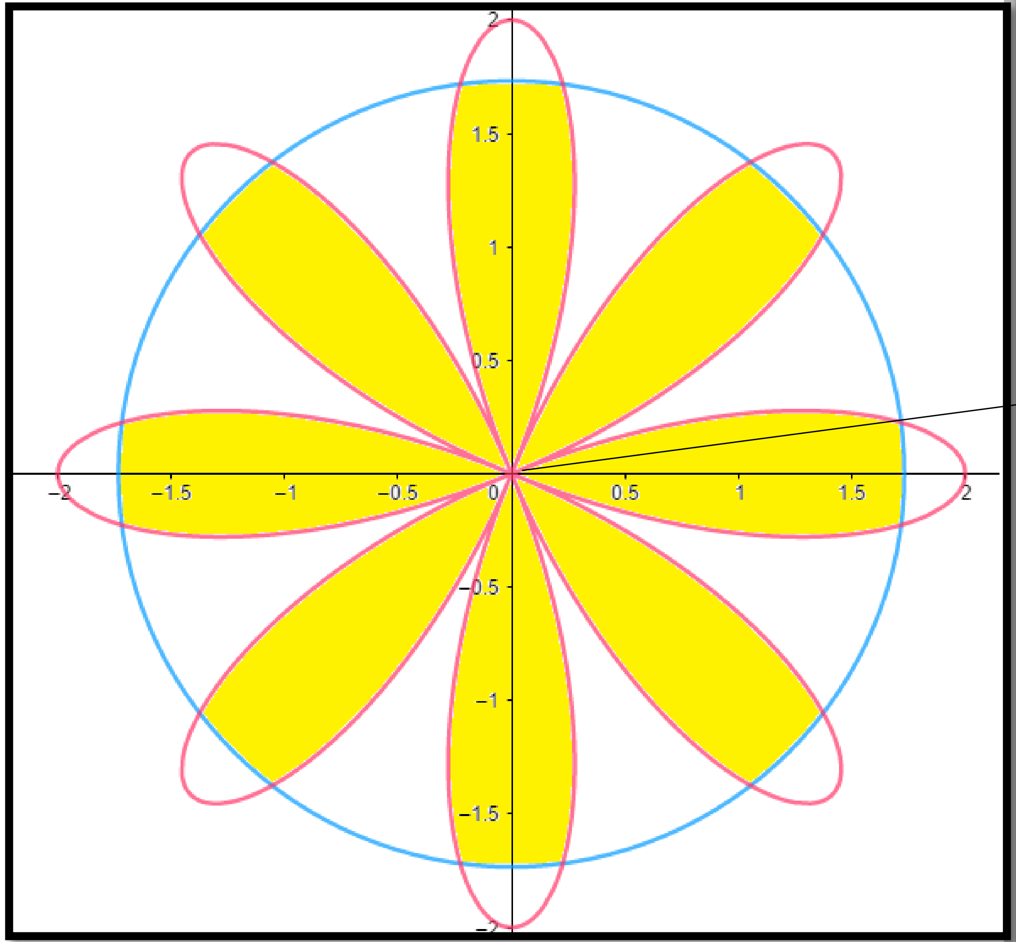

Resolver como exercício!

Uma opção é usar simetria em relação ao eixo $y$ negativo:

$$A(R) = 2.\frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{11\pi}{6}} [(2-2\text{sen}(\theta))^2 - (3)^2]d\theta \; = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{11\pi}{6}} [(2-2\text{sen}(\theta))^2 - (3)^2]d\theta\,.$$

Exemplo 3) Calcule a área da região que é simultaneamente interior às curvas

$$r = 2\cos(4\theta) \qquad \text{e} \qquad r = \sqrt{3}.$$




Solução: Representando geometricamente a região:

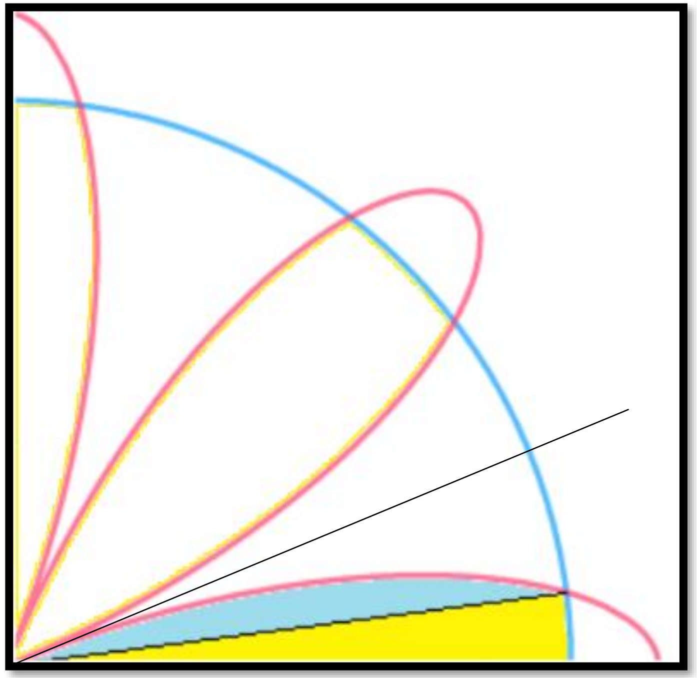
Podemos usar simetria em 8 ou em 16 vezes!

A interseção é dada por:

$$2\cos(4\theta) = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \cos(4\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 4\theta = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{24}.$$

Note que, nesse caso, não temos um raio externo e outro interno.
Ambas as curvas são raios externos!



Por isso, precisamos usar uma soma de integrais.

Para a primeira parte (em amarelo), temos

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{24}\right] \quad \text{e} \quad r_{ext} = \sqrt{3}.$$

Para a segunda parte (em azul), precisamos achar o ângulo que completa a primeira pétala da rosácea.

Note que, nesse ângulo, ocorre a primeira interseção da rosácea com o polo $(r = 0)$. Logo

$$2\cos(4\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(4\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4\theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{8}.$$

Logo, para a segunda parte, temos

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{8}\right] \quad \text{e} \quad r_{ext} = 2\cos(4\theta).$$

Portanto, usando simetria em 16 vezes, obtemos que

$$A(R) = 16.\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{24}} (\sqrt{3})^2 d\theta + 16.\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{24}}^{\frac{\pi}{8}} (2\cos(4\theta))^2\, d\theta$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{24}} 3\, d\theta + 8\int_{\frac{\pi}{24}}^{\frac{\pi}{8}} 4cos^2(4\theta)d\theta$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{24}} 3\, d\theta + 32\int_{\frac{\pi}{24}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{1+\cos(8\theta)}{2} d\theta$$

$$= 24\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{24}} + 16\left(\theta + \frac{\sin(8\theta)}{8}\Big|_{\frac{\pi}{24}}^{\frac{\pi}{8}}\right)$$

$$= 24\frac{\pi}{24} - 0 + 16\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\sin(\pi)}{8} - \frac{\pi}{24} - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= \pi + 2\pi + 0 - \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{71\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

# Exemplo:

Exemplo 4) Considere a região $R$ que é simultaneamente interior às curvas $x^2 + y^2 = 4x$ e $3x = 2y^2$. Escreva as integrais que permitem calcular a área de $R$ mediante:

a) integração em relação a $x$.

b) integração em relação a $y$.

c) coordenadas polares

Solução: Iniciamos com as interseções:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x \\ 3x = 2y^2 \end{cases} \Rightarrow \quad y^2 = \frac{3}{2}x \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{3}{2}x = 4x$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + \frac{3}{2}x - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{5}{2}x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x\left(x - \frac{5}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \quad x = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad y = 0, \quad y^2 = \frac{15}{4}.$$

Portanto, as interseções são $(0,0)$, $(5/2, \sqrt{15}/2)$ e $(5/2, -\sqrt{15}/2)$.

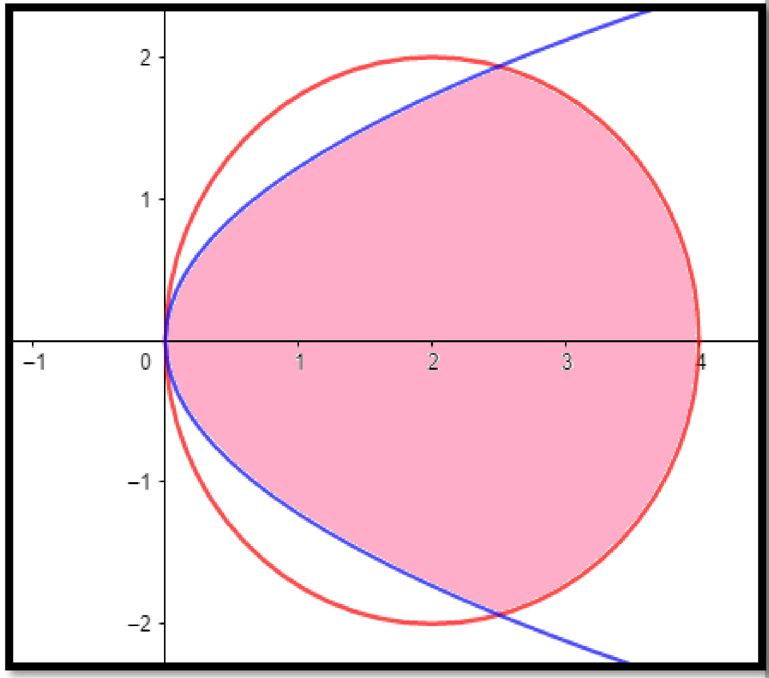
# Exemplo

Manipulando as equações:

$$x^2 + y^2 = 4x \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 + y^2 = 4$$

e temos uma circunferência, com centro em $(2,0)$ e raio 2. Ainda

$$3x = 2y^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}y^2$$




é uma parábola, com eixo de simetria sobre o eixo $x$.

Geometricamente, a região desejada é:

a) Para a integral em $x$, precisamos isolar $y = y(x)$:

$$x^2 + y^2 = 4x \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4x - x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{4x - x^2}$$

$$x = \frac{2}{3}y^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{3}{2}x \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}x}.$$

Como há troca na limitação das curvas quando $x = \frac{5}{2}$, precisamos usar uma soma de integrais:

$$área(R) = \int_0^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{3}{2}x} - \left(-\sqrt{\frac{3}{2}x}\right) dx + \int_{\frac{5}{2}}^{4} \sqrt{4x - x^2} - \left(-\sqrt{4x - x^2}\right) dx.$$

# Exemplo

E chegamos em

$$\acute{a}rea(R) = 2\int_0^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{3}{2}x}\ dx + 2\int_{\frac{5}{2}}^{4} \sqrt{4x - x^2}\, dx,$$

que indica o uso de simetria em relação ao eixo $x$.

b) Para a integral em $y$, invertemos as equações para $x = x(y)$:

$$x^2 + y^2 = 4x \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 + y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 = 4 - y^2$$

$$\Rightarrow \quad x - 2 = \pm\sqrt{4 - y^2} \quad \Rightarrow \quad x = 2 \pm \sqrt{4 - y^2}$$

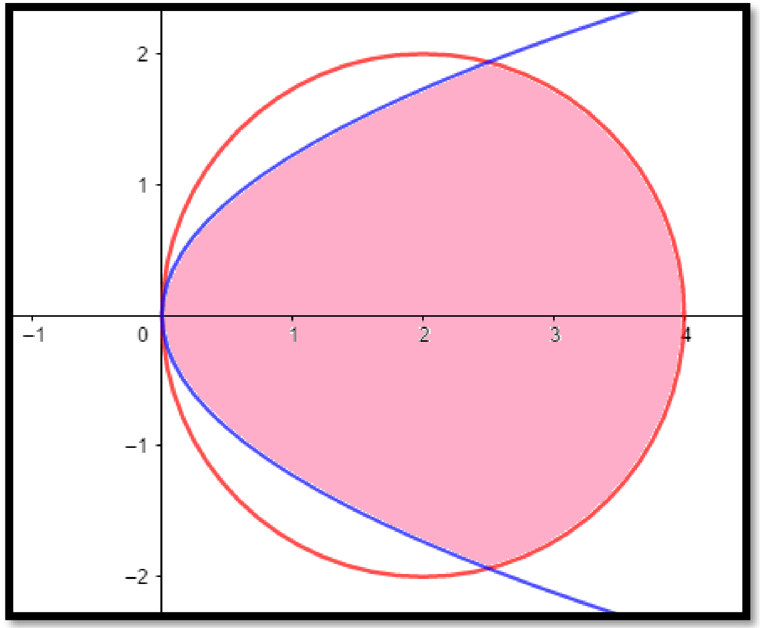
A parábola

$$x = \frac{2}{3}y^2$$

já está em função de $y$.

Veja que não há troca de limitação na curva à esquerda nem à direita e, com isso, podemos usar uma única integral:

$$\acute{a}rea(R) = \int_{-\frac{\sqrt{15}}{2}}^{\frac{\sqrt{15}}{2}} \left(2 + \sqrt{4 - y^2} - \frac{2}{3}y^2\right)\, dy.$$



# Exemplo

c) Em coordenadas polares, precisamos transformar as curvas:

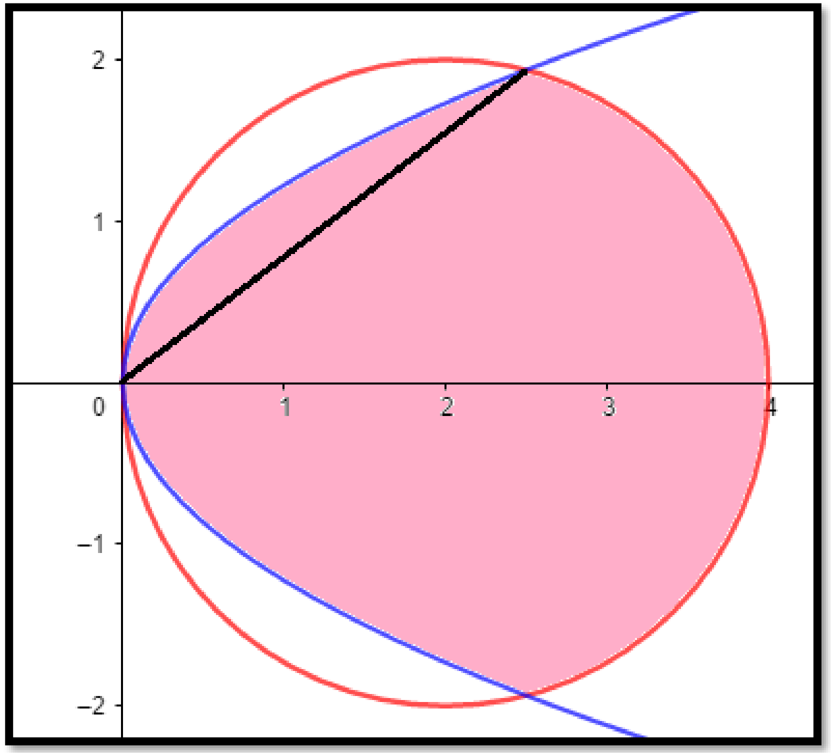
$$x^2 + y^2 = 4x \quad \Rightarrow \quad r^2 = 4r\cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad r = 4\cos(\theta)$$

$$3x = 2y^2 \quad \Rightarrow \quad 3r\cos(\theta) = 2r^2\sin^2(\theta) \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3\cos(\theta)}{2\sin^2(\theta)}.$$

A interseção em polares pode ser muito trabalhosa!

Porém, já sabemos que a interseção das curvas que está situada no primeiro quadrante é dada por $\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$.

Assim, basta obter o ângulo $\theta$ desse ponto:



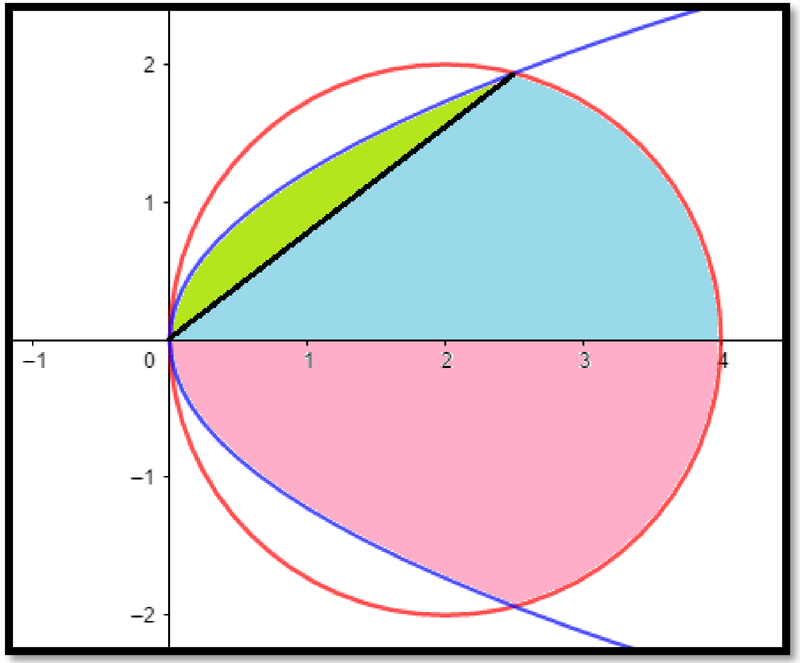

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \tan(\theta) = \frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right).$$

# Exemplo

Interpretando a região polar, vemos que podemos usar simetria em duas vezes, devido à região ser simétrica em relação ao eixo $x$.

Além disso, precisamos usar uma soma de integrais, pois as duas curvas consistem em raios externos:




Para a primeira parte (em azul), temos

$$\theta \in \left[0, \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right] \qquad \text{e} \qquad r_{ext} = 4cos(\theta).$$

Para a segunda parte (em verde), temos

$$\theta \in \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right), \frac{\pi}{2}\right] \qquad \text{e} \qquad r_{ext} = \frac{3cos(\theta)}{2\text{sen}^2(\theta)}.$$

Portanto, pela simetria em relação ao eixo $x$, obtemos:

$$A(R) = 2.\frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)} \big(4cos(\theta)\big)^2 d\theta \;+\; 2.\frac{1}{2}\int_{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3cos(\theta)}{2\text{sen}^2(\theta)}\right)^2 d\theta.$$