Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Limite por Caminhos
Continuidade de Funções de várias variáveis

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 do dia 30 de outubro de 2024.

UDESC

Lembrando de CDI-I

- Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função real de uma única variável, o limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

existe se, e somente se, os limites laterais existem e são iguais, ou seja, se e somente se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

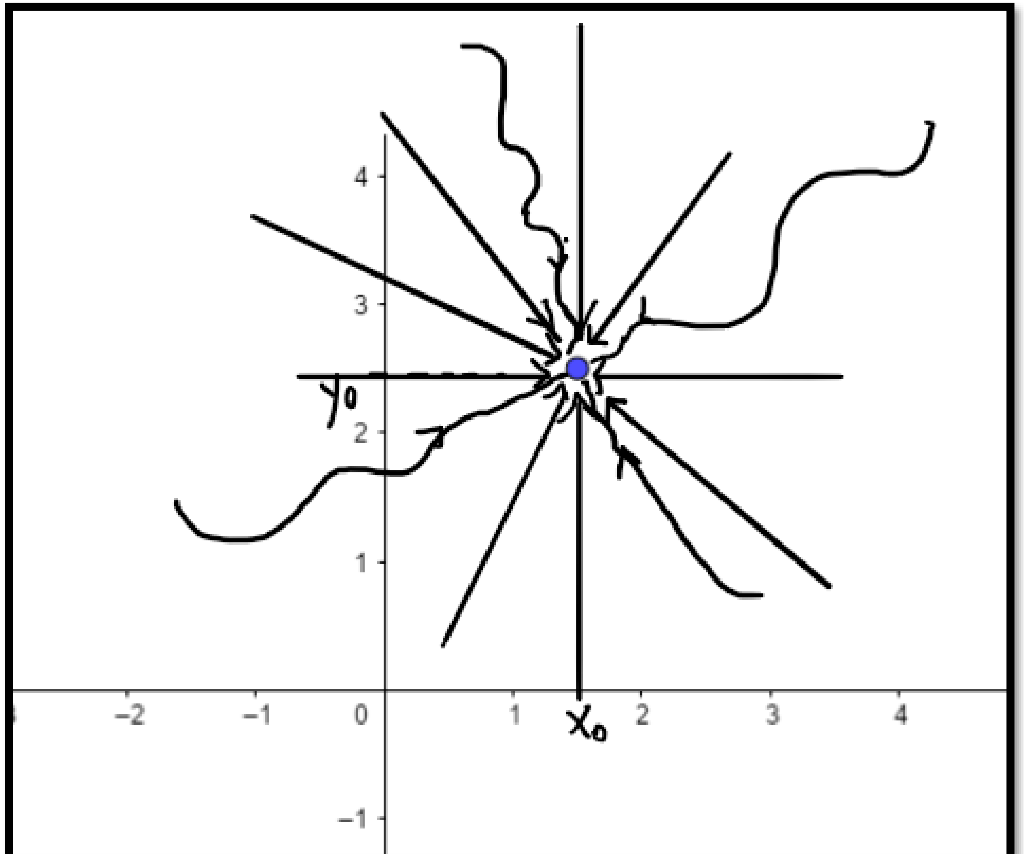
- De certo modo, isso significa que, para um limite existir, a forma pela qual nos aproximamos de x_0 (seja pela direita ou pela esquerda) não pode “interferir” no resultado do limite.
- Portanto, caso a forma de aproximação interfira no resultado do limite (isto é, caso os limites laterais sejam diferentes) então o limite “central” não pode existir.
- Agora, vamos generalizar essa ideia para limites de funções de duas ou mais variáveis!

Introdução: formas de aproximação em $\mathbb{R}^2$

- A situação análoga para funções de duas (ou mais) variáveis nos exige mais atenção,

pois no plano existe uma infinidade de formas de nos aproximarmos do ponto (x_0, y_0).

- Podemos nos aproximar de (x_0, y_0) horizontalmente pela esquerda; horizontalmente pela direita; verticalmente “por cima”; verticalmente “por baixo”; por diversas diagonais; ou por qualquer curva que passa pelo ponto (x_0, y_0):



Caminhos

- Cada uma das formas usadas para nos aproximar de um ponto (x_0, y_0) é chamada de um "caminho".
- Em geral, um caminho para aproximação de (x_0, y_0) é uma curva C em $\mathbb{R}^2$ que necessariamente passa pelo ponto (x_0, y_0).
- Podemos descrever algebricamente um caminho C por

$$y = g(x) \text{ ou por } x = h(y).$$

- Como o caminho C deve passar por (x_0, y_0) é necessário que $y_0 = g(x_0)$ ou $x_0 = h(y_0)$.
- Dada uma função de duas variáveis $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, podemos usar um caminho C para estudar o comportamento de $f(x, y)$ quando (x, y) se aproximar de (x_0, y_0) por meio de pontos situados no caminho C.
- Nesse caso, dizemos que calculamos o limite de f pelo caminho C e denotamos o limite correspondente por

$$\lim_{(x,y) \xrightarrow[C]{} (x_0,y_0)} f(x, y).$$

Regra dos Caminhos

- Para que exista o limite central

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

é necessário que os diferentes caminhos que utilizarmos para nos aproximarmos de (x_0, y_0) não interfiram no resultado do limite. Ou seja, se por caminhos distintos encontrarmos valores limites diferentes, então o limite "central" não pode existir.

- Essa é uma importante regra que nos permite provar a inexistência de limites de funções de duas (ou mais) variáveis:

Regra dos Caminhos

Sejam C_1 e C_2 caminhos distintos que passam pelo ponto (x_0, y_0) tais que

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[C_1]{}(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\xrightarrow[C_2]{}(x_0,y_0)} f(x,y) = L_2\,.$$

Se $L_1 \neq L_2$, então $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ não existe.

Observações

- Note que, diferente do que ocorria em CDI-1 com a igualdade dos limites laterais, a Regra dos Caminhos NÃO GARANTE A EXISTÊNCIA do limite central.
- Ou seja, ainda que tenhamos dois caminhos distintos C_1 e C_2 que fornecem o mesmo valor limite (digamos $L_1 = L_2$) não podemos garantir que o limite central existe.
- Isso ocorre porque é possível que exista um terceiro caminho, digamos C_3, que nos leve a um limite diferente, isto é:

$$\lim_{(x,y) \xrightarrow[C_3]{} (x_0,y_0)} f(x,y) = L_3 \neq L_1.$$

- Ainda mais: mesmo que tenhamos uma infinidade de caminhos distintos fornecendo o mesmo valor limite, NÃO podemos garantir que o limite central realmente existe, pois é possível que seja encontrado um outro caminho que nos leve a um valor limite distinto, conforme veremos nos exemplos seguintes.

Observações

- O máximo que pode ser afirmado é que o valor limite obtido por caminhos distintos é um "CANDIDATO" a ser o limite central. Ou seja, caso exista, o limite central não pode ser um valor diferente do que o encontrado por caminhos.

- Portanto, ATENÇÃO:

Ainda que tenhamos caminhos distintos C_1 e C_2 tais que

$$L_1 = \lim_{(x,y) \xrightarrow[C_1]{} (x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \xrightarrow[C_2]{} (x_0,y_0)} f(x,y) = L_2,$$

nada podemos afirmar sobre a existência ou inexistência de

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y),$$

a não ser que $L_1 = L_2$ é um candidato à limite central.

- Sintetizando: limites distintos (por caminhos diferentes) garantem a inexistência do limite central. Mas limites iguais (por vários caminhos) nunca garante a existência do limite central.

Exercícios

Exercício 1) Investigue a existência dos limites:

$a)$ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{3x^2+y^2}$$

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6y}{x^9+5y^3}$$

$c)$ $$\lim_{(x,y,z)\to(7,-2,\,1)} \frac{(4x+9y-10z)^{12}}{(x-7)^4(y+2)^5(z-1)^3}$$

Continuidade

- As condições para que uma função real de várias variáveis reais seja contínua é muito semelhante as condições impostas para uma função de uma única variável real, estudadas em CDI-1.
- Vamos adaptar tais condições para uma função $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ para definir a continuidade de f em um ponto (x_0, y_0):

Definição 1:

Uma função $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em (x_0, y_0) se e somente se:

i) f está definida em (x_0, y_0) ou seja, existe $f(x_0, y_0)$.

ii) existe o limite $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y)$.

iii) $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Observações:

- A condição (i) da Definição de continuidade indica que $(x_0, y_0) \in D$.
- A condição (ii) da Definição indica que, independente de qual caminho usarmos para nos aproximar de (x_0, y_0), sempre devemos obter o mesmo valor para o limite.
- Conforme estudamos anteriormente, não conseguimos garantir a existência do limite mesmo que utilizarmos uma infinidade de caminhos.
- Usamos caminhos para investigar a existência do limite e/ou para produzir um candidato L para o valor do limite.
- Feito isso, no caso de “acreditarmos” que o limite realmente existe, precisaremos comprovar esse fato por meio dos Teoremas estudados nas aulas passadas.
- A condição (iii) da Definição de continuidade reúne as duas condições anteriores.

Observações:

- Por reunir as duas primeiras condições, alguns autores reduzem a definição de Continuidade somente para a terceira condição, uma vez que a igualdade

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

exige, ainda que implicitamente, que os termos indicados em cada um dos lados da igualdade existam.

- Do ponto de vista geométrico, o gráfico de uma função contínua $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ consiste em uma superfície (em $\mathbb{R}^3$) que não contém buracos, nem saltos, nem rasgos nem assíntotas verticais (paralelas ao eixo $\overrightarrow{Oz}$).
- A definição de Continuidade pode ser facilmente generalizada para funções de três ou mais variáveis. Nesses casos, perdemos a interpretação geométrica, pois o gráfico está situado em $\mathbb{R}^4$ (no caso de funções de três variáveis) ou $\mathbb{R}^{n+1}$ no caso de n variáveis).

Definição e exemplos

A próxima definição amplia a continuidade de $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ para todo o domínio D:

Definição 2:

Uma função $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua em D se e somente se f for contínua em (x_0, y_0), para todo $(x_0, y_0) \in D$.

Exercício 2) Analise a continuidade de $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\text{a) } f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-4)^6(y+1)}{3(x-4)^8 + 11(y+1)^4}, & \text{se } (x,y) \neq (4,-1) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (4,-1) \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)^5(y-9)^3}{7(x+2)^2 + 8(y-9)^6}, & se\ (x,y) \neq (-2,9) \\ 0, & se\ (x,y) = (-2,9) \end{cases}$$

Exercícios Propostos

Exercício 3) Determine, caso exista, o valor de $b \in \mathbb{R}$ para o qual a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{9x^2y + 7xy^2 + x^3 - 6x^2 - 3y^2}{10x^2 + 5y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ b, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

se torna contínua em $(0,0)$.

Exercício 4) Determine, caso exista, o valor de $b \in \mathbb{R}$ para o qual a função

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{(x-7)^4(y+2)^5(z-1)^3}{(4x+9y-10z)^{12}}, & \text{se } (x,y,z) \neq (7,-2,1). \\ b, & \text{se } (x,y,z) = (7,-2,1). \end{cases}$$

se torna contínua em $(7,-2,1)$.

Exemplo Resolvido

Exemplo 1) Investigue a existência dos limites:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{6x^2y}{8x^4+7y^2}$

Solução: Para investigar a existência do limite, vamos usar caminhos que passam pelo ponto $(0,0)$. Como antes, usando o caminho retilíneo C_1: $y = x$ obtemos que

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[C_1]{}(0,0)} \frac{6x^2y}{8x^4+7y^2} = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{6x^2x}{8x^4+7x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{6x^3}{x^2(8x^2+7)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6x}{8x^2+7} = \frac{0}{0+7} = 0.$$

Usando agora outro caminho retilíneo, dado por C_2: $y = 2x$, obtemos que

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[C_2]{}(0,0)} \frac{6x^2y}{8x^4+7y^2} = \lim_{(x,2x)\to(0,0)} \frac{6x^2.2x}{8x^4+7(2x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{12x^3}{x^2(8x^2+28)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{12x}{8x^2+28} = \frac{0}{0+28} = 0.$$

Exemplos

Por caminhos distintos, obtivemos o mesmo valor para o limite.

Porém, lembre-se que isso não é suficiente para garantir se o limite existe ou não! Precisamos usar mais caminhos!

Podemos testar mais caminhos de uma única vez. Para isso, usamos um caminho retilíneo genérico que passa pela origem, dado por $C_3\colon\ y = mx$, com $m \in \mathbb{R}$ fixado e $m \neq 0$:

$$\lim_{(x,y)\underset{C_3}{\to}(0,0)} \frac{6x^2y}{8x^4+7y^2} = \lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{6x^2mx}{8x^4+7(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{6mx^3}{x^2(8x^2+7m^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6mx}{8x^2+7m^2} = \frac{0}{0+7m^2} = 0.$$

Como o limite acima não dependeu do coeficiente linear m, temos que independente de qual seja o caminho retilíneo utilizado, o limite sempre é igual a zero.

Mas isso, infelizmente, não garante que o limite exista, ainda que tenhamos utilizado uma infinidade de caminhos retilíneos.

Se usarmos caminhos parabólicos, também genéricos, dados por $C_4\colon\ y = mx^2$, com $m \in \mathbb{R}$ fixado e $m \neq 0$, temos que:

Exemplo Resolvido

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[C_4]{}(0,0)} \frac{6x^2y}{8x^4+7y^2} = \lim_{(x,mx^2)\to(0,0)} \frac{6x^2mx^2}{8x^4+7(mx^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{6mx^4}{x^4(8+7m^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6m}{8+7m^2} = \frac{6m}{8+7m^2}.$$

Veja que esse cálculo nos mostra que o limite depende do caminho parabólico utilizado, pois ficou em função de m (ou seja, para diferentes valores de m, o limite é diferente).
Isso significa que o limite central, dado por

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^2y}{8x^4+7y^2}$$ NÃO EXISTE.

OBSERVAÇÕES:

- Mesmo que o limite tenha resultado em zero para a infinidade de caminhos retilíneos, o limite central não existe. Portanto, ainda que tenhamos vários caminhos gerando o mesmo valor para o limite, não podemos garantir que ele existe.
- Se tivéssemos operado diretamente com C_4, concluiríamos logo que o limite não existe.

Exemplo Resolvido

$b)\ \lim\limits_{(x,y)\to(5,-1)} \dfrac{7(x-5)^3(y+1)}{11(x-5)^6+4(y+1)^2}$

Solução: Para investigar a existência do limite, vamos usar caminhos que passam por $(5,-1)$. Vamos começar com caminhos retilíneos genéricos, dados por

$$C_1:\ y-(-1)=m(x-5)\ \Leftrightarrow\ y=-1+m(x-5).$$

(veja que usamos a equação geral de uma reta para definir a expressão do caminho retilíneo, com $m\in\mathbb{R}$ fixado e $m\neq 0$). Assim, temos que

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[C_1]{}(5,-1)} \frac{7(x-5)^3(y+1)}{11(x-5)^6+4(y+1)^2}$$

$$=\lim_{(x,-1+m(x-5))\to(5,-1)} \frac{7(x-5)^3(-1+m(x-5)+1)}{11(x-5)^6+4(-1+m(x-5)+1)^2}$$

$$=\lim_{(x,-1+m(x-5))\to(5,-1)} \frac{7(x-5)^3(m(x-5))}{11(x-5)^6+4(m(x-5))^2}$$

Exemplo Resolvido

Note que quando $x \to 5$, temos automaticamente que $-1 + m(x-5) \to -1$, portanto temos que o limite anterior é dado por

$$= \lim_{(x,-1+m(x-5))\to(5,-1)} \frac{7(x-5)^3(m(x-5))}{11(x-5)^6 + 4(m(x-5))^2}$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{7m(x-5)^4}{(x-5)^2[11(x-5)^4+4m^2]}$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{7m(x-5)^2}{[11(x-5)^4+4m^2]} = \frac{7m.(0)^2}{[11(0)^4+4m^2]} = \frac{0}{4m^2} = 0.$$

Portanto, todos os infinitos caminhos retilíneos nos levam ao mesmo limite, igual a zero. Isso significa apenas que $L = 0$ é um candidato ao limite central desejado.

Como isso é insuficiente, vamos agora usar um caminho parabólico genérico, que passa por $(5,-1)$.

Exemplo Resolvido

Consideramos agora um caminho parabólico genérico, dado por

$$C_2\colon y-(-1)=m(x-5)^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad y=-1+m(x-5)^2.$$

Temos que

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[C_2]{}(5,-1)} \frac{7(x-5)^3(y+1)}{11(x-5)^6+4(y+1)^2}=$$

$$=\lim_{(x,-1+m(x-5)^2)\to(5,-1)} \frac{7(x-5)^3(-1+m(x-5)^2+1)}{11(x-5)^6+4(-1+m(x-5)^2+1)^2}$$

$$=\lim_{(x,-1+m(x-5)^2)\to(5,-1)} \frac{7(x-5)^3(m(x-5)^2)}{11(x-5)^6+4(m(x-5)^2)^2}$$

$$=\lim_{x\to5} \frac{7m(x-5)^5}{11(x-5)^6+4m^2(x-5)^4}$$

Exemplo Resolvido

Continuando:

$$= \lim_{x\to 5} \frac{7m(x-5)^5}{(x-5)^4[11(x-5)^2+4m^2]} = \lim_{x\to 5} \frac{7m(x-5)}{[11(x-5)^2+4m^2]}$$

$$= \frac{7m.0}{[11(0)^2+4m^2]} = \frac{0}{4m^2} = 0.$$

E assim, todos os infinitos caminhos parabólicos também nos levam sempre ao mesmo limite, igual a zero. Isso significa apenas que $L = 0$ é um forte candidato ao limite central desejado. Nada garante que não exista um outro caminho que resulte em limite não nulo.

Nesse ponto, é importante revisar os cálculos efetuados no limite por caminhos retilíneos e no limite por caminhos parabólicos.

Veja que, no primeiro cálculo, o termo responsável pelo limite resultar em zero foi o termo $(x-5)^2$ situado no numerador da expressão simplificada.

E que no segundo cálculo, o termo que levou o limite para zero foi a expressão $(x-5)$, também situada no numerador.

Exemplo Resolvido

Portanto, perceba que, nesse exemplo, quando aumentamos o grau do caminho utilizado (passando de retas para parábolas) o numerador teve o seu grau diminuído, e por isso, tendeu mais lentamente para zero (pois quando $x \to 5$, o termo $(x-5)$ tende a zero mais lentamente do que $(x-5)^2$).

Isso deve nos levar a pensar que, se aumentarmos ainda mais o grau do caminho (passando para caminhos cúbicos) o grau do numerador pode ser reduzido ainda mais, de tal forma que o limite tenda a outro valor.

Vamos então utilizar caminhos cúbicos que passam por $(5,-1)$ dados por

$$C_3\colon\ y-(-1)=m(x-5)^3 \quad \Leftrightarrow \quad y=-1+m(x-5)^3.$$

com $m \in \mathbb{R}$ fixado e $m \neq 0$). Assim, temos que

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[C_3]{}(5,-1)} \frac{7(x-5)^3(y+1)}{11(x-5)^6+4(y+1)^2} =$$

$$= \lim_{(x,-1+m(x-5)^3)\to(5,-1)} \frac{7(x-5)^3(-1+m(x-5)^3+1)}{11(x-5)^6+4(-1+m(x-5)^3+1)^2}$$

Exemplo Resolvido

$$= \lim_{(x,-1+m(x-5)^3)\to(5,-1)} \frac{7(x-5)^3(m(x-5)^3)}{11(x-5)^6+4(m(x-5)^3)^2}$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{7(x-5)^3 m(x-5)^3}{11(x-5)^6+4m^2(x-5)^6} = \lim_{x\to 5} \frac{7m(x-5)^6}{(x-5)^6[11+4m^2]}$$

$$= \lim_{x\to 5} \frac{7m}{[11+4m^2]} = \frac{7m}{11+4m^2}.$$

Dessa forma, conseguimos um caminho que leva o limite para um valor diferente de zero. Com isso, concluímos que o limite depende do caminho utilizado, e portanto, o limite central, dado por,

$$\lim_{(x,y)\to(5,-1)} \frac{7(x-5)^3(y+1)}{11(x-5)^6+4(y+1)^2}$$ NÃO EXISTE!

OBS: Somente os cálculos efetuados no caminho C_3 já bastariam para garantir a inexistência do limite central, pois o resultado dependeu de m, ou seja, para cúbicas diferentes, o limite é diferente.

Exemplo em três variáveis

A investigação da existência de limites utilizando caminhos também pode ser aplicada para funções de três variáveis, bastando para isso usar caminhos em $\mathbb{R}^3$ que passam pelo ponto (x_0, y_0, z_0) considerado. Vejamos um exemplo

c) $$\lim_{(x,y,z)\to(3,-2,1)} \frac{(4x+7y+2z)^6}{(x-3)(y+2)^2(z-1)^3}$$

Solução: Para investigar a existência do limite, vamos usar caminhos que passam por $(3,-2,1)$. Vamos começar com caminhos retilíneos genéricos, dados por

$$C_1:\ x = 3 + at,\ y = -2 + bt,\quad z = 1 + ct$$

em que usamos as equações paramétricas de uma reta que passa por $(3,-2,1)$ e que possui a direção do vetor diretor fixado $\vec{v} = (a, b, c)$. Assim, temos que

$$\lim_{(x,y,z)\xrightarrow[C_1]{}(3,-2,1)} \frac{(4x + 7y + 2z)^6}{(x - 3)(y + 2)^2(z - 1)^3} =$$

$$= \lim_{(3+at,-2+bt,1+ct)\to(3,-2,1)} \frac{(4(3 + at) + 7(-2 + bt) + 2(1 + ct))^6}{(3 + at - 3)(-2 + bt + 2)^2(1 + ct - 1)^3}$$

Exemplo Resolvido

$$= \lim_{(3+at,-2+bt,1+ct)\to(3,-2,1)} \frac{(12+3at-14+7bt+2+2ct)^6}{(at)(bt)^2(ct)^3}$$

$$= \lim_{(3+at,-2+bt,1+ct)\to(3,-2,1)} \frac{(3at+bt+2ct)^6}{at.\,b^2t^2.\,c^3\,t^3}.$$

Veja que $(3+at,-2+bt,1+ct)\to(3,-2,1)$ implica que $(at,bt,ct)\to(0,0,0)$, e essa tendência pode ser simplesmente denotada por $t\to 0$, uma vez que o vetor diretor (a,b,c) está fixado. Portanto, o limite anterior pode ser calculado com o limite de apenas uma variável (que é a vantagem de usar caminhos!):

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(3a+b+2c)^6t^6}{ab^2c^3t^6} = \lim_{t\to 0} \frac{(3a+b+2c)^6}{ab^2c^3} = \frac{(3a+b+2c)^6}{ab^2c^3}.$$

Com isso, vemos que o limite dependeu do caminho retilíneo utilizado (pois dependeu do vetor diretor da reta considerada). Portanto, NÃO EXISTE o limite central

$$\lim_{(x,y,z)\to(3,-2,1)} \frac{(4x+7y+2z)^6}{(x-3)(y+2)^2(z-1)^3}$$

Observação e Exercícios Propostos

OBSERVAÇÃO:

- Caso o limite anterior fosse independente do caminho, poderíamos continuar com a utilização de caminhos parabólicos, cuja equação paramétrica é semelhante à do caminho C_1, bastando elevar o parâmetro t ao quadrado em uma ou no máximo duas das equações.
- O cálculo de limites por caminhos não basta para garantir a existência do limite central.
- Caso os limites por caminhos distintos resultem sempre no mesmo valor, para garantir que o limite central realmente existe, é preciso utilizar os Teoremas estudados na aula passada!

Exercícios Propostos: Investigue a existência dos limites abaixo:

$$a)\lim_{(x,y)\to(-2,5)} \frac{3(x+2)(y-5)}{x^2+y^2+4x-10y+29}$$

$$b)\lim_{(x,y,z)\to(-5,\,3,-7)} \frac{x+y+z+9}{2x+4y-z-9}$$

Exemplos Resolvidos

2) Analise a continuidade de $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

a) $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{5(x+7)^6(y-9)}{2(x+7)^8+3(y-9)^4}, & se\ (x,y) \neq (-7,9) \\ 0, & se\ (x,y) = (-7,9) \end{cases}$$

Solução: Veja que f é dada por duas sentenças (como em geral ocorria em problemas de continuidade em CDI-1).

Em CDI-1 as sentenças eram definidas para

$x \geq a$ e para $x < a$

e a investigação sobre a existência do limite central $(x \to a)$ era efetuada por meio dos limites laterais).

Como em CDI-2 temos infinitas formas (caminhos) para nos aproximarmos de (x_0, y_0), não faz mais sentido definir a função em termos de uma sentença à direita e outra à esquerda do ponto "problemático". Por isso, em CDI-2 vamos sempre ter sentenças definidas em termos de uma igualdade e de uma diferença em relação à (x_0, y_0).

Exemplo Resolvido

Voltando ao exemplo, vamos analisar a continuidade de f em $(-7,9)$.

Veja que, em todos os demais pontos de $D = \mathbb{R}^2$, f é contínua.

Aplicando a Definição 1 para $(x_0, y_0) = (-7,9)$, temos que:

- i) $f(-7,9) = 0$

  e f está definida em $(-7,9)$.

- ii) Vamos investigar a existência de $\lim\limits_{(x,y) \to (-7,9)} f(x,y)$.

  Para isso, vamos utilizar caminhos que passam por $(-7,9)$.

  Começamos com caminhos retilíneos genéricos que passam por $(-7,9)$, dados por

$$C_1\colon y - 9 = m(x+7) \quad \Leftrightarrow \quad y = 9 + m(x+7)$$

com $m \in \mathbb{R}$ fixado e $m \neq 0$.

Exemplo Resolvido

- Assim, usando a primeira sentença de f (pois nos aproximamos de $(-7,9)$ por pontos distintos de $(-7,9)$, temos que:

$$\lim_{(x,y) \xrightarrow[C_1]{} (-7,9)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \xrightarrow[C_1]{} (-7,9)} \frac{5(x+7)^6(y-9)}{2(x+7)^8+3(y-9)^4}$$

$$= \lim_{(x,\,9+m(x+7))\to(-7,9)} \frac{5(x+7)^6(9+m(x+7)-9)}{2(x+7)^8+3(9+m(x+7)-9)^4}$$

$$= \lim_{x\to-7} \frac{5m(x+7)^7}{(x+7)^4[2(x+7)^4+3m^4]}$$

$$= \lim_{x\to-7} \frac{5m(x+7)^3}{2(x+7)^4+3m^4} = \frac{5m(0)^3}{2(0)^4+3m^4} = \frac{0}{3m^4} = 0.$$

- Portanto, há chances do limite existir e ser igual a zero (um candidato ao valor limite).
- Com isso, há chances da função ser contínua em $(-7,9)$.
- Porém, investigar a existência do limite por somente um tipo caminho (ainda que genérico) é insuficiente.

Exemplo Resolvido

Utilizando caminhos parabólicos genéricos que passam por $(-7{,}9)$, dados por

$$C_2:\ y-9=m(x+7)^2 \quad \Leftrightarrow \quad y=9+m(x+7)^2$$

com $m \in \mathbb{R}$ fixado e $m \neq 0$, obtemos que

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[C_2]{}(-7,9)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\xrightarrow[C_2]{}(-7,9)} \frac{5(x+7)^6(y-9)}{2(x+7)^8+3(y-9)^4}$$

$$= \lim_{(x,\,9+m(x+7)^2)\to(-7,9)} \frac{5(x+7)^6(9+m(x+7)^2-9)}{2(x+7)^8+3(9+m(x+7)^2-9)^4}$$

$$= \lim_{x\to-7} \frac{5m(x+7)^8}{2(x+7)^8+3m^4(x+7)^8}$$

$$= \lim_{x\to-7} \frac{5m(x+7)^8}{(x+7)^8[2+3m^4]} = \lim_{x\to-7} \frac{5m}{2+3m^4} = \frac{5m}{2+3m^4}.$$

Portanto, vemos que o limite dependeu do caminho utilizado, pois para valores diferentes de m, temos limites distintos).

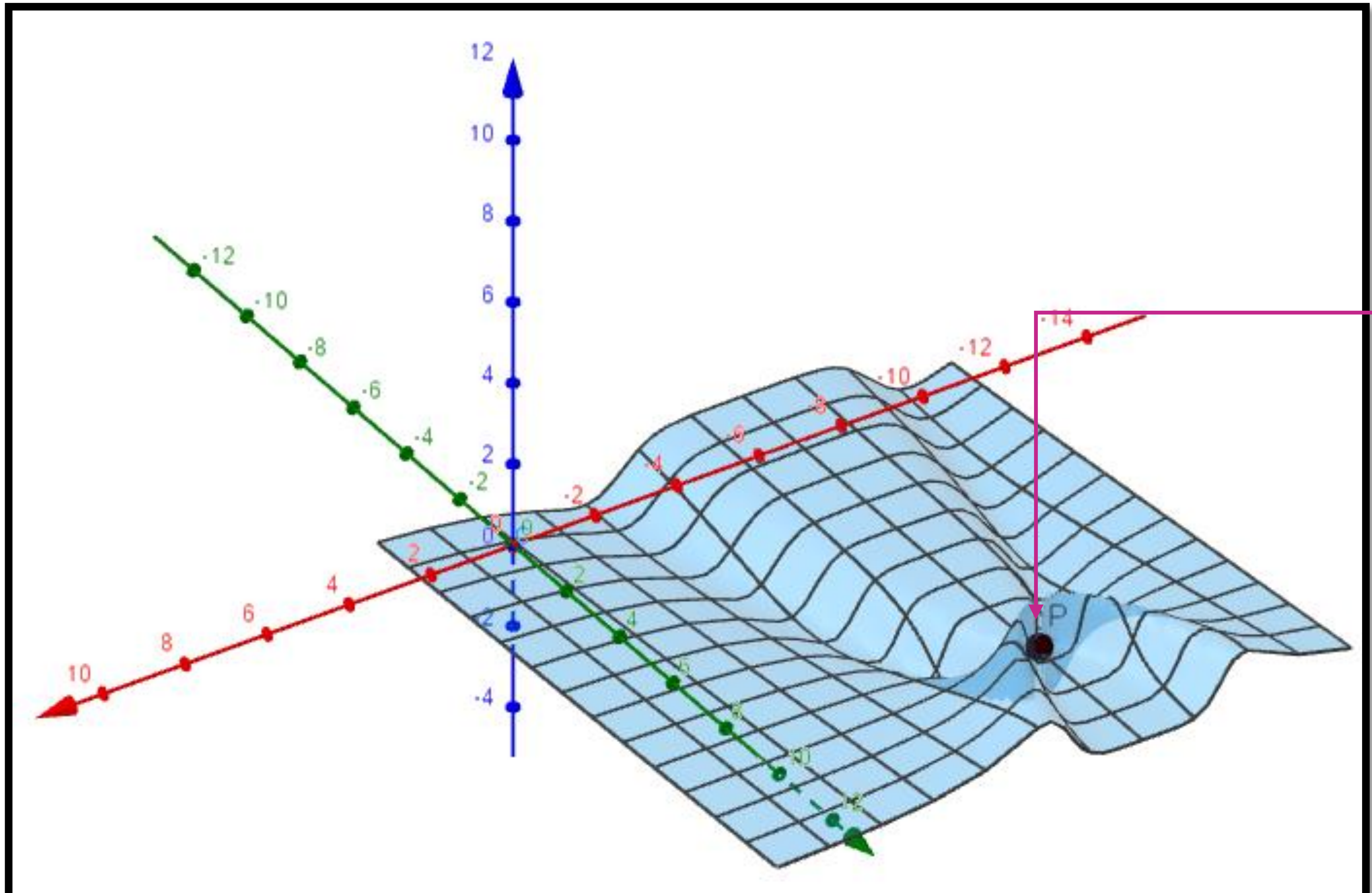
Exemplo Resolvido

Com isso, temos que NÃO EXISTE o limite central

$$\lim_{(x,y)\to(-7,9)} f(x,y).$$

Portanto, o item (ii) da Definição 1 não é satisfeito e f não é contínua em $(-7,9)$.

Veja o comportamento assintótico que o gráfico de f admite em uma vizinhança do ponto $P(-7,9)$:



Exemplo Resolvido

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^5y^7}{2x^4+8y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solução: Vamos analisar a continuidade de f em $(0,0)$.

Veja que, em todos os demais pontos de $D = \mathbb{R}^2$, f é contínua.

Aplicando a Definição 1 para $(x_0, y_0) = (0,0)$, temos que:

- i) $f(0,0) = 0$, ou seja, f está definida em $(0,0)$.
- ii) Vamos investigar a existência de $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$.

Para isso, vamos utilizar caminhos que passam por $(0,0)$.

Começamos com caminhos retilíneos genéricos que passam por $(0,0)$, dados por

$$C_1:\ y = mx$$

com $m \in \mathbb{R}$ fixado e $m \neq 0$.

Exemplo Resolvido

Usando a primeira sentença de f (pois nos aproximamos de $(0{,}0)$ por pontos distintos de $(0{,}0)$, temos que:

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[C_1]{}(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\xrightarrow[C_1]{}(0,0)} \frac{3x^5y^7}{2x^4+8y^2} = \lim_{(x,\,mx)\to(0,0)} \frac{3x^5(mx)^7}{2x^4+8(mx)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3m^7x^{12}}{2x^4+8m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3m^7x^{12}}{x^2[2x^2+8m^2]} = \lim_{x\to 0} \frac{3m^7x^{10}}{2x^2+8m^2} = \frac{3m^7.0}{0+8m^2} = 0.$$

Portanto, há chances do limite existir e ser igual a zero e da função ser contínua em $(0{,}0)$. Vamos investigar a existência do limite mais caminhos.

Usando caminhos parabólicos que passam por $(0{,}0)$, dados por $C_2\colon\ y = mx^2$, com $m \in \mathbb{R}$ fixado e $m \neq 0$, temos que

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[C_2]{}(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,\,y)\to(0,0)} \frac{3x^5y^7}{2x^4+8y^2} = \lim_{(x,\,mx^2)\to(0,0)} \frac{3x^5(mx^2)^7}{2x^4+8(mx^2)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x^5m^7x^{14}}{2x^4+8m^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{3m^7x^{19}}{x^4[2+8m^2]} = \lim_{x\to 0} \frac{3m^7x^{15}}{2+8m^2} = \frac{3m^7.0}{2+8m^2} = 0.$$

Exemplo Resolvido

Assim, $L = 0$ é um candidato ainda mais forte para o valor limite.

Mas ainda não podemos concluir que ele é, de fato, o limite.

Usando caminhos cúbicos que passam por $(0,0)$, dados por C_3: $y = mx^3$, com $m \in \mathbb{R}$ fixado e $m \neq 0$, temos que:

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[C_3]{}(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\xrightarrow[C_3]{}(0,0)} \frac{3x^5y^7}{2x^4+8y^2} = \lim_{(x,\,mx^3)\to(0,0)} \frac{3x^5(mx^3)^7}{2x^4+8(mx^3)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x^5m^7x^{21}}{2x^4+8m^2x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{3m^7x^{26}}{x^4[2+8m^2x^2]} = \lim_{x\to 0} \frac{3m^7x^{22}}{2+8m^2x^2} = \frac{3m^7.0}{2+8m^2.0} = \frac{0}{2} = 0.$$

Portanto, há ainda mais chances do limite existir e ser igual a zero.

Veja que, conforme aumentamos o grau dos caminhos, mais rapidamente a expressão tendeu a zero, pois o termo restante no numerador da expressão tem grau cada vez mais alto. Isso deve continuar ocorrendo se usarmos caminhos de grau 4.

Assim, não convém aumentar ainda mais o grau do caminho e sim testar um caminho com grau menor.

Exemplo Resolvido

Uma opção para reduzir o grau do caminho é usar

$$C_4\colon\ y = mx^{1/2} = m\sqrt{x},$$

com $m \in \mathbb{R}$ fixado e $m \neq 0$.

Note que C_4 passa por $(0,0)$, ainda que x tenda a zero somente pela direita. Assim:

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[C_4]{}(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\xrightarrow[C_4]{}(0,0)} \frac{3x^5y^7}{2x^4+8y^2} = \lim_{(x,\,mx^{1/2})\to(0,0)} \frac{3x^5(mx^{1/2})^7}{2x^4+8(mx^{1/2})^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^5m^7x^{7/2}}{2x^4+8m^2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3m^7x^{17/2}}{x[2x^3+8m^2]} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3m^7x^{15/2}}{2x^3+8m^2} = \frac{3m^7.0}{2.0+8m^2} = 0.$$

E mesmo diminuindo o grau do caminho, o limite ainda tende a zero (e com certa rapidez!). Isso deve nos levar a pensar que o limite de fato existe e é igual a zero.

Para afirmar isso, é preciso utilizar algum teorema que permita afirmar que $L = 0$:

Veja que podemos decompor a função como

$$\frac{3x^5y^7}{2x^4+8y^2} = \frac{3x^4x.y^7}{2x^4+8y^2} = 3x.y^7.\frac{x^4}{2x^4+8y^2}$$

Exemplo Resolvido

Tomando $h(x,y) = 3x.y^7$ temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 3x.y^7 = 0.0 = 0$$

Vamos mostrar que $g(x,y) = \frac{x^4}{2x^4+8y^2}$ é uma função limitada numa vizinhança de $(0,0)$:

Comparando os termos do numerador com os do denominador, vemos que

$$x^4 \leq 2x^4 \leq 2x^4 + 8y^2 \qquad \text{(pois } 8y^2 \geq 0\text{).}$$

Logo

$$|g(x,y)| = \left|\frac{x^4}{2x^4+8y^2}\right| = \frac{|x^4|}{|2x^4+8y^2|} = \frac{x^4}{2x^4+8y^2} \leq \frac{2x^4+8y^2}{2x^4+8y^2} = 1$$

é válido para todo (x,y).

Portanto, pelo Teorema 2, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^5y^7}{2x^4+8y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y).g(x,y) = 0.$$

Exemplo Resolvido

Portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

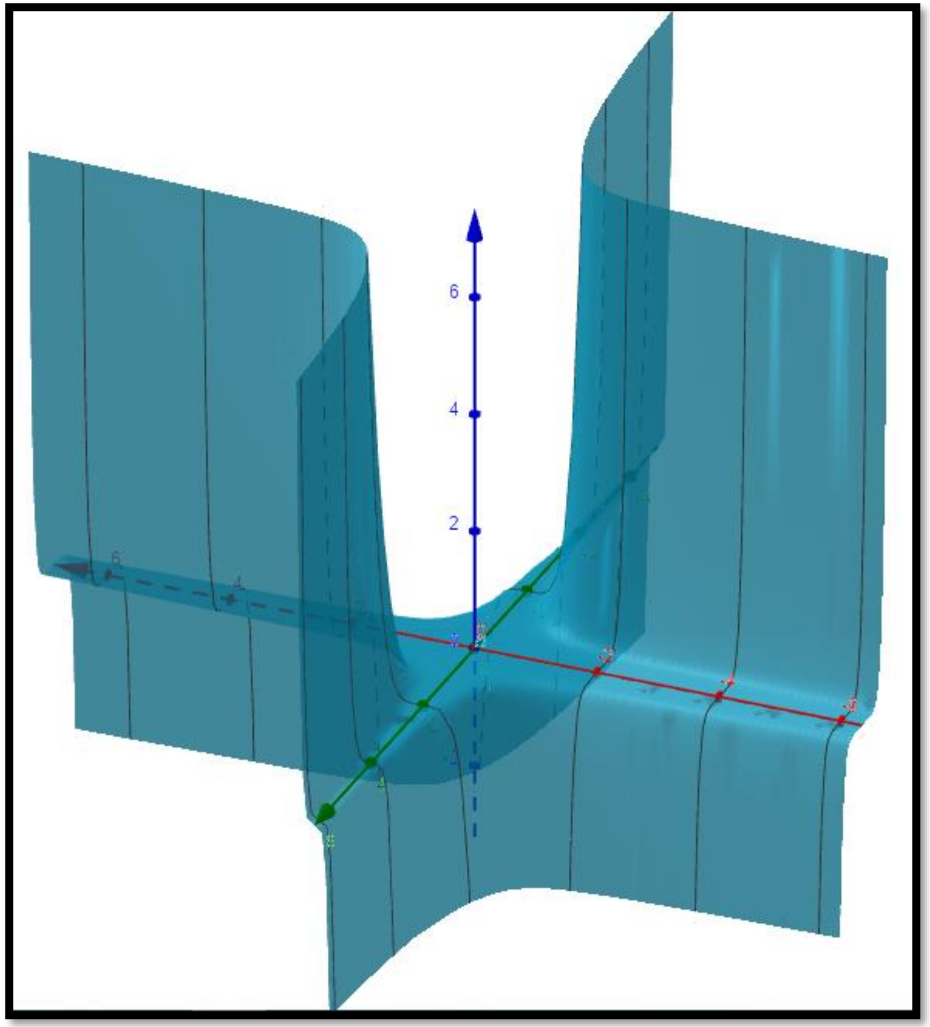
existe, o que mostra que o item (ii) da Definição 1 está satisfeito.

iii) Por fim, reunindo o que fizemos nos itens (i) e (ii) temos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

Concluímos que f é contínua em $(0,0)$.

Na imagem o comportamento gráfico de f em uma vizinhança da origem.



Exemplo de Continuidade

Exemplo 3) Determine o valor de $b \in \mathbb{R}$ para o qual a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{9x^2y + 6xy^2 + x^3 + 4x^2 + 8y^2}{5x^2 + 10y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ b, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$.

Solução: Aplicando a Definição 1 para $(x_0, y_0) = (0,0)$, temos que:

- i) $f(0,0) = b$, ou seja, f está definida em $(0,0)$.
- ii) Vamos investigar a existência de $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$.

Para isso, vamos utilizar caminhos que passam por $(0,0)$.

Começamos com caminhos retilíneos genéricos que passam por $(0,0)$, dados por

$$C_1:\ y = mx$$

com $m \in \mathbb{R}$ fixado e $m \neq 0$.

Exemplo Resolvido

Temos que:

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[C_1]{}(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\xrightarrow[C_1]{}(0,0)} \frac{9x^2y + 6xy^2 + x^3 + 4x^2 + 8y^2}{5x^2 + 10y^2}$$

$$= \lim_{(x,\,mx)\to(0,0)} \frac{9x^2mx + 6x(mx)^2 + x^3 + 4x^2 + 8(mx)^2}{5x^2 + 10(mx)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2[9mx + 6xm^2 + x + 4 + 8m^2]}{x^2[5 + 10m^2]} = \lim_{x\to 0} \frac{9mx + 6xm^2 + x + 4 + 8m^2}{5 + 10m^2}$$

$$= \frac{0 + 0 + 0 + 4 + 8m^2}{5 + 10m^2} = \frac{4 + 8m^2}{5 + 10m^2} = \frac{4(1 + 2m^2)}{5(1 + 2m^2)} = \frac{4}{5}$$

Note a importância da fatoração efetuada ao final dos cálculos acima.

Concluímos que $L = \frac{4}{5}$ é um candidato ao valor limite.

Exemplo Resolvido

Usando caminhos parabólicos que passam por $(0,0)$, dados por $C_2\colon\ y = mx^2$, com $m \in \mathbb{R}$ fixado e $m \neq 0$, temos que:

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[C_2]{}(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\xrightarrow[C_2]{}(0,0)} \frac{9x^2y + 6xy^2 + x^3 + 4x^2 + 8y^2}{5x^2 + 10y^2}$$

$$= \lim_{(x,\, mx^2)\to(0,0)} \frac{9x^2mx^2 + 6x(mx^2)^2 + x^3 + 4x^2 + 8(mx^2)^2}{5x^2 + 10(mx^2)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2[9mx^2 + 6x^3m^2 + x + 4 + 8m^2x^2]}{x^2[5 + 10m^2x^2]}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{9mx^2 + 6x^3m^2 + x + 4 + 8m^2x^2}{5 + 10m^2x^2} = \frac{0+0+4+0}{5+0} = \frac{4}{5}.$$

Portanto, há ainda mais chances do limite existir e ser igual a $\frac{4}{5}$.

Veja que, aumentando o grau do caminho, mais rapidamente a expressão tendeu a esse valor. Isso deve continuar ocorrendo mesmo se usarmos caminhos cúbicos.

Exemplo Resolvido

Usando um caminho de grau menor, tomamos C_3: $y = mx^{1/2} = m\sqrt{x}$, com $m \in \mathbb{R}$ fixado e $m \neq 0$, obtemos

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[C_3]{}(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\xrightarrow[C_3]{}(0,0)} \frac{9x^2y + 6xy^2 + x^3 + 4x^2 + 8y^2}{5x^2 + 10y^2}$$

$$= \lim_{(x,\, mx^{1/2})\to(0,0)} \frac{9x^2 m\sqrt{x} + 6x(m\sqrt{x})^2 + x^3 + 4x^2 + 8(m\sqrt{x})^2}{5x^2 + 10(m\sqrt{x})^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\,[9mx\sqrt{x} + 6xm^2 + x^2 + 4x + 8m^2]}{x[5x + 10m^2]}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{9mx^2\sqrt{x} + 6xm^2 + x^2 + 4x + 8m^2}{5x + 10m^2} = \frac{8m^2}{10m^2} = \frac{4}{5}.$$

E mesmo diminuindo o grau do caminho, o limite ainda tende a $\frac{4}{5}$.

Isso deve nos levar a pensar que o limite de fato existe e é igual a $\frac{4}{5}$.

Exemplo Resolvido

Vamos utilizar um teorema que permita afirmar que, de fato, $L = \frac{4}{5}$.

Note que podemos decompor a função como

$$f(x,y) = \frac{9x^2y + 6xy^2 + x^3 + 4x^2 + 8y^2}{5x^2 + 10y^2} = \frac{9x^2y + 6xy^2 + x^3}{5x^2 + 10y^2} + \frac{4x^2 + 8y^2}{5x^2 + 10y^2}$$

$$= \frac{9x^2y}{5x^2 + 10y^2} + \frac{6xy^2}{5x^2 + 10y^2} + \frac{x^3}{5x^2 + 10y^2} + \frac{4(x^2 + 2y^2)}{5(x^2 + 2y^2)}$$

$$= 9y\frac{x^2}{5x^2 + 10y^2} + 6y\frac{y^2}{5x^2 + 10y^2} + x\frac{x^2}{5x^2 + 10y^2} + \frac{4}{5}$$

$$= (9y + x)\frac{x^2}{5x^2 + 10y^2} + 6y\frac{y^2}{5x^2 + 10y^2} + \frac{4}{5}$$

Como temos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 9y + x = 0$ e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 6y = 0$

Vamos mostrar que as expressões $\frac{x^2}{5x^2+10y^2}$ e $\frac{x^2}{5x^2+10y^2}$ são limitadas.

Exemplo Resolvido

Comparando os termos do numerador e do denominador, vemos que

$$x^2 \leq 5x^2 \leq 5x^2 + 10y^2 \qquad \text{(pois } 10y^2 \geq 0\text{)}$$

e

$$y^2 \leq 10y^2 \leq 5x^2 + 10y^2 \qquad \text{(pois } 5x^2 \geq 0\text{)}$$

Com isso, obtemos que

$$\left|\frac{x^2}{5x^2 + 10y^2}\right| = \frac{x^2}{5x^2 + 10y^2} \leq \frac{5x^2 + 10y^2}{5x^2 + 10y^2} = 1$$

e

$$\left|\frac{y^2}{5x^2 + 10y^2}\right| = \frac{y^2}{5x^2 + 10y^2} \leq \frac{5x^2 + 10y^2}{5x^2 + 10y^2} = 1$$

são válidos para todo (x, y).

Portanto as expressões são limitadas, conforme desejamos.

Assim

Exemplo Resolvido

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (9y+x)\frac{x^2}{5x^2+10y^2} + 6y\frac{y^2}{5x^2+10y^2} + \frac{4}{5}$$

$$= 0 + 0 + \frac{4}{5} = \frac{4}{5}.$$

Com isso, mostramos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe, o que garante que o item (ii) da Definição 1 está satisfeito.

iii) Por fim, reunindo o que fizemos nos itens (i) e (ii) temos que, para f ser contínua, é necessário que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

ou seja,

$$\frac{4}{5} = b$$

Portanto, concluímos que f é contínua se e somente se

$$b = \frac{4}{5}.$$