Universidade do Estado de Santa Catarina
Centro de Ciências Tecnológicas
Departamento de Matemática

Projeto Pré-Cálculo
Gráficos de funções e Funções Afins

1. Videoaula

1.1. Gráficos de funções.

GRÁFICO DE FUNÇÕES

Se $f : A \to B$ é uma função. O gráfico de f é o conjunto de pares ordenados

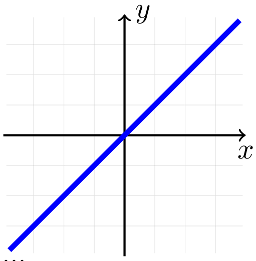
$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

plotado em um plano cartesiano. Em outras palavras, o gráfico de f é o conjunto de todos os pontos (x, y) de forma que $y = f(x)$.

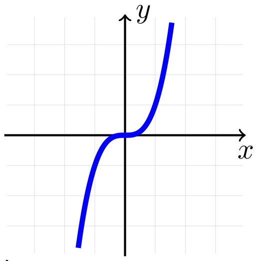
Exemplo 1. Combine a função com sua representação gráfica.

(1) $f(x) = x^2$
(2) $f(x) = x^3$
(3) $f(x) = \sqrt{x}$
(4) $f(x) = x$
(5) $f(x) = \frac{1}{x}$
(6) $f(x) = |x|$

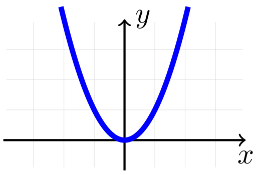
i.



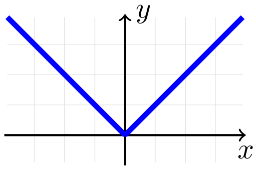
ii.



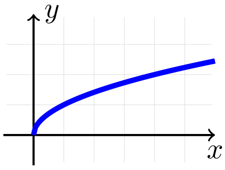
iii.



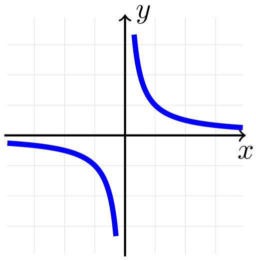
iv.



v.



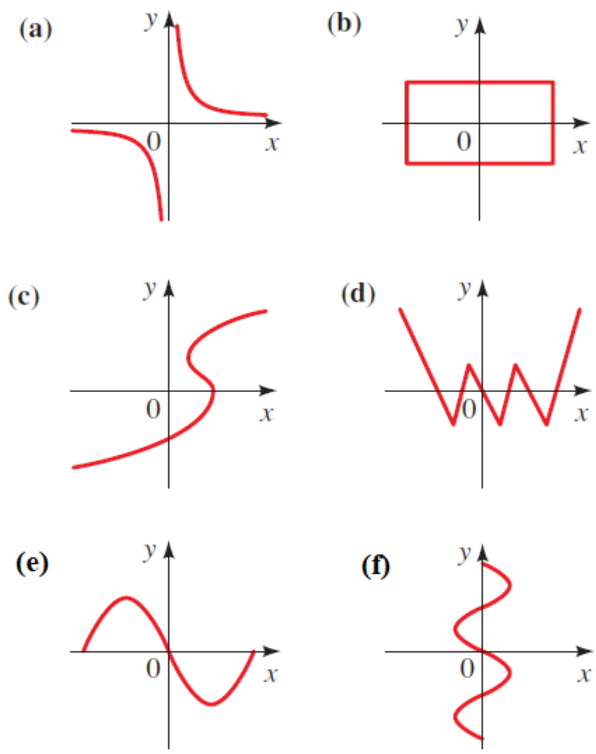
vi.



(a) iii., (b) ii., (c) v., (d) i., (e) vi. e (f) iv.

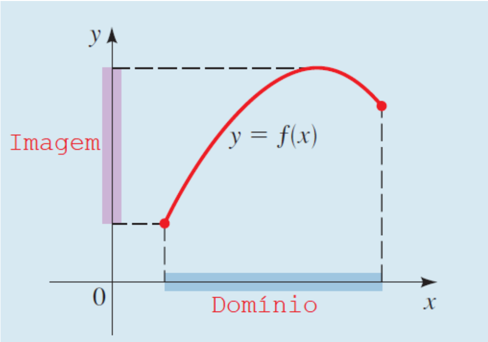
Uma curva no plano cartesiano é o gráfico de uma função se, e somente se, nenhuma reta vertical cruzar a curva mais de uma vez.

Exemplo 2. Use o teste de reta vertical para determinar se a curva é um gráfico de uma função de x.



São gráficos de funções as letras (a), (d) e (e)

O domínio e a imagem de uma função $y = f(x)$ podem ser obtidos a partir de um gráfico de f, como mostrado na figura. O domínio é o conjunto de todos os valores x para os quais f está definido e a imagem é todos os valores y correspondentes.



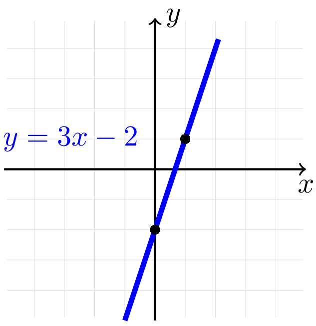
1.2. Funções Afins.

FUNÇÕES AFINS

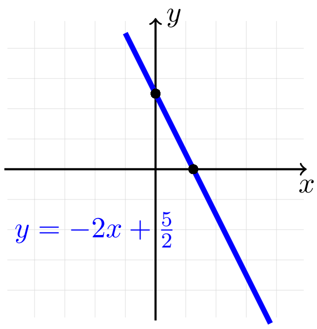
Uma função f da forma $f(x) = ax + b$ é chamada de função afim ou função de $1°$ grau. A representação gráfica de uma função afim é uma reta no plano cartesiano.

Exemplo 3. Esboce o gráfico das funções afins $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = -2x + \frac{5}{2}$.
Para traçar uma reta precisamos apenas de dois pontos.

x	$y = 3x - 2$
0	-2
1	1

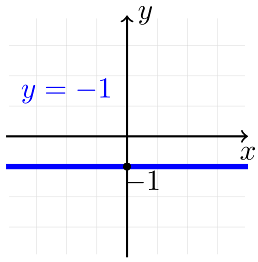


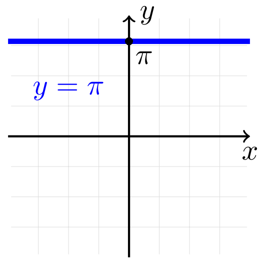
x	$y = -2x + \frac{5}{2}$
0	$\frac{5}{2}$
$\frac{5}{4}$	0



- Dizemos que o coeficiente a da função $f(x) = ax + b$ é o coeficiente angular ou a inclinação da reta.
- O gráfico da função $f(x) = ax + b$ intersecta o eixo y no ponto b. O coeficiente b é conhecido como coeficiente linear da reta.
- Um caso especial de uma função afim ocorre quando a inclinação é $a = 0$.
- A função $f(x) = b$, onde b é um número determinado, é chamada de função constante porque todos os seus valores são o mesmo número, ou seja, b. Seu gráfico é a reta horizontal paralela os eixo x e passa pelo ponto $(0, b)$.

Exemplo 4. Esboce o gráfico das funções $f(x) = -1$ e $h(x) = \pi$.

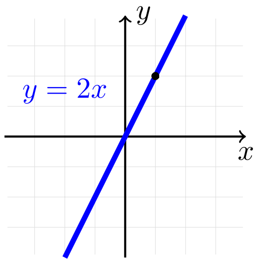


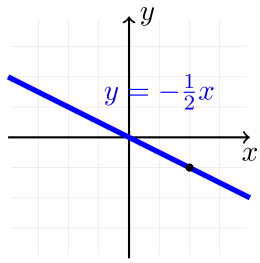


Outro caso especial de uma função afim ocorre quando $b = 0$.

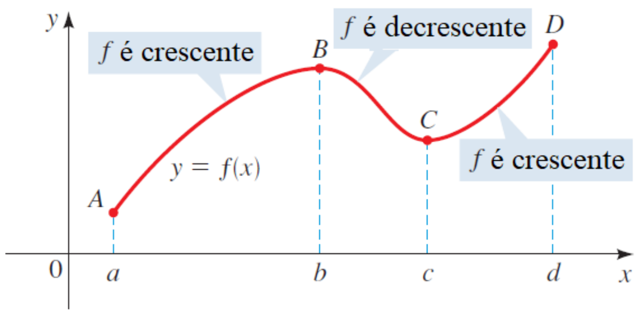
- A função $f(x) = ax$, onde a é um número determinado com $a \neq 0$, é conhecida como função linear.
- Em particular, quando $a = 1$, chamamos a função $f(x) = x$ de função identidade.
- O gráfico de qualquer função linear é uma reta que passa pela origem.

Exemplo 5. Esboce o gráfico das funções $f(x) = 2x$ e $f(x) = -\frac{1}{2}x$.



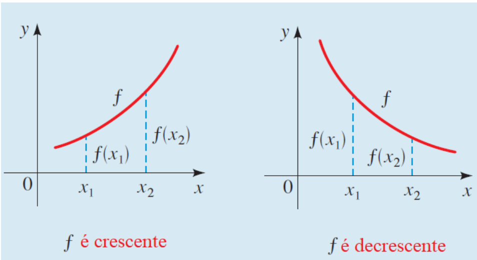


1.3. **Funções crescente e decrescentes.** O gráfico mostrado na figura abaixo sobe, desce e depois sobe novamente à medida que avançamos da esquerda para a direita: sobe de A para B, desce de B para C e sobe de C para D. Dizemos que a função f é crescente quando o gráfico sobe e é decrescente quando o gráfico desce.



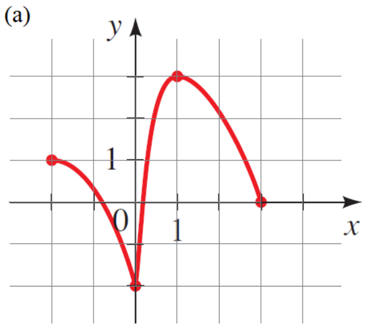
FUNÇÕES CRESCENTE E DECRESCENTES

- f é crescente em um intervalo I se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ em I.
- f é decrescente em um intervalo I se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 > x_2$ em I.

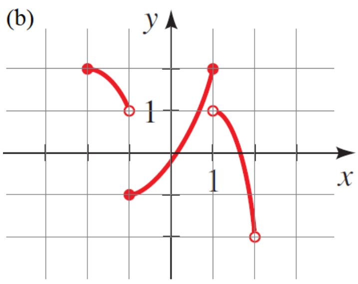


Exemplo 6. O gráfico de uma função f é dado. Use o gráfico para estimar o seguinte:

i. O domínio e a imagem de f.
ii Os intervalos nos quais f é crescente e nos quais f é decrescente.



$\text{Dom}(f) = [-2, 3]$, $\text{Im}(f) = [-2, 3]$, f é crescente em $(0, 1)$ e decrescente em $(-2, 0)$ e $(1, 3)$.

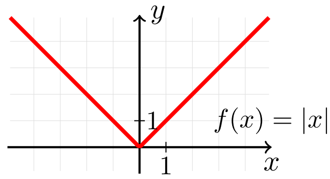


$\text{Dom}(f) = [-2, 2)$, $\text{Im}(f) = (-2, 2]$, f é decrescente em $(-2, -11)$ e $(1, 2)$ e crescente em $(-1, 1)$.

1.4. **Funções Modulares.** Um tipo especial de função, conhecida como função modular, apresenta-se da forma $f(x) = |x|$. Utilizando a definição de módulo, temos que

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

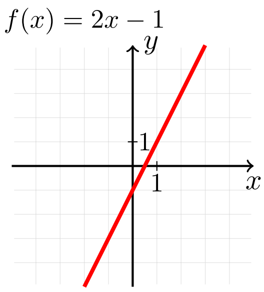
- O domínio e imagem da função modular são $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [0, +\inf)$.
- Por meio da definição apresentada acima, podemos fazer a representação gráfica da função $f(x) = |x|$.

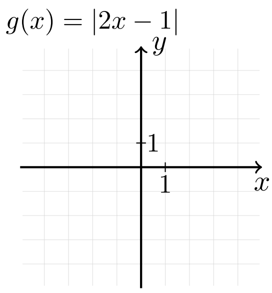


Exemplo 7. Utilizando a definição de módulo, complete as expressões abaixo, definindo a função $f(x) = |x - 2|$ e, por meio dessa definição, faça um esboço de seu gráfico.

$$f(x) = |x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{se } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2), & \text{se } x - 2 > 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x - 2, & \text{se } x \geq 2 \\ -x + 2, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Exemplo 8. O gráfico de $f(x) = 2x - 1$ é mostrado abaixo. Por meio desse, esboce, no plano cartesiano ao lado, o gráfico de $g(x) = |2x - 1|$.



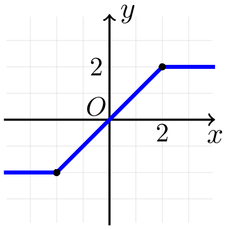


2. Atividade em sala de aula

(1) Esboce o gráfico e determine o domínio e imagem de cada uma das seguintes funções.
  (a) $f(x) = \sqrt{2}$
  (b) $h(x) = \dfrac{x + 2}{3}$
  (c) $f(t) = 4 - 5t$
  (d) $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$
  (e) $m(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{se } x \leq -1 \\ -x & \text{se } x > -1. \end{cases}$

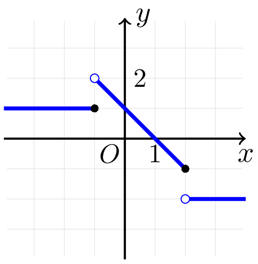
Exemplo 9. É fornecido um gráfico de uma função definida por partes. Encontre uma fórmula para a função na forma indicada.

(a)



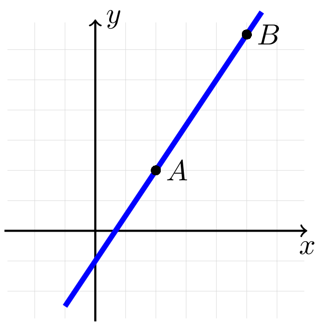
$$f(x) = \begin{cases} & \text{se } x < -2 \\ & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

(b)



$$f(x) = \begin{cases} & \text{se } x \leq -1 \\ & \text{se } -1 < x \leq 2 \\ & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

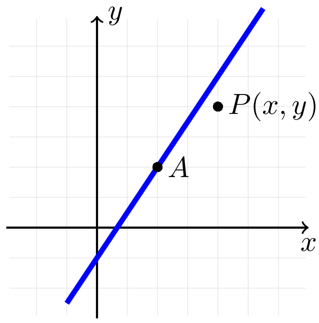
(2) A inclinação m de uma reta não vertical que passa pelos pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ é



$m =$

A inclinação de uma reta vertical não está definida.

O ponto $P(x, y)$, com $x \neq x_1$, pertence a reta que passa pelo ponto $A(x_1, y_1)$ e tem a inclinação m se, e somente se, a inclinação da reta que passa por A e P for igual a m, ou seja,



$m =$

Esta equação pode ser reescrita na forma

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Note que a equação também é satisfeita quando $x = x_1$ e $y = y_1$.

Portanto, é uma equação da reta que passa pelo ponto $A(x_1, y_1)$ e tem inclinação m é

(3) Encontre a regra da função cujo o gráfico é uma reta que passa pelos pontos $(-1, 2)$ e $(3, -4)$.

(4) Um tipo especial de função, conhecida como função modular, apresenta-se da forma $f(x) = |x|$. Utilizando a definição de módulo, temos que

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

(a) Determine o domínio e imagem da função modular.

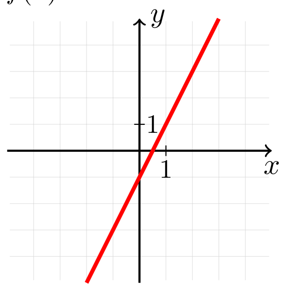
(b) Por meio da definição apresentada acima, faça a representação gráfica da função $f(x) = |x|$.

(c) Utilizando a definição de módulo, complete as expressões abaixo, definindo a função $f(x) = |x - 2|$ e, por meio dessa definição, faça um esboço de seu gráfico.

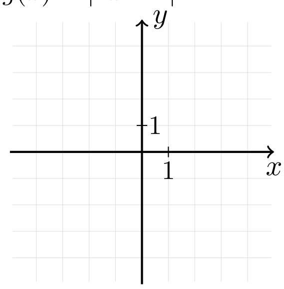
$$f(x) = |x - 2| = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ & \text{se } \_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_ & \text{se } \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

(d) O gráfico de $f(x) = 2x - 1$ é mostrado abaixo. Por meio desse, esboce, no plano cartesiano ao lado, o gráfico de $g(x) = |2x - 1|$.

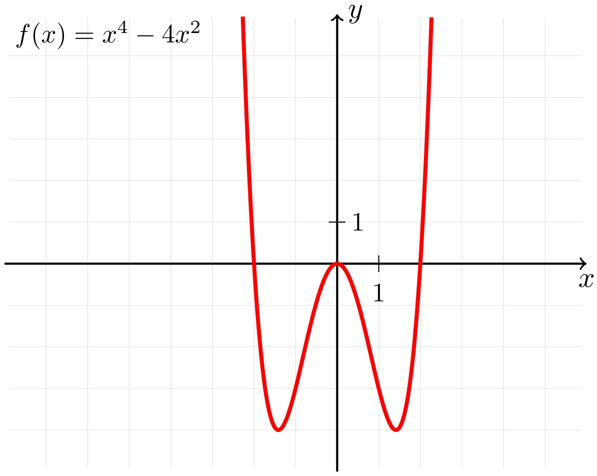
$f(x) = 2x - 1$

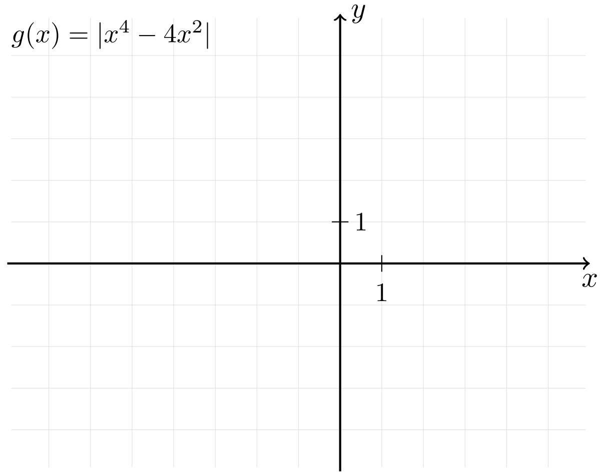


$g(x) = |2x - 1|$



(e) O gráfico de $f(x) = x^4 - 4x^2$ é mostrado abaixo. Por meio desse, esboce, no plano cartesiano abaixo, o gráfico de $g(x) = |x^4 - 4x^2|$.

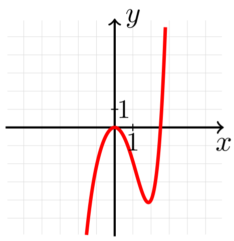




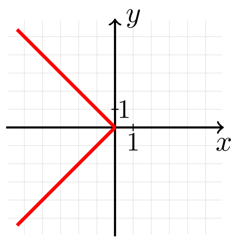
3. Exercícios

(1) Determine quais curvas são gráficos de uma função $y = f(x)$.

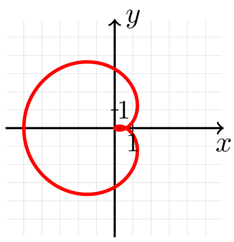
(a)



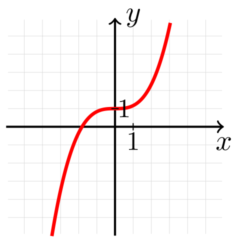
(b)



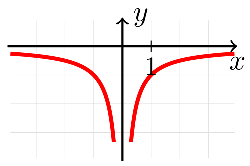
(c)



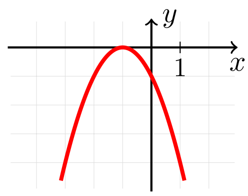
(d)



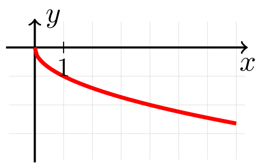
i.



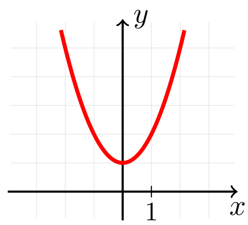
ii.



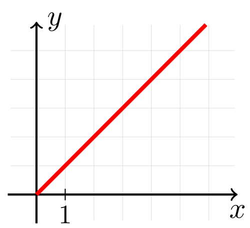
iii.



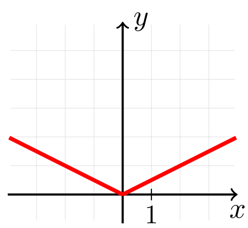
iv.



v.



vi.



(2) Combine cada uma das funções abaixo com seu respectivo gráfico.

(a) $f(x) = -(x+1)^2$

(b) $h(x) = -\left|\dfrac{1}{x}\right|$

(c) $q(x) = (-x)^2 + 1$

(d) $g(x) = -\sqrt{x}$

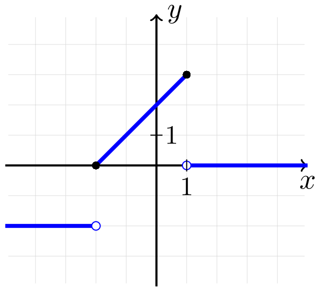
(e) $r(x) = (\sqrt{x})^2$

(f) $p(x) = \left|-\dfrac{x}{2}\right|$

(3) A medida em que uma bola é inflada, a espessura E da borracha que a compõe se relaciona com o raio r dessa bola, por meio da função $E(r) = \dfrac{0,5}{r^2}$, onde E e r são medidos em centímetros. Faça um gráfico da função que representa a espessura da borracha, quando o raio r varia entre 10 cm e 100 cm.

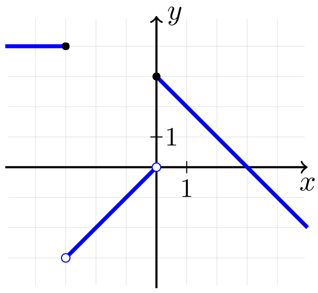
(4) Encontre as fórmulas para as funções definidas por partes representadas nos gráficos a seguir.

(a)



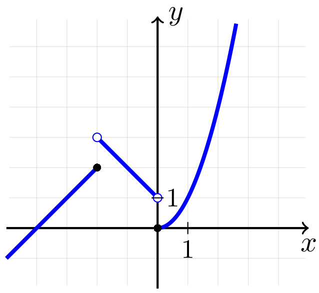
$$f(x) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ & \text{se } x < -2 \\ \_\_\_\_\_\_ & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \\ \_\_\_\_\_\_ & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

(b)



$$f(x) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ & \text{se } x \leq -3 \\ \_\_\_\_\_\_ & \text{se } -3 < x < 0 \\ \_\_\_\_\_\_ & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

(c)



$$f(x) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_ & \text{se } x \leq -2 \\ \_\_\_\_\_\_ & \text{se } -2 < x < 0 \\ \_\_\_\_\_\_ & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

(5) Esboce o gráfico e determine o domínio e imagem de cada uma das seguintes funções.

(a) $h(x) = \frac{1}{3}(x - 5)$

(b) $r(x) = -\dfrac{1}{x}$

(c) $p(x) = 1 + \sqrt{x}$

(d) $g(x) = x^3 - 5$

(e) $k(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

(f) $q(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$

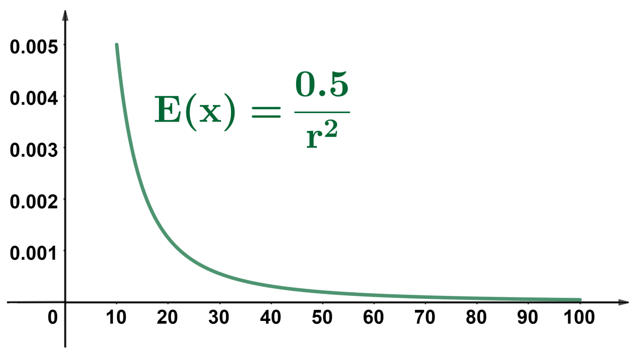
Gabarito

(1) (a) e (d)

(2) (a) ii. (c) iv. (e) v.

(b) i. (d) iii. (f) vi.

(3)

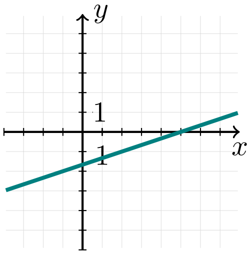


(4) (a) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x < -2 \\ x + 2 & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

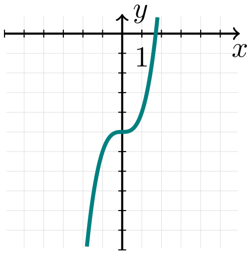
(b) $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{se } x \leq -3 \\ x & \text{se } -3 < x < 0 \\ -x + 3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{se } x \leq -2 \\ -x + 1 & \text{se } -2 < x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

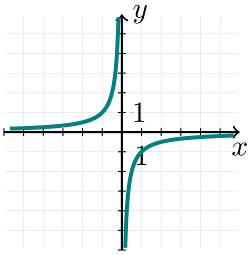
(5) (a) $\text{Dom}(h) = \mathbb{R}$
$\text{Im}(h) = \mathbb{R}$



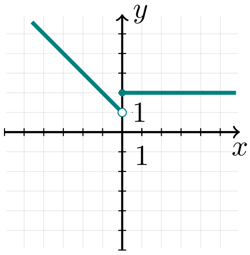
(d) $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$
$\text{Im}(g) = \mathbb{R}$



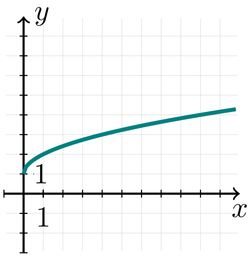
(b) $\text{Dom}(r) = \mathbb{R}^*$
$\text{Im}(r) = \mathbb{R}^*$



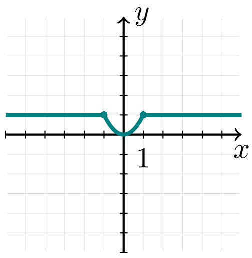
(e) $\text{Dom}(k) = \mathbb{R}$
$\text{Im}(k) = (1, +\infty)$



(c) $\text{Dom}(p) = \mathbb{R}_+$
$\text{Im}(p) = [1, +\infty)$

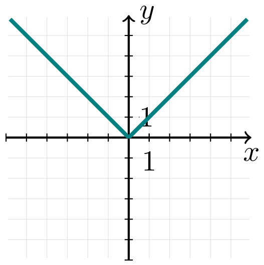


(f) $\text{Dom}(q) = \mathbb{R}$
$\text{Im}(q) = [0, 1]$

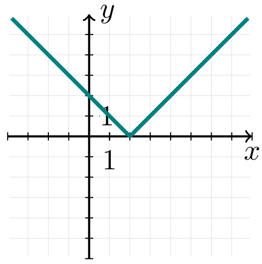


(6) (a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

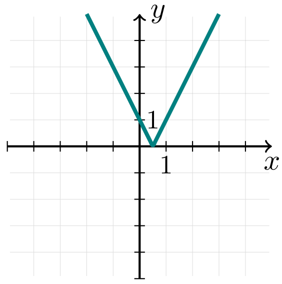
(b)



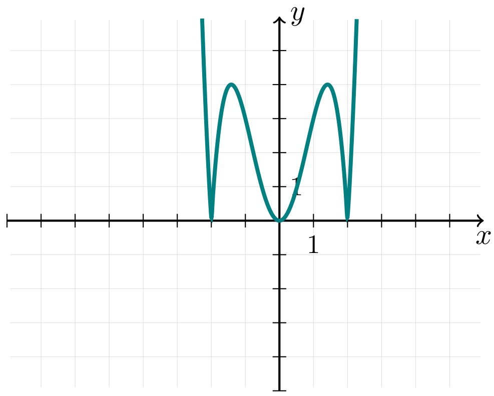
(c) $f(x) = |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq -2 \\ 2 - x & \text{se } x < -2 \end{cases}$



(d)



(e)



Bibliografia

(1) STEWART, James et all. Precalculus: Mathematics for Calculus. Seventh Edition. Boston: Cengage Learning, 2014.