Análise de Variação de Funções

Ponto Crítico: O ponto $c \in D_f$ tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c) \nexists$ é chamado de ponto crítico

Teorema de Weirstrass: Se f é uma função contínua, definida em um intervalo fechado $[a,b]$. Enta f assume seu máximo e mínimo absoluto em $[a,b]$

Funções Crescentes / Decrescentes:

- Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$ então f é crescente em $[a,b]$;
- Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a,b)$ então f é decrescente em $[a,b]$;
- Se $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$ então f é constante em $[a,b]$;

Teste da 1ª derivada: Seja $y = f(x)$ uma função contínua num intervalo fechado $[a,b]$ que possui derivada em todo o ponto do intervalo (a,b), exceto possivelmente num ponto c.

- Se $f'(x) > 0$ $\forall x < c$ e $f'(x) < 0$ $\forall x > c$, então f tem máximo relativo em c;
- Se $f'(x) < 0$ $\forall x < c$ e $f'(x) > 0$ $\forall x > c$, então f tem mínimo relativo em c;
- Se $f'(x) > 0$ $\forall x < c$ e $f'(x) > 0$ $\forall x > c$, então f não tem ponto nem de maximo nem de mínimo relativo.
- Se $f'(x) < 0$ $\forall x < c$ e $f'(x) < 0$ $\forall x > c$, então f não tem onto nem de maximo nem de mínimo relativo.

Teste da 2ª derivada: Seja f uma função derivável num intervalo aberto (a,b) e c um ponto crítico de f neste intervalo tal que $f'(c) = 0$, para $c \in (a,b)$. Se f admite a derivada f'' em (a,b) e se:

1. $f''(c) < 0$, então f tem um valor máximo relativo em c;
2. $f''(c) > 0$, então f tem um valor mínimo relativo em c;

Concavidade: Se f for diferenciável num intervalo I então:

1. f tem concavidade para cima se f' for crescente em I.
2. f tem concavidade para baixo se f' for decrescente em I.

Seja f uma função duas vezes diferenciável em um intervalo $I = (a,b)$. Se:

1. $f''(x_0) > 0$ quando $x_0 \in I$, então o gráfico de f tem concavidade para cima sobre I.
1. $f''(x_0) < 0$ quando $x_0 \in I$, então o gráfico de f tem concavidade para baixo sobre I.

Pontos de Inflexão: Um ponto $P(c, f(c))$ do gráfico de uma função contínua f é chamado de ponto de inflexão, se existe um intervalo (a,b) contendo c, tal que uma das situações ocorra:

1. f tem concavidade voltada para cima em (a,c) e para baixo em (c,b);
2. f tem concavidade voltada para baixo em (a,c) e para cima em (c,b);

- Seja $f(x)$ uma função diferenciável sobre (a,b) onde $c \in (a,b)$, se $P(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de $f(x)$ e se existe $f''(c)$, então $f''(c) = 0$
- Seja $f(x)$ uma função contínua sobre um conjunto I onde $(a,b) \in I$, se $c \in (a,b)$ tal que $f''(c) = 0$ ou $f''(c) \nexists$ e se:

1. $f''(x) > 0$, quando $x \in (a,c)$ e $f''(x) < 0$ quando $x \in (c,b)$, então $P(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de $f(x)$;
2. $f''(x) < 0$, quando $x \in (a,c)$ e $f''(x) > 0$ quando $x \in (c,b)$, então $P(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de $f(x)$;
3. $f''(x) < 0$ quando $x \in (a,c)$ e $f''(x) < 0$ quando $x \in (c,b)$ (ou $f''(x) > 0$ quando $x \in (a,c)$ e $f''(x) > 0$ quando $x \in (c,b)$) então $P(c, f(c))$ não é um ponto de inflexão do gráfico de $f(x)$.

Assíntotas do Gráfico de uma Função:

- **Assíntota Vertical:** a reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições for verdadeira:
  - $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
  - $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
  - $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$
  - $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

- **Assíntotas Oblíquas:** A curva $f(x)$ tem uma assíntota oblíqua, cuja equação é da forma $y = Kx + b$, onde os valores dos coeficientes K e b, se existirem os limites:

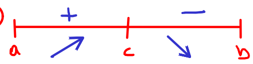
$$K = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - Kx)$$

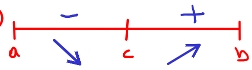
- **Obs:** Se um dos limites acima não existir então a curva não tem assíntota oblíqua.

Roteiro para construção do gráfico de funções usando Derivadas:

1. Domínio de f;
2. Achar pontos críticos: $\forall c \in D_f \mid f'(c) = 0$ ou $f'(c) \nexists$
3. Estudo do sinal de f':
   - → f é crescente se $f' > 0$
   - → f é decrescente se $f' < 0$
   - → nos pontos em que há troca de sinal de f' e que são pontos críticos, são pontos extremos locais
     ↳ máx. ou mín.

- Teste da 1ª derivada: $f'(c) = 0$ ou $f'(c) \nexists$

①  → c é um ponto de máximo local

②  → c é um ponto de mínimo local

③ Se não há troca de sinal em $f'(c)$, c não tem máx. nem mín. local.

4. Candidatos a serem pontos de inflexão
   - $f''(x_0) = 0$ ou $f''(x_0) \nexists$, $x_0 \in D_f$

   Pode ocorrer algum ponto de inflexão em algum $x_0 \notin D_f$ desde que, haja troca de concavidade. Para isso a função precisa estar definida na vizinhança de x_0.

5. Estudo do sinal de f''
   - → $f'' > 0$, então f tem concavidade para cima
   - → $f'' < 0$, então f tem concavidade para baixo
   - → ponto de inflexão nos pontos em que ocorre a troca de concavidade.

- Teste da 2ª derivada:
  - → se $f''(c) < 0$ → c é um ponto de máximo local
  - → se $f''(c) < 0$ → c é um ponto de mínimo local
  - → se $f''(c) = 0$ → o teste é inconclusivo

6. Verificar se existem assíntotas

   6.1. Assíntota Vertical a reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições for verdadeira:

   - $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
   - $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
   - $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$
   - $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

   6.2. Assíntota Oblíqua: A reta $y = Kx + b$ é assíntota oblíqua se:

   $$K = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - Kx)$$

- Obs: Se um dos limites acima não existir então a curva não tem assíntota oblíqua.

7. Esboço do Gráfico.