Álgebra Linear

Matriz de um transformação Linear

Katiani, Graciela e Marnei

Transformação Linear associada a uma Matriz: Vimos que toda transformação linear $T: R^n \to R^m$ pode ser escrita matricialmente por:

$$T(v) = A v$$

Dada a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \to T(x, y, z) = (10 x - 20 y - 30 z, x - 2 y - 3 z)$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 10x - 20y - 30z \\ x - 2y - 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -20 & -30 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \implies T(v) = A v$$

Portanto, a matriz T, que denotamos por A é: $A = \begin{bmatrix} 10 & -20 & -30 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

Quando obtemos a matriz de uma transformação estamos levando em conta as bases associadas ao domínio e contradomínio. No caso acima estamos considerando as bases canônicas. Logo, a matriz A é chamada de *matriz canônica* da transformação. Alguns livros denotam A=[T], e portanto, T(v) = T v



Seja a Transformação Linear T: $R^3 \rightarrow R^2$ definida pela expressão:

$$T(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$$

Note que: $Im(T) = \{(2x - y + z, 3x + y - 2z); x, y, z \in \mathbb{R}\} = ger\{(2,3), (-1,1), (1,-2)\}$

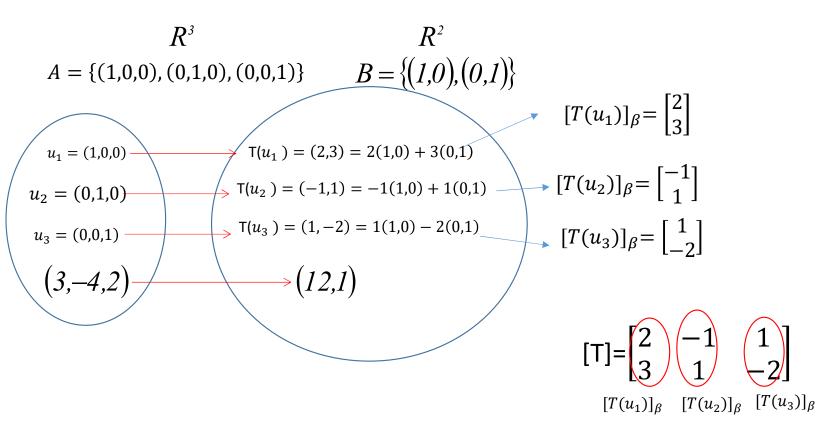
Observe ainda que a matriz canônica $A=[T]=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ contém em suas colunas os geradores da Im(T).

$$T(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$T(3,-4,2) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Considerando as bases canônicas, tem-se:



Podemos generalizar essa ideia para quaisquer outras bases para o domínio e contradomínio da transformação, e obter diferentes representações matriciais para uma mesma transformação T.

Seja $T: V \to W$ linear, $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V e $\beta = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W.

Então $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ são vetores de W e portanto

$$T(v_1) = a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m$$

 $\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
 $T(v_n) = a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m$

A transposta da matriz dos coeficientes deste sistema, denotada por $[T]^{\alpha}_{\beta}$

é chamada matriz de T em relação às bases α e β :

$$[T]^{lpha}_{eta} = egin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \ dots & & dots \ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
 $[T(v_1)]_{eta} & \cdots & [T(v_n)]_{eta}$



Teorema

Sejam V e W espaços vetoriais, α base de V, β base de W e $T:V\to W$ uma aplicação linear. Então, para todo $v\in V$ vale:

$$[T(v)]_{\beta} = [T]^{\alpha}_{\beta} \centerdot [v]_{\alpha}$$

Observações

Seja $T:V\to W$ uma transformação linear e α e β bases de V e W, respectivamente. Então

$$\dim \operatorname{Im}(T) = \operatorname{posto} \ \operatorname{de} \ [T]_{\beta}^{\alpha}$$

 $\dim Ker(T) = nulidade de [T]^{\alpha}_{\beta} = número de colunas de [T]^{\alpha}_{\beta} - posto [T]^{\alpha}_{\beta}$



Observações

Dada uma base β e tranformação linear $T: V \to V$ denotaremos a matriz $[T]^{\beta}_{\beta}$ apenas por $[T]_{\beta}$ e ela será chamada de matriz de T em relação a base β .

Seja $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear e α a base canônica de \mathbb{R}^n , então a matriz de T em relação a base canônica α , $[T]^{\alpha}_{\alpha}$, será denotada simplesmente por [T].



Exemplo: Seja a Transformação Linear T: $R^3 \rightarrow R^2$ definida pela expressão

$$T(x,y,z) = (2x-y+z,3x+y-2z)$$
. Sejam as bases $A = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ e $B = \{(2,1),(5,3)\}$

- a) Determine $[T]_{B}^{A}$
- a) A matriz é de ordem 2 × 3:

$$[T]_{B}^{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow$$

$$T(v_{1})_{B} T(v_{2})_{B} T(v_{3})_{B}$$

$$T(v_1) = T(1, 1, 1) = (2, 2) = a_{11}(2, 1) + a_{21}(5, 3)$$

$$\begin{cases} 2a_{11} + 5a_{21} = 2 \\ \vdots \\ a_{11} + 3a_{21} = 2 \end{cases} \quad \vdots \quad \begin{cases} a_{11} = -4 \\ \vdots \\ a_{21} = 2 \end{cases}$$

$$T(v_2) = T(0, 1, 1) = (0, -1) = a_{12}(2, 1) + a_{22}(5, 3)$$

$$\begin{cases} 2a_{12} + 5a_{22} = 0 \\ a_{12} + 3a_{22} = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{12} = 5 \\ a_{22} = -2 \end{cases}$$

$$T(v_3) = T(0, 0, 1) = (1, -2) = a_{13}(2, 1) + a_{23}(5, 3)$$

$$T(v_1) = T(1, 1, 1) = (2, 2) = a_{11}(2, 1) + a_{21}(5, 3)$$

$$\begin{cases} 2a_{13} + 5a_{23} = 1 \\ a_{13} + 3a_{23} = -2 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$a_{13} = 13$$

$$\vdots$$

$$a_{23} = -5$$

$$[T]_{B}^{A} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 13 \\ & & \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

b) Se v=(3, -4,2) determinar $T(v)_B$

Sabe-se que:

$$[T(v)]_B = [T]_B^A [v]_A$$

Como v está expresso com componentes na base canônica, isto é,

$$v = (3, -4, 2) = 3(1, 0, 0) - 4(0, 1, 0) + 2(0, 0, 1),$$

teremos que, primeiramente, expressá-lo na base A. Seja $v_A^* = (a, b, c)$, isto é:

$$(3, -4, 2) = a(1, 1, 1) + b(0, 1, 1) + c(0, 0, 1)$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ a+b = -4 \\ a+b+c=2, \end{cases}$$
 sistema cuja solução é $a=3$, $b=-7$ e $c=6$,

$$v_A = (3, -7, 6).$$

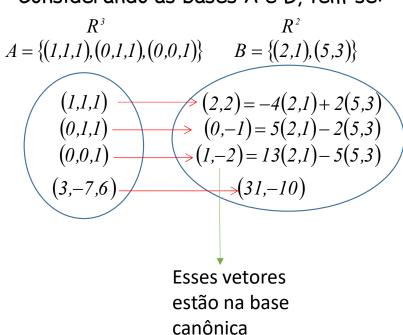
$$[T(v)]_B = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 13 \\ & & \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$[T(v)]_{B} = \begin{bmatrix} 31 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Seja a Transformação Linear T: $R^3 \rightarrow R^2$ definida pela expressão:

$$T(x,y,z) = (2x-y+z,3x+y-2z)$$

Considerando as bases A e B, tem-se:



$$T(3,-7,6) = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 13 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}$$
$$[T]_{B}^{A}$$

Os elementos da matriz $[T]_{B}^{A}$ são as coordenadas das imagens da base A em relação a base B.



Exercício proposto

Seja
$$T: R^3 \to M_2$$
 definida por $T(a,b,c) = \begin{bmatrix} b & 2a+2b+2c \\ 0 & 2c \end{bmatrix}$. Sejam $\alpha = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ base para $R^3 e \beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ uma base para M_2 .

- a) Determine $[T]^{\alpha}_{\beta}$
- b) Se v = (2, 3, -1), determine $[T(v)]_{\beta}$

