Exemplo:

1. $I = \int \frac{dx}{2x^2 + x - 1}$

Completando quadrados, temos que:

$$2x^2 + x - 1 = 2\left(x^2 + \tfrac{1}{2}x\right) - 1 = 2\left(x^2 + 2\tfrac{1}{2.\,2}x\right) - 1 = 2\left(x^2 + 2\tfrac{1}{4}x + \left(\tfrac{1}{4}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^2\right) - 1$$

$$= 2\left(\left(x + \tfrac{1}{4}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^2\right) - 1 = 2\left(x + \tfrac{1}{4}\right)^2 - 2\left(\tfrac{1}{16}\right) - 1 = 2\left(x + \tfrac{1}{4}\right)^2 - \tfrac{9}{8}$$

$$I = \int \frac{1}{2x^2 + x - 1} dx = \int \frac{1}{2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}} dx = \int \frac{1}{2\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right)} dx = \int \frac{1}{2\left(u^2 - \frac{9}{16}\right)} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(u^2 - \frac{9}{16}\right)} du$$

$$u \Longrightarrow du = dx$$

Pela substituição trigonométrica, temos que:

$$u = \frac{3}{4} sec(\theta) \Longrightarrow du = \frac{3}{4} sec(\theta)\mathrm{tg}\,(\theta) d\theta$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(u^2 - \frac{9}{16}\right)}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{3}{4}sec(\theta)\text{tg}\,(\theta)}{\left(\left(\frac{3}{4}sec(\theta)\right)^2 - \frac{9}{16}\right)}\,d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{3}{4}sec(\theta)\text{tg}\,(\theta)}{\frac{9}{16}(sec^2(\theta) - 1)}\,d\theta = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\int \frac{sec(\theta)\text{tg}\,(\theta)}{tg^2(\theta)}\,d\theta$$

$$u = \frac{3}{4}sec(\theta) \Longrightarrow du = \frac{3}{4}sec(\theta)\text{tg}\,(\theta)\,d\theta$$

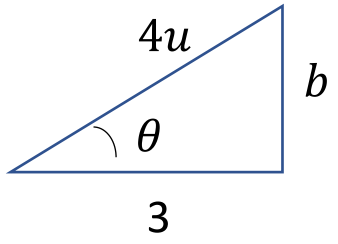
$$I = \frac{2}{3}\int \frac{sec(\theta)}{tg(\theta)}\,d\theta = \frac{2}{3}\int \frac{\frac{1}{cos(\theta)}}{\frac{sen(\theta)}{cos(\theta)}}\,d\theta = \frac{2}{3}\int \frac{1}{cos(\theta)}\frac{cos(\theta)}{sen(\theta)}\,d\theta = \frac{2}{3}\int \frac{1}{sen(\theta)}\,d\theta = \frac{2}{3}\int cossec(\theta)\,d\theta$$

$$I = \frac{2}{3}ln[cossec(\theta) - cotg(\theta)] + k$$

Como $\quad u = \dfrac{3}{4}sec(\theta) \Longrightarrow sec(\theta) = \dfrac{4u}{3}$

$$\Longrightarrow cos(\theta) = \frac{3}{4u}$$

Do triângulo retângulo, temos que: $cos(\theta) = \dfrac{3}{4u}$



Por Pitágoras: $9 + b^2 = 16u^2$

$$\Rightarrow b = \pm\sqrt{16u^2 - 9}$$

$$\Rightarrow sen(\theta) = \frac{\sqrt{16u^2 - 9}}{4u}$$

$$\Rightarrow cossec(\theta) = \frac{4u}{\sqrt{16u^2 - 9}}$$

$$\Rightarrow cotg(\theta) = \frac{3}{\sqrt{16u^2 - 9}}$$

Dessa forma, temos que:

$$I = \frac{2}{3} ln[cossec(\theta) - cotg(\theta)] + k$$

$$I = \frac{2}{3} ln\left[\frac{4u}{\sqrt{16u^2 - 9}} - \frac{3}{\sqrt{16u^2 - 9}}\right] + k$$

$$I = \frac{2}{3} ln\left[\frac{4u - 3}{\sqrt{16u^2 - 9}}\right] + k \Rightarrow I = \frac{2}{3} ln\left[\frac{4\left(x + \frac{1}{4}\right) - 3}{\sqrt{16\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - 9}}\right] + k \Rightarrow \boxed{I = \frac{2}{3} ln\left[\frac{4x - 2}{2x^2 + x - 1}\right] + k}$$

Observe que:

$$\frac{2}{3(2x-1)} - \frac{1}{3(x+1)} = \frac{1}{2x^2+x-1}$$

Dessa forma:

$$.\, I = \int \frac{dx}{2x^2+x-1} = \int \left(\frac{2}{3(2x-1)} - \frac{1}{3(x+1)} \right) dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{2x-1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{\boxed{x+1}} dx$$

$$u = 2x - 1$$
$$du = 2dx$$

$$v = x - 1$$
$$v = dx$$

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} - \frac{1}{3} \int \frac{dv}{v} \Longrightarrow I = \frac{2}{3} ln|u| - \frac{1}{3} ln|v| + k$$

$$\Longrightarrow \boxed{I = \frac{1}{3} ln|2x-1| - \frac{1}{3} ln|x+1| + k}$$

???

$$\frac{1}{2x^2+x-1} = \boxed{\frac{2}{3(2x-1)} - \frac{1}{3(x+1)}}$$

Reescrevendo o denominador:

$$\frac{1}{2x^2+x-1} = \frac{1}{(2x-1)(x+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(2x-1)}{(2x-1)(x+1)} = \frac{Ax+A+2Bx-B}{(2x-1)(x+1)}$$

Comparando os numeradores, temos que:

$$1 = Ax + A + 2Bx - B$$

$$0x + 1 = (A+2B)x + (A-B)$$

Comparando ambos os membros, temos que:

$$\begin{cases} A + 2B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} A &= \frac{2}{3} \\ B &= -\frac{1}{3} \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2x^2+x-1} = \frac{\frac{2}{3}}{2x-1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+1}}$$

Decomposição em Frações Parciais

Exemplo 2.

Decomposição em frações parciais está errada!

$$\frac{1}{(2x-1)(x+1)^2} = \boxed{\frac{A}{2x-1} + \frac{B}{(x+1)^2}} = \frac{A(x+1)^2 + B(2x+1)}{(2x-1)(x+1)^2} = \frac{A(x^2+2x+1) + B(2x+1)}{(2x-1)(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{(2x-1)(x+1)^2} = \frac{Ax^2 + 2Ax + A + 2Bx + B}{(2x-1)(x+1)^2}$$

$$1 = Ax^2 + 2Ax + A + 2Bx + B$$

$$0x^2 + 0x + 1 = Ax^2 + (2A + 2B)x + (A + B)$$

Comparando os dois membros, segue que:

$$\begin{cases} A = 0 \\ 2A + 2B = 0 \\ A + B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \boxed{\begin{array}{l} B = 0 \\ B = 1 \end{array}} \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema impossível}$$

Reiniciando…

$$\frac{1}{(2x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

Adaptando o mínimo múltiplo comum de números para funções:

$$\begin{array}{ccc|l}
2x-1\ , & x+1, & (x+1)^2 & 2x-1 \\
1\ , & x+1, & (x+1)^2 & x+1 \\
1\ , & 1, & x+1 & x+1 \\
\cline{4-4}
1\ , & 1, & 1 & (2x-1)(x+1)^2
\end{array}$$

$$\frac{1}{(2x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+B(2x-1)(x+1)+C(2x-1)}{(2x-1)(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{(2x-1)(x+1)^2} = \frac{A(x^2+2x+1) + B(2x^2+x-1) + C(2x-1)}{(2x-1)(x+1)^2}$$

$$1 = Ax^2 + 2Ax + A + 2Bx^2 + Bx - B + 2Cx - C$$

$$0x^2 + 0x + 1 = (A+2B)x^2 + (2A+B+2C)x + A - B - C$$

Por comparação, temos que:

$$\begin{cases} A + 2B = 0 \\ 2A + B + 2C = 0 \\ A - B - C = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = \frac{4}{9}, B = -\frac{2}{9}, C = -\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{(2x-1)(x+1)^2} = \frac{\frac{4}{9}}{2x-1} + \frac{-\frac{2}{9}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{3}}{(x+1)^2}$$

Técnica da Decomposição em Frações Parciais

É possível aplicar esta técnica quando o integrando é uma função racional da forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

em que **o grau de $\boldsymbol{p}$** $<$ **grau de $\boldsymbol{q}$**.

Caso o grau de p $\geq$ grau de q, deve-se efetuar a divisão de polinômios. E, se o resto não for nulo, surgirá uma parcela em que grau de p $<$ grau de q. Nesta parcela, poderá ser utilizada a decomposição em frações parciais.

$$\begin{array}{l|l} p(x) & q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{Q(x)q(x) + R(x)}{q(x)} = \frac{Q(x)q(x)}{q(x)} + \frac{R(x)}{q(x)} = Q(x) + \boxed{\frac{R(x)}{q(x)}}$$

Considerando a função $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, em que grau de p $<$ grau de q, temos das situações a serem consideradas:

1º CASO: Para cada fator $(\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{k}}$ de $q(x)$, ou seja, para cada raiz real de q com **multiplicidade $\boldsymbol{k}$**, existem k parcelas associados a este termo e são da forma:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k},$$

$a \neq 0$ e $k \in \mathbb{N}^*$.

Observe que no exemplo 2, foi esta decomposição que gerou um sistema com solução única.

$$\frac{1}{(2x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

2º CASO: Para cada fator quadrático irredutível da forma $\left(\boldsymbol{ax}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c}\right)^{\boldsymbol{k}}$ de $q(x)$

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac < 0}$$

Considerando a função $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, em que grau de p $<$ grau de q, temos das situações a serem consideradas:

1º CASO: Para cada fator $(\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{k}}$ de $q(x)$, ou seja, para cada raiz real de q com **multiplicidade $\boldsymbol{k}$**, existem k parcelas associados a este termo e são da forma:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k},$$

$a \neq 0$ e $k \in \mathbb{N}^*$.

Observe que no exemplo 2, foi esta decomposição que gerou um sistema com solução única.

$$\frac{1}{(2x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

2º CASO: Para cada fator quadrático irredutível da forma $\left(\boldsymbol{ax^2} + \boldsymbol{bx} + \boldsymbol{c}\right)^{\boldsymbol{k}}$ de $q(x)$, ou seja, para cada par de raízes imaginárias de q com **multiplicidade $\boldsymbol{k}$**, existem k parcelas associados a este termo e são da forma:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{A_3x+B_3}{(ax^2+bx+c)^3} + \cdots + \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k},$$

$a \neq 0$ e $k \in \mathbb{N}^*$.