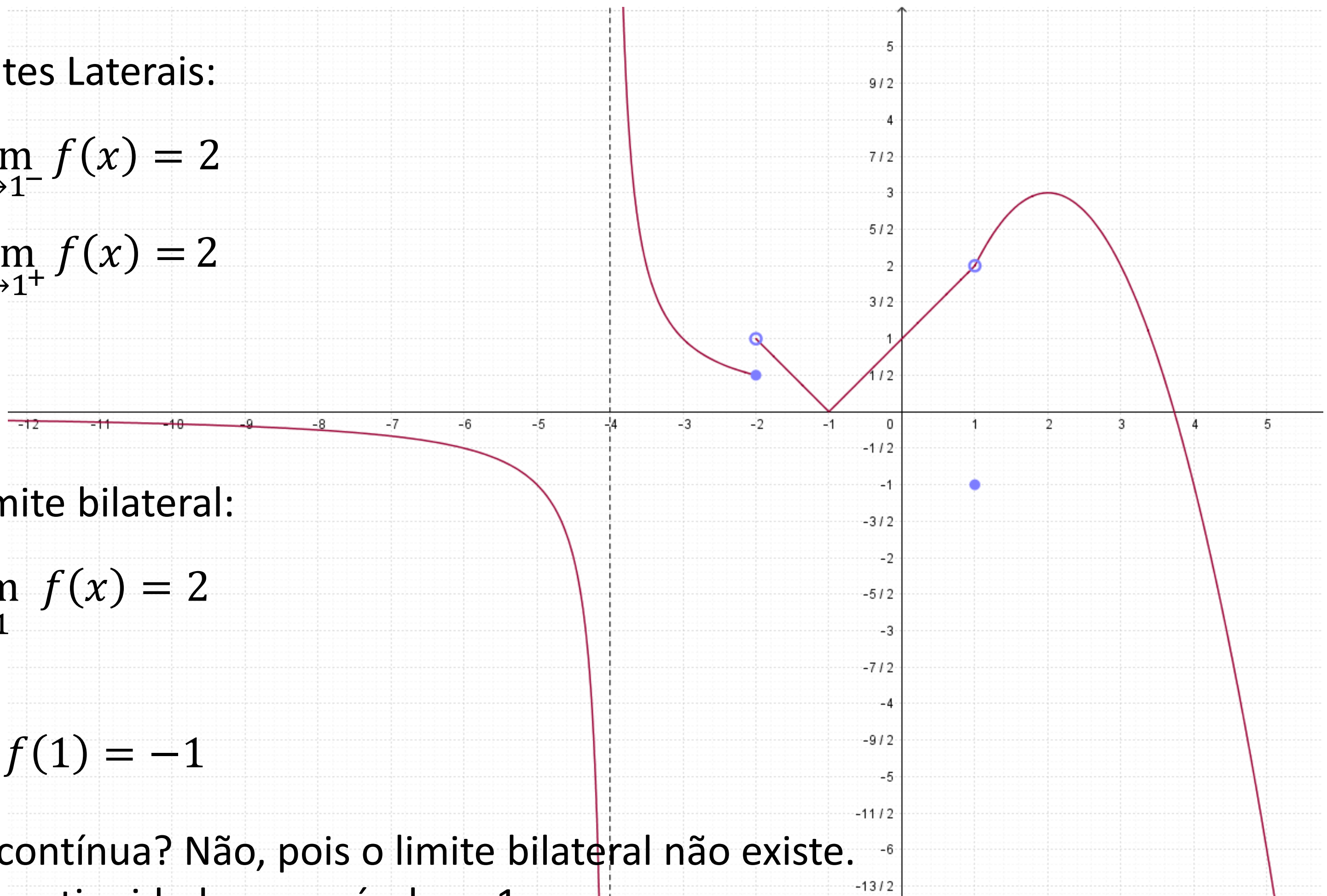
Revisão:

A partir do gráfico dado, encontre os limites nos pontos indicados e classifique a(s) descontinuidade(s), se existirem.



Limites Laterais:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

Limite bilateral:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

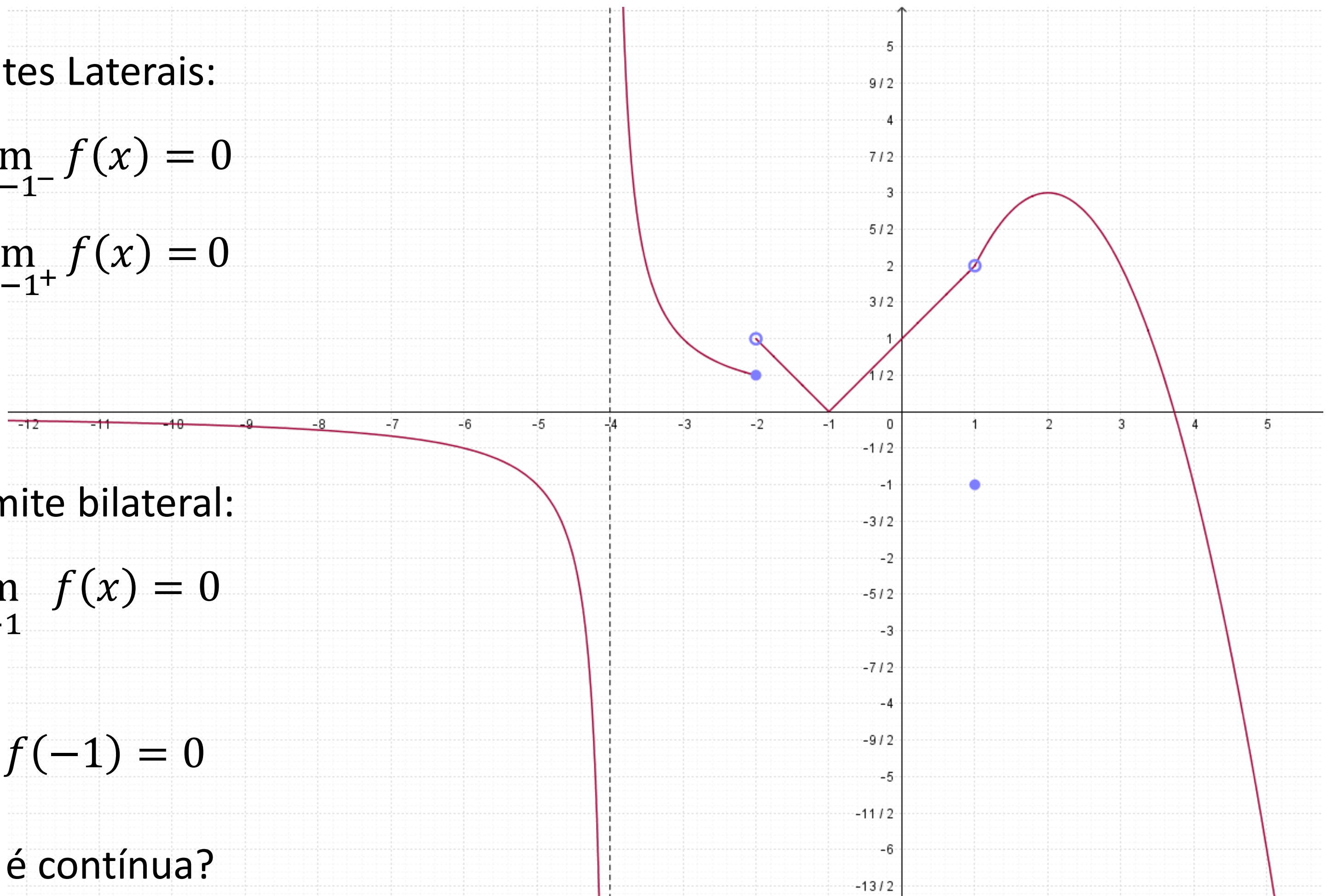
$$f(1) = -1$$

f é contínua? Não, pois o limite bilateral não existe.

Descontinuidade removível em 1.

Revisão:

A partir do gráfico dado, encontre os limites nos pontos indicados e classifique a(s) descontinuidade(s), se existirem.



Limites Laterais:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$$

Limite bilateral:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 0$$

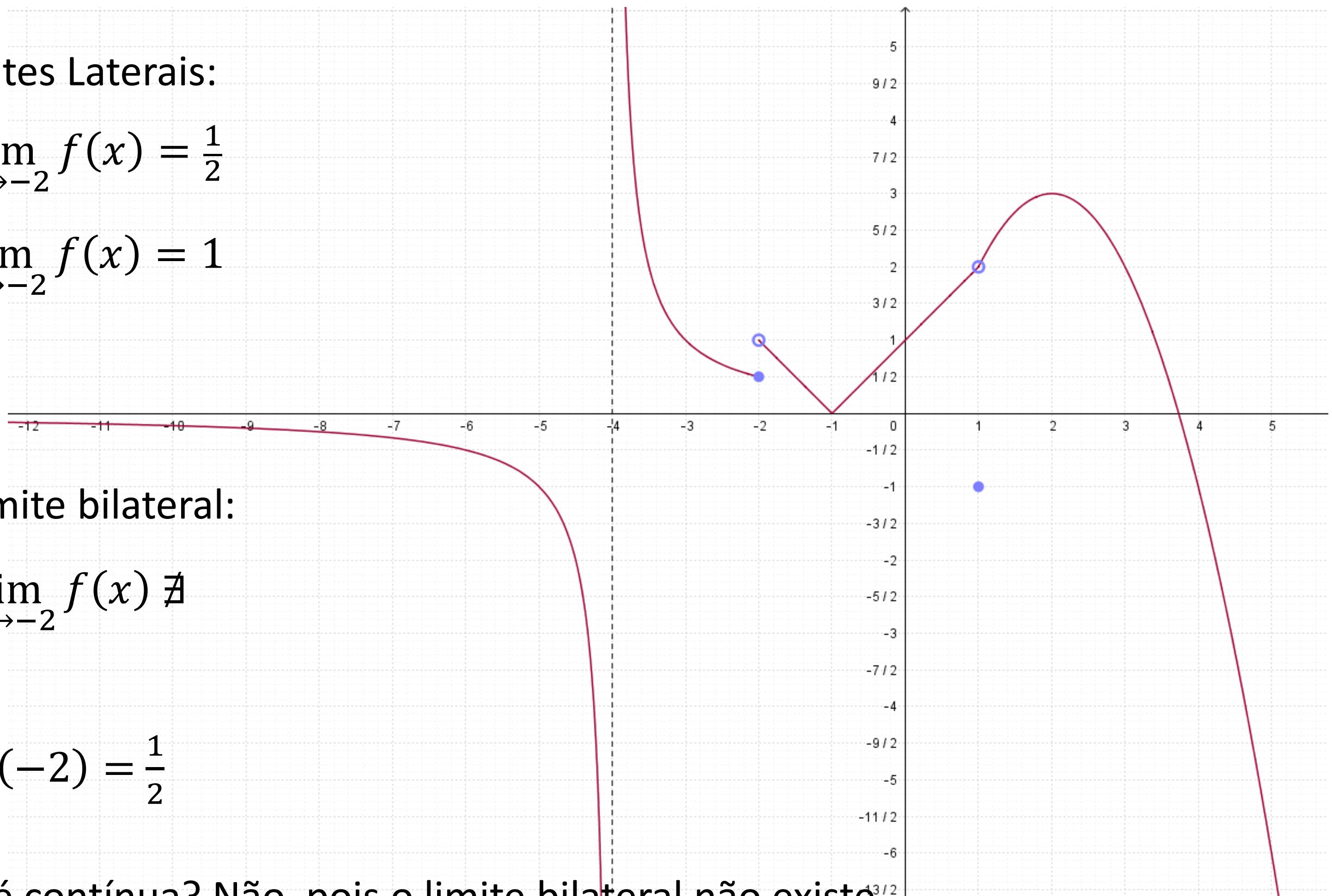
$$f(-1) = 0$$

f é contínua?

Sim, pois $\lim_{x \to -1} f(x) = 0 = f(-1)$

Revisão:

A partir do gráfico dado, encontre os limites nos pontos indicados e classifique a(s) descontinuidade(s), se existirem.



Limites Laterais:

$$\lim_{x\to-2} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-2} f(x) = 1$$

Limite bilateral:

$$\lim_{x\to-2} f(x) \nexists$$

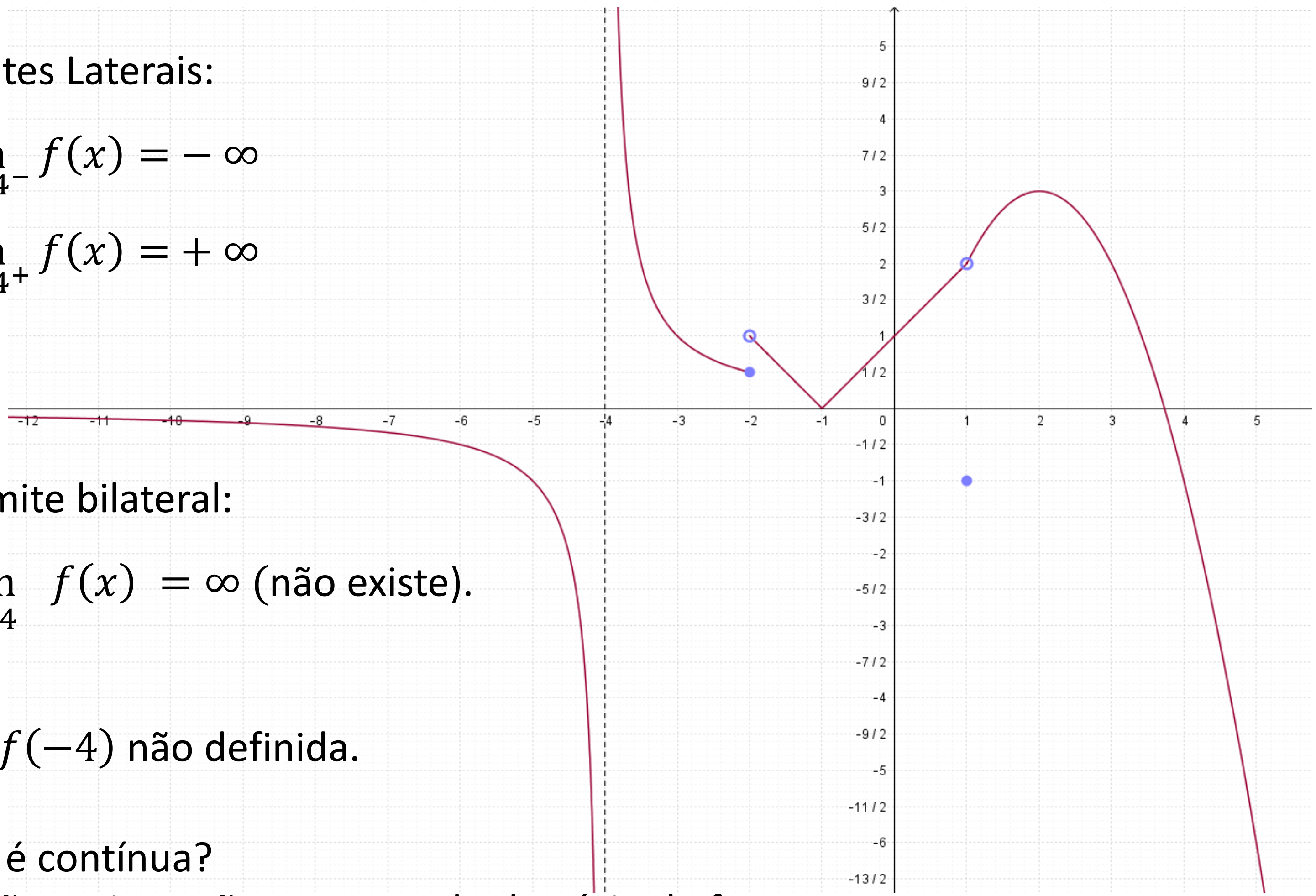
$$f(-2) = \frac{1}{2}$$

f é contínua? Não, pois o limite bilateral não existe.

Descontinuidade do tipo salto em -2.

Revisão:

A partir do gráfico dado, encontre os limites nos pontos indicados e classifique a(s) descontinuidade(s), se existirem.



Limites Laterais:

$$\lim_{x \to -4^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -4^+} f(x) = +\infty$$

Limite bilateral:

$$\lim_{x \to -4} f(x) = \infty$$ (não existe).

$f(-4)$ não definida.

f é contínua?

Não, pois -4 não pertence do domínio de f.

Descontinuidade do tipo infinita.

Assíntotas Verticais

A reta $x = a$ é uma *assíntota vertical* do gráfico de $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

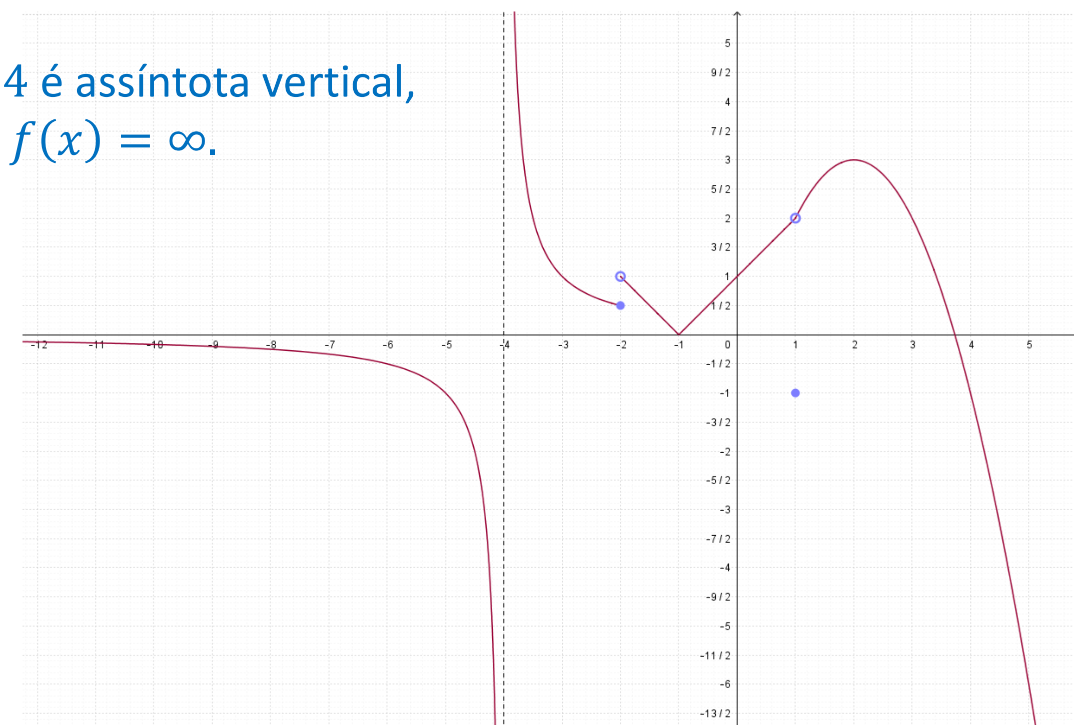
i. $\displaystyle\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$;

ii. $\displaystyle\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$;

iii. $\displaystyle\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$;

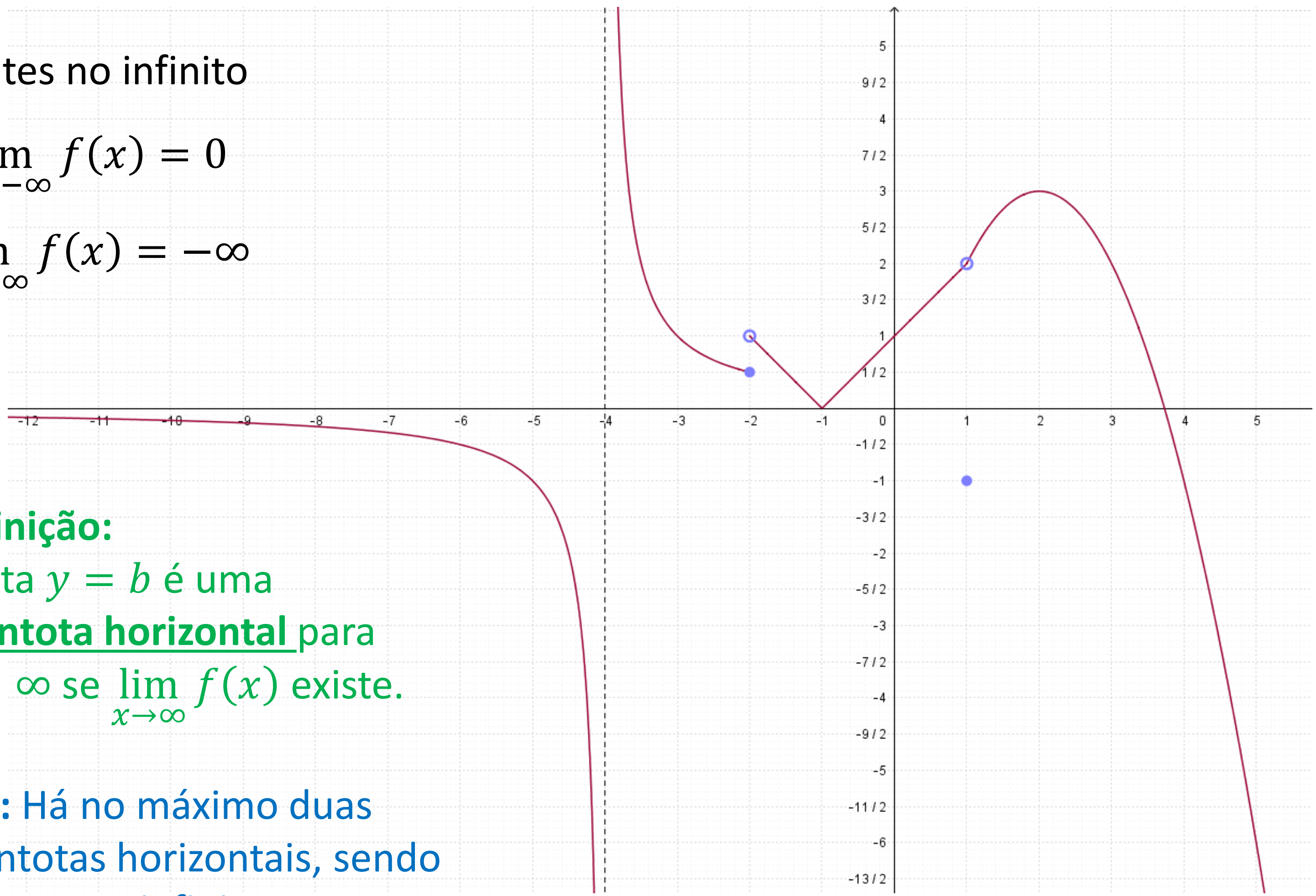
iv. $\displaystyle\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

A reta $x = 4$ é assíntota vertical, pois $\displaystyle\lim_{x \to -4} f(x) = \infty$.



Revisão:

A partir do gráfico dado, encontre os limites nos pontos indicados e classifique a(s) descontinuidade(s), se existirem.



Limites no infinito

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Definição:

A reta $y = b$ é uma **assíntota horizontal** para $x \to \infty$ se $\lim_{x \to \infty} f(x)$ existe.

Obs: Há no máximo duas assíntotas horizontais, sendo uma para + infinito e outra para o -infinito.

Exemplo 2:

Esboce o gráfico de uma função f que satisfaça as seguintes condições:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty; \lim_{x\to -2^-} f(x) = 3; \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1; \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2; \lim_{x\to 3} f(x) = -2; \lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 0.$$

Interpretando os dados:

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$ ➡ A reta $x = -2$ é uma assíntota vertical para $x \to -2^+$

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = 3$ ➡ Há uma descontinuidade infinita ou de segunda espécie $x = -2$.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$

➡ f não é continua em $x = 0$, pois o limite bilateral não existe.

$\lim_{x\to 3} f(x) = -2$ ➡ O limite bilateral existe.

f será contínua em x =3 se $f(3) = -2$, pois $\lim_{x\to 3} f(x) = -2 = f(3)$.

Exemplo. Sejam f e g as funções ilustradas nas Figura 1 e Figura 2, respectivamente. Use as propriedades de limites para investigar, de forma detalhada, se existe o limite

$$L = \lim_{x \to -3} \left[(f(x) + 1) \sqrt[3]{g(x)} \right].$$

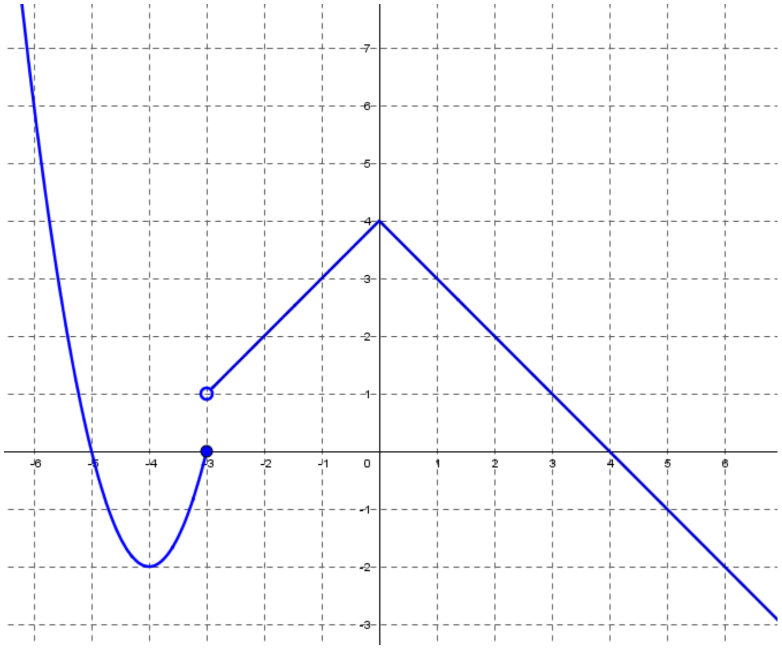


Figura 1 – Gráfico da função f

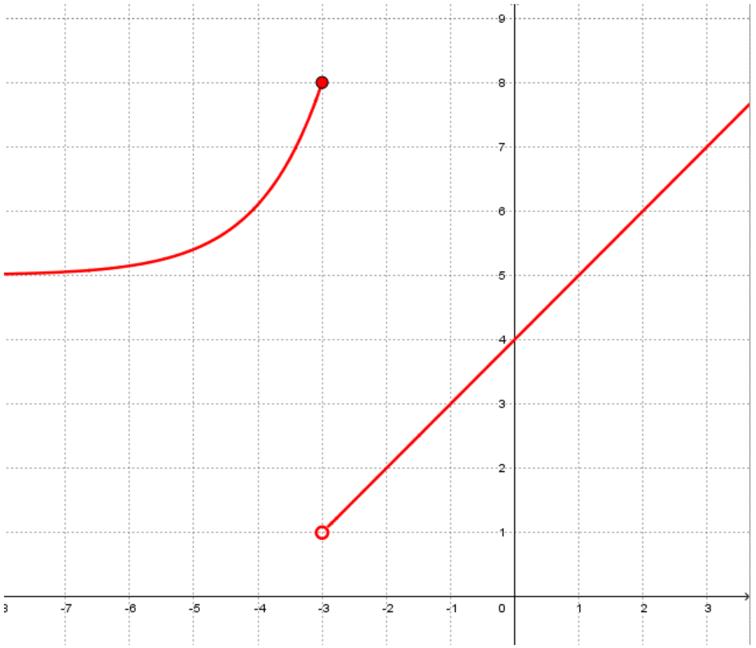


Figura 2 – Gráfico da função g

Propriedades de Limites

Se $\lim f(x)$ e $\lim g(x)$ existirem, então:

1. $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$;
2. $\lim [k.f(x)] = k.\lim f(x)$;
3. $\lim [f(x).g(x)] = \lim f(x).\lim g(x)$;
4. $\lim \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$, se $\lim g(x) \neq 0$;
5. $\lim [f(x)]^n = (\lim f(x))^n$, com $n \in \mathbb{R}$;
6. $\lim (\log_a f(x)) = \log_a (\lim f(x))$, se $\lim f(x) > 0$;
7. $\lim [g(x)]^{f(x)} = (\lim g(x))^{(\lim f(x))}$;
8. Se $\lim f(x) = 0$ e $g(x) \leq k$, com $k \in \mathbb{R}$, então $\lim [f(x).g(x)] = 0$.

Exemplo. Sejam f e g as funções ilustradas nas Figura 1 e Figura 2, respectivamente. Use as propriedades de limites para investigar, de forma detalhada, se existe o limite $L = \lim_{x \to -3} \left[(f(x)+1)\ \sqrt[3]{g(x)}\ \right]$.

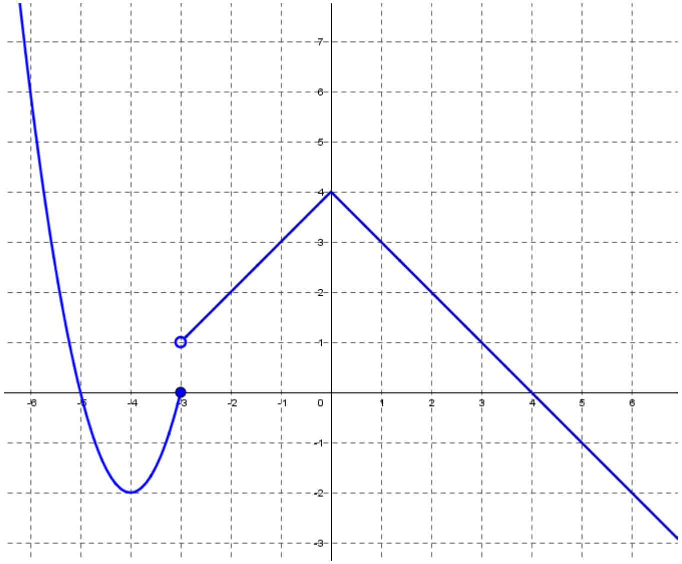


Figura 1 – Gráfico da função f

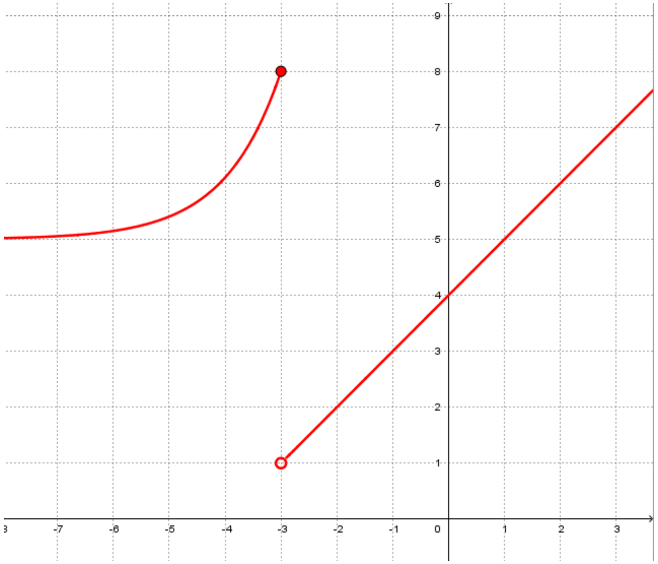


Figura 2 – Gráfico da função g

$$L_1 = \lim_{x \to -3^+} \left[(f(x)+1)\ \sqrt[3]{g(x)}\ \right] = \left(\lim_{x \to -3^+} f(x) + \lim_{x \to -3^+} 1 \right)\ \sqrt[3]{\lim_{x \to -3^+} g(x)} = (0+1)\ \sqrt[3]{8} = 2$$

$$L_2 = \lim_{x \to -3^-} \left[(f(x)+1)\ \sqrt[3]{g(x)}\ \right] = \left(\lim_{x \to -3^-} f(x) + \lim_{x \to -3^-} 1 \right)\ \sqrt[3]{\lim_{x \to -3^-} g(x)} = (1+1)\ \sqrt[3]{1} = 2$$

Conclusão: Como limites laterais existem e são iguais, então o limite L existe e é igual a 2.