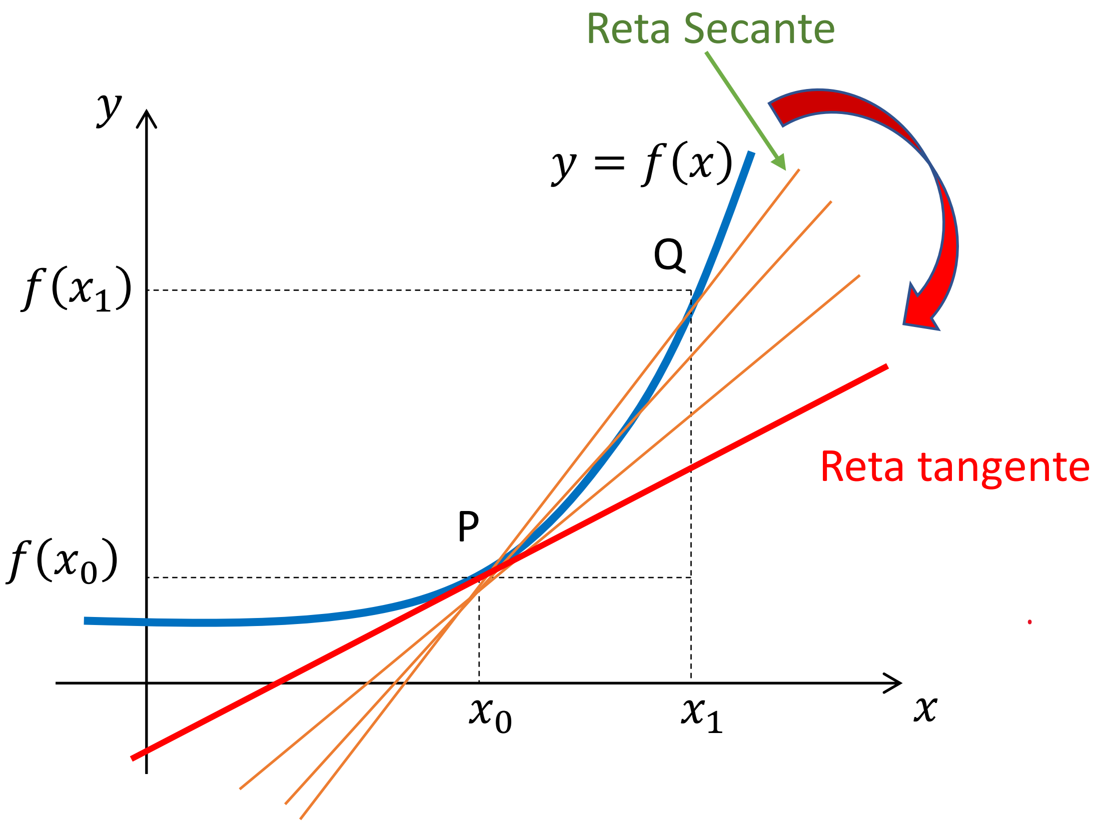
Interpretação Geométrica

O **coeficiente angular de uma reta tangente** ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $P(x_0, y_0) = P(x_0, f(x_0))$ é igual a **derivada aplicada em um ponto** em que $x = x_0$, ou seja:



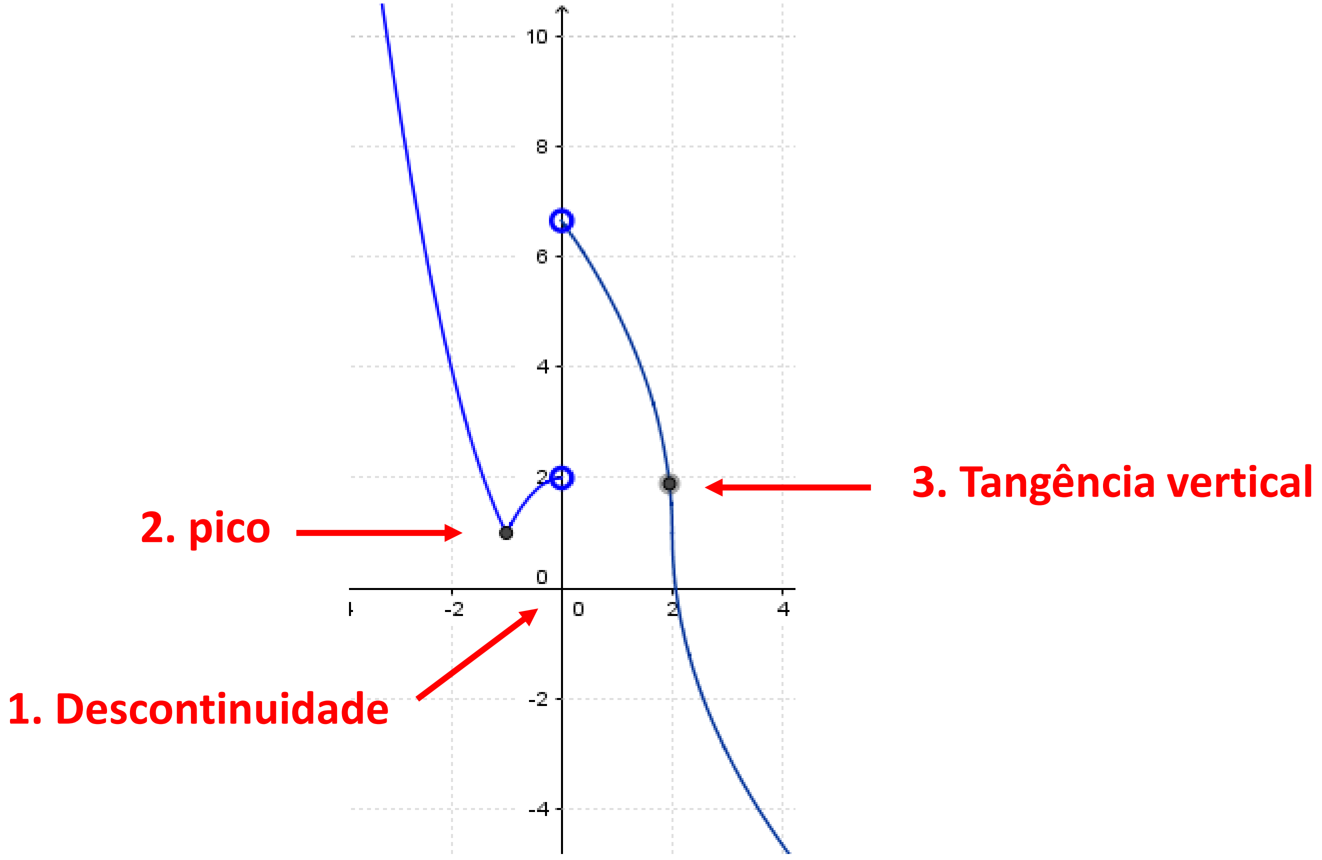
$$m_t = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

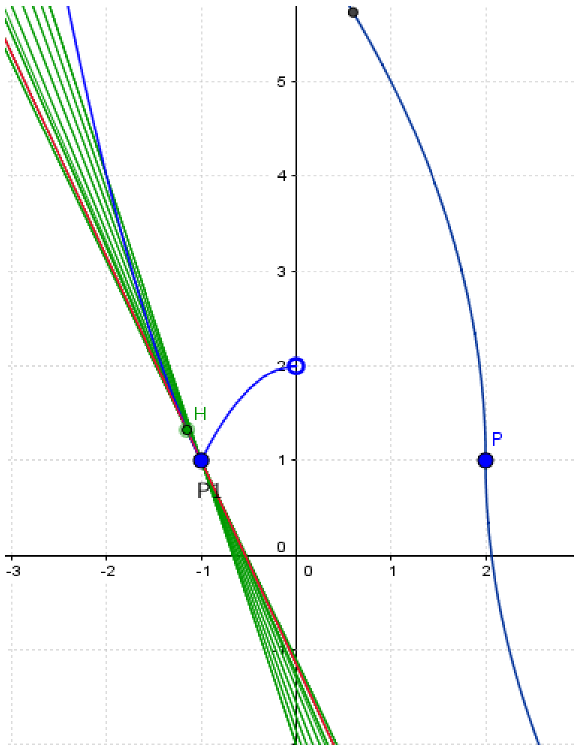
Diferenciabilidade

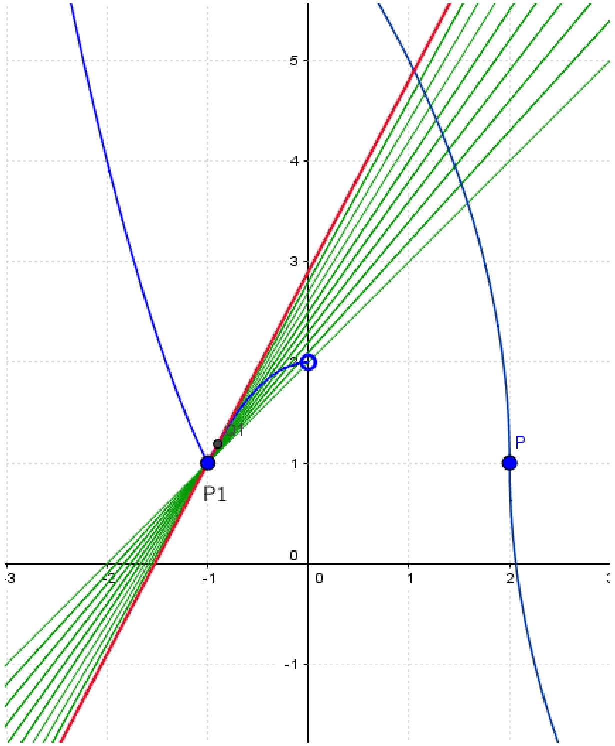
Dizemos que $\boldsymbol{f}$ **é diferenciável** nos pontos em que existe uma única reta tangente, ou seja, nos ponto em que existe

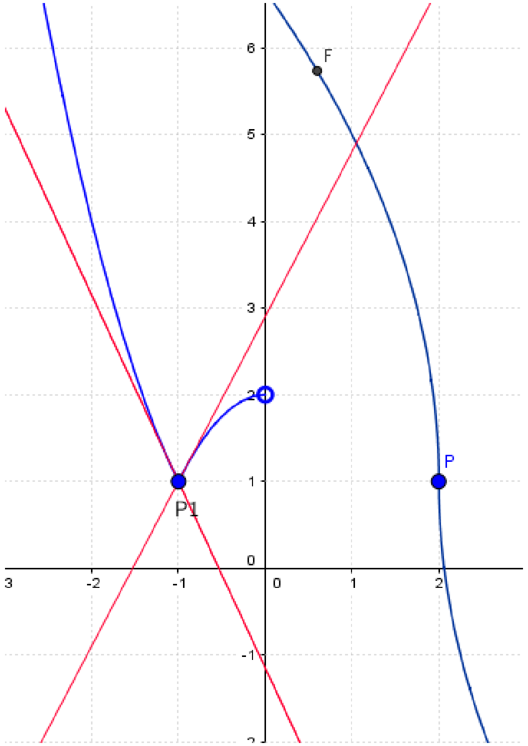
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

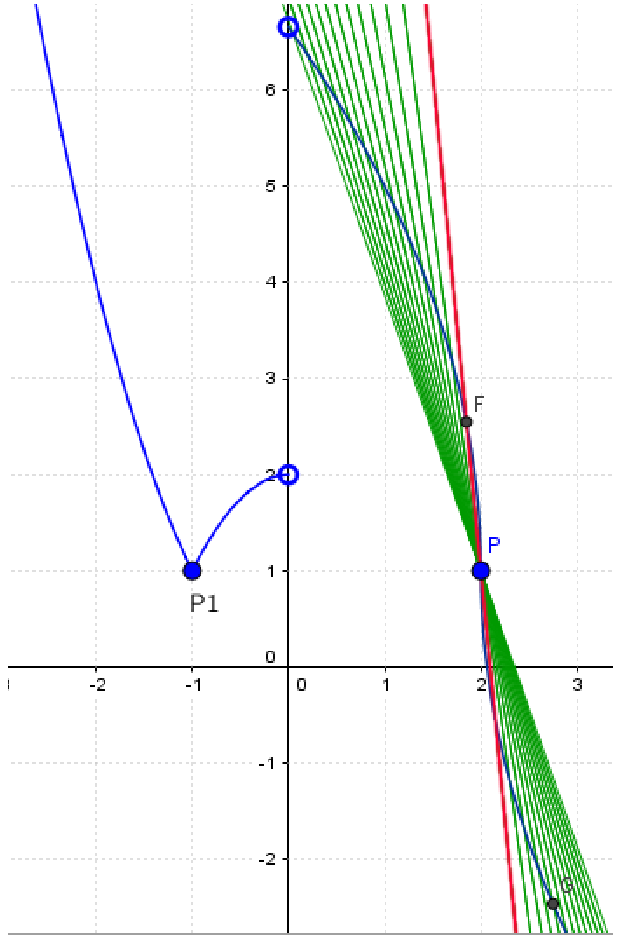
Uma função f não é diferenciável em x_0 nos pontos em que apresenta:



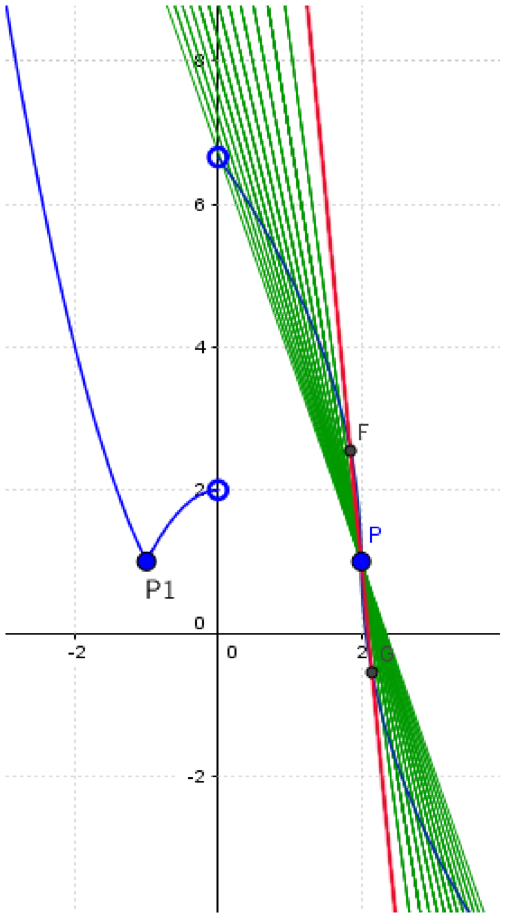

H
P1
P


P1
P


F
P1
P



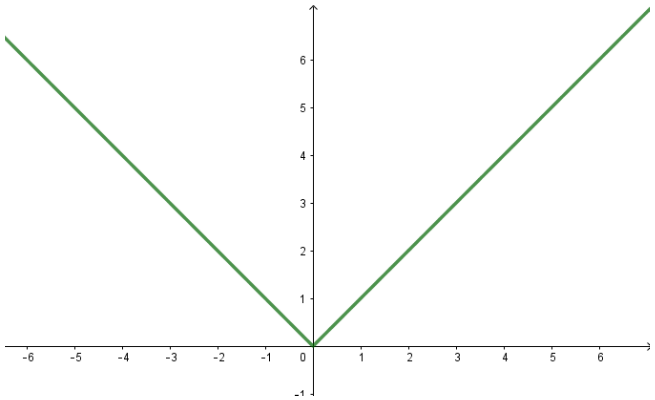
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
3
F
P
P1
G



8
6
4
2
0
-2
-2
0
2
F
P
P1
G

Uma função contínua em $x = x_0$ é sempre diferenciável em neste ponto?

Exemplo: Estude a diferenciabilidade da função $f(x) = |x|$ em $x_0 = 0$.



Geometricamente, f tem um pico em $x_0 = 0$.

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ ➡ f é uma função contínua em $x = 0$.

Pela definição de módulo, temos que: $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}$

Pela definição de derivadas, em $x_0 = 0$, temos que:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \begin{cases} f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} 1 = 1 \\ f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} (-1) = -1 \end{cases}$$

Conclusão:
Como $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, então $f'(0)$ não existe.
Logo, **uma função ser contínua num ponto não implica que ela será diferenciável neste ponto**.

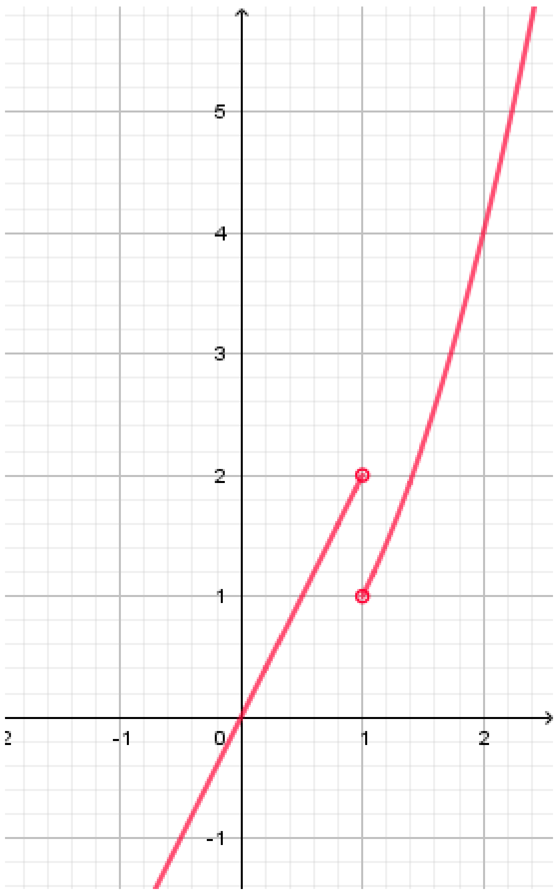
Se as derivadas laterais iguais em $\boldsymbol{x = x_0}$, então a função é diferenciável em $\boldsymbol{x = x_0}$?

Para responder ao questionamento, consideremos a função:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & se\ x \geq 1 \\ 2x, & se\ x < 1 \end{cases}$$

Usando a definição de derivadas, concluiu-se que:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & se\ x > 1 \\ 2, & se\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = 2 \\ f'_-(1) = 2 \end{cases}$$



Observe que as derivadas laterais são iguais, porém $f'(1)$ não existe, pois a função não é continua em $x = 1$, pois existe uma descontinuidade do tipo salto em $x = 1$:

Portanto, esse é um contra exemplo. Ou seja, derivadas laterais iguais não implica que a função seja derivável.

Em outras palavras, as **derivadas laterais serem iguais é uma condição necessária, não suficiente** para que função seja derivável.

Uma função diferenciável em $x = x_0$ é sempre contínua em neste ponto?

Teorema:

Se f é uma função diferenciável em $x = x_0$, então f é contínua em $x = x_0$.

Demonstração:

Devemos mostrar que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, *ou seja, que* $\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$.

Note que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} . \Delta x \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} . \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x}_{=0}.$$

Por hipótese, f é derivável então $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ *existe e é igual a* $f'(x_0)$.

Dessa forma, $\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$.

Por propriedades de limites, tem-se que: $\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$.

Definindo $x = x_0 + \Delta x$. *Se* $\Delta x \to 0$, *então* $x \to x_0$. *Portanto,* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemplo. Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & se\ x \leq 2 \\ ax + b, se\ x > 2 \end{cases}$. Determine, se possível, os valores das constantes a e b para que f seja uma função diferenciável em $x = 2$.

<u>Objetivo</u>: Determinar a e b para que $f'(2)$ exista.

Para que f seja diferenciável em $x = 2$ é necessário que $f'_+(2) = f'_-(2)$.

Usando a definição de derivadas (ou pelas as regras de derivação), temos que:

$$f'(x) = \begin{cases} 6x, & se\ x < 2 \\ a, & se\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(2) = 6.2 = 12 \\ f'_+(2) = a \end{cases} \Rightarrow f'_-(2) = f'_+(2) \Leftrightarrow \boxed{a = 12}$$

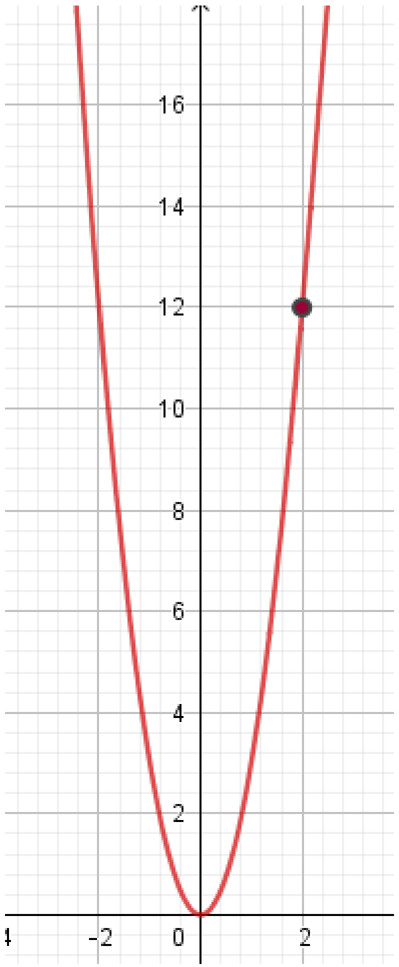
Observe que $a = 12$ é uma condição necessária que que f’(2) exista, mas não é o suficiente.

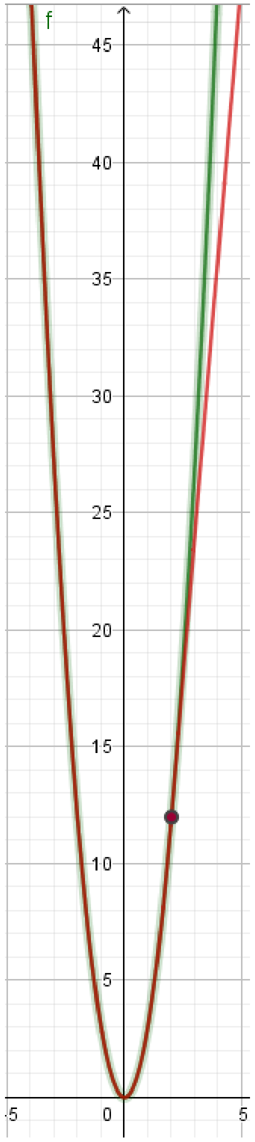
Por teorema, sabemos que se f é derivável em x_0, então f também é contínua em x_0.

Assim sendo, ainda precisamos estudar a continuidade de f em $x = 2$.

Pela definição de continuidade, temos que: $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$

Assumindo que $a = 2$, segue que a função f é dada por: $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & se\ x \leq 2 \\ 12x + b, & se\ x > 2 \end{cases}$





Assim, temos que:

$i)\ f(2) = 3(2^2) = 3.4 = 12$

$ii)\ \lim_{x \to 2} f(x)$ existe?

Analisando os limites laterais, temos que:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (3x^2) = 12$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (12x + b) = 24 + b$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) \Leftrightarrow 12 = 24 + b \Longrightarrow \boxed{b = -12}$$

Conclusão: $f'(2)$ existe se, e somente se, $a = 12$ e $b = -12$.