Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Integral Dupla:
cálculo e interpretação geométrica

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 do dia 18 de novembro de 2024.

UDESC

Exercícios:

Na última aula, aprendemos que existem duas formas de montar e resolver uma integral dupla sobre uma região D.

Iniciaremos essa aula com exercícios que permitem revisar tais formas, bem como resolver integrais duplas em diferentes ordens de integração.

Exercício 1) Escreva, de duas formas distintas, a integral dupla

$$I = \iint_D 8x^3 \cos(y^5)\, dydx\,,$$

em que D é a região triangular de vértices $A(0,0)$, $B(4,2)$ e $C(2,0)$.

A seguir, escolha uma das formas e resolva a integral dupla.

Exemplo

Exercício 2) Resolva a integral dupla

$$I = \int_0^3 \int_{y^2}^9 \; y\, e^{x^2} dxdy \,.$$

Exercício 3) Escreva, de duas formas distintas, a integral

$$I = \iint_D 5xy^2 dydx$$

em que D é a região situada no primeiro quadrante e no interior das curvas

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \text{e} \quad y = 2x^2.$$

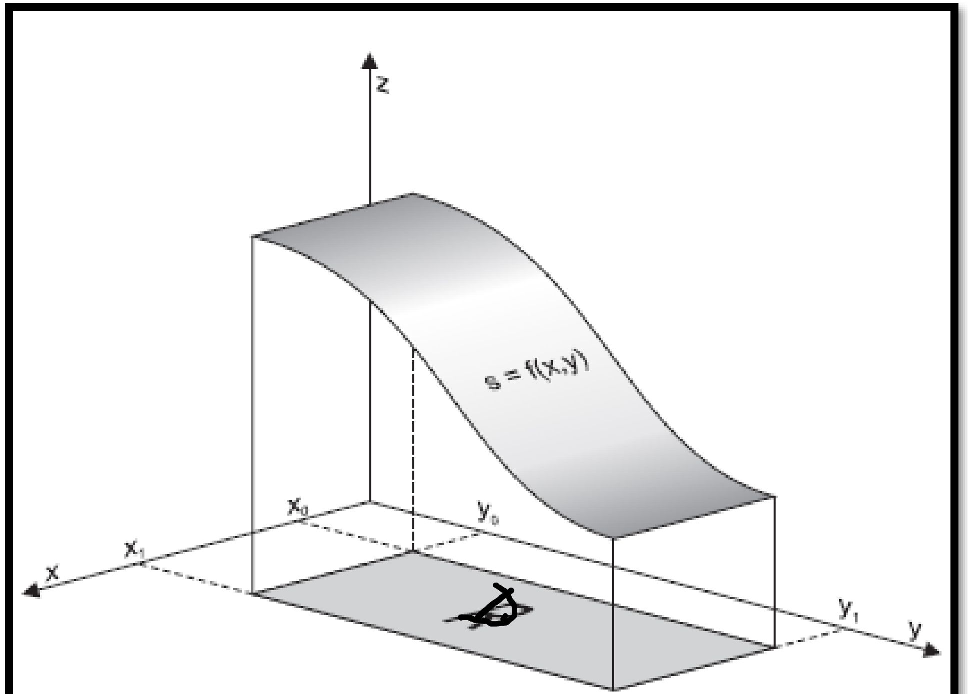
Interpretação Geométrica da Integral Dupla

Até o momento, interpretamos geometricamente apenas a região de integração, sem dar qualquer interpretação geométrica para o integrando de uma integral dupla.

Agora, para entender o significado do resultado de uma integral dupla, vamos construir o gráfico de $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Para isso, supomos que f seja uma função contínua e positiva e consideramos a superfície S que representa o gráfico de f, dada por $z = f(x, y)$.

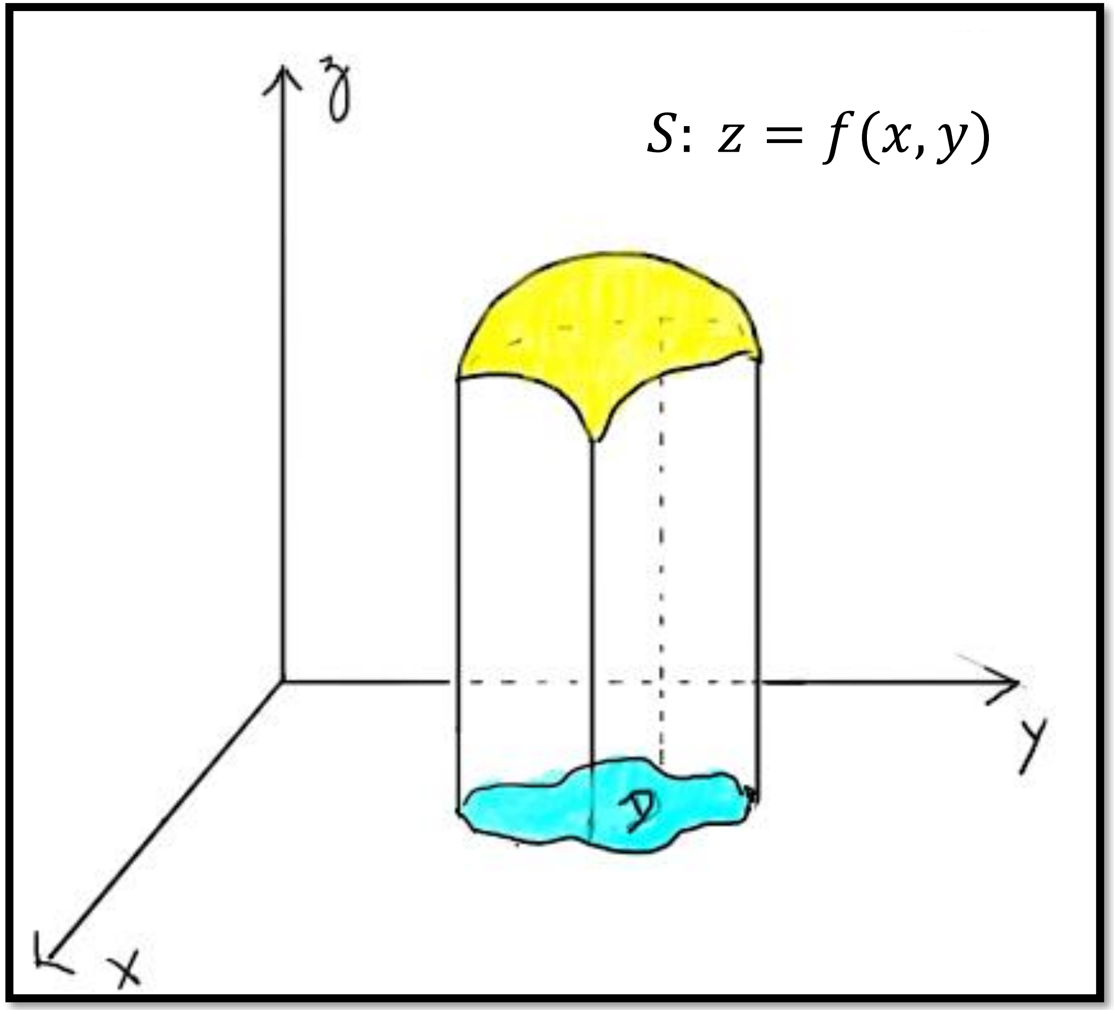
- Como f é positiva, temos $z \geq 0,\ \forall (x, y) \in D$ e, com isso, o gráfico de f está situado acima do plano xy:



A região plana D (que aqui é retangular) consiste na projeção de S sobre o plano xy.
Isso deve ocorrer mesmo que D seja não retangular!

Interpretação Geométrica da Integral Dupla

No caso geral, em que D não é retangular, teremos uma figura tridimensional do tipo:



Veja que, para delimitar um sólido fechado, precisamos traçar segmentos de reta paralelos ao eixo z (eixo das imagens).
Com isso, geramos uma superfície cilíndrica, cuja curva diretriz é a fronteira de D e cuja geratriz é o eixo z!

Questão: Qual o volume do sólido cuja base é a região plana D, cujo topo é a superfície S de equação $z = f(x,y)$ e cuja lateral é uma superfície cilíndrica?

Interpretação Geométrica da Integral Dupla

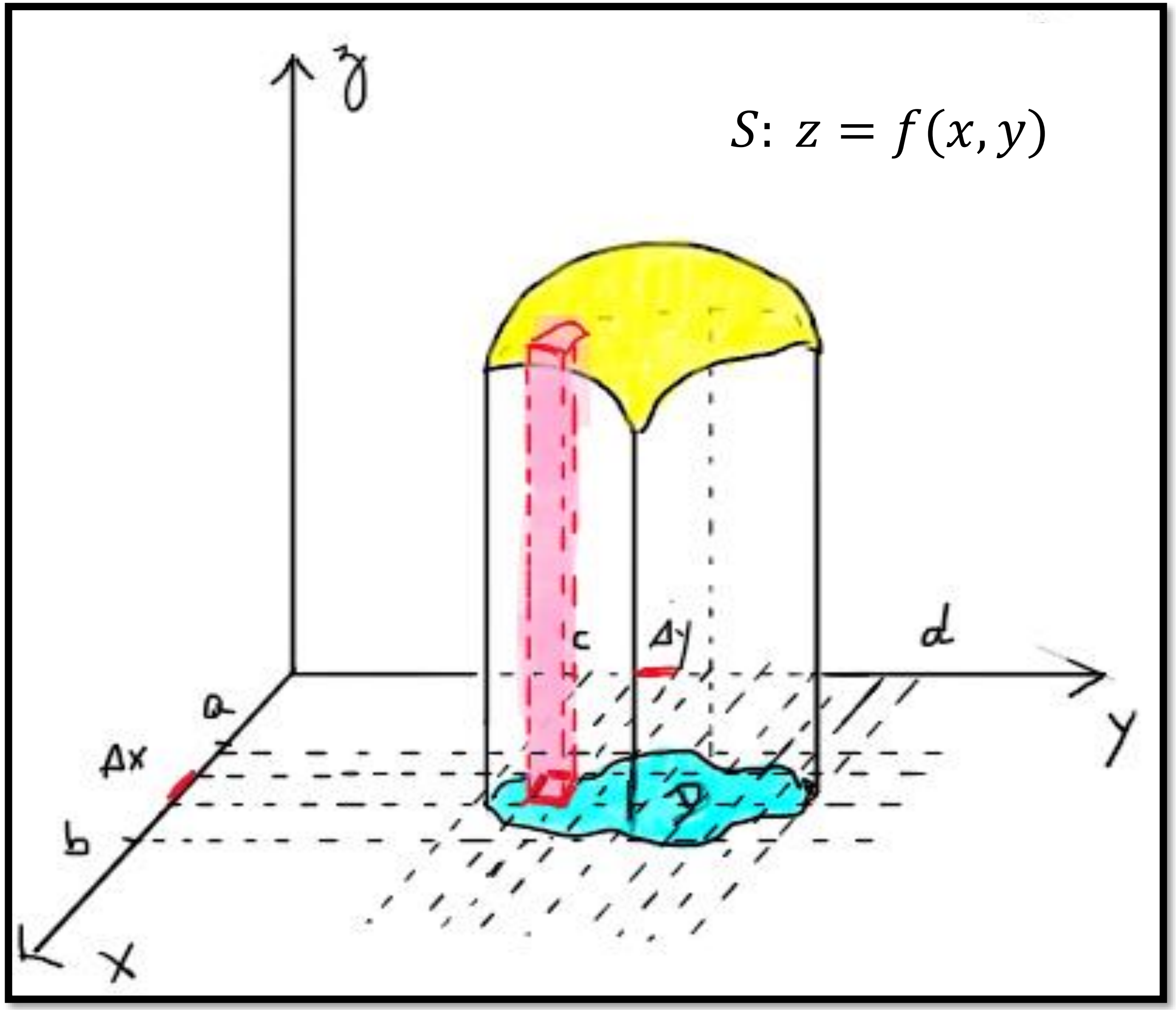
Para calcular o volume desejado, seguimos o método infinitesimal:

1º Passo: Dividimos D (e consequentemente todo o sólido) em $n \cdot m$ "pedaços", tomando:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

e

$$\Delta y = \frac{d-c}{m}$$



2º Passo: Somamos os volumes dos $n \cdot m$ "pedaços":

$$V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} V_{ij} \,.$$

Interpretação Geométrica da Integral Dupla

3º Passo: Obtemos uma aproximação para V_{ij}:

Como f é contínua, podemos supor que cada "pedaço" é aproximadamente um prisma retangular, cuja base D_{ij} é uma subdivisão da região D.

Tal prisma retangular possui área da base dada por $\Delta A = \Delta x \Delta y$ e altura $h = f(x_i, y_j)$, para algum $(x_i, y_j) \in D_{ij}$. Logo

$$V_{ij} \approx V_{prisma} = h.\Delta A = f(x_i, y_j)\Delta x \Delta y.$$

Com isso, obtemos que

$$V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} V_{ij} \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\Delta x \Delta y\ .$$

É uma Soma de Riemann para $f(x, y)$.

4º Passo: Melhoramos a aproximação, tomando $n \to +\infty$ e $m \to +\infty$, que equivale a $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$:

$$V = \lim_{\substack{n \to +\infty \\ m \to +\infty}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j)\Delta x \Delta y$$

Limite de uma Soma de Riemann.

Na expressão acima temos limites de somas de parcelas que ficam cada vez menores, enquanto a quantidade de parcelas aumenta arbitrariamente.

Essa é definição de integral definida. Como temos dois limites, de duas somas, obtemos uma integral dupla definida sobre a região D que foi particionada.

Interpretação Geométrica da Integral Dupla

Portanto:

$$V = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ m\to+\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(x_i, y_j\right)\Delta y \Delta x = \iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

Assim, o volume de um sólido de lateral cilíndrica, cujo topo é a superfície

$$z = f(x,y) \geq 0$$

e cuja base é a região plana D, é dado por

$$V = \iint_D f(x,y)\,dxdy\,.$$

Notação: Como $\Delta A = \Delta x \Delta y = \Delta y \Delta x$ representa a área da base de um elemento infinitesimal de volume, é possível denotarmos $dA = dxdy = dydx$, que é chamado de diferencial da área da base. Dessa forma, é comum usarmos a seguinte notação:

$$V = \iint_D f(x,y)\,dA.$$

Área como Integral Dupla:

Observação:

Quando $f(x,y)=1,\ \forall(x,y)\in D$, o sólido cujo topo é

$$z=1=f(x,y),$$

cuja base é D e cuja lateral é cilíndrica é tal que

$$V=Área_{base}\cdot altura=Área(D)\cdot 1\ =Área(D)$$

ou seja, o volume do sólido é numericamente igual à área da sua base, pois nesse caso, a altura é sempre constante e igual a 1.

Portanto,

$$Área(D)=V=\iint_D 1\cdot dA=\iint_D 1\cdot dydx.$$

e podemos utilizar integrais duplas para calcular a área de uma região plana D, bastando tomar o integrando como $f(x,y)=1$.

Exemplo

Exercício 4) Calcule o volume do sólido delimitado por

$$4x + 3y + 2z = 12, \qquad x = 0, \quad y = 0 \quad \text{e} \quad z = 0.$$

Exercício 5) Escreva, de duas formas distintas, as integrais duplas que permitem calcular o o volume do sólido delimitado por

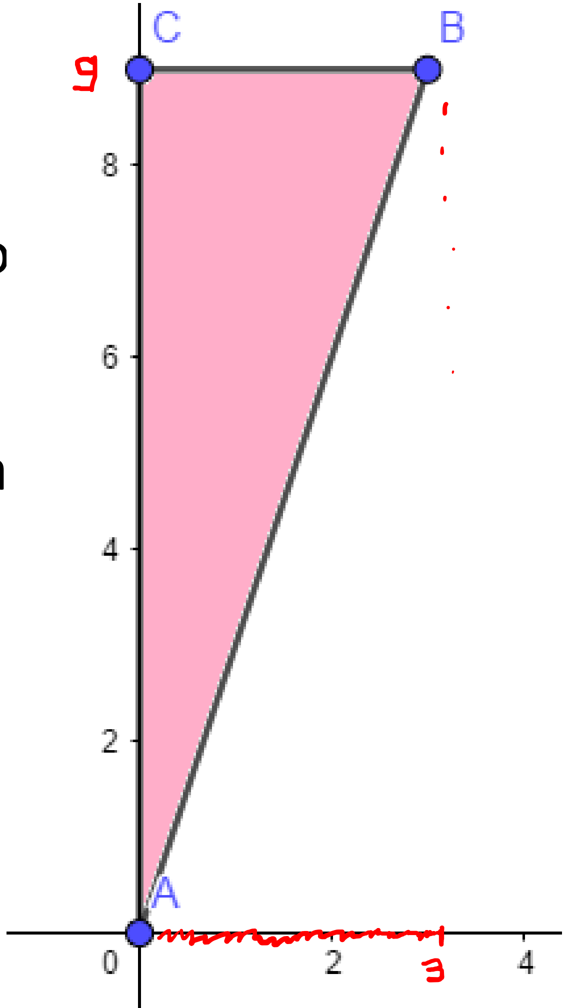
$$x^2 + y^2 = 9, \qquad z = 9 - y^2 \qquad \text{e} \qquad z = 0.$$

Exemplo

Exemplo 1) Escreva, de duas formas distintas, as integrais duplas abaixo. A seguir, escolha uma das formas para calcular o valor da integral dupla.

$$I = \iint_D 5x^4 \sin(y^6)\, dxdy.$$

onde D é a região triangular de vértices $A(0,0), B(3,9)$ e $C(0,9)$.



Solução: A representação geométrica de D é exibida na figura ao lado

Note que hipotenusa é dada por $y = 3x$ ou $x = \frac{1}{3}y$

<u>1ª Forma:</u> Tomando x como variável independente, e interpretando a região de integração, temos que

$$x \in [0,3] \quad \text{e} \quad y \in [3x, 9].$$

Logo

$$I = \int_0^3 \int_{3x}^9 5x^4 \sin(y^6)\, dydx\,.$$

Exemplo

2ª Forma: Tomando y como variável independente, e interpretando a região de integração, temos que $y \in [0,9]$ e $x \in [0,\frac{1}{3}y]$. L ogo

$$I = \int_0^9 \int_0^{\frac{1}{3}y} 5x^4 \sin(y^6)dxdy\,.$$

Ao escolher uma das montagens para resolver a integral, veja que a 1ª Forma pode ser bastante trabalhosa pois obter a primitiva de $\sin(y^6)$ em relação à y não é tarefa simples (senão impossível). Dessa forma, vamos escolher a 2ª forma para ser resolvida:

$$I = \int_0^9 \int_0^{\frac{1}{3}y} 5x^4 \sin(y^6)dxdy = \int_0^9 x^5 \sin(y^6)\Big|_{x=0}^{x=\frac{1}{3}y} dy = \int_0^9 \left(\frac{y}{3}\right)^5 \sin(y^6)dy$$

$$= \int_0^9 \frac{1}{243} y^5 \sin(y^6)dy = \int_0^{9^6} \frac{1}{243}\sin(u)\frac{1}{6}du = \frac{1}{1458}(-\cos(u))\Big|_0^{9^6}$$

$$= \frac{1}{1458}(-\cos(9^6)) - \frac{1}{1458}(-\cos(0)) = \frac{1}{1458}(1-\cos(531441)).$$

Veja que os cálculos foram quase imediatos!

Exemplo

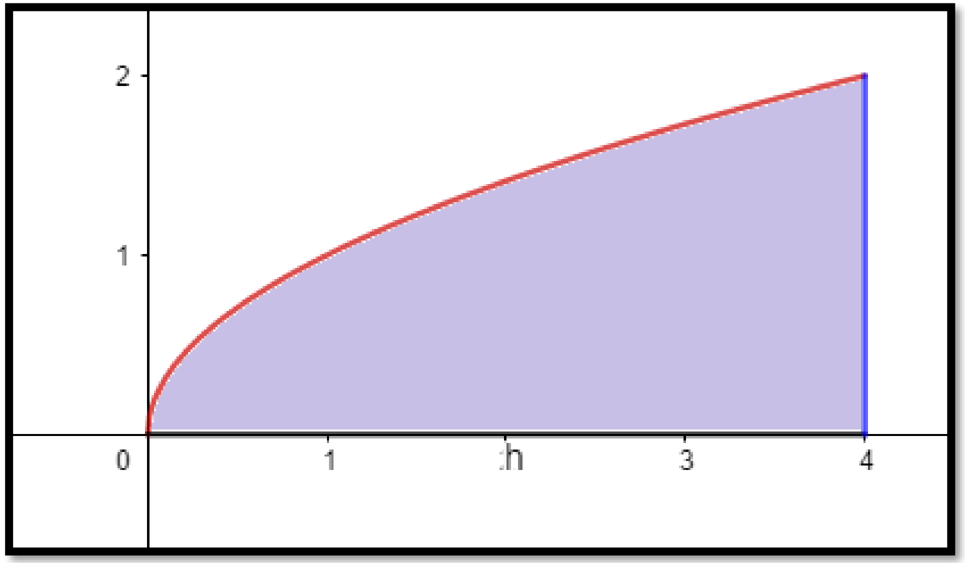
Exemplo 2) Resolva a integral

$$I = \int_0^2 \int_{y^2}^4 \; y\, e^{-x^2} dxdy\,.$$

Solução: Veja que não é simples obter a primitiva de e^{-x^2} em relação a x.
Por isso, vamos inverter a ordem de integração para tentar obter uma integral mais simples de ser resolvida. Interpretando os limitantes e a ordem de integração, vemos que

$$y \in [0,2] \quad \text{e} \quad x \in [y^2, 4].$$

Quando $x = y^2$ temos que $y = \pm\sqrt{x}$. Porém, como $y \in [0,2]$ temos que $y \geq 0$ e, por isso, obtemos que $y = \sqrt{x}$.
Assim, obtemos a seguinte representação geométrica para a região de integração:



Tomando x como variável independente, temos que

$$x \in [0,4] \quad \text{e} \quad y \in [0, \sqrt{x}].$$

Logo, invertendo a ordem de integração, obtemos

$$I = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} \; y\, e^{-x^2} dydx\,.$$

Exemplo

Resolvendo a integral dupla obtida, temos que

$$I = \int_0^2 \int_{y^2}^4 \; y\, e^{-x^2} dx dy = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} \; y\, e^{-x^2} dy dx = \int_0^4 \frac{1}{2}\, y^2 e^{-x^2} \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \; dx$$

$$= \int_0^4 \frac{1}{2}\, (\sqrt{x})^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 x\, e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{-16} \frac{e^u}{-2} du$$

$$= \frac{-1}{4} e^u \Big|_0^{-16} = \frac{-1}{4} e^{-16} + \frac{1}{4} \; = \; \frac{1}{4}(1 - e^{-16}).$$

Veja que a opção de inverter a ordem de integração foi bastante vantajosa, pois os cálculos nessa ordem ($dydx$) foram praticamente imediatos.

Observação: Para resolver uma integral dupla, além de todas as técnicas de integração que já conhecemos desde CDI-1, podemos também efetuar a mudança da ordem de integração, conforme fizemos no exemplo anterior.

Exemplo

Exemplo 3) Resolva a integral dupla $I = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^3 dydx$.

Solução: Usando a ordem de integração dada (integrando a primeira vez em y), temos que

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^3 dydx = \int_0^1 x^3 y\Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{2-x^2}} dx = \int_0^1 x^3\sqrt{2-x^2} - x^5\, dx$$

A última integral obtida não é trivial (embora possa ser resolvida por substituição trigonométrica).

Para evitar tal cálculo (que pode ser trabalhoso) vamos inverter a ordem de integração e "torcer" para obter uma integral mais simples.

Interpretando o domínio de integração, temos que $x \in [0,1]$ e $y \in \left[x^2, \sqrt{2-x^2}\right]$.

Assim, y varia da curva inferior

$$y = x^2$$

até a curva superior

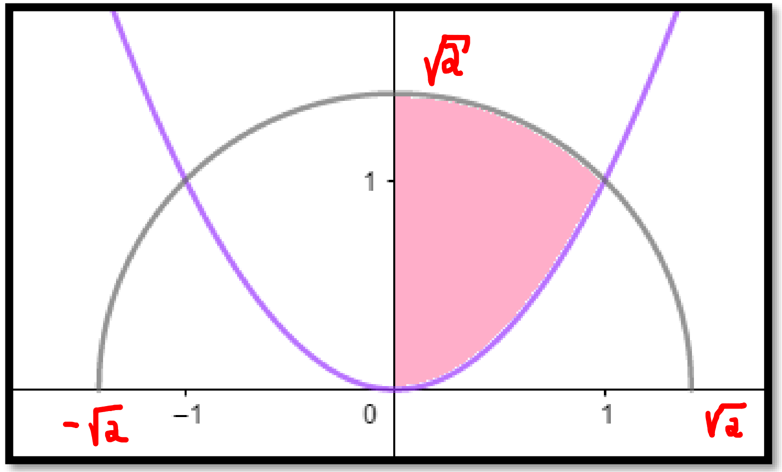
$$y = \sqrt{2-x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 2$$

uma semicircunferência, pois $y \geq 0$.

Exemplo

Com a interpretação dos limitantes de I, obtemos que o domínio de integração D é

Como $x \in [0,1]$, a projeção sobre o eixo x é apenas no primeiro quadrante.



Isolando x:

$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{y}$

$x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2 - y^2}$

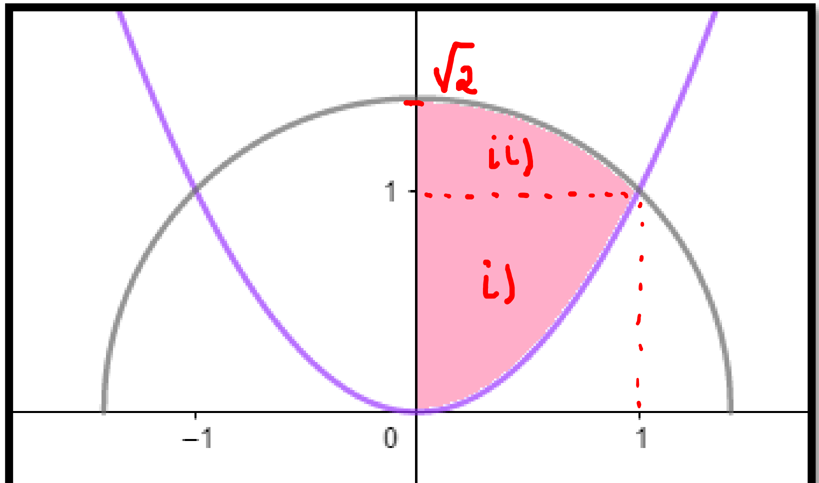
Tomando y como variável independente, temos que $y \in [0, \sqrt{2}]$.

No entanto, note que ao encontrarmos a limitação para x, nos deparamos com uma mudança de limitação na curva "à direita", justamente no ponto de interseção entre as curvas, dado por $(1,1)$.

Por isso, precisamos utilizar uma soma de integrais duplas:

i) Para $y \in [0,1]$ temos $x \in [0, \sqrt{y}\,]$.

ii) Para $y \in [1, \sqrt{2}]$ temos $x \in [0, \sqrt{2 - y^2}]$.



Exemplos

Assim, com a mudança da ordem de integração, obtemos que

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^3 dydx = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} x^3 dxdy + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-y^2}} x^3 dxdy\,.$$

Resolvendo essa última expressão:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{4} x^4 \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{4} x^4 \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{2-y^2}} dy = \frac{1}{4}\int_0^1 y^2 dy + \frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{2}} (2-y^2)^2 dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 y^2 dy + \frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{2}} (4 - 4y^2 + y^4) dy \quad = \frac{1}{4} . \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 + y - \frac{y^3}{3} + \frac{1}{4}\frac{y^5}{5}\Big|_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{12} + \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{20} 4\sqrt{2} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{20} = \frac{16\sqrt{2} - 19}{30}.$$

Veja que, apesar de resolvermos uma soma de integrais, os cálculos foram imediatos e bem mais simples do que enfrentar uma substituição trigonométrica!

Exemplo

Exemplo 4) Calcule o volume do sólido delimitado por $3x + 2y + z = 6, x = 0, y = 0$ e $z = 0$.

Solução: Representando geometricamente as equações dadas, obtemos que o sólido é um tetraedro definido pelos planos coordenados e pelo plano $3x + 2y + z = 6$:

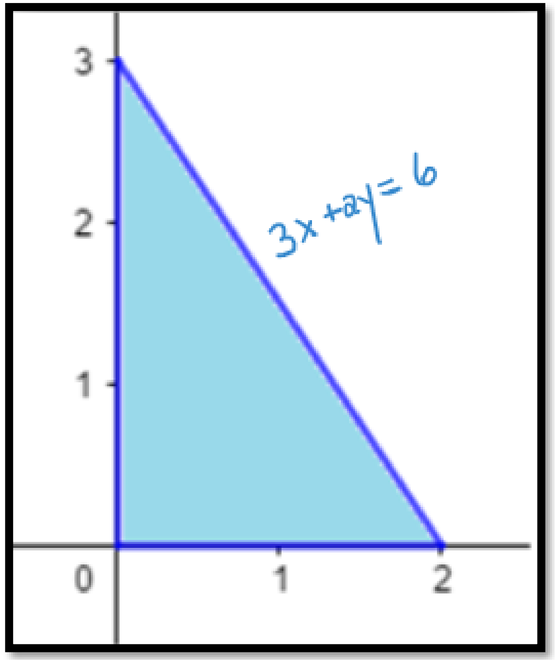
O topo do sólido é dado por $z = f(x, y)$ em que

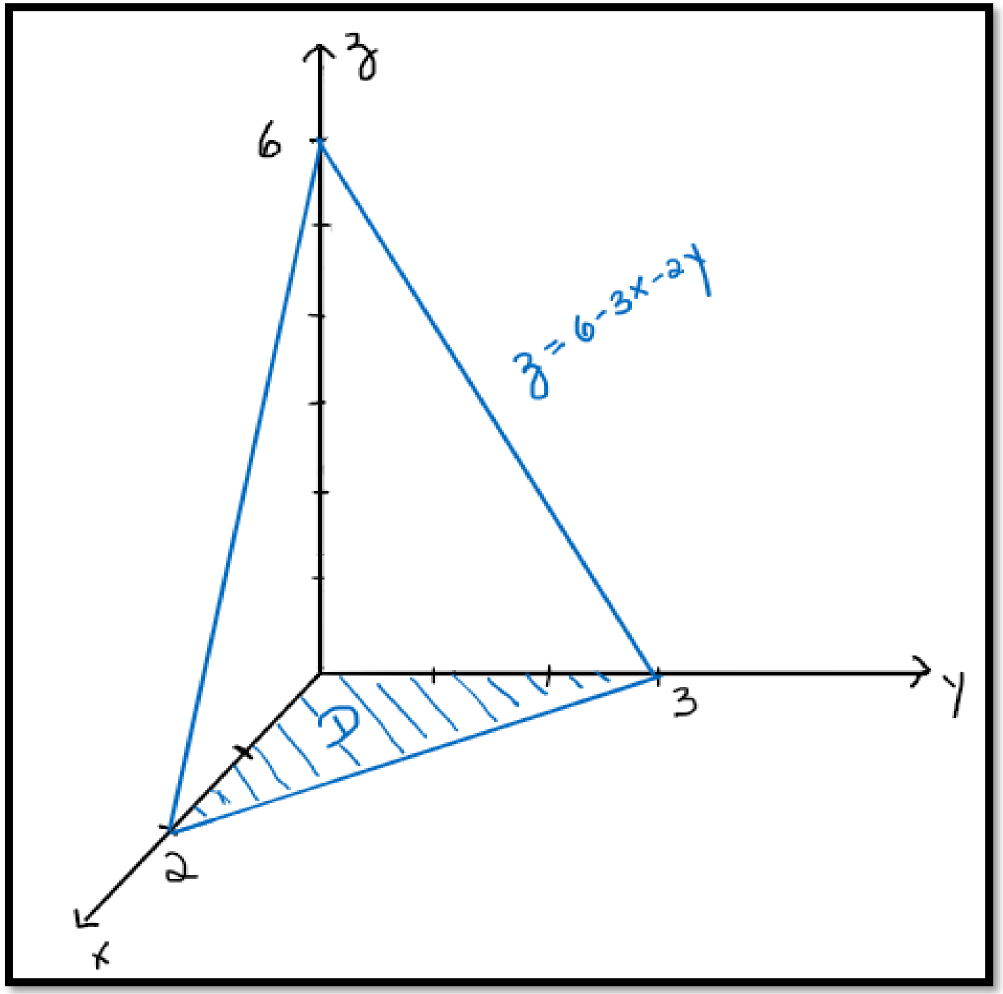
$$f(x, y) = 6 - 3x - 2y.$$

Assim, o volume do sólido é dado por

$$V = \iint_D (6 - 3x - 2y)\, dA$$

onde a base D, representada no plano xy, é dada por:





Exemplo

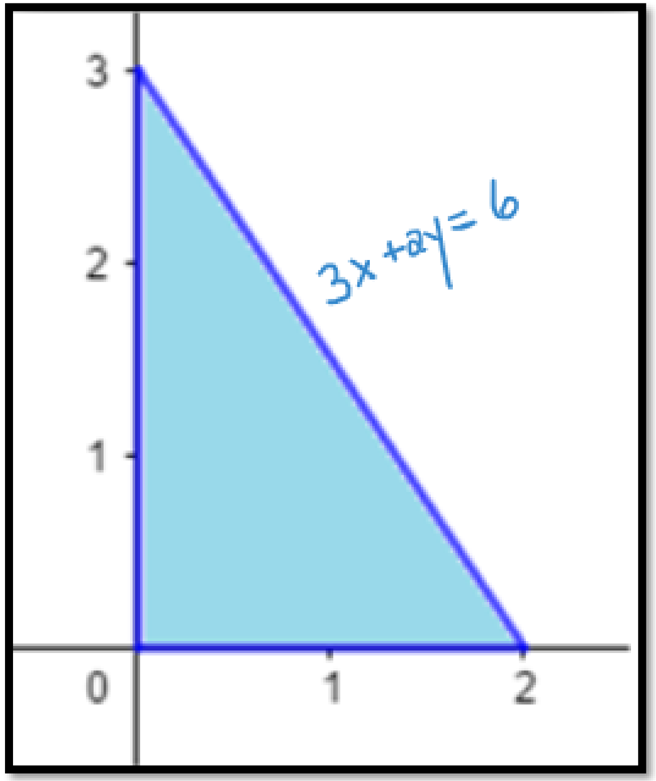
Podemos montar de duas formas distintas as integrais que calculam o volume desejado:

1ª Forma: Tomando x como variável independente, temos:

$$x \in [0, 2] \qquad \text{e} \qquad y \in \left[0, \frac{6-3x}{2}\right].$$

Logo

$$V = \int_0^2 \int_0^{\frac{6-3x}{2}} (6 - 3x - 2y)\, dydx.$$



2ª Forma: Tomando y como variável independente, temos:

$$y \in [0, 3] \qquad \text{e} \qquad x \in \left[0, \frac{6-2y}{3}\right].$$

Logo

$$V = \int_0^3 \int_0^{\frac{6-2y}{3}} (6 - 3x - 2y)\, dxdy\,.$$

As duas formas devem fornecer o mesmo resultado.

Exemplo

Resolvendo a 1ª forma:

$$V = \int_0^2 \int_0^{\frac{6-3x}{2}} (6 - 3x - 2y)\, dydx = \int_0^2 6y - 3xy - y^2 \Big|_{y=0}^{y=\frac{6-3x}{2}} dx$$

$$= \int_0^2 6.\frac{6-3x}{2} - 3x\frac{6-3x}{2} - \left(\frac{6-3x}{2}\right)^2 - 0 \quad dx$$

$$= \int_0^2 18 - 9x - 9x + \frac{9}{2}x^2 - \left(\frac{36 - 36x + 9x^2}{4}\right) dx$$

$$= \int_0^2 18 - 18x + \frac{9}{2}x^2 - 9 + 9x - \frac{9x^2}{4}\ dx$$

$$= \int_0^2 9 - 9x + \frac{9}{4}x^2\ dx = \quad 9x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^3 \Big|_0^2$$

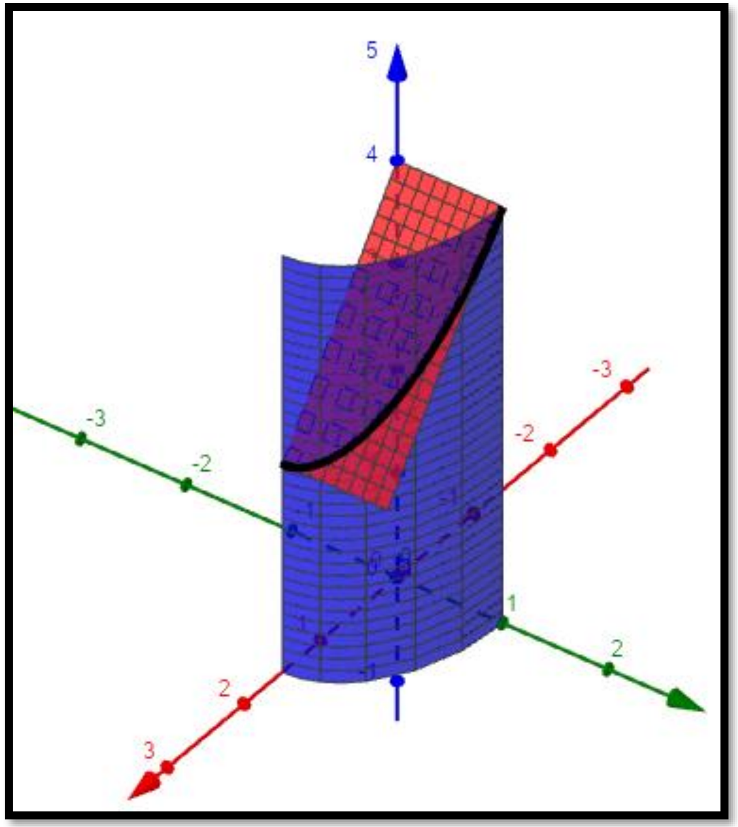
$$= 9.2 - \frac{9}{2}.4 + \frac{3}{4}.8 = \ 18 - 18 + 6 \ = 6\ unidades\ de\ volume$$

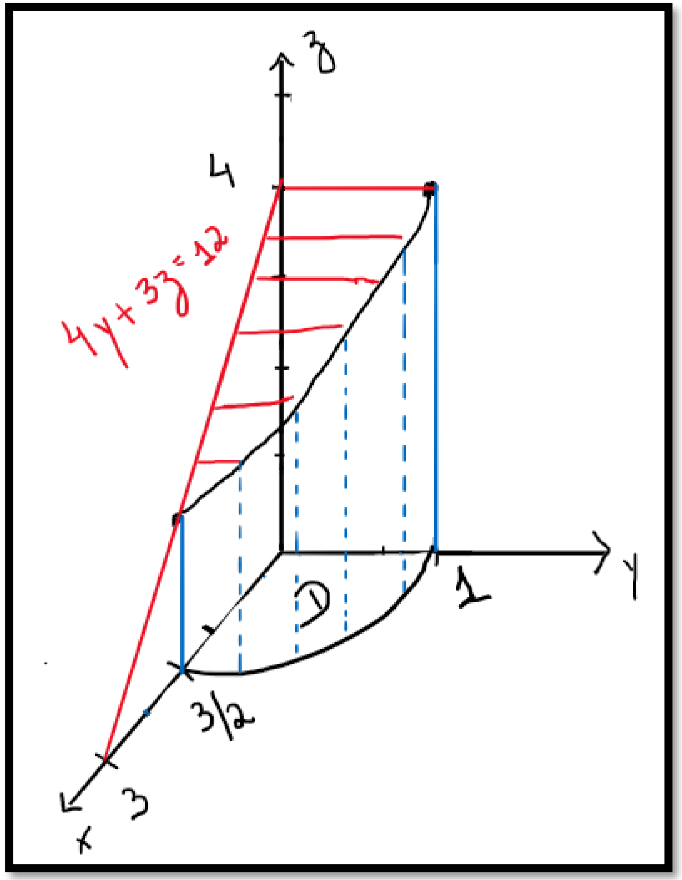
Exemplo 5) Escreva, de duas formas distintas, as integrais que permitem calcular o volume do sólido que é delimitado inferiormente por $z = 0$, lateralmente por

$$4x^2 + 9y^2 = 9 \quad \text{e superiormente por} \quad 4x + 3z = 12.$$

Solução: O sólido é a parte de um cilindro elíptico ($4x^2+9y^2 = 9$ é um cilindro em $\mathbb{R}^3$) situado acima do plano xy e recortado superiormente pelo plano $4x + 3z = 12$.

A porção do sólido situado no primeiro octante é:





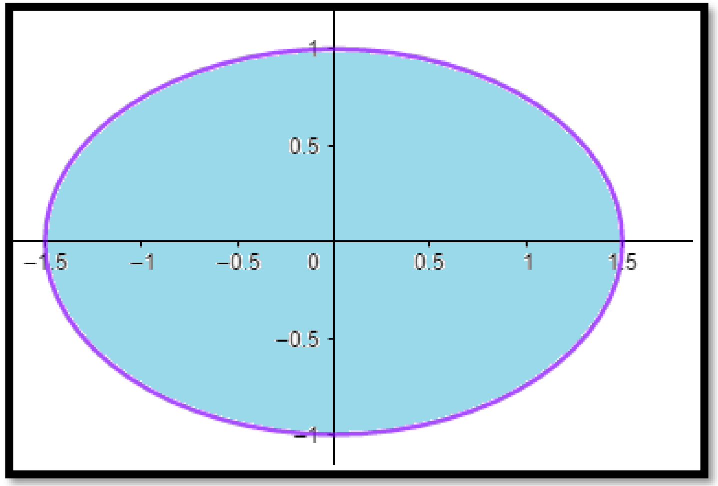
Exemplos:

Note que o topo do sólido é dado por

$$f(x,y) = z = \frac{12-4x}{3}$$

Assim, o volume é dado por

$$V = \iint_D \frac{12-4x}{3}\, dA$$



onde a base D, representada no plano xy, é delimitada por

$$4x^2+9y^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{9/4}+\frac{y^2}{9} = 1$$

Isolando a variável dependente:

$$9y^2 = 9-4x^2$$

e

$$y = \pm\frac{\sqrt{9-4x^2}}{3}$$

<u>1ª Forma:</u> Tomando x como variável independente, temos:

$$x \in \left[\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right] \qquad y \in \left[\frac{-\sqrt{9-4x^2}}{3}, \frac{\sqrt{9-4x^2}}{3}\right]$$

e o volume do sólido é dado por

$$V = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \int_{\frac{-\sqrt{9-4x^2}}{3}}^{\frac{\sqrt{9-4x^2}}{3}} \frac{12-4x}{3}\, dydx\,.$$

Exemplo

2ª Forma: Tomando y como variável independente:

$$y \in [-1, 1] \quad \text{e} \quad x \in \left[\frac{-\sqrt{9-9y^2}}{2}, \frac{\sqrt{9-9y^2}}{2}\right]$$

Isolando a variável dependente:

$$4x^2 + 9y^2 = 9$$

$$4x^2 = 9 - 9y^2$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{9-9y^2}}{2}$$

Logo

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{\frac{-\sqrt{9-9y^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{9-9y^2}}{2}} \frac{12-4x}{3} dxdy.$$

Observação: O sólido é simétrico em relação ao plano xz, dessa forma é possível usar simetria (em duas vezes), em ambas as formas, e obter que

$$V = 2\int_{\frac{-3}{2}}^{\frac{3}{2}} \int_{0}^{\frac{\sqrt{9-4x^2}}{3}} \frac{12-4x}{3} dydx = 2\int_{0}^{1} \int_{-\frac{\sqrt{9-9y^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{9-9y^2}}{2}} \frac{12-4x}{3} dxdy$$

Cuidado: Ainda que a região de integração (a base D) seja simétrica em 4 partes, não é possível aplicar essa simetria (em 4 vezes) nas integrais do volume.

Isso porque o sólido não é simétrico em relação a cada quadrante do plano xy!

Importante: A análise da simetria deve ser sempre efetuada em $\mathbb{R}^3$.

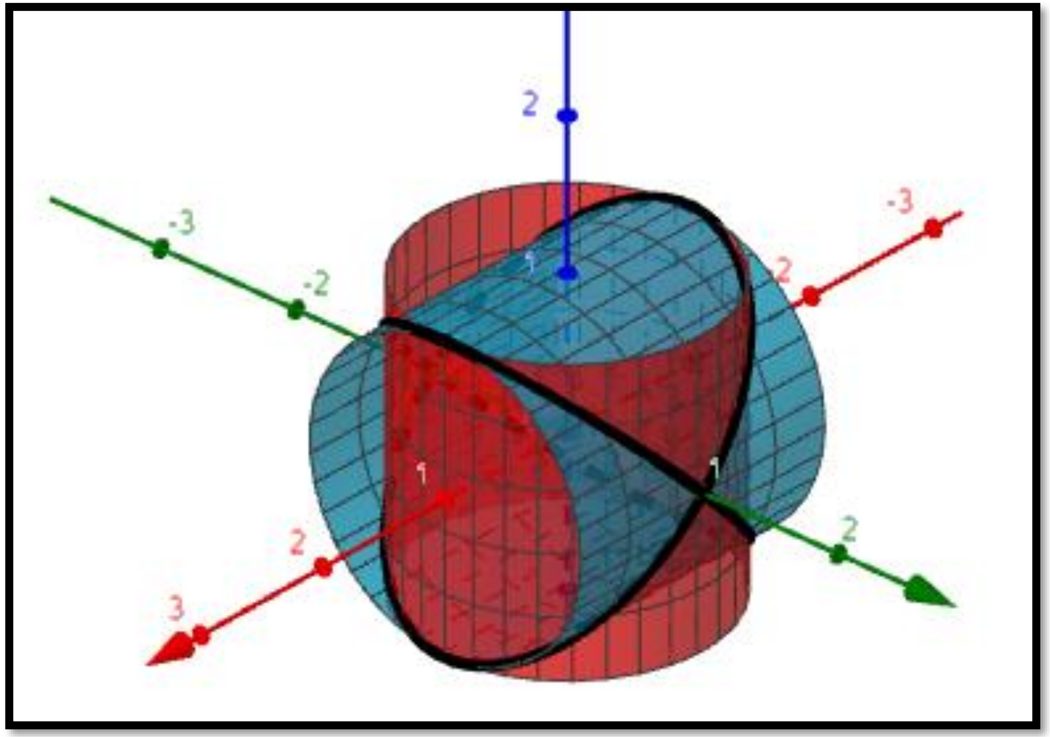
Exemplo

Exemplo 6) Calcule o volume do sólido delimitado simultaneamente por

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad y^2 + z^2 = 1.$$

Solução: O sólido é delimitado por dois cilindros circulares.

Um se propaga paralelamente ao eixo z, e o outro se propaga paralelamente ao eixo x.



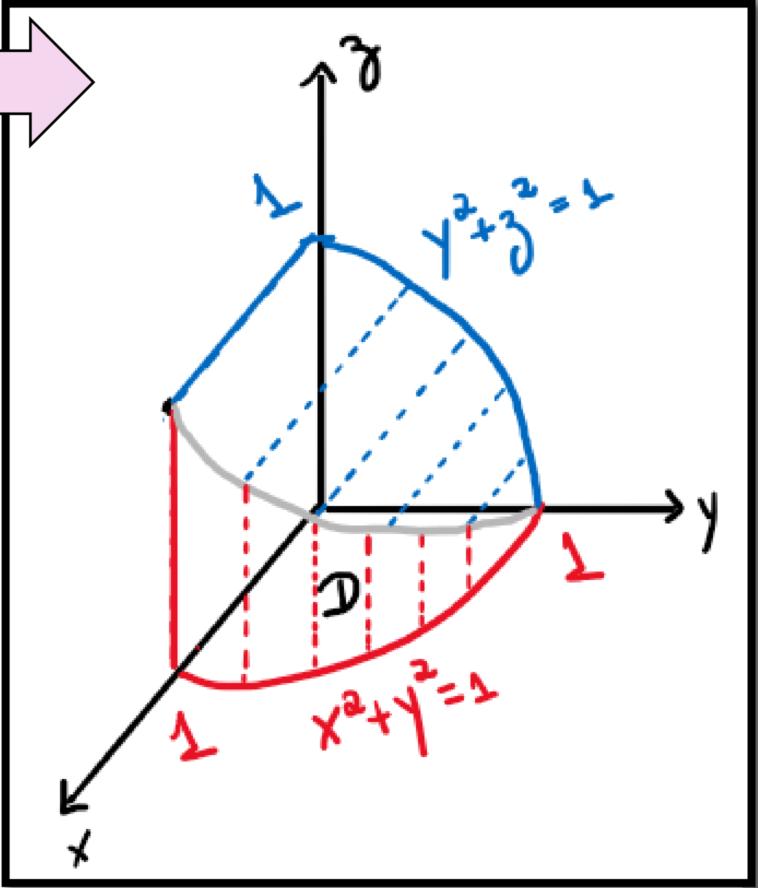
Note que, a princípio, não temos uma base situada no plano xy.

Porém, é possível ver que o sólido é simétrico em relação a todos os planos coordenados.

Portanto, podemos utilizar a simetria em 8 vezes e considerar apenas a porção do sólido situado no primeiro octante.

Exemplos:

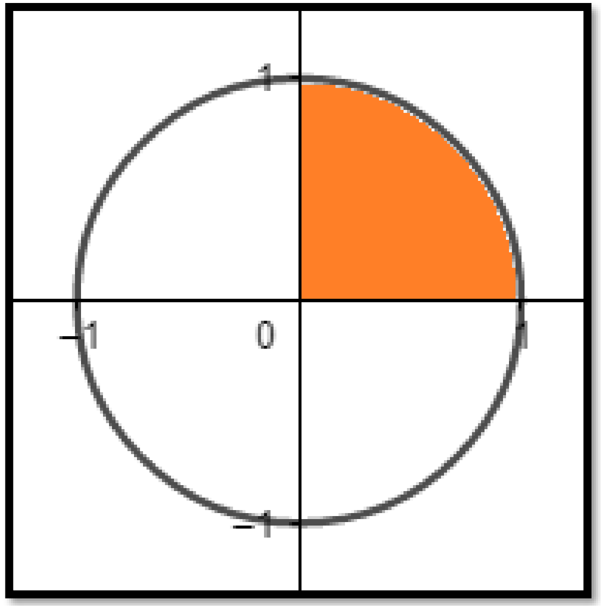
A porção do sólido situada no primeiro octante é:



O topo da oitava parte do sólido é dada por

$$y^2 + z^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt{1 - y^2}.$$

A base da oitava parte, no plano xy, é delimitada pela porção de $x^2 + y^2 = 1$ situada no primeiro quadrante:



Isolando a variável dependente:

$$y^2 = 1 - x^2$$

e

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

Assim, tomando x como variável independente, temos $x \in [0,1]$ e $y \in [0, \sqrt{1 - x^2}]$.

Exemplos:

Assim, o volume desejado é dado por

$$V = 8\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2}\,dydx\,.$$

Nessa ordem de integração precisaríamos usar substituição trigonométrica.
Para evitar isso, vamos tomar y como variável independente:

$$y \in [0,1] \qquad \text{e} \qquad x \in [0,\sqrt{1-y^2}].$$

Isolando x:

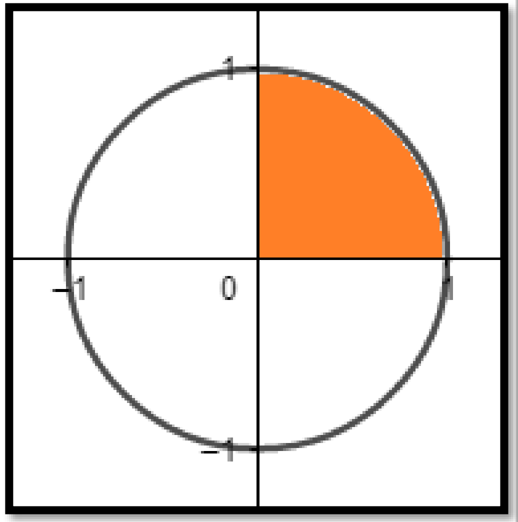
$$x^2 + y^2 = 1$$
$$x = \pm\sqrt{1-y^2}.$$

Assim, o volume é dado por:

$$V = 8\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}\,dxdy = \ 8\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,x\Big|_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}}\ dy$$

$$= 8\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-y^2}\ dx = \ 8\int_0^1 1-y^2\ dy$$

$$= 8\left(y-\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_0^1 = \ 8\left(1-\frac{1}{3}1^3-0\right) = \ 8\,.\frac{2}{3} = \frac{16}{3}.$$



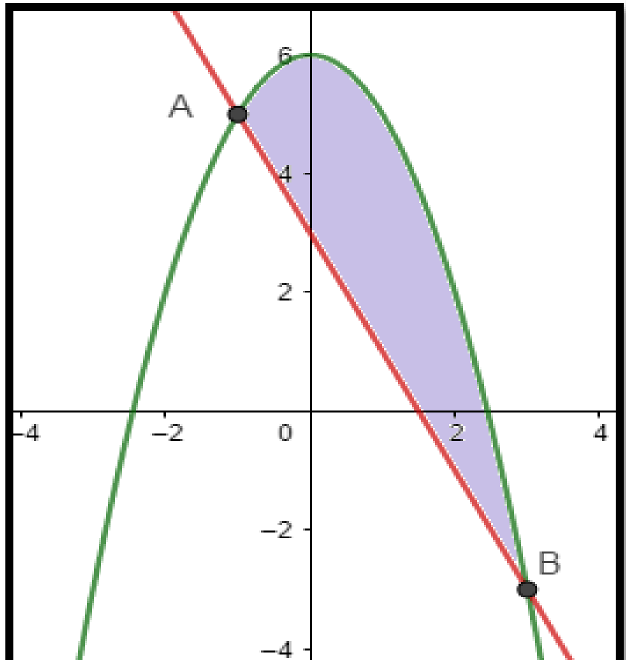
Área como Integral Dupla:

Observação: Quando $f(x,y) = 1 \ \ \forall(x,y) \in D$, o sólido cujo topo é $z = 1 = f(x,y)$, cuja base é D e cuja lateral é cilíndrica possui volume numericamente igual à área da base, pois nesse caso, sua altura é sempre constante e igual a 1.

Portanto, podemos utilizar integrais duplas para calcular a área de uma região plana D:

$$Área(D) = Área(D) \cdot 1 = V = \iint\limits_D 1 \cdot dA = \iint\limits_D 1 \cdot dydx\,.$$

Exemplo 7): Escreva, de duas formas distintas, as integrais duplas que permitem calcular a área da região plana delimitada por $y = 6 - x^2$ e $y = 3 - 2x$.



Solução: A interseção entre as curvas é dada por $6 - x^2 = 3 - 2x$, que nos fornece

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

ou seja

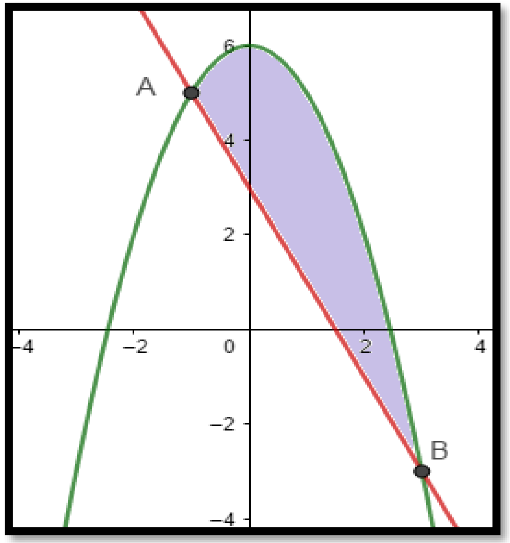
$$x = -1,\ y = 5 \qquad \text{e} \qquad x = 3,\ y = -3$$

Representando geometricamente a região, temos

Exemplo

1ª Forma: Tomando x como variável independente, temos

$$x \in [-1, 3].$$



Como a curva inferior é $y = 3 - 2x$ e a superior é $y = 6 - x^2$, temos

$$y \in [3 - 2x, 6 - x^2].$$

Logo

$$A = \int_{-1}^{3} \int_{3-2x}^{6-x^2} 1.\, dy dx.$$

2ª Forma: Tomando y como variável independente, vemos que há uma troca na limitação da curva à direita, em $y = 5$.

Assim, precisamos usar uma soma de integrais duplas:

i) $y \in [-3, 5]$ e $x \in [\frac{3-y}{2}, \sqrt{6-y}]$

ii) $y \in [5, 6]$ e $x \in [-\sqrt{6-y}, \sqrt{6-y}]$

Isolando x:

$$y = 3 - 2x \Rightarrow 2x = 3 - y$$

$$y = 6 - x^2 \Rightarrow x^2 = 6 - y$$

Logo

$$A = \int_{-3}^{5} \int_{\frac{3-y}{2}}^{\sqrt{6-y}} 1.\, dy dx + \int_{5}^{6} \int_{-\sqrt{6-y}}^{\sqrt{6-y}} 1.\, dy dx$$

Exercício: Resolver as integrais acima.