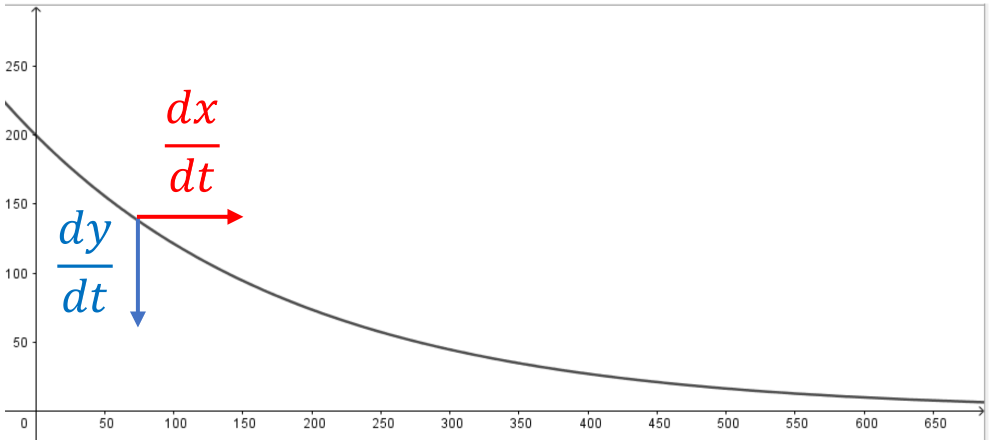
Exemplo 1. Uma pessoa desce uma tirolesa e, devido às propriedades físicas da corda e equipamento, descreve uma curva segunda a equação $ln\left(\frac{200}{y}\right) = \frac{x}{200}$. Supondo que a velocidade de deslocamento vertical da pessoa seja constante e igual à 4m/s, determine a velocidade de deslocamento horizontal em $x = 500m$.

Dados: $\frac{dy}{dt} = -4m/s$



Objetivo: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=500}$

Derivando implicitamente com relação a t a equação que descreve a tirolesa, temos que:

$$\frac{d}{dt}\left(ln\left(\frac{200}{y}\right)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{200}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(ln(200\, y^{-1})\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{200}x\right)$$

$$\frac{(200\, y^{-1})'}{(200\, y^{-1})} = \frac{1}{200}(x)'$$

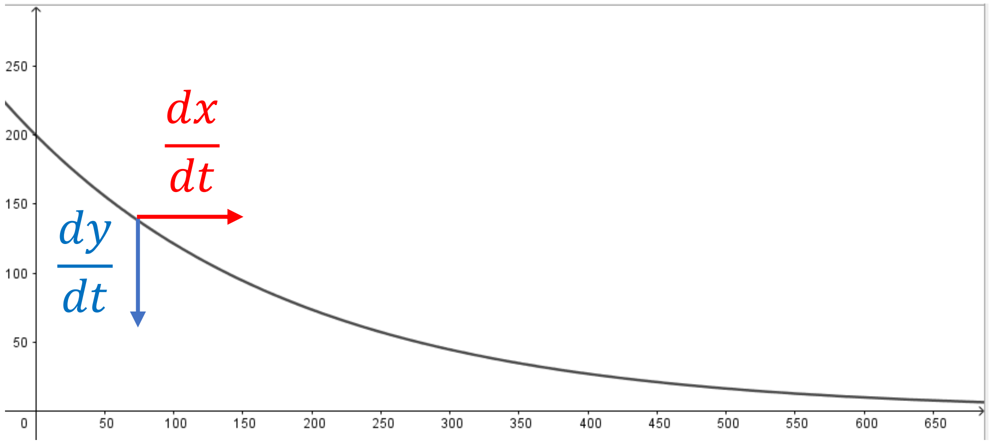
$$\frac{-200\, y^{-2}.\frac{dy}{dt}}{(200\, y^{-1})} = \frac{1}{200}\frac{dx}{dt}$$

$$y^{-1}.\frac{dy}{dt} = \frac{1}{200}\frac{dx}{dt}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = -200\, y^{-1}.\frac{dy}{dt}} \quad (1)$$

Exemplo 1. Uma pessoa desce uma tirolesa e, devido às propriedades físicas da corda e equipamento, descreve uma curva segunda a equação $ln\left(\frac{200}{y}\right) = \frac{x}{200}$. Supondo que a velocidade de deslocamento vertical da pessoa seja constante e igual à 4m/s, determine a velocidade de deslocamento horizontal em $x = 500m$.

Dados: $\frac{dy}{dt} = -4m/s$



Objetivo: $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=500}$

Desejamos saber $\frac{dx}{dt}$ para $x = 500m$. Para isso, precisamos encontrar o valor de y.

$$ln\left(\frac{200}{y}\right) = \frac{500}{200} \Rightarrow ln\left(\frac{200}{y}\right) = \frac{5}{2} \Rightarrow e^{ln\left(\frac{200}{y}\right)} = e^{\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{200}{y} = e^{\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 200e^{-\frac{5}{2}}}$$

Usando esses dados na equação (1), temos que:

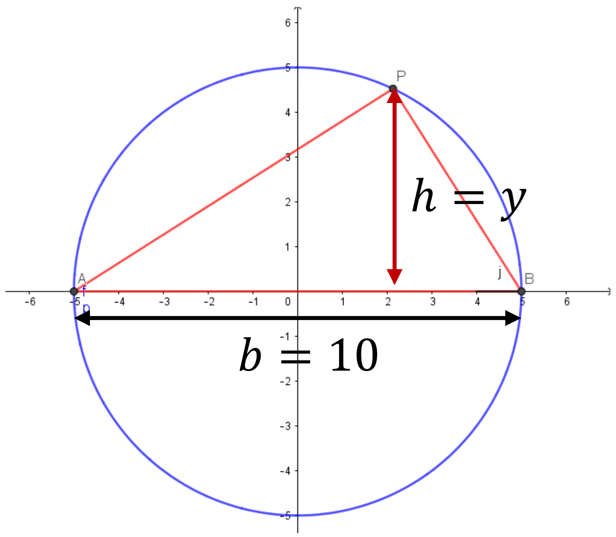
$$\frac{dx}{dt} = -200\, y^{-1} . \frac{dy}{dt}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=500} = -\frac{200}{200e^{-\frac{5}{2}}} . (-4) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=500} = 4e^{\frac{5}{2}}\ \mathrm{m/s}}$$

Exemplo 2. Um triângulo inscrito numa circunferência centrada na origem e de raio 5cm, tem as extremidades da hipotenusa situadas na intersecção da circunferências com o eixo das abscissas e, o terceiro vértice, situado no ponto $P(x, y)$, que se move sobre a circunferência à razão de $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} cm/s$. Encontre a velocidade com que a área deste triangulo está variando quando $x = 4\ cm$.

Dados:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} cm/s$$



Objetivo: $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=4m}$

A área de um triângulo é dada por: $A = \frac{b.h}{2} = \frac{10.h}{2} = 5y \longrightarrow A = A(y(t))$

Pela regra da cadeia, temos que:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dy}\frac{dy}{dt} \Longrightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = 5\frac{dy}{dt}} \qquad (1)$$

Sabemos que: $x^2 + y^2 = 25$

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dt}(5) \Longrightarrow \frac{d}{dt}(x^2) + \frac{d}{dt}(y^2) = 0 \Longrightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

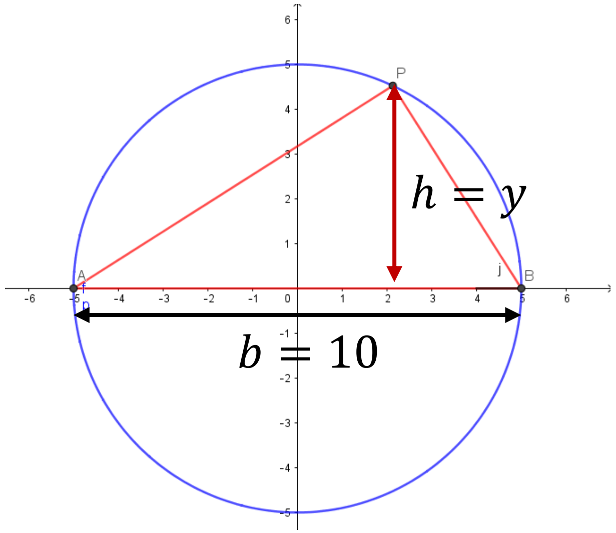
$$\Longrightarrow \boxed{\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}} \qquad (2)$$

Encontrando y para $x = 4\ cm$: $16 + y^2 = 25 \Longrightarrow \boxed{y = \pm 3}$

Exemplo 2. Um triângulo inscrito numa circunferência centrada na origem e de raio 5cm, tem as extremidades da hipotenusa situadas na intersecção da circunferências com o eixo das abscissas e, o terceiro vértice, situado no ponto $P(x, y)$, que se move sobre a circunferência à razão de $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} cm/s$. Encontre a velocidade com que a área deste triangulo está variando quando $x = 4\ cm$.

Dados:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} cm/s$$



Objetivo: $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=4m}$

Pela equação (2), temos que:

$$y = 3 \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{4}{3}\frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{2}{3}\ cm/s$$

$$y = -3 \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{4}{-3}\frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{2}{3}\ cm/s$$

Substituindo esses resultados em (1), temos que:

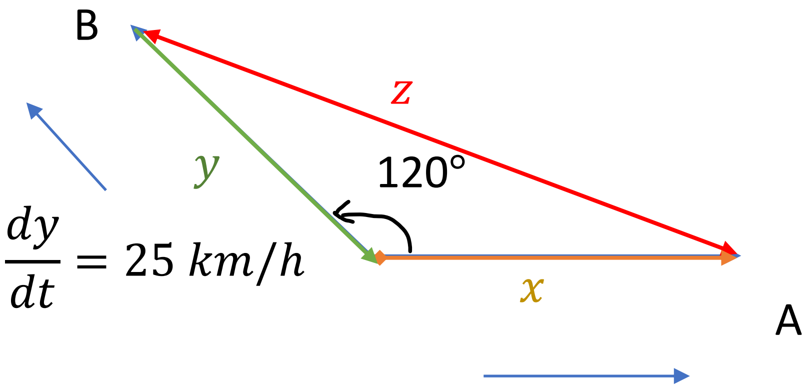
(1) $\frac{dA}{dt} = 5\frac{dy}{dt}$

Se $y = 3$, então: $\boxed{\frac{dA}{dt} = 5\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{10}{3}\ cm^2/s}$

Se $y = -3$, então: $\boxed{\frac{dA}{dt} = 5\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{10}{3}\ cm^2/s}$

Exemplo 3. Às 8h da manhã dois navios partem de um ponto O em rotas que formam um ângulo de 120°. Os navios A e B deslocam-se a 20 km/h e 25 km/h, respectivamente. Determine qual é a taxa de variação do afastamento desses navios às 11h da manhã (do mesmo dia).

Dados:



$$\frac{dy}{dt} = 25\ km/h$$

$$\frac{dx}{dt} = 20\ km/h$$

Objetivo: $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{t=3h}$

Pela lei dos cossenos, temos que:

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos(120°) \Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 + xy$$

Derivando implicitamente com relação ao tempo, temos que:

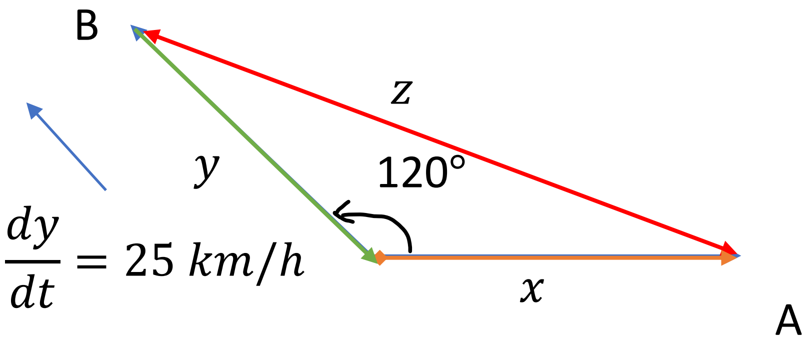
$$\frac{d}{dt}(z^2) = \frac{d}{dt}(x^2) + \frac{d}{dt}(y^2) + \frac{d}{dt}(xy)$$

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + \left(x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2z}\left((2x + y)\frac{dx}{dt} + (2y + x)\frac{dy}{dt}\right)$$

Exemplo 3. Às 8h da manhã dois navios partem de um ponto O em rotas que formam um ângulo de 120°. Os navios A e B deslocam-se a 20 km/h e 25 km/h, respectivamente. Determine qual é a taxa de variação do afastamento desses navios às 11h da manhã (do mesmo dia).

Dados:



$$\frac{dy}{dt} = 25\ km/h$$

$$\frac{dx}{dt} = 20\ km/h$$

Objetivo: $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=3h}$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2z}\left((2x + y)\frac{dx}{dt} + (2y + x)\frac{dy}{dt}\right)$$

Sabemos que:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 20\ km/h \\ \dfrac{dy}{dt} = 25\ km/h \end{cases}$$

Para $t = 3h$, segue que:

$$\begin{cases} x = 60\ km \\ y = 75\ km \end{cases}$$

Para $x = 60\ km$ e $y = 75\ km$, temos que:

$$z^2 = 60^2 + 75^2 + 60.75 \Longrightarrow z = 15\sqrt{21}\ km$$

Usando essas informações em $\frac{dz}{dt}$, temos que:

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=3h} = \frac{1}{2.15\sqrt{21}}\big((2.60 + 75)20 + (2.75 + 60)25\big)$$

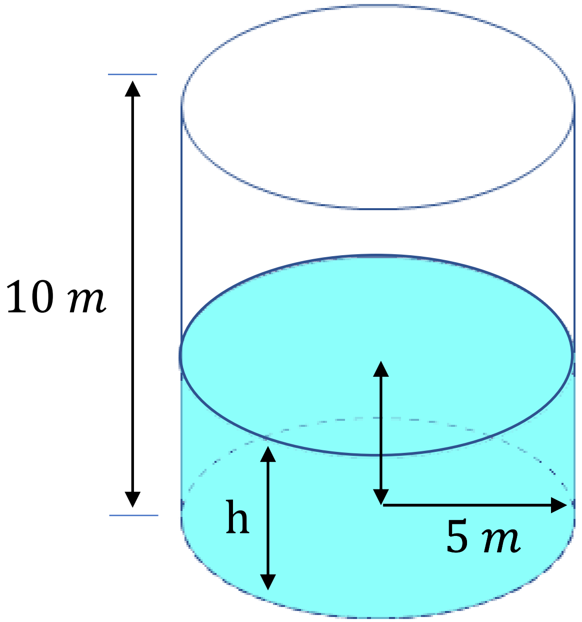
$$\boxed{\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=3h} = \frac{305}{\sqrt{21}}\ km/h}$$

Exemplo 4. Um tanque cilíndrico, com raio da base medindo e altura medindo, respectivamente, 5m e 10m. Sabendo que a água é bombeada para dentro do tanque a razão de 25 m³/h, com que velocidade sobe o nível de água?

Dados:

Objetivo: $\frac{dh}{dt}$

$$\frac{dV}{dt} = 25\, m^3/h$$



O volume de água no tanque cilíndrico é dada por:

$$V = \pi r^2 h \Longrightarrow V = \pi . 5^2 . h \Longrightarrow V = 25\pi h \longrightarrow V = V(h(t))$$

Pela regra da cadeia, temos que:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} \Longrightarrow \frac{dV}{dt} = 25\pi \frac{dh}{dt} \Longrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{25\pi}\frac{dV}{dt}$$

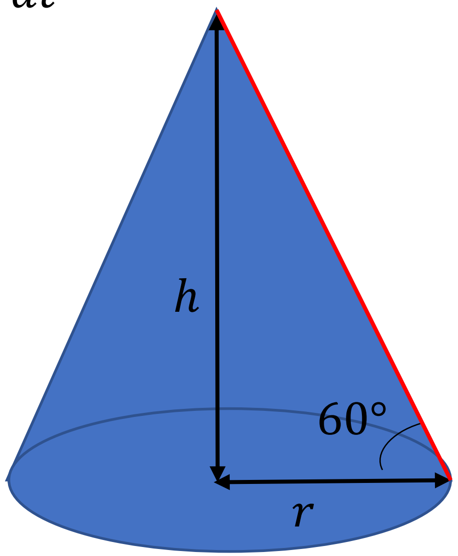
Como $\frac{dV}{dt} = 25\, m^3/h$, temos que:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{25\pi} 25 \Rightarrow \boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}\, m/h}$$

Exemplo 5. Supondo que esteja caindo areia sobre uma base plana e horizontal a uma razão de 12 m^3/h e que o monte mantém sempre a forma de um cone cuja geratriz forma um ângulo de 60º com a base, determine a velocidade com que a altura do monte aumenta quando ela é igual a 6 m

Dados:

$$\frac{dV}{dt} = 12\ m^3/h$$



Objetivo: $\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{h=6\ m}$

O volume de areia no monte cônico é dado por: $V = \dfrac{\pi}{3} r^2 h$ (1)

Relacionando r e h, temos que:

$$tg(60°) = \frac{h}{r} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{r} \Rightarrow \quad r = \frac{h}{\sqrt{3}} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), temos que:

$$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 h \Rightarrow V = \frac{\pi}{9}h^3 \longrightarrow V = V(h(t))$$

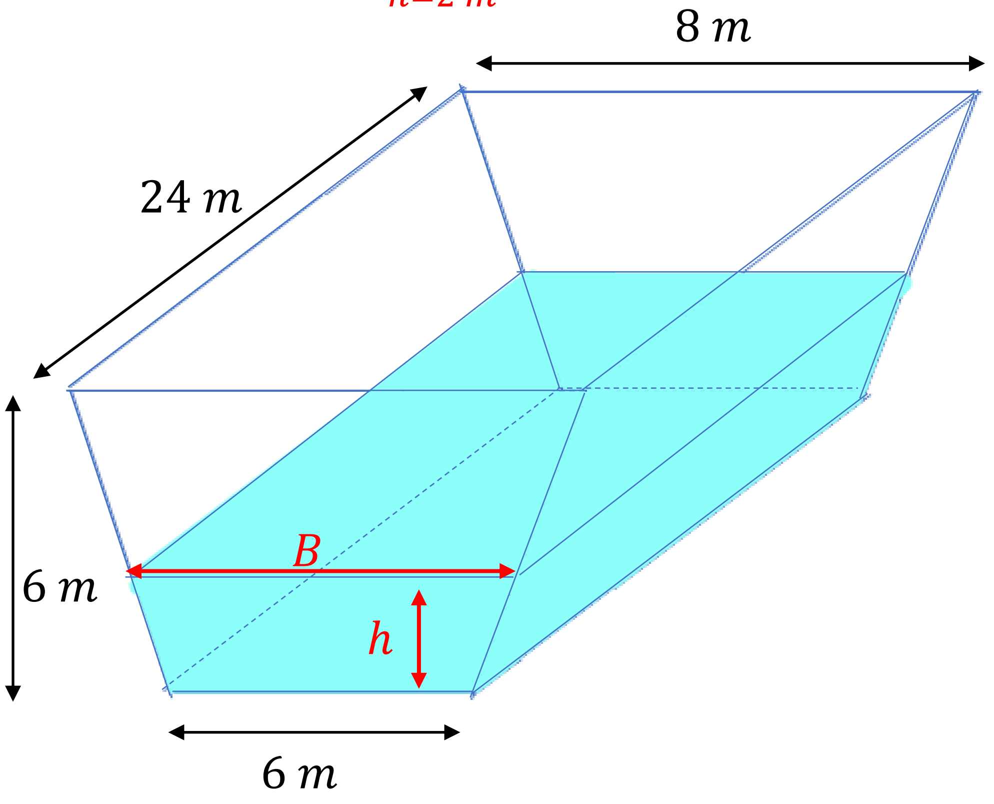
Pela regra da cadeia, temos que:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}h^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{3}{\pi\, h^2}\frac{dV}{dt}$$

Para $h = 6m$ e $\frac{dV}{dt} = 12\ m^3/h$, temos que: $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{3}{\pi\, 6^2} 12 \Rightarrow \boxed{\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{1}{\pi}\ m/h}$

Exemplo 6. Considere uma piscina de *24 m* de largura, cujos extremos são trapézios isósceles com altura de 6m, base menor de 6m e base maior de 8m. A água está sendo bombeada para a piscina à razão de 10 m^3/min. Com que rapidez está variando o nível de água quando este corresponder a 2m de altura?

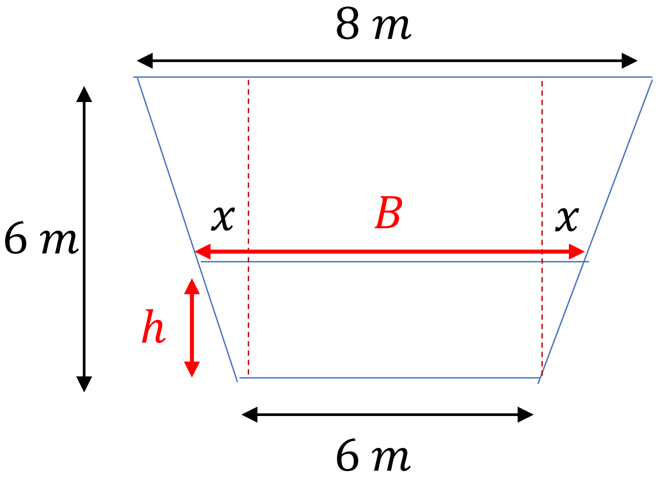
Objetivo: $\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{h=2\,m}$



O volume de água na piscina é dado por:

$$V = \frac{(B+b)hc}{2} \Longrightarrow V = \frac{h(B+b)24}{2} \Longrightarrow V = 12h(B+b) \qquad (1)$$

Considerando uma secção transversal, temos que:



$$B = 6 + 2x$$

Por semelhança de triângulos:

$$\frac{1}{x} = \frac{6}{h} \Longrightarrow x = \frac{h}{6}$$

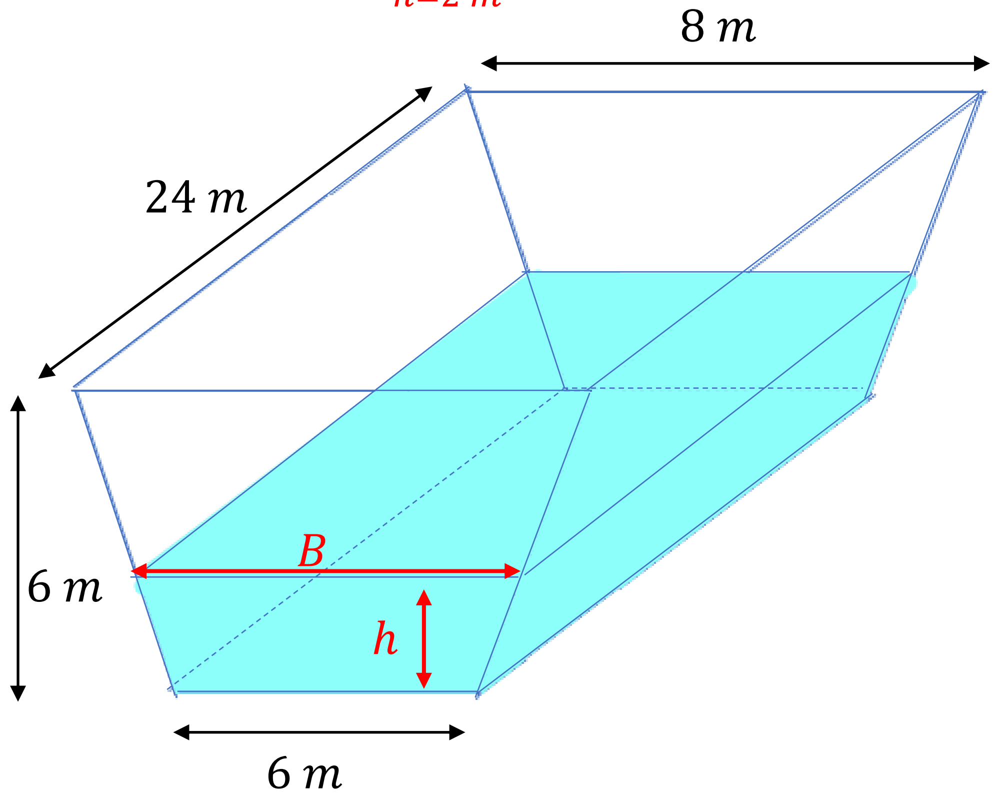
$$\Longrightarrow \boxed{B = 6 + \frac{h}{3}} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), temos que:

$$V = 12h\left(6 + \frac{h}{3} + b\right) \Longrightarrow V = 12h\left(6 + \frac{h}{3} + 6\right) \Longrightarrow \boxed{V = 144h + 4h^2}$$

Exemplo 6. Considere uma piscina de *24 m* de largura, cujos extremos são trapézios isósceles com altura de 6m, base menor de 6m e base maior de 8m. A água está sendo bombeada para a piscina à razão de 10 m^3/min. Com que rapidez está variando o nível de água quando este corresponder a 2m de altura?

Objetivo: $\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{h=2\,m}$



$$V = 144h + 4h^2 \longrightarrow V = V(h(t))$$

Pela regra da cadeia, temos que:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} \Longrightarrow \frac{dV}{dt} = (144 + 8h)\frac{dh}{dt}$$

$$\Longrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{(144 + 8h)}\frac{dV}{dt}$$

Para $h = 2m$ e $\frac{dV}{dt} = 10\ m^3/min$, temos que:

$$\Longrightarrow \left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=2\,m} = \frac{1}{(144 + 16)}10 \qquad \Longrightarrow \boxed{\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=2\,m} = \frac{1}{16}\ \text{m/min}}$$