



UDESC
Joinville

Universidade do Estado de Santa Catarina
Centro de Ciências Tecnológicas - CCT
Departamento de Matemática

GEOMETRIA ANALÍTICA

Lista 2: Retas, Planos e Distâncias

Professora Francielle Kuerten Boeing

1. Resolver as questões 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 14 que se iniciam na página 132 do Steinbruch.

2. Determine os valores de m para que as retas $r : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = mt \\ z = 4 + 5t \end{cases}$ e $s : \begin{cases} \frac{x+5}{-1} = y + m = \frac{z-6}{m} \end{cases}$ sejam: (a) ortogonais (b) paralelas (c) coplanares.

3. Calcule os valores de a e b para que a reta $r : \begin{cases} x = 3 + at \\ y = 2 - bt \\ z = 7 - 2t \end{cases}$ seja paralela à reta que é simultaneamente ortogonal às retas

$$r : \begin{cases} y = 2x - 8 \\ z = -3x + 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} \frac{x-4}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-6}{6} \end{cases}.$$

4. Determine as equações reduzidas da reta r que passa pelo ponto $P(3, 5, 2)$ e é simultaneamente ortogonal ao eixo x e à reta $s : \begin{cases} x = 1 \\ \frac{y-3}{-2} = z + 1 \end{cases}$

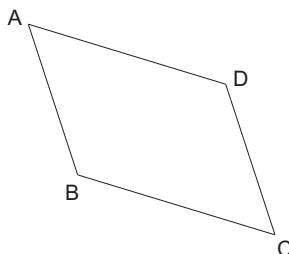
5. Calcule o(s) valor(s) de m para o(s) qual(is) a reta $r : \begin{cases} x = my + 3 \\ z = (m+1)y - 7 \end{cases}$ seja ortogonal à reta determinada pelos pontos $A(4, 0, m)$ e $B(-5, 2m, 3m)$.

6. Estabeleça as equações simétricas da reta que passa pelo ponto de interseção das retas $r : \begin{cases} 1 - x = y = \frac{z-2}{2} \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = 6 + 6t \end{cases}$ e é, ao mesmo tempo, ortogonal a essas retas.

7. Calcular as equações paramétricas de uma reta s que passa pelo ponto $A(1, -1, 1)$ e é ortogonal à reta $r : \frac{x-2}{-2} = y = z$

8. Calcular as equações da reta r que contém o ponto $A(2, -1, 1)$ e que interceptam a reta $s : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$ segundo um ângulo de $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$

9. Considere o paralelogramo de vértices $A(1, -2, 3)$, $B(4, 3, -1)$, $C(5, 7, -3)$ e $D(2, 2, 1)$.



Determine:

- (a) as equações paramétricas da reta que contém o ponto de interseção das diagonais deste paralelogramo e é simultaneamente ortogonal a estas duas diagonais.
- (b) a equação geral do plano que contém este paralelogramo.

10. Determine a posição relativa entre:

- (a) as retas $r : \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} y = 4x + 7 \\ z = x \end{cases}$
- (b) a reta $r : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = t \end{cases}$ e o plano $x + 2y + z + 1 = 0$
- (c) os planos $-2x + 3y + 4z = 9$ e $3x - 2y + 3z = 10$.

11. Dados os planos $\pi_1 : -4x + 4y - 4 = 0$ e $\pi_2 : -2x + y + z = 0$, determine:

- (a) a interseção entre π_1 e π_2 .
- (b) o ângulo entre π_1 e π_2 .

12. Obtenha a equação simétrica da reta que passa pelo ponto de interseção da reta $t : \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = x - 3 \end{cases}$ com o plano $\pi : 2x + 2y - 3z + 4 = 0$ e que é simultaneamente ortogonal às retas $r : \begin{cases} x = -z + 4 \\ y = 3z - 6 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 4 \\ z = 2y + 1 \end{cases}$.

13. Estabeleça a equação geral do plano que contém as retas $r : \begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{z-1}{5} \\ y = -1 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 2y + 5 \\ z = -2y - 1 \end{cases}$.

14. Determine a equação geral do plano que contém o ponto $P(1, 3, 4)$ e a reta $r : \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + 3t \\ z = 2 - 7t \end{cases}$.

15. Determinar a equação do plano que passa pela reta interseção dos planos $x - 3y - z + 3 = 0$ e $3x + y - 2z + 2 = 0$ e é perpendicular ao plano yz .

16. Determinar um vetor unitário ortogonal ao plano $\sqrt{2}x + y - z + 5 = 0$.

17. O plano $\pi : x + y - z - 2 = 0$ intercepta os eixos cartesianos nos pontos A, B e C . Determine a área e a altura do triângulo ABC .

18. Determine as equações paramétricas do plano que contém a reta $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e é perpendicular ao plano $2x + y - z + 5 = 0$.

19. Determine a posição relativa entre:

- (a) a reta $r : \begin{cases} x - 1 = \frac{y+1}{-2} \\ z = 0 \end{cases}$ e o plano $2x + y - 3z - 1 = 0$.
- (b) a reta $s : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 4 \end{cases}$ e o plano $3x - 2y - z - 2 = 0$.

20. Calcule os valores de m e n para que a reta $r : \begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2t - 3 \\ z = -t + 4 \end{cases}$ esteja contida no plano $\pi : nx + my - z - 5 = 0$.

21. Determine um ponto P de coordenadas inteiras que pertença à reta interseção dos planos: $\pi_1 : 3x - 4y + z - 3 = 0$ e $\pi_2 : x + 3y - z = 0$ e cuja distância ao ponto $Q(1, 1, -1)$ é 9 unidades de medida.

22. Considere as retas:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ z = 2y - 6 \end{cases} ; \quad s : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = 6 - t \end{cases} ; \quad \text{e} \quad t : \begin{cases} \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z}{-2} \end{cases} .$$

(a) Determine a posição relativa das retas a seguir e, **se houver**, seu ponto de interseção:

(i) r e s ; (ii) r e t ; (iii) t e s .

(b) Determine, **se houver**, a equação do plano que contém as retas:

(i) r e s ; (ii) r e t ; (iii) t e s .

(c) Determine a equação de uma reta l que é ortogonal a r , forma um ângulo de 60° com o eixo das ordenadas e intercepta o eixo das abscissas em $x = 2$.

23. Classifique as afirmações abaixo em verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta.

(a) A reta que passa pelos pontos $A(2, 1, 3)$ e $B(2, 4, 3)$ é paralela ao plano coordenado xz .

(b) O plano que passa pelos pontos $C(1, 0, 0)$, $D(0, 0, 4)$ e $E(2, 3, -4)$ é paralelo ao eixo y .

(c) O plano que contém a reta $\begin{cases} x = 2 \\ z = 4 \end{cases}$ e passa pelo ponto $(1, 3, 4)$ é paralelo ao plano xy .

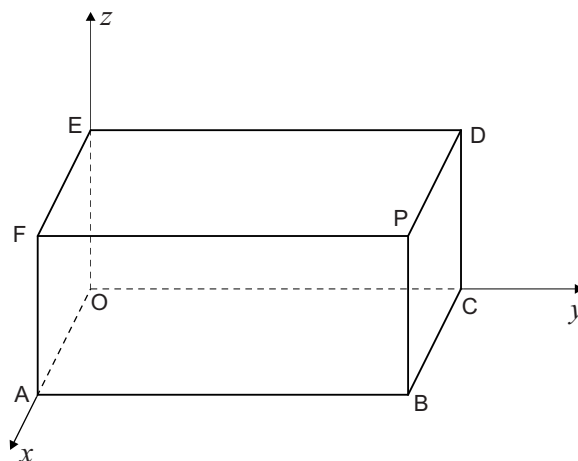
24. Considere a reta $u : \begin{cases} \frac{x-1}{a} = -y+2 = \frac{z}{2} \end{cases}$ e o plano $\beta : 2x + y - z + d = 0$. Determine, **se existirem**, os valores de a e d tais que:

(a) u esteja contida em β ;

(b) u seja paralela a β ;

(c) u seja ortogonal a β .

25. No paralelepípedo da figura abaixo tem-se: $E(0, 0, 3)$ e $B(2, 4, 0)$.



- (a) Determine a equação do plano que passa pelos pontos O , P e D .
- (b) Determine a equação da reta que passa pelo ponto médio do segmento \overline{OA} e é perpendicular ao plano $z = 3$.
- (c) Determine a equação do plano que contém a face $BCDP$

Respostas:

1. Respostas no livro.
2. (a) $m = \frac{1}{3}$ (b) não existe m (c) $m = \frac{7 \pm \sqrt{829}}{10}$
3. $a = 14$ e $b = 10$
4. $r : \begin{cases} x = 3 \\ z = 2y - 8 \end{cases}$
5. $m = 0$ ou $m = \frac{5}{2}$
6. $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$.
7. Uma das soluções possíveis: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$
8. $r : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 \\ z = 1 - t \end{cases}$ ou $r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 \\ z = 1 - 3t \end{cases}$
9. (a) $\begin{cases} x = 3 + 12t \\ y = \frac{5}{2} + 4t \\ z = 14t \end{cases}$
(b) $6x + 2y + 7z - 23 = 0$
10. (a) Concorrentes (b) r está contida no plano (c) Perpendiculares
11. (a) $\begin{cases} y = z + 2 \\ x = z + 1 \end{cases}$ (b) $\theta = \frac{\pi}{6}$
12. $\left\{ \frac{x+5}{5} = \frac{y+9}{2} = \frac{z+8}{-1} \right\}$
13. Estas retas são reversas.
14. $13x + 10y - 5z - 23 = 0$
15. $10y + z - 7 = 0$
16. $\pm \frac{1}{2}(\sqrt{2}, 1, -1)$
17. $A = 2\sqrt{3} \text{ u.a.}$ e $h = \sqrt{6} \text{ u.c.}$
18. $\begin{cases} x = t + 2h \\ y = -3 + 2t + h \\ z = 2 - t - h \end{cases}$
19. (a) e (b) r está contida no plano
20. $m = -\frac{4}{3}$ e $n = \frac{5}{3}$
21. $P(0, -3, -9)$

22. (a) i. concorrentes com $I(1, 5, 4)$
ii. reversas
iii. paralelas distintas
- (b) i. $-7x + 2y - z + 1 = 0$
ii. Não existe plano que contém as retas r e t , pois elas são reversas.
iii. $-16x + 7y + 5z - 39 = 0$
- (c) $l : \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{11}} = -\frac{y}{2} = z \end{cases}$
23. (a) Falsa, a reta é ortogonal ao plano xz .
(b) Verdadeira.
(c) Verdadeira.
24. (a) $d = -4$ e $a = \frac{3}{2}$
(b) $a = \frac{3}{2}$ e d pode assumir qualquer valor.
(c) Não existem valores a e d para que a reta u seja ortogonal ao plano β .
25. (a) $-3y + 4z = 0$
(b) $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$
(c) $y = 4$.