Transformações lineares:

Definição: Uma função vetorial $T:V\to W$ é chamada de uma transformação linear se e somente se:

(I) Para todo $u,v \in V$ tivermos que $T(u+v)=T(u)+T(v)$;

(II) Para todo $K\in \mathbb{R}$ e para todo $u\in V$ tivermos que $T(Ku)=KT(u)$.

Propriedades

(I) Se $T:V\to W$ é uma TL então a imagem do vetor nulo de V é o vetor nulo de W, isto é $T(\vec{0})=\vec{0}$.

(II) Se $T:V\to W$ é uma T.L. então para todos $u,v,w\in V$ e $a,b,c\in\mathbb{R}$ têm-se que:

$$T(au+bv+cw)=aT(u)+bT(v)+cT(w)$$

(III) Se $T:V\to W$ é uma TL e $\alpha=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ é uma base de V, temos que para qualque $v\in V$ existem $a_i\in\mathbb{R}$ tal que:

$$v=a_1v_1+a_2v_2+\dots+a_nv_n.$$

Assim pela linearidade de V, temos que

$$T(v)=T(a_1v_1+a_2v_2+\dots+a_nv_n)=a_1T(v_1)+a_2T(v_2)+\dots a_nT(v_n)$$

Núcleo de uma TL

Definição: chama-se núcleo de uma TL $T:V\to W$ ao conjunto de vetores $v\in V$ que são transformados em $\vec{0}\in W$. $N(T)=\{v\in V \mid T(v)=\vec{0}\}$

obs: $N(T)\neq\emptyset$

Composição de Transformações Lineares

Definição: Seja $T:V\to W$ e $S:W\to U$ transformações lineares. A transformação composta entre S e T é definida como $S\circ T:V\to U$ tal que:

$$(S\circ T)(v)=S(T(v))$$

obs: Para $S\circ T$ estar definida é necessário que $\text{Dominio}(S)=W=\text{Contradominio}(T)$.

Note que:

$$\text{Dominio}(S\circ T)=V=\text{Dominio}(T)$$

e $\text{Contradominio}(S\circ T)=U=\text{Contradominio}(S)$

Teorema: Se $T:V\to W$ e $S:W\to U$ são TL então a composta $(S\circ T):V\to U$ também é linear.

Matriz Canônica de uma Composição

Teorema: Se $T:V\to W$ e $S:W\to U$ são TL então a composta $(S\circ T):V\to U$ é tal que:

$$[S\circ T]=[S].[T]$$

obs: Se α, β e γ são respectivamente bases dos EV V, W e U, então o teorema anterior pode ser generalizado para. $[S\circ T]^{\alpha}_{\gamma}=[S]^{\beta}_{\gamma}.[T]^{\alpha}_{\beta}$

Inversa de uma Transformação Linear

Definição: Se $T:V\to W$ é uma TL bijetora, então dizemos que T é invertível e que existe a TL inversa $T^{-1}:W\to V$ tal que:

$$(T^{-1}\circ T)(v)=v \text{ para todo } v\in V$$

$$(T\circ T^{-1})(w)=w \text{ para todo } w\in W$$

Imagem de uma TL

Definição: Seja $T:V\to W$ uma TL. Definimos o conjunto imagem de T como:

$$Im(T)=\{w\in V;\ w=T(v) \text{ para algum } v\in V\}$$

obs: $Im(T)\neq\emptyset$

Teorema: Se $T:V\to W$ é uma TL então $Im(T)$ é um subespaço vetorial de W.

Teorema: Se $T:V\to W$ é uma TL então:

$$\dim(N(T))+\dim(Im(T))=\dim(V)$$

Transformações Lineares Injetoras e Sobrejetora

Definição: Uma TL $T:V\to W$ é injetora se, para quaisquers vetores u e $v\in V$, tais que $u\neq v$, tem-se que $T(u)\neq T(v)$. E para quaisquers vetores u e $v\in V$, se $T(u)=T(v)$ então $u=v$.

Teorema: Uma TL $T:V\to W$ é injetora se, e somente se, $N(T)=\{\vec{0}\}$.

Teorema: Uma TL $T:V\to W$ é sobrejetora se, e somente se, $Im(T)=W$, ou seja $\dim(Im(T))=\dim(W)$.

Teorema: Se $T:V\to W$ uma TL entre espaços Vetoriais de dimensão finita, tais que $\dim(V)=\dim(W)$ então T é injetora se e somente se é sobrejetora.

Teorema: Uma TL $T:V\to W$ é invertível se e somente se $\det([T])\neq 0$, e neste caso, $T^{-1}:W\to V$ é tal que:

$$[T^{-1}]=[T]^{-1}$$

Matriz de uma Transformação Linear

Dada a TL: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2 \to T(x,y,z)=(10x-20y-30z,\ x-2y-3z)$ temos que:

$$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\underbrace{\begin{bmatrix}10x-20y-30z\\x-2y-3z\end{bmatrix}}_{2\times3}=\underbrace{\begin{bmatrix}10&-20&-30\\1&-2&-3\end{bmatrix}}_{2\times3}.\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}}_{3\times1}\Rightarrow$$

$T(v)=[T]v$ matriz Canônica

Ex: Seja a TL $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x,y,z)=(2x-y+z,\ 3x+y-2z)$$

note que $Im(T)=\{(2x-y+z,3x+y-2z);\ x,y,z\in\mathbb{R}\}\Rightarrow$

$T(x,y,z)=x(2,3)+y(-1,1)+z(1,-2)\Rightarrow ger\{(2,3),(-1,1),(1,-2)\}$

Observe que a $[T]$ é formada pelos vetores geradores de T. $[T]=\begin{bmatrix}2&-1&1\\3&1&-2\end{bmatrix}$

Seja $T:V\to W$ linear, $\alpha=\{(v_1,\dots,v_n)\}$ base de V e $\beta=\{w_1,\dots w_n\}$ base de W. Então $T(v_1),\dots,T(v_n)$ são vetores de W

$$T(v_1)=a_{11}w_1+\dots+a_{m1}w_n$$

$$\dots$$

$$T(v_n)=a_{1n}w_1+\dots+a_{mn}w_n$$

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$[T(v_1)]_{\beta} \quad \cdots \quad [T(v_n)]_{\beta}$$

Teorema: Seja V e W EV, α base de V, β base de W e $T: V \to W$ uma TL. Então para todo $v \in V$ vale

$$[T(v)]_{\beta} = [T(v)]_{\beta}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha}$$

obs: Seja $T: V \to W$ uma TL e α e β bases de V e W, respectivamente. Então

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \text{posto de } [T]_{\beta}^{\alpha}$$

Transformações Lineares Especiais

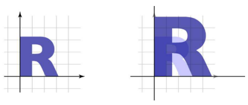
Dilatação ou Contração:

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(x,y) = K(x,y)$

Representação matricial de T = $[T] = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$

Representação geometrica $K = 1{,}5$

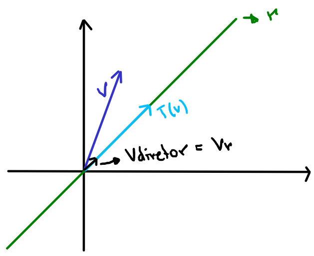


Cisalheamento: na direção do eixo x

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(x,y) = (x + Ky, y)$

Reflexão em torno de uma reta $y = Kx$



Temos de GAN que

$$T(v) = \left(\frac{v \cdot vr}{vr \cdot vr}\right) \cdot \vec{vr}$$

$$T(x,y) = \left(\frac{(x,y)\cdot(1,a)}{(1,a)\cdot(1,a)}\right)(1,a) \Rightarrow$$

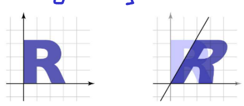
$$\Rightarrow \left(\frac{x + ay}{1+a^2}\right) \cdot (1,a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(x,y) = \left(\frac{x + ay}{1+a^2}, \frac{ax + a^2 y}{1+a^2}\right)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 1/_{1+a^2} & a/_{1+a^2} \\ a/_{1+a^2} & a^2/_{1+a^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Representação matricial de T = $[T] = \begin{bmatrix} 1 & K \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Representação geometrica $K = 0{,}5$



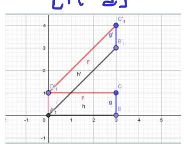
Cisalheamento: na direção do eixo y

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(x,y) = (x, y + Kx)$

Representação matricial de T = $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ K & 1 \end{bmatrix}$

Representação geometrica $K = 1$



Rotação

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(x,y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta,\ x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta)$

Representação matricial de T = $[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Representação geometrica $\theta = \frac{\pi}{6}$