Espaços Vetoriais:

Conjunto Fechado: Seja $H \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto de vetores:

- Fechado para adição: $\forall \vec{u}, \vec{v} \in H$, $\vec{u} + \vec{v} \in H$.
- Fechado para Multiplicação: $\forall \vec{v} \in H$, $\forall K \in \mathbb{R}$, $K\vec{v} \in H$.

Quando H é fechado para adição e multiplicação H é dito como conjunto fechado.

Definição de Espaço Vetorial: Seja V um conjunto não vazio qualquer de objetos no qual estejam definidas a operação de adição e multiplicação por escalar. Dizemos que V é um espaço vetorial se:

- V é um conjunto Fechado.
- os seguintes axiomas forem satisfeitos para qualquer elemento u, v e w de V e escalares α e β:

1- A adição é associativa: $(u+v)+w = u+(v+w)$.

2- Adição é comutativa: $u+v = v+u$.

3- A adição admite elemento neutro (nulo): existe $\vec{0} \in V$, tal que $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$, para todo $\vec{v} \in V$.

4- A adição admite simétricos: para todo $\vec{v} \in V$ existe $-\vec{v} \in V$, tal que $-\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$.

5- A multiplicação por escalar é associativa: $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$.

6- Distributividade sobre a adição de escalares: $(\alpha+\beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$

7- Distributividade sobre adição de vetores: $\alpha(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$.

8- A multiplicação por escalar admite elemento neutro: $1u = u$.

Definição de Subespaço Vetorial: Um subconjunto não vazio S de um espaço Vetorial V é um subespaço de V quando S é ele próprio um espaço Vetorial com as operações de soma e multiplicação por escalar definidos em V, ou seja, S é um subespaço de V se:

1) para quaisquers dois vetores u e v de S, $u+v \in S$, S é fechado para adição.

2) para quaisquers vetor v de S, e $K \in \mathbb{R}$, $Kv \in S$, S é fechado para multiplicação por escalar.

Obs:

- Se S é um E.V. então ele deve conter o vetor nulo.
- Todo E.V. admite pelo menos dois subespaços:
  - O conjunto formado pelo vetor nulo, $S=\{\vec{0}\}$.
  - O próprio E.V., ou seja $S=V$.

Combinação Linear

Definição: Um vetor v em um espaço vetorial V é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ em V quando V pode ser escrito na forma:

$v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \dots + a_nv_n$, onde $a_1, a_2, \dots, a_n$ são escalare

Subespaço Gerado: Seja V um espaço vetorial. Consideremos um subconjunto $A = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \subset V$, $A \neq \emptyset$. O conjunto S de todos os vetores de V que são combinações lineares dos vetores de A é um subespaço Gerado de V. Simbolicamente, podemos escrever $S = \{v \in V;\ v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \dots + a_nv_n\}$

- O subespaço S é chamado subespaço gerado pelos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$, ou pelo conjunto A, e denota-se: $S = ger\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ ou $S = ger\{A\}$, note que $v_1, v_2, \dots, v_n \subset S$.

Dependência e Independência Linear: Sejam $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, sendo V um espaço vetorial. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é Linearmente Independente ou que os vetores $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ são LI, se a equação:

$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \dots + a_nv_n = 0$ implica que $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

Se existir $a_i \neq 0$ que satisfaça a equação, dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é Linearmente Dependente ou que os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são LD.

Obs:

- LD, se e somente se, pelo menos um dos vetores de S pode ser escrito como combinação linear dos outros de S.
- LI, se e somente se, nenhum vetor de S pode ser escrito como combinação linear dos outros de S.

Base de um Espaço Vetorial: Um conjunto $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ será uma base do espaço vetorial V se atender as duas condições:

- β deve ser LI;
- β deve gerar o espaço vetorial V.

Teorema: Se $\beta = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ é uma base para um espaço vetorial V, então todo vetor em V pode ser escrito de uma única forma como uma combinação linear dos vetores de β.

Dimensão de um Espaço Vetorial: A dimensão é dada pelo número de vetores de uma base do espaço vetorial.

I) **Teorema:** A dimensão n de um espaço vetorial V é o número máximo de vetores LI em V e também o número mínimo de vetores necessários para gerar V.

Obs: Se $V = \mathbb{R}^n$ então a $\dim \mathbb{R}^n = n$

Se $V = M_{n \times m}$ então a $\dim M_{n\times m} = n.m$.

Se $V = P_n$ então da $\dim P_n = n+1$.

II) **Teorema:** Se W for um subespaço de um espaço vetorial V tal que $\dim V = n$ então:

a) $0 \leq \dim W \leq \dim V$.

b) $W = V$ se e somente se $\dim W = \dim V$.

Interseção e Soma de Subespaços Vetoriais.

Interseção: Sejam S_1 e S_2 dois subespaços vetoriais de V. A interseção S de S_1 e S_2, que se representa por $S = S_1 \cap S_2$, é o conjunto de todos os vetores $v \in V$ tais que $v \in S_1$ e $v \in S_2$.

Soma de Subespaços: Sejam U e W dois subespaços vetoriais de V. A soma $U+W$ é o conjunto

$$U+W = \{u+w \mid u \in U \text{ e } w \in W\}$$

Teorema: Sejam U e W dois subespaços vetoriais de V tais que:

- $U = \text{ger}\{u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots, u_n\}$
- $W = \text{ger}\{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n\}$

Então:

$$U+W = \text{ger}\{u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots, u_n, w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n\}$$

Matriz Mudança de Base: Sejam $\alpha = \{u_1, u_2\}$ e $\beta = \{v_1, v_2\}$ então:

$[I]_\beta^\alpha = [\,[u_1]_\beta \; [u_2]_\beta\,]$, matriz mudança de base de α para β. $[u_1]_\beta \Rightarrow u_1 = av_1 + bv_2$, logo $[u_1]_\beta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ e $[u_2]_\beta \Rightarrow u_2 = cv_1 + dv_2$, logo $[u_1]_\beta = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$.

Sendo assim temos que:

$$[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [I]_\alpha^\beta = \left([I]_\beta^\alpha\right)^{-1}$$