Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Propriedades de Séries Numéricas

Critério do Termo Geral

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 do dia 23 de setembro de 2024.

UDESC

Séries Numéricas - revisão

Definição: Uma série numérica é a **soma dos infinitos** termos de uma sequência numérica $u_n\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, denotada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n + \cdots$$

Para identificar se uma série numérica é convergente ou divergente, analisamos a sua Sequência de Somas Parciais, dada por:

$$\begin{aligned}
S_1 &= u_1\\
S_2 &= u_1 + u_2 = S_1 + u_2\\
S_3 &= (u_1 + u_2) + u_3 = S_2 + u_3\\
S_4 &= (u_1 + u_2 + u_3) + u_4 = S_3 + u_4\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
S_n &= S_{n-1} + u_n.
\end{aligned}$$

Se S_n for convergente, ou seja, se existir $S \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, dizemos que a série numérica é convergente e converge para S e denotamos $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = S$,

Caso contrário, ou seja, se a sequência S_n for divergente dizemos que a série é divergente.

Exercícios

Exercício 1: Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ converge ou diverge.

Note que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}} + \cdots + \cdots$$

Exercício 2: Determine se a série converge ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{11}{n^2+4n+3}$$

Note que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{11}{n^2+4n+3} = \frac{11}{8} + \frac{11}{15} + \frac{11}{24} + \frac{11}{35} + \cdots + \cdots$$

Propriedades de Séries

São válidas as seguintes propriedades:

1) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ são séries convergentes, digamos para S e T, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n + ky_n)$ é convergente para todo $k \in \mathbb{R}$. Além disso, converge $para$ $S + kT$.

2) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n + y_n)$ é divergente.

3) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ são divergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n + y_n)$ pode convergir ou divergir.

As justificativas para tais propriedades são imediatas e decorrem das propriedades de limite de uma soma.

Propriedades de Séries

A próxima propriedade relaciona a convergência de uma série com a convergência do seu termo geral:

4) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge, então $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$

Justificativa: Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge, então existe $S \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \mathrm{S}.$$

Como $S_n = S_{n-1} + u_n$ temos que

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} + u_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} + \lim_{n\to+\infty} u_n = S + \lim_{n\to+\infty} u_n$$

com isso obtemos que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0,$$

conforme desejado.

Critério do Termo Geral

A **contraposição** da Propriedade 4 fornece um primeiro critério que permite concluir a **divergência** de uma Série, sem que seja preciso efetuar a soma dos seus infinitos termos:

Critério do Termo Geral: Se $\lim_{n \to +\infty} u_n \neq 0$ então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é $divergente$.

Justificativa: Se $\lim_{n \to +\infty} u_n \neq 0$ a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ não pode convergir, pois senão ocorria uma contradição com a propriedade 4.

CUIDADO:

- Caso tenhamos $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$, a série pode convergir ou divergir.
- A série do Exercício 1 é divergente, ainda que tenhamos que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

- Já a série da Exercício 2 é convergente e tal que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{11}{n^2 + 4n + 3} = 0.$$

Exercícios

Exercício 3: Verifique se as séries dadas abaixo são convergentes ou divergentes:

a) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n}$$

b) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n^7 - 4n^6 + 3n^4 - 7n^3 - 1}{13n^7 + 9n^5 - 2n^4 + 8n^2 + 3}$$

c) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$$

Exemplos resolvidos

Exemplo 1: Determine se a série converge ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{20}{n^2+12n+32}$$

Solução: Antes de efetuarmos as somas parciais, note que pode ser útil usar frações parciais para reescrever o termo geral da série como

$$u_n = \frac{20}{n^2+12n+32} = \frac{20}{(n+4)(n+8)}$$

$$= \frac{A}{n+4} + \frac{B}{n+8} = \frac{(A+B)n+(8A+4B)}{(n+4)(n+8)}$$

E então obtemos

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 8A+4B=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ -4B=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=-5 \end{cases}.$$

Séries Numéricas Convergentes e Divergentes

Portanto conseguimos reescrever o termo geral da série como:

$$u_n = \frac{5}{n+4} - \frac{5}{n+8}.$$

Com isso, as somas parciais são dadas por:

$$S_1 = u_1 = \frac{5}{5} - \frac{5}{9}$$

$$S_2 = S_1 + u_2 = \frac{5}{5} - \frac{5}{9} + \frac{5}{6} - \frac{5}{10}$$

$$S_3 = S_2 + u_3 = \frac{5}{5} - \frac{5}{9} + \frac{5}{6} - \frac{5}{10} + \frac{5}{7} - \frac{5}{11}$$

$$S_4 = S_3 + u_4 = \frac{5}{5} - \frac{5}{9} + \frac{5}{6} - \frac{5}{10} + \frac{5}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{8} - \frac{5}{12}$$

$$S_5 = S_4 + u_5 = \frac{5}{5} - \frac{5}{9} + \frac{5}{6} - \frac{5}{10} + \frac{5}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{8} - \frac{5}{12} + \frac{5}{9} - \frac{5}{13}$$

$$S_6 = S_5 + u_6 = \frac{5}{5} + \frac{5}{6} - \frac{5}{10} + \frac{5}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{8} - \frac{5}{12} - \frac{5}{13} + \frac{5}{10} - \frac{5}{14}$$

Veja que a partir de S_5, dois termos (que estão em vermelho), sempre se cancelam!

Séries Numéricas Convergentes e Divergentes

$$S_7 = S_6 + u_7 = \frac{5}{5} + \frac{5}{6} + \frac{5}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{8} - \frac{5}{12} - \frac{5}{13} - \frac{5}{14} + \frac{5}{11} - \frac{5}{15}$$

$$S_8 = S_6 + u_7 = \frac{5}{5} + \frac{5}{6} + \frac{5}{7} + \frac{5}{8} - \frac{5}{12} - \frac{5}{13} - \frac{5}{14} - \frac{5}{15} + \frac{5}{12} - \frac{5}{16}$$

Com o cancelamento dos termos em vermelho, veja que a soma parcial sempre admite oito fatores, sendo que os quatro primeiros serão sempre iguais.

Portanto, obtemos um padrão para a soma, dado por:

$$S_n = \frac{5}{5} + \frac{5}{6} + \frac{5}{7} + \frac{5}{8} - \frac{5}{n+5} - \frac{5}{n+6} - \frac{5}{n+7} - \frac{5}{n+8}$$

Com isso, podemos calcular

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{5} + \frac{5}{6} + \frac{5}{7} + \frac{5}{8} - \frac{5}{n+5} - \frac{5}{n+6} - \frac{5}{n+7} - \frac{5}{n+8}$$

$$= 1 + \frac{5}{6} + \frac{5}{7} + \frac{5}{8} - 0 - 0 - 0 - 0 = \frac{533}{168}.$$

Portanto, a série dada é convergente e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{20}{n^2 + 12n + 32} = \frac{533}{168}.$$

Exemplos resolvidos

Exemplo 2: Verifique se as séries dadas abaixo são convergentes ou divergentes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n}$

Solução: Temos que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0,$

portanto, a série diverge pelo Critério do Termo Geral.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7n^3 - 4n + 13}{41n^3 + 11n^2 - 1}$

Solução: Como $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{7n^3-4n+13}{41n^3+11n^2-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\left(7 - \frac{4}{n^2} + \frac{13}{n^3}\right)}{n^3\left(41 + \frac{11}{n} - \frac{1}{n^3}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{7 - \frac{4}{n^2} + \frac{13}{n^3}}{41 + \frac{11}{n} - \frac{1}{n^3}} = \frac{7}{41} \neq 0$

a série diverge pelo Critério do Termo Geral.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$

Solução: Como $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$, a série pode convergir ou divergir.

Nada pode ser afirmado nesse momento. Precisaremos estudar outros Critérios.