Álgebra Linear

Dependência e Independência Linear
Base e Dimensão

Katiani, Graciela e Marnei

Dependência e Independência Linear

"Nossa preocupação é gerar um espaço com um número mínimo de vetores e identificar a existência de algum vetor descartável nesse conjunto."

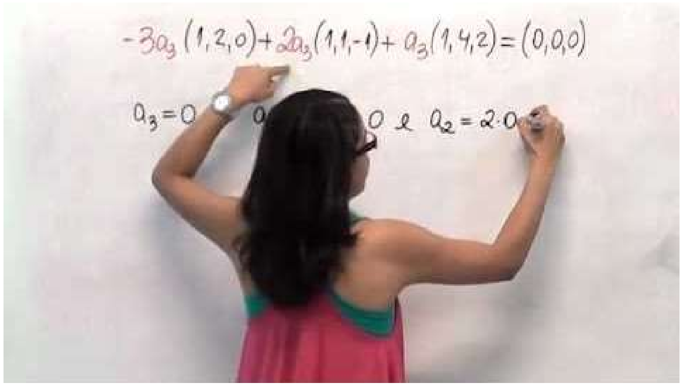
Definição: Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, sendo V um espaço vetorial. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é ***Linearmente Independente*** ou que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são ***LI***, se a equação:

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n = 0 \quad \text{implicar que} \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

Se existir $a_i \neq 0$ que satisfaça a equação, dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é ***Linearmente Dependente*** ou que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são ***LD***.

Sugestões de vídeos

https://www.youtube.com/watch?v=1NQgheFnX9A



https://www.youtube.com/watch?v=VgP7jcypQAY&feature=youtu.be&t=3

Observações

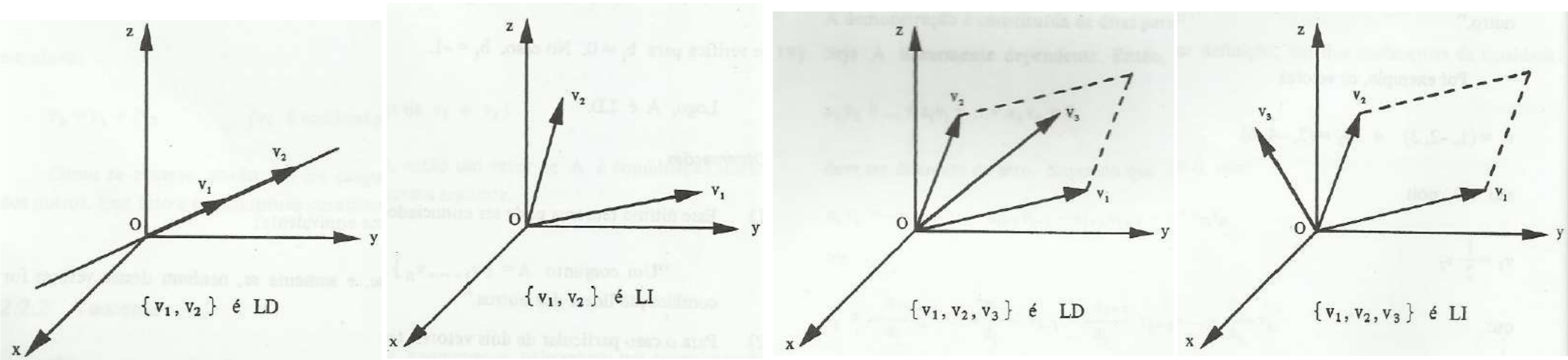
Um conjunto S de dois ou mais vetores é:

i) LD se, e somente se, pelo menos um dos vetores de S pode ser escrito como combinação linear dos outros de S.

ii) Se o vetor nulo pertencer a um conjunto então este será LD.

iii) LI se, e somente se, nenhum vetor de S pode ser escrito como combinação linear dos outros de S.

iv) Nos gráficos a seguir tem-se a interpretação geométrica da dependência linear de dois e três vetores do R^3:



UDESC

Exemplos

1) Verifique se são LI ou LD os conjuntos de vetores abaixo:

a) No espaço V = R^3 e os vetores v_1 = (2,-1,3), v_2 = (-1,0,-2) e v_3 = (2,-3,1).

$$a(2,-1,3) + b(-1,0,-2) + c(2,-3,1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} 2a - b + 2c = 0 \\ -a - 3c = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Escalonando}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} b = -4c \\ a = -3c \end{matrix}$$

Como a e c estão em função de c, os vetores são LD.

UDESC

Exemplos

b) No espaço V = R^3 e os vetores v_1 = (1,0,-1), v_2 = (1,1,0) e v_3 = (1,1,-1).

$$a(1,0,-1) + b(1,1,0) + c(1,1,-1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ -a - c = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Escalonando}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{matrix}$$

Como a=0, b=0 e c=0, os vetores são LI.

Exemplos

2) *No EV* M_2 *o conjunto:* $A = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ *é LD?*

Examinemos a equação: $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$

$$a_1 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuja solução é $a_1 = -a_3$ *e* $a_2 = -2a_3$. *.Como existem soluções* $a_i \neq 0$, *o conjunto é LD.*

.

Exercícios propostos

1) Determine se os sobconjuntos de P_2 são LI ou LD:

a) $S = \{x^2, 1 + x^2\}$

b) $M = \{7 - 3x + 4x^2, 6 + 2x - x^2, 1 - 8x + 5x^2\}$

2) Encontre todos os valores reais de k para os quais o conjunto $\{(k, 1,1), (1, k, 1), (1,1, k)\}$ é linearmente dependente.

3) Mostre que se u, v, w são vetores quaisquer linearmente independentes, então os vetores $u - v, v - w, w - u$ formam um conjunto linearmente dependente.

Base de um Espaço Vetorial

Definição: Um conjunto $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ será uma *base* do espaço vetorial V se atender as duas condições:

i) β deve ser LI;

ii) β deve gerar o espaço vetorial V.

Logo, base é o conjunto de vetores necessários para gerar o espaço vetorial V.

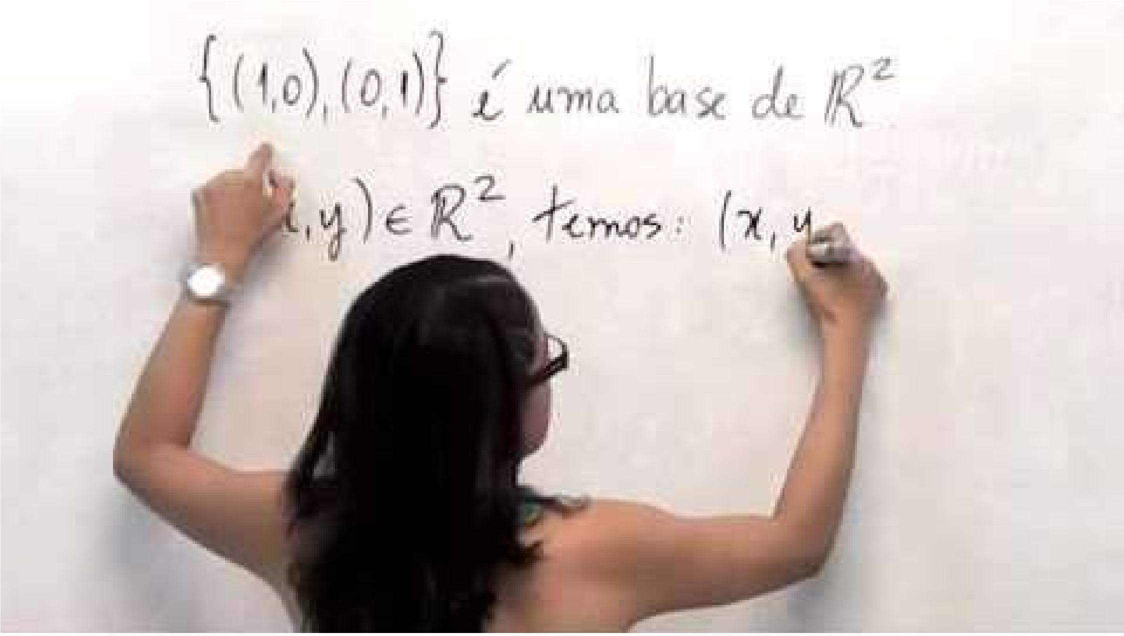
O conjunto $\beta = \{ (1,0),(0,1)\}$ é uma base do R^2 , pois β é LI e gera R^2.

O conjunto $\beta = \{ (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base do R^3, pois β é LI e gera R^3.

O conjunto $\beta = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base de $M_{2\times 2}$, pois é LI e gera $M_{2\times 2}$.

O conjunto $\beta = \{x^2, x, 1\}$ é uma base de P_2, pois é LI e gera um polinômio de grau 2.

Sugestão de vídeo:



https://www.youtube.com/watch?v=vnqzQbv-g2Q

Exemplos

1) $\beta = \{(1,1),(-1,0)\}$ *é base de* $\mathbb{R}^2$ *? Justifique.*

i) Verificar se é LI:

$a(1,1) + b(-1,0) = (0,0) \quad \Rightarrow \quad a = b = 0$

Logo os vetores são LI's.

ii) β *gera o próprio* $\mathbb{R}^2$?

Sim, pois ao tomarmos

$$(x,y) = m(1,1) + n(-1,0)$$
$$(x,y) = (m-n, m)$$
$$m = y \ e \ n = y - x$$

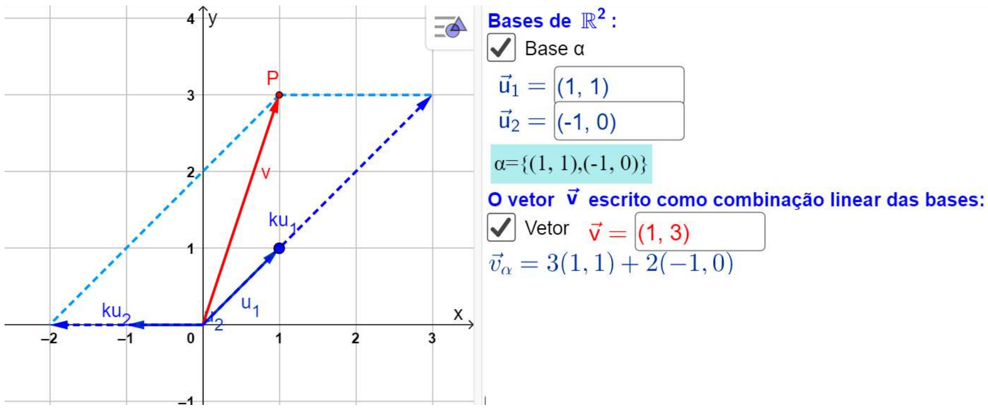
Obtém-se

$$(x,y) = y(1,1) + (y-x)(-1,0)$$

Então qualquer vetor (x,y) do $\mathbb{R}^2$ pode ser obtido como combinação linear dos vetores de β.

Concluímos que β é base do $\mathbb{R}^2$, pois gera V e é LI.

Para exemplificar, a ilustração abaixo mostra o vetor $v = (1,3)$ escrito como combinação linear dos vetores da base β



2. Encontre uma base para o subespaço do $\mathbb{R}^3$, $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}$

3. Encontre uma base para o espaço solução do sistema linear $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + 6y - 2z = 0 \\ -x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$

4. Sabendo que M(4,1)= $ger\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$, obtenha uma base para o espaço vetorial M(4,1).

TEOREMA: Se $\beta = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ é uma base para um espaço vetorial V, então todo vetor em V pode ser escrito de uma única forma como uma combinação linear dos vetores de β .

DEMONSTRAÇÃO:

TEOREMA: Se $\beta = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ é uma base para um espaço vetorial V, então qualquer subconjunto de V com mais de n vetores é linearmente independente.

EXEMPLO (PARA ILUSTRAR O TEOREMA): Uma base para o $\mathbb{R}^2$ consiste em 2 vetores, então o conjunto $A = \{(1,2), (2,-3), (4,-2)\}$ deve ser linearmente dependente. (verifique!)

Dimensão de um Espaço Vetorial

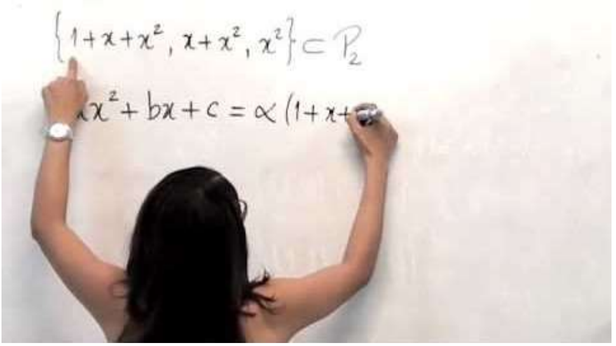
Definição: A dimensão é dado pelo número de vetores de uma base do espaço vetorial.

Observações:

i) Teorema: A dimensão n de um espaço vetorial *V* é o número máximo de vetores linearmente independente em *V* e também o número mínimo de vetores necessários para gerar *V*.

ii) Representação: se *V* é um espaço vetorial com uma base de n vetores, então a dimensão de *V* é denotada por:

$$\dim V = n$$



https://www.youtube.com/watch?v=2JPDqg2ND2Y

Dimensão de um Espaço Vetorial

Observações

Se V não possui base a dimensão é: $dim\,V = 0$

Se V tem uma base com infinitos vetores a dimensão é: $dim\,V = \infty$

Se $V = R^n$ então a $\dim R^n = n$

Se $V = M_{n \times m}$ então a $\dim M_{n \times m} = n.m$

Se $V = P_n$ então a $\dim P_n = n + 1$

Exemplo

1) Considere o subespaço de R^3

$$W = \{(x, y, z) \in R^3 / x + y + z = 0\}$$

Determine uma base e a dimensão do subespaço W.

Característica de w $\in W$

$x = -y - z \Rightarrow u = (-y - z, y, z) = \underbrace{y(-1,1,0) + z(-1,0,1)}_{\text{Combinação Linear de w}}$ Os vetores (-1,1,0) e (-1,0,1) são LI

Logo, a base de W será $\beta_u = \{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$ e a dimensão dim W = 2

- Note que W é um plano que passa pela origem. Uma base para um plano sempre tem dois vetores.

Exemplo

2) Considere o subespaço de $M_{2\times 3}$

$$U=\left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f\end{bmatrix} \mid a-d=b-e=0\right\}$$

Determine uma base e a dimensão do subespaço U.

Característica de $\mathrm{A} \in \mathrm{U}$

$$\begin{matrix} a-d=0 \Rightarrow a=d \\ b-e=0 \Rightarrow b=e \end{matrix} \quad \Rightarrow A=\begin{bmatrix} d & e & c \\ d & e & f\end{bmatrix}=d\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}+e\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+f\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Logo, a base de U será $\beta_u=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ e a dimensão dim W = 4

Exemplo

3) Considere o subespaço de R^3

$$\mathrm{U} = [(2,1,0),(-1,-2,-1)(-3,0,1)]$$

a) Determine o subespaço gerado por U.

$$(x, y, z) = a(2,1,0) + b(-1,-2,-1) + c(-3,0,1)$$

$$\begin{cases} 2a - b - 3c = x \\ a - 2b = y \\ -b + c = z \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & x \\ 1 & -2 & 0 & y \\ 0 & -1 & 1 & z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Escalonando}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & x \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-x + 2 \times y}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{x - 2 \times y + 3 \times z}{3} \end{pmatrix} \rightarrow$$

Para que o sistema seja um SP $\frac{x-2y+3z}{3} = 0$

Logo, $U = \{(x, y, z) \in R^3 / x - 2y + 3z = 0\}$

Exemplo

b) Determine a dimensão de U.

DIMENSÃO: é número de vetores de uma base. Bases devem ser LI. Geradores não são necessariamente LI.

$\mathrm{U} = [(2{,}1{,}0), (-1,-2,-1)(-3{,}0{,}1)]$ Geradores de U

$U = \{(x, y, z) \in R^3 / x - 2y + 3z = 0\}$ Subespaço de U

Característica de $u \in U$

$x = 2y - 3z \Rightarrow u = (2y - 3z, y, z) = \underbrace{y(2{,}10) + z(-3{,}0{,}1)}_{\text{Combinação Linear de u}}$

Os vetores (2,1,0) e (-3,0,1) são LI e o vetor (-1,-2,-1) é LD!

Logo, a base de U será $\beta_u = \{(2{,}1{,}0), (-3{,}0{,}1)\}$ e a dimensão dim U = 2

TEOREMA: Se W for um subespaço de um espaço vetorial V tal que $\dim V = n$, então:
a) $0 \leq \dim W \leq \dim V$
b) $W = V$ se e somente se $\dim W = \dim V$

Exemplo:
Se $V = \mathbb{R}^3$ e W for um subespaço de V, então:

1. Se $W = \{(0,0,0)\}$, então $\dim W = 0$
2. Se W é uma reta que passa pela origem, então $\dim W = 1$.
3. Se W é um plano que passa pela origem, então $\dim W = 2$.
4. Se $W = \mathbb{R}^3$, então $\dim W = 3$.

Logo, $0 \leq \dim W \leq 3$, e quando $\dim W = 3$, significa que $W = V = \mathbb{R}^3$

Exercício proposto

1) Seja W o subespaço vetorial de $M_{2\times 2}$, dado por $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; a = d; c = a + b \right\}$

a) Qual é a dimensão de W?

b) O conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de W? Por quê?

c) Complete o conjunto do item anterior para que forme uma base para o espaço vetorial $M_{2\times 2}$. Mostre que de fato o conjunto por vocês sugerido é uma base para $M_{2\times 2}$.