UDESC
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

GAN: Geometria Analítica

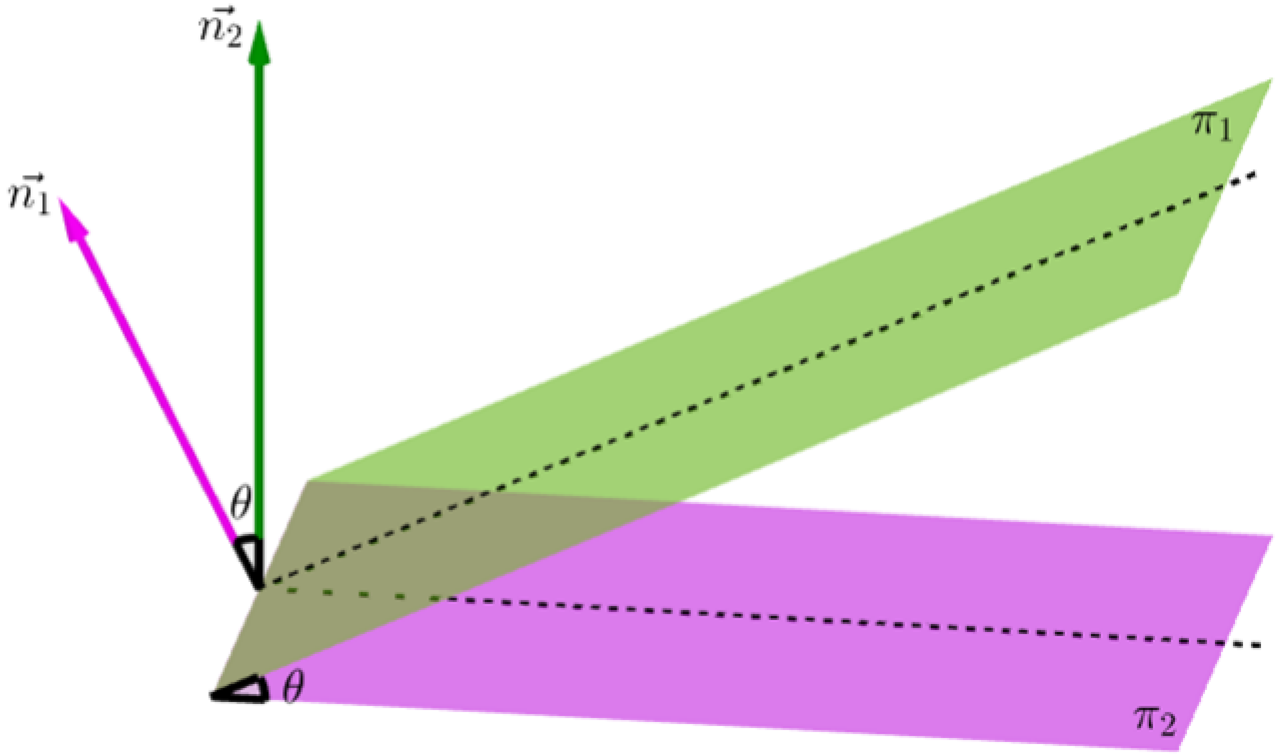
Prof.: Francielle Kuerten Boeing

Ângulo entre dois planos

Sendo os planos $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, o ângulo θ entre os planos π_1 e π_2 é o menor ângulo entre vetores normais de π_1 e π_2:

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|},$$

com $\overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$,
$\overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$ e
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.



Ângulo entre dois planos

Exemplo 8: Determine o ângulo entre os planos

$$\pi_1: 2x - 3y + 5z - 8 = 0$$

e

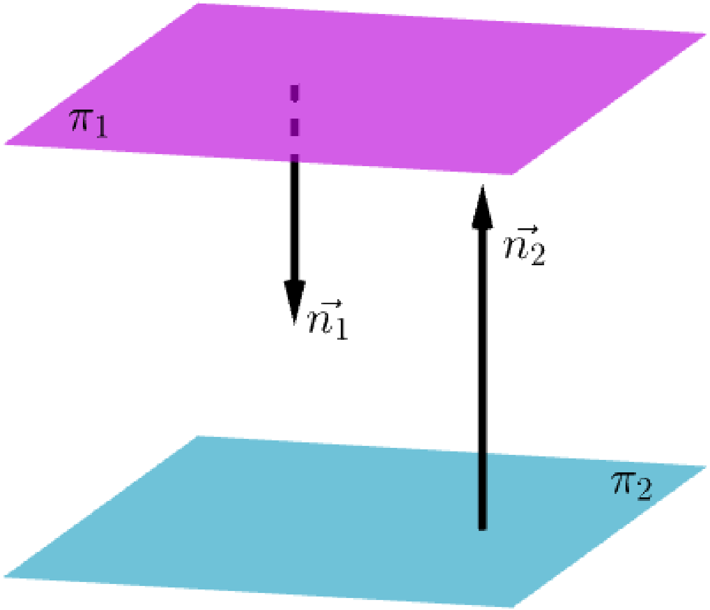
$$\pi_2: 3x + 2y + 5z - 4 = 0.$$

Condição de paralelismo

Sendo os planos $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, com $\overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$, temos

- π_1 e π_2 são paralelos se $\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$, ou seja, se

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$



Se, além disso, tivermos

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2},$$

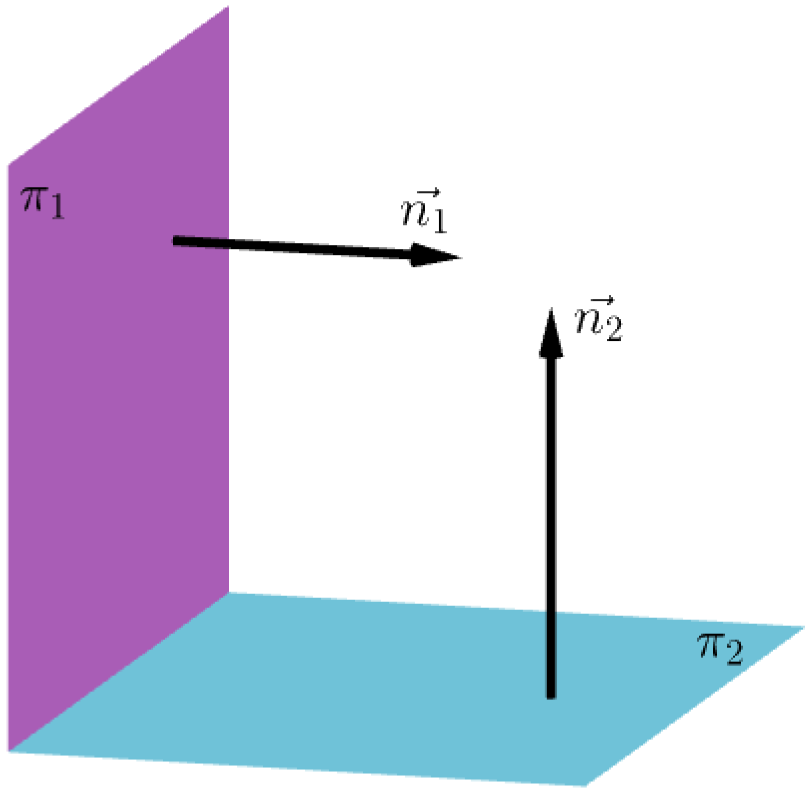
então π_1 e π_2 são coincidentes.

Condição de perpendicularismo

Sendo os planos $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, com $\overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$, temos

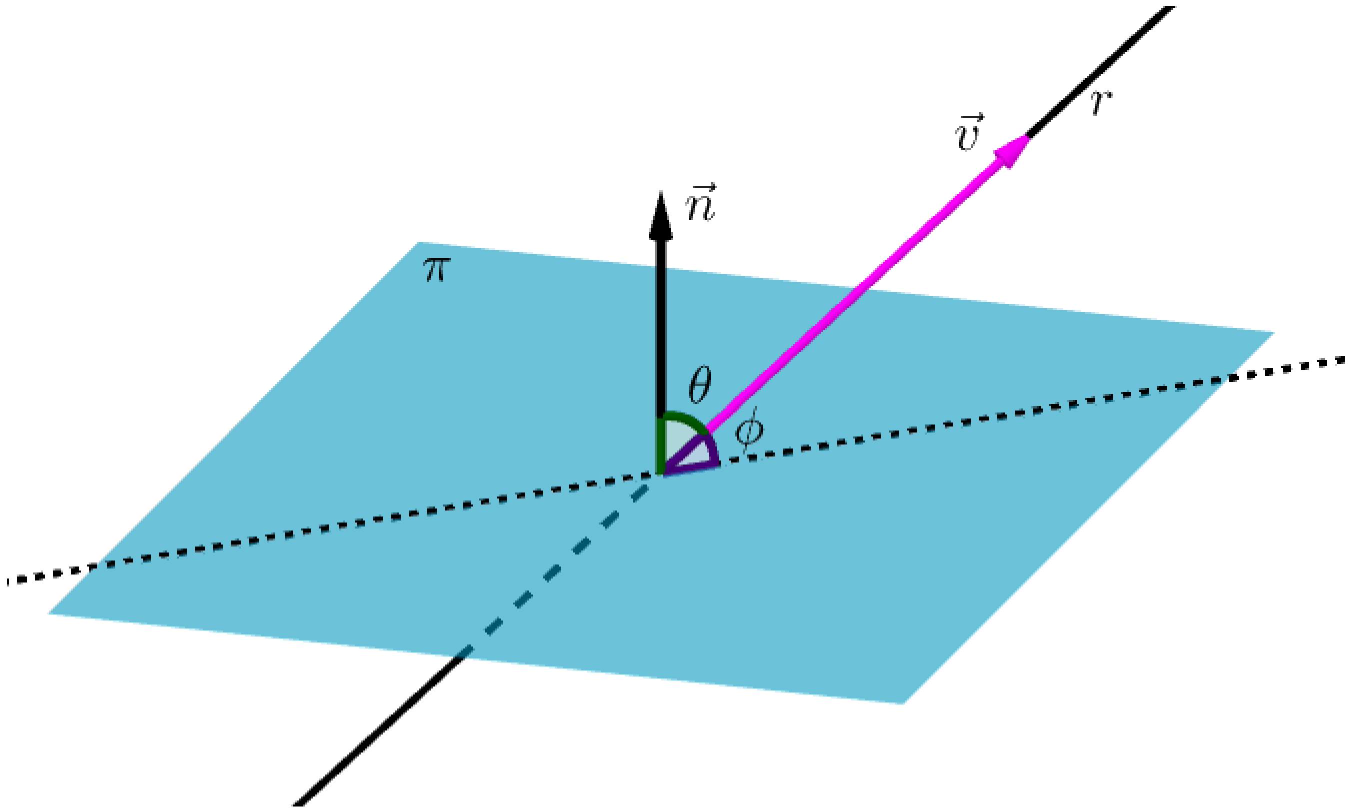
- π_1 e π_2 são perpendiculares se $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$, ou seja, se

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0.$$



Ângulo entre reta e plano

Seja r uma reta com vetor diretor $\vec{v}$ e π um plano com vetor normal $\vec{n}$:



O ângulo ϕ entre a reta r e o plano π é o complemento do ângulo θ entre $\vec{n}$ e $\vec{v}$. Logo,

$$\sin\phi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{v}|}{|\vec{n}||\vec{v}|},$$

com $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$.

Ângulo entre reta e plano

Exemplo 9: Determine o ângulo formado pela reta $r: \begin{cases} y = -2x \\ z = 2x + 1 \end{cases}$ e o plano $\pi: x - y + 5 = 0$.

Posição relativa entre reta e plano

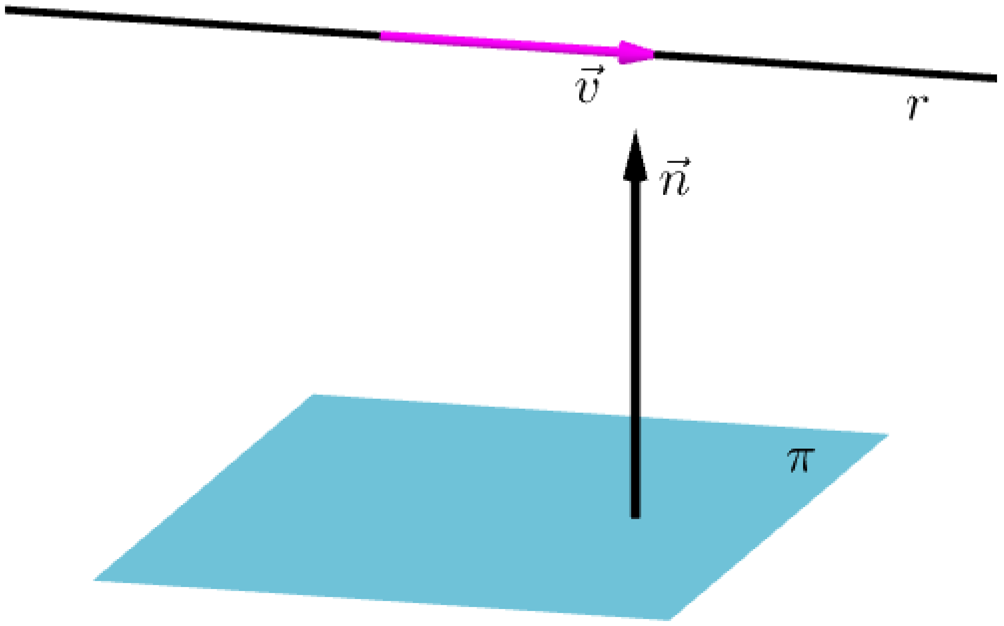
Seja r uma reta com vetor diretor $\vec{v}$ e π um plano com vetor normal $\vec{n}$. Então,

(1) Se $\vec{v} \perp \vec{n}$,

Posição relativa entre reta e plano

Seja r uma reta com vetor diretor $\vec{v}$ e π um plano com vetor normal $\vec{n}$. Então,

(1) Se $\vec{v} \perp \vec{n}$, então r é paralela ao plano π.

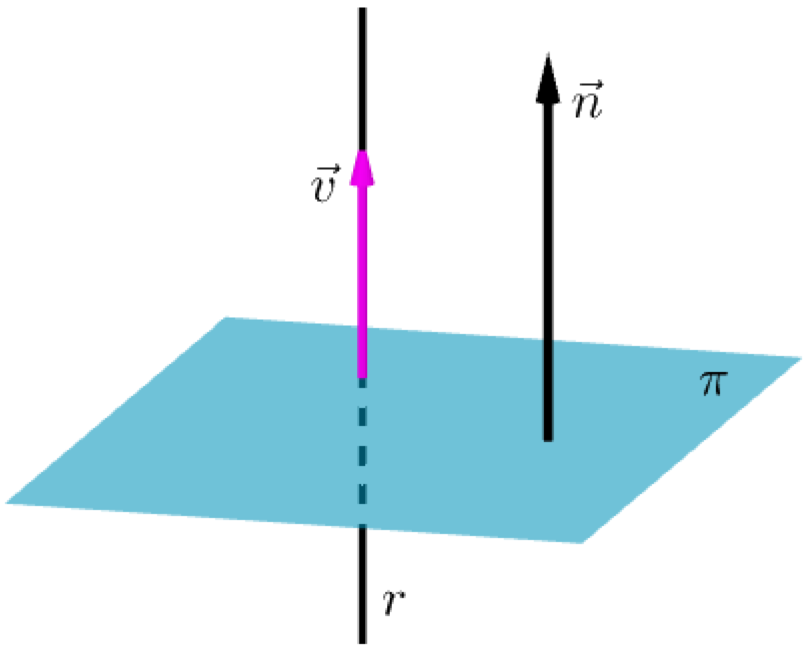


Posição relativa entre reta e plano

(2) Se $\vec{v} \parallel \vec{n}$,

Posição relativa entre reta e plano

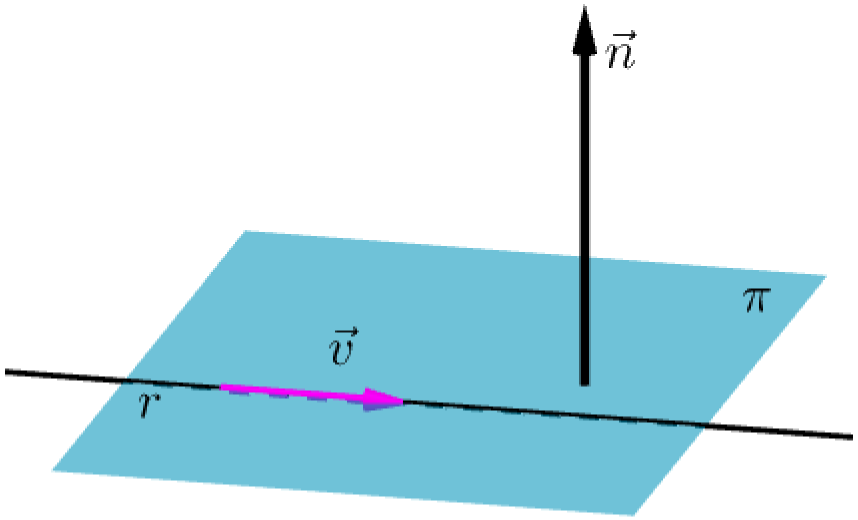
(2) Se $\vec{v} \parallel \vec{n}$, então r é perpendicular ao plano π.



Posição relativa entre reta e plano

(3) Para r estar contida em π, devemos ter

- $\vec{v} \perp \vec{n}$;
- Um ponto A de r pertence a π.



Também podemos garantir que r está contida em π se dois pontos de r estão em π.

Ângulo entre reta e plano

Exemplo 10: Determine os valores de m e n para que a reta o ângulo formado pela reta

$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$ esteja contida no plano $\pi: mx + ny + 2z - 1 = 0$.

Interseção de dois planos

Exemplo 11: Considere os planos $\pi_1: 2x + y - z + 5 = 0$ e $\pi_2: x + y + 3z - 3 = 0$, do exercício anterior. Encontre a reta de interseção entre π_1 e π_2.

Interseção de dois planos

Exemplo 11: Considere os planos $\pi_1: 2x + y - z + 5 = 0$ e $\pi_2:\ x + y + 3z - 3 = 0$, do exercício anterior. Encontre a reta de interseção entre π_1 e π_2.

Observação: Para encontrar a interseção entre uma reta e um plano, o processo é análogo ao do exemplo anterior. Primeiro verificamos se a reta é paralela ao plano. Se não, combinamos as equações da reta e do plano para encontrar o ponto único de interseção.