UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Centro de Ciências Tecnológicas - CCT - Joinville
Departamento de Matemática

Lista 5 de Cálculo Diferencial e Integral II

Sequências e Séries

1. Determine os quatro primeiros termos de cada uma das sequências dadas abaixo. Calcule também $\lim_{n\to\infty} u_n$, caso exista.

   $(a)\ u_n = \frac{n}{4n+2}$ $\quad (b)\ u_n = \frac{(-1)^n}{5-n}$ $\quad (c)\ u_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$ $\quad (d)\ u_n = \frac{100n}{n^{\frac{3}{2}}+4}$

   $(e)\ u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n}}$ $\quad (f)\ u_n = \frac{\ln n}{n}$ $\quad (g)\ u_n = \ln\left(\frac{1}{n}\right)$ $\quad (h)\ u_n = \frac{n^2}{5n+3}$

   $(i)\ u_n = \cos\frac{n\pi}{2}$ $\quad (j)\ u_n = \arctan n$ $\quad (k)\ u_n = \left(1-\frac{2}{n}\right)^n$ $\quad (l)\ u_n = \frac{n^2}{2^n}$

   $(m)\ u_n = \frac{3n}{e^{2n}}$ $\quad (n)\ u_n = 1+(-1)^n$ $\quad (o)\ u_n = \sqrt[n]{n}$ $\quad (p)\ u_n = 7^{-n}3^{n-1}$

2. Dados os termos abaixo, determine uma expressão para as sequências.

   $(a)\ \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81}, \cdots\right\}$ $\quad (b)\ \left\{\frac{1}{3}, \frac{-2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{-8}{81}, \cdots\right\}$ $\quad (c)\ \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \cdots\right\}$ $\quad (d)\ \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \cdots\right\}$

3. Classifique, se possível, as sequências abaixo quanto à sua monotonicidade.

   $(a)\ u_n = \frac{n}{2n-1}$ $\quad (b)\ u_n = n-2^n$ $\quad (c)\ u_n = ne^{-n}$ $\quad (d)\ u_n = \frac{5^n}{2^{n^2}}$

   $(e)\ u_n = \frac{10^n}{(2n)!}$ $\quad (f)\ u_n = \frac{n^n}{n!}$ $\quad (g)\ u_n = \frac{1}{n+\ln n}$ $\quad (h)\ u_n = \frac{n!}{3^n}$

4. Suponha que u_n seja uma sequência monótona tal que $1 \leq u_n \leq 5$. Esta sequência deve convergir? O que mais pode ser dito sobre o seu limite?

5. Suponha que u_n seja uma sequência monótona tal que $u_n \leq 5$. Esta sequência deve convergir? O que mais pode ser dito sobre o seu limite?

6. Pode-se obter aproximações de $\sqrt{k}$ utilizando a sequência recursiva $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{k}{u_n}\right)$, onde $u_1 = \frac{1}{2}$.

   (a) Encontre as aproximações u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 para $\sqrt{10}$.

   (b) Mostre que, se $L = \lim_{n\to\infty} u_n$, então $L = \sqrt{k}$.

7. Uma das mais famosas sequências é a sequência de Fibonacci (1710-1250), definida pela recorrência $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, onde $u_1 = u_2 = 1$.

   (a) Determine os dez primeiros termos desta sequência.

   (b) Os termos da nova sequência $x_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ dão uma aproximação para o igualmente famoso número de ouro (ou razão áurea), denotado por τ. Determine uma aproximação dos cinco primeiros termos dessa nova sequência.

   (c) Supondo que $\tau = \lim_{n\to\infty} x_n$, mostre que $\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

8. Encontre o termo geral da sequência de somas parciais de cada uma das séries abaixo. A seguir, determine se a série converge ou diverge, obtendo o valor de sua soma, se possível.

$(a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ $\qquad (b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8}{(4n-3)(4n+1)}$

$(c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ $\qquad (d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

$(e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n-1}}{5^n}$ $\qquad (f)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$

$(g)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1.2.3.4.5.\cdots .n.(n+2)}$ $\qquad (h)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+4}{n^3+3n^2+2n}$

9. Analise se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique seus argumentos, exibindo contra-exemplos para as afirmações falsas ou provando as afirmações verdadeiras.

(a) Toda sequência limitada é convergente.

(b) Toda sequência limitada é monótona.

(c) Toda sequência convergente é necessariamente monótona.

(d) Toda sequência monótona decrescente converge para zero.

(e) Se u_n for decrescente e $u_n > 0$ para todo $n \in N$, então u_n é convergente.

(f) Se $-1 < q < 1$, então $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

(g) Se a sequência u_n converge, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ também converge.

(h) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n}$ também converge.

(i) Toda série alternada convergente é condicionalmente convergente.

(j) A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n^3+1)^2}{(n^4+5)(n^2+1)}$ é uma série numérica convergente.

(k) Desenvolvendo a função $g(x) = \displaystyle\int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$ em série de potências obtém-se $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+3}}{n!(2n+3)}$.

(l) A série de potências $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)3^n x^n$ é convergente no intervalo $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ e sua soma é igual a $S = \dfrac{-3x}{1+3x}$.

(m) Se a sequência u_n converge então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ também converge.

(n) O raio de convergência da série da série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(3x-5)^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ é infinito.

(o) A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 9^{1-n}$ é convergente e sua soma é igual a $\dfrac{36}{5}$.

(p) O critério da integral garante que $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$ converge.

10. Encontre o termo geral da soma da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{4n^2-1}$ e verifique se ela é convergente.

11. Encontre a soma das séries abaixo, se possível.
$(a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$ $(b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5}{(5n+2)(5n+7)}$ $(c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+6n+8}$ $(d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

12. Usando o teste de comparação verifique se as séries abaixo são convergentes ou divergentes.
$(a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n3^n}$ $(b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ $(c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n}$ $(d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{4n^3+1}$

$(e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+4n}}$ $(f)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|sen(n)|}{2^n}$ $(g)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(2+n)!}$ $(h)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^3+5}}$

$(i)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n^2+5}}$ $(j)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+\sqrt{n+5}}$ $(k)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{4n^3+n+1}$ $(l)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{(2n)!}$

$(m)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$ $(n)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+n4^{2n}}{n5^n}$ $(o)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+\cos n}{n^2}$ $(p)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+4}$

$(q)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+2^n}{1+3^n}$ $(r)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+\ln n}{n^3+1}$

13. Usando o teste de D 'Alambert verifique se as séries abaixo são convergentes ou divergentes.
$(a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^2 2^n}$ $(b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{e^n}$ $(c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

$(d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n}{\sqrt{n^3+1}}$ $(e)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{2^n(n^2+2)}$ $(f)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{2^n\,(2+n)!}$

$(g)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+5}$ $(h)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n4^n}$ $(i)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{4n^2+n+1}$
$(j)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+1}{2^n}$ $(k)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n^2+2}$ $(l)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(n+2)^3}$ $(m)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n-1}}{5^n(n+1)}$

14. Usando o teste de Cauchy, verifique se as séries abaixo são convergentes ou divergentes.
$(a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\ln n)^n}{n^{\frac{n}{2}}}$ $(b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\dfrac{n+1}{n^2}\right)^n$ $(c)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n^2 2^n}\right)^n$ $(d)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{4n}-n}{\sqrt{n^{10n}+1}}$

15. Usando o teste da integral verifique se as séries abaixo são convergentes ou divergentes.

$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ $(b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ $(c)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ $(d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$

$(e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$ $(f)\ \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ $(g)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2e^{-n}$ $(h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\arctan n}}{n^2+1}$

$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+7}$ $(j)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$ $(k)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$

16. Use o teste da integral, se possível, para determinar para quais valores de $p > 0$ a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ converge.

17. Verifique se as séries abaixo são absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{2^n}{n!}$ $(b)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}$ $(c)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n^2}{n!}$

$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ $(e)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n!}{2^{n+1}}$ $(f)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2+2n}$

$(g)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{3^n}{n!}$ $(h)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n^2+1}{n^3}$ $(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n^n}{n!}$

$(j)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}+n}$ $(k)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n^n2^n}{(2n-5)^n}$ $(l)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n^4}{e^n}$

$(m)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$ $(n)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n}{n^3+3}$ $(o)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n^2-n}}$

18. Classifique as séries numéricas abaixo como absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente, justificando sua resposta.

$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{(2^{3n+4}-n)}{e^n n^{3n}}$ $(b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(n\pi)}{n^2+n+1}$ $(c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}$

$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)!}{2.4.6\cdots.(2n)}$ $(e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\ 5^{4n+1}}{n^{3n}}$ $(f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\ 7^{3n+1}}{(\ln n)^n}$

$(g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin(n\pi)+n}{n^2+5}$ $(h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)+\sin(n)}{n^3+\sqrt{n}}$ $(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{2n}}{n^2e^n-1}$

19. Determine o raio e o intervalo de convergência das séries de potências abaixo.

$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ $(b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n^3}$ $(c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n!}$

$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n4^n x^n$ $(e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt[4]{n}}$ $(f)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{4^n \ln n}$

$(g)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$ $(h)\ \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}(x-4)^n$ $(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+2)^n}{n2^n}$

$(j)\ \sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$ $(k)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}3^n}$ $(l)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{\frac{3}{2}}}$

$(m)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x-5)^n}{n^2+1}$ $(n)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n(x+2)^n}{(2n-5)^n}$ $(o)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4(x-1)^n}{e^n}$

$(p)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(x+1)^n}{n^2+1}$ $(q)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x-1)^{2n}}{n^3+3}$ $(r)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1.3.5.7.\cdots.(2n-1)x^n}{3.6.9.\cdots.3n}$

20. Seja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Determine os intervalos de convergência para f, f' e f".

21. A partir da soma da série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, para $|x| < 1$, encontre as somas das séries abaixo.

$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ $(b)\ \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ $(c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ $(d)\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n$

$(e)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-n}{2^n}$ $(f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ $(g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ $(h)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}$

22. Encontre uma representação em série de potências, centradas em zero, para as funções abaixo.

$(a)\ f(x) = \frac{1}{1+x^3}$ $(b)\ f(x) = \frac{1}{4+x^3}$ $(c)\ f(x) = \frac{x}{9+4x^2}$

$(d)\ f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2}$ $(e)\ f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$ $(f)\ f(x) = \ln(5-x)$ $(g)\ f(x) = x\ln(x^2+1)$

23. Expresse as integrais indefinidas abaixo como uma série de potências, centradas em zero.

$(a)\ \int \frac{x}{1-x^8}dx$ $(b)\ \int \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$ $(c)\ \int \frac{x-\arctan x}{x^3}dx$ $(d)\ \int \arctan x^2 dx$

24. Utilize a representação em série de potências, centrada em zero, de $f(x) = \arctan x$ para provar a seguinte expressão para π como soma de uma série numérica: $\pi = 2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$.

25. Mostre que a função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é solução da equação diferencial $f'(x) = f(x)$.

26. Mostre que as funções $f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ e $f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ são soluções da equação diferencial $f"(x) + f(x) = 0$.

27. Encontre a soma das seguintes séries
 $(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$ $(b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$ $(c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ $(d)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!}$

28. Encontre o raio e o domínio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-2)^n}{5^n (1+n^2)}$.

29. Determine o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-5)^n}{7^n n}$.

30. Mostre que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{3^{2n}}$ é convergente no intervalo $(-3, 3)$ e que sua soma é igual a $S = \frac{9}{9+x^2}$.

31. Determine o intervalo de convergência da série de potências que representa a função $f(x) = \frac{4}{x^2}$ expandida em torno de $a = 1$.

32. Desenvolva a função $f(x) = \cosh(x^3)$ em série de MacLaurin, determinando o termo geral de sua expansão e o seu intervalo de convergência.

33. Determine o intervalo e o raio de convergência da série de funções, centrada em zero, que representa a função $f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x}$.

34. Usando séries de Maclaurin, mostre que $\int \cos x dx = \sin x + k$.

35. Desenvolva a função $f(x) = \int_0^x t^2 \ln(1+4t^2) dt$ em séries de MacLaurin e determine o seu intervalo de convergência.

36. Desenvolver em série de Taylor e Maclaurin as funções:
 $(a)\ f(x) = \sin^2 x$ $(b)\ f(x) = x^2 \sin 2x$ $(c)\ f(x) = e^{3x}$ $(d)\ f(x) = e^{-x^2}$
 $(e)\ f(x) = \cos 2x$ $(f)\ f(x) = \frac{\sin(x^5)}{x^3}$ $(g)\ f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}$ $(h)\ f(x) = x^3 e^{x^2}$

37. Utilize desenvolvimento em séries de MacLaurin para calcular os seguintes limites.

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x+2x^2-1}{x^4}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2)+\cos(x^3)-x^2-1}{x^6}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)-3\sin(2x^2)}{x^2}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^3)-e^{x^3}+1}{x^6}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin(x^2)+e^{x^4}-1}{\ln(1+x^4)}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(2x^2)-e^{x^4}}{x\sin(x^3)}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^8)+\cos(3x^4)-1}{e^{x^8}-1}$

38. Utilize séries numéricas e/ou séries de potências para encontrar os valores reais de k que tornam válidas cada uma das igualdades abaixo.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{nk}=9$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x^4}-\cos(x^2)}{x^4}=k$

39. Desenvolver em série de Maclaurin as seguintes funções:

(a) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ (b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ (c) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

(d) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (e) $f(x)=\displaystyle\int\frac{\sin x}{x}dx$ (f) $f(x)=\displaystyle\int e^{-x^2}dx$

(g) $f(x)=\displaystyle\int\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ (h) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (i) $f(x)=\arcsin x$

(j) $f(x)=\arccos x$ (k) $f(x)=\arctan x$ (l) $f(x)=\sqrt[3]{1+x}$

40. Calcule a integral $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$ utilizando expansão em série de potências, centrada em zero. Determine o termo geral desta expansão ou faça o seu desenvolvimento com pelo menos 5 termos não nulos.

Respostas

1. .
(a) $\frac{1}{4}$ (b) 0 (c) 0 (d) 0 (e) $\nexists$ (f) 0 (g) $\nexists$ (h) $\nexists$

(i) $\nexists$ (j) $\frac{\pi}{2}$ (k) e^{-2} (l) 0 (m) 0 (n) $\nexists$ (o) 1 (p) 0

2. (a) $u_n=\frac{2^{n-1}}{3^n}$ (b) $u_n=\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{3^n}$ (c) $u_n=\frac{2n-1}{2n}$ (d) $u_n=\frac{n-1}{n^2}$

3. .
(a) *decrescente* (b) *decrescente* (c) *decrescente* (d) *decrescente*
(e) *decrescente* (f) *crescente* (g) *decrescente* (h) *não-decrescente*

4. A sequência converge, pois é uma sequência monótona limitada. Seu limite L é tal que $1\le L\le 5$.

5. Se a sequência for monótona crescente, será convergente, com limite $L\le 5$. Porém, se a sequência for monótona decrescente nada podemos afirmar.

6. Dica para o item (b): Note que se $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ então $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = L$. Com isso, aplica-se limites em ambos lados da relação de recorrência dada e obtém-se que $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{k}{L}\right)$. Agora basta isolar L.

7. Dica para o item (c): Note que se $\tau = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ então $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n-1}}{u_n} = \dfrac{1}{\tau}$. Com isso, aplica-se limites em ambos lados da relação de recorrência dada e obtém-se que $\tau = 1 + \dfrac{1}{\tau}$. Agora basta isolar τ.

8. .
   (a) $S_k = \dfrac{k}{2k+1}$. Converge para $\dfrac{1}{2}$
   (b) $S_k = \dfrac{8k}{4k+1}$. Converge para 2
   (c) $S_k = \dfrac{k\,(k+2)}{(k+1)^2}$. Converge para 1
   (d) $S_k = -\ln(k+1)$. Diverge
   (e) $S_k = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2^k}{3.5^k}$. Converge para $\dfrac{1}{3}$
   (f) $S_k = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$.Converge para 1
   (g) $S_k = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{(k+2)!}$. Converge para $\dfrac{1}{2}$
   (h) $S_k = \dfrac{5}{2} - \dfrac{2}{k+1} - \dfrac{1}{k+2}$. Converge para $\dfrac{5}{2}$

9. .
   (a) F (b) F (c) F (d) F (e) V (f) V (g) F (h) F
   (i) F (j) F (k) V (l) V (m) V (n) V (o) V (p) F

10. $S_k = 2 - \dfrac{2}{2k+1}$. A série converge para 2.

11. (a) $S = \dfrac{1}{4}$ (b) $S = \dfrac{1}{7}$ (c) $S = \dfrac{7}{24}$ (d) A série diverge

12. Legenda: C (convergente), D (divergente), I (inconclusivo):
    (a) C (b) C (c) C (d) D (e) D (f) C (g) C (h) C (i) C
    (j) D (k) C (l) C (m) D (n) D (o) C (p) D (q) C (r) C

13. Legenda: C (convergente), D (divergente), I (inconclusivo):
    (a) C (b) D (c) C (d) I (e) D (f) C (g) I (h) C (i) I (j) C (k) D (l) D (m) C

14. Legenda: C (convergente), D (divergente), I (inconclusivo):
    (a) C (b) C (c) C (d) C

15. Legenda: C (convergente), D (divergente), I (inconclusivo):
    (a) C (b) D (c) D (d) D (e) C (f) C (g) C (h) C (i) D (j) C (k) C

16. Converge para $p > 1$ e diverge para $0 < p \leq 1$.

17. .
(a) absolutamente (b) absolutamente (c) absolutamente
(d) absolutamente (e) divergente (f) absolutamente
(g) absolutamente (h) condicionalmente (i) divergente
(j) condicionalmente (k) divergente (l) absolutamente
(m) condicionalmente (n) absolutamente (o) condicionalmente

18. .
(a) absolutamente (b) condicionalmente (c) condicionalmente
(d) absolutamente (e) absolutamente (f) absolutamente
(g) divergente (h) absolutamente (i) divergente

19. I é o intervalo de convergência e R é o raio de convergência
(a) $R = 1,\ I = [-1, 1)$ (b) $R = 1,\ I = [-1, 1]$ (c) $R = \infty,\ I = (-\infty, \infty)$
(d) $R = \frac{1}{4},\ I = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ (e) $R = \frac{1}{2},\ I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (f) $R = 4,\ I = (-4, 4]$
(g) $R = 3,\ I = (-5, 1)$ (h) $R = 1,\ I = (3, 5)$ (i) $R = 2,\ I = (-4, 0]$
(j) $R = 0,\ I = \{\frac{1}{2}\}$ (k) $R = 3,\ I = [-3, 3]$ (l) $R = \frac{1}{4},\ I = [1, \frac{3}{2}]$
(m) $I = [4, 6),\quad R = 1$ (n) $I = (-4, 0),\quad R = 2$ (o) $I = (1 - e, 1 + e),\quad R = e$
(p) $I = [-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}],\quad R = \frac{1}{2}$ (q) $I = [0, 2],\quad R = 1$ (r) $I = (\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}),\quad R = \frac{3}{2}$

20. $[-1, 1],\ [-1, 1]$ e $(-1, 1)$, respectivamente.

21. .
(a) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ (b) $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ (c) 2 (d) $\dfrac{2x^2}{(1-x)^3}$
(e) 4 (f) 6 (g) $-\ln(1+x)$ (h) $2\ln\frac{3}{2}$

22. .
(a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}$ (b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{3n}}{4^{n+1}}$
$(c) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 4^n x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ (d) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} n x^{n+1}$
(e) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n x^{n+2}}{2^{n+1}}$ (f) $f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}}$
(g) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+3}}{n+1}$

23. .
(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{8n+2}}{8n+2} + K$ (b) $-\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{n(2n-1)} + K$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{4n^2 - 1} + K$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)} + K$

24. Dica: Mostre que $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ e depois faça $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

25. Dica: derive termo a termo, desloque o índice do somatório e substitua na equação dada.

26. Dica: derive termo a termo, desloque o índice do somatório e substitua na equação dada.

27. $(a)\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad (b)\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad (c)\ e^3 - 1$ $\quad (d)\ e^{\frac{3}{5}}$

28. Intervalo de convergência: $\dfrac{-1}{2} \leq x \leq \dfrac{9}{2}$ e raio de convergência $R = \dfrac{5}{2}$.

29. Intervalo de convergência: $\dfrac{-2}{3} \leq x < 4$.

30. Dica: Note que a série dada é geométrica!

31. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4n+4)(x-1)^n$, $\quad$ intervalo de convergência: $0 < x < 2$.

32. $\cosh(x^3) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{6n}}{(2n)!}$, que converge para todo $x \in \mathbb{R}$

33. Desenvolvimento em séries de MacLaurin : $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{n!}$ que converge para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, o raio de convergência é infinito.

34. Basta integrar termo a termo.

35. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 4^{n+1} x^{2n+5}}{(n+1)(2n+5)}$ converge para $\dfrac{-1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$.

36. Desenvolvimento em séries de Maclaurin

$(a)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ $\quad (b)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n+3}}{(2n+1)!}$ $\quad (c)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n x^n}{n!}$

$(d)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ $\quad (e)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$ $\quad (f)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{10n+2}}{(2n+1)!}$

$(g)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n-2}}{(2n)!}$ $\quad (h)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+3}}{n!}$

37. $(a)\ \dfrac{2}{3}$ $\quad (b)\ -\dfrac{2}{3}$ $\quad (c)\ 2$ $\quad (d)\ -5$ $\quad (e)\ -1$ $\quad (f)\ 2$ $\quad (g)\ -3$ $\quad (h)\ -\dfrac{7}{2}$

38. $(a)\ k = \ln \dfrac{8}{9}$ $\quad (b)\ k = -\dfrac{1}{2}$

39. Desenvolvimento em Séries de MacLaurin

$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$(b)\ 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1.3.5.\cdots.(2n-1)x^n}{2^n n!}$

$(c)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

$(d)\ 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)x^{2n}}{2^n n!}$

$(e)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} + C$

$(f)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + C$

$(g)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$

$(h)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$

$(i)\ x+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)x^{2n+1}}{(2n+1)2^n n!}$

$(j)\ -x-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)x^{2n+1}}{(2n+1)2^n n!}$

$(k)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

$(l)\ 1+\frac{1}{3}x+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2.5.8.\cdots.(3n-4)x^n}{3^n n!}$

40. $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx = t+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1.4.7.10.\cdots.(3n-2)t^{4n+1}}{(4n+1).3^n n!}$