Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Interpretação Geral da Integral Definida

Propriedades da Integral Definida

Teorema do Valor Intermediário (TVI)

Professor: Marnei Luis Mandler

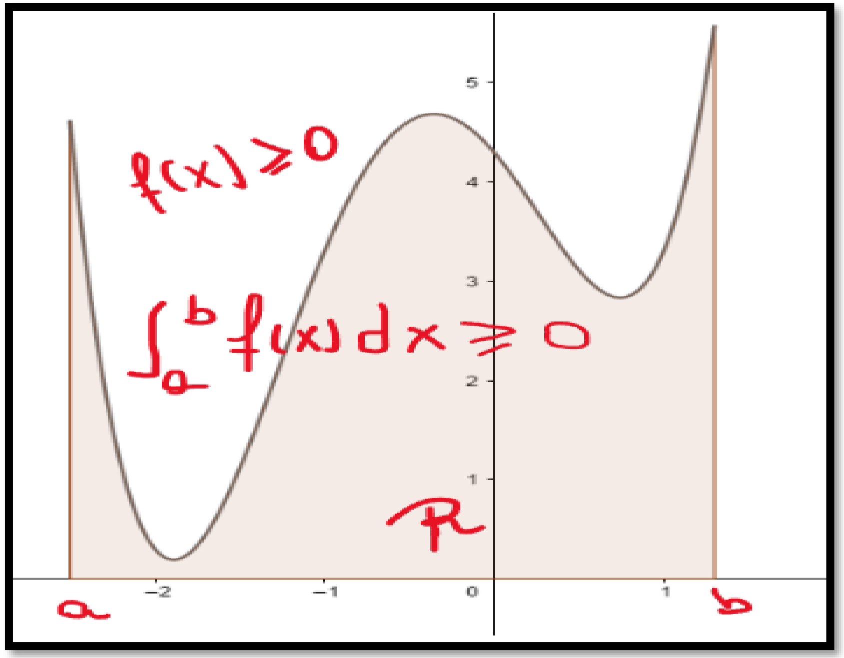
Aula de CDI-2 de 21 de agosto de 2024.

UDESC

Interpretação Geométrica Geral da Integral Definida

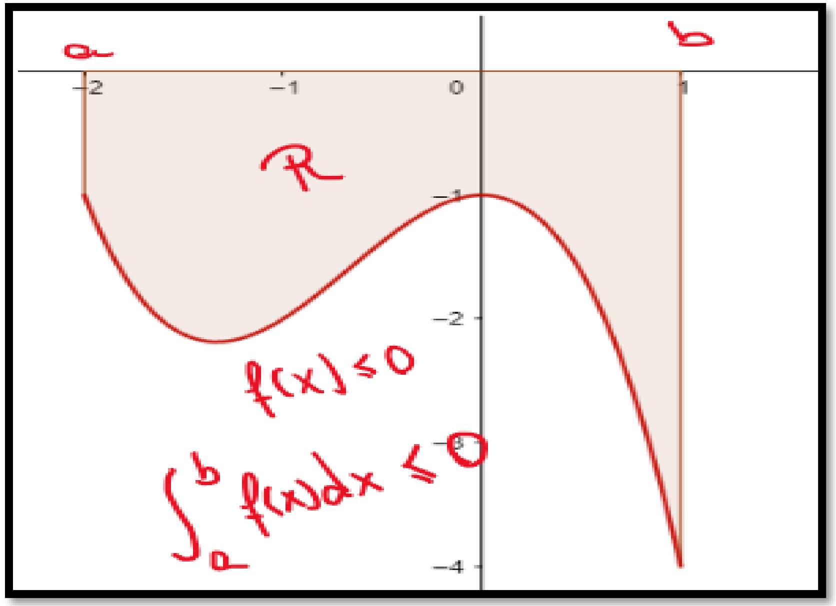
Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua.

De acordo com o sinal de f, podemos obter a seguinte interpretação geométrica para a sua integral definida:



- Caso 1: Se $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [a, b]$ então

$$\int_a^b f(x)dx = área(R).$$



- Caso 2: Se $f(x) \leq 0 \ \ \forall x \in [a, b]$ então

$$área(R) = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = -\int_a^b f(x)dx$$

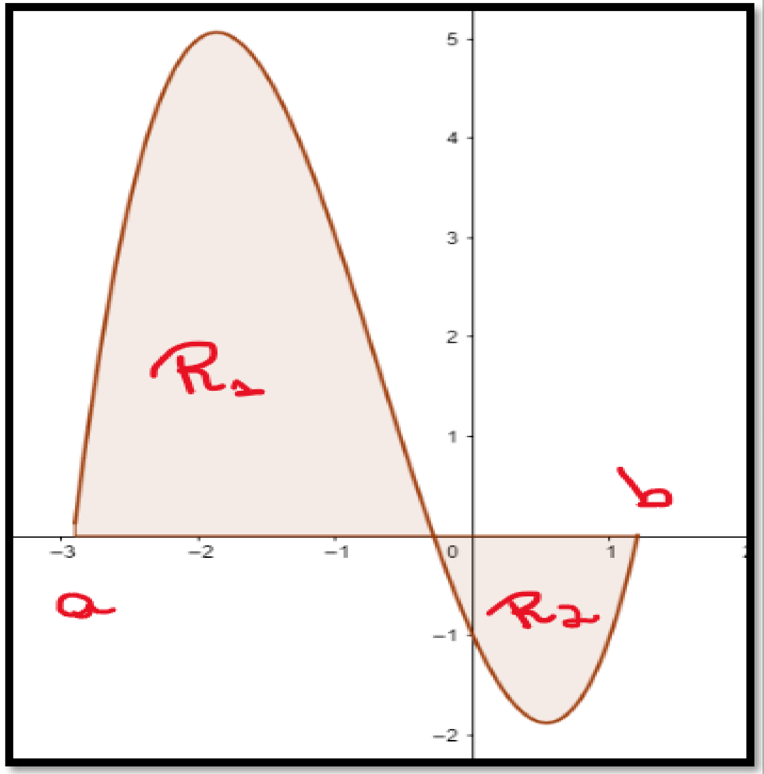
pois, nesse caso, o resultado da integral é negativo.

Portanto, se f é negativa, então:

$$\int_a^b f(x)dx = -área(R).$$

Interpretação Geométrica Geral da Integral Definida

- Caso Geral: Se f assume valores positivos e negativos no intervalo $[a, b]$, podemos dividir a região situada entre o gráfico e o eixo x em duas partes, conforme o sinal da função e de acordo com o ilustrado na figura ao lado:



Usando os casos anteriores, obtemos que

$$\int_a^b f(x)dx = área(R_1) + (-área(R_2))$$
$$= área(R_1) - área(R_2),$$

onde R_1 é a porção da região situada acima do eixo x e R_2 é a porção da região situada abaixo do eixo x.

Portanto, no caso geral, uma integral definida calcula uma diferença entre as áreas das regiões R_1 e R_2:

Questão: Uma integral definida pode resultar em zero?
Quando isso ocorre? Por exemplo, quando $área(R_1) = área(R_2)$.

Atenção: Nem toda integral definida representa uma área! Porém, a área de qualquer região pode ser calculada por meio de integrais definidas, conforme estudaremos mais à frente!

Propriedades da Integral Definida

Antes de enunciar as propriedades, vejamos que a Integral Definida pode ser vista como:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n}.$$

Sejam $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas. São válidas as seguintes propriedades:

- Propriedade 1: $$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Justificativa: Algebricamente, a propriedade decorre da definição de Δx.
Como aqui temos $b = a$, segue que

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{a-a}{n} = 0,$$

e, com isso:

$$\int_a^a f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).0 = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$$

Geometricamente, a propriedade indica que a área da região delimitada por somente um ponto é nula (pois um ponto é adimensional e sequer delimita qualquer região).

Propriedades da Integral Definida

- Propriedade 2:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Justificativa: Algebricamente, a propriedade decorre do fato que

$$\Delta x = \frac{a-b}{n} = \frac{-b+a}{n} = \frac{-(b-a)}{n}.$$

E com isso:

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{a-b}{n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\frac{-(b-a)}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} -\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\frac{(b-a)}{n} = -\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\frac{(b-a)}{n} = -\int_a^b f(x)dx.$$

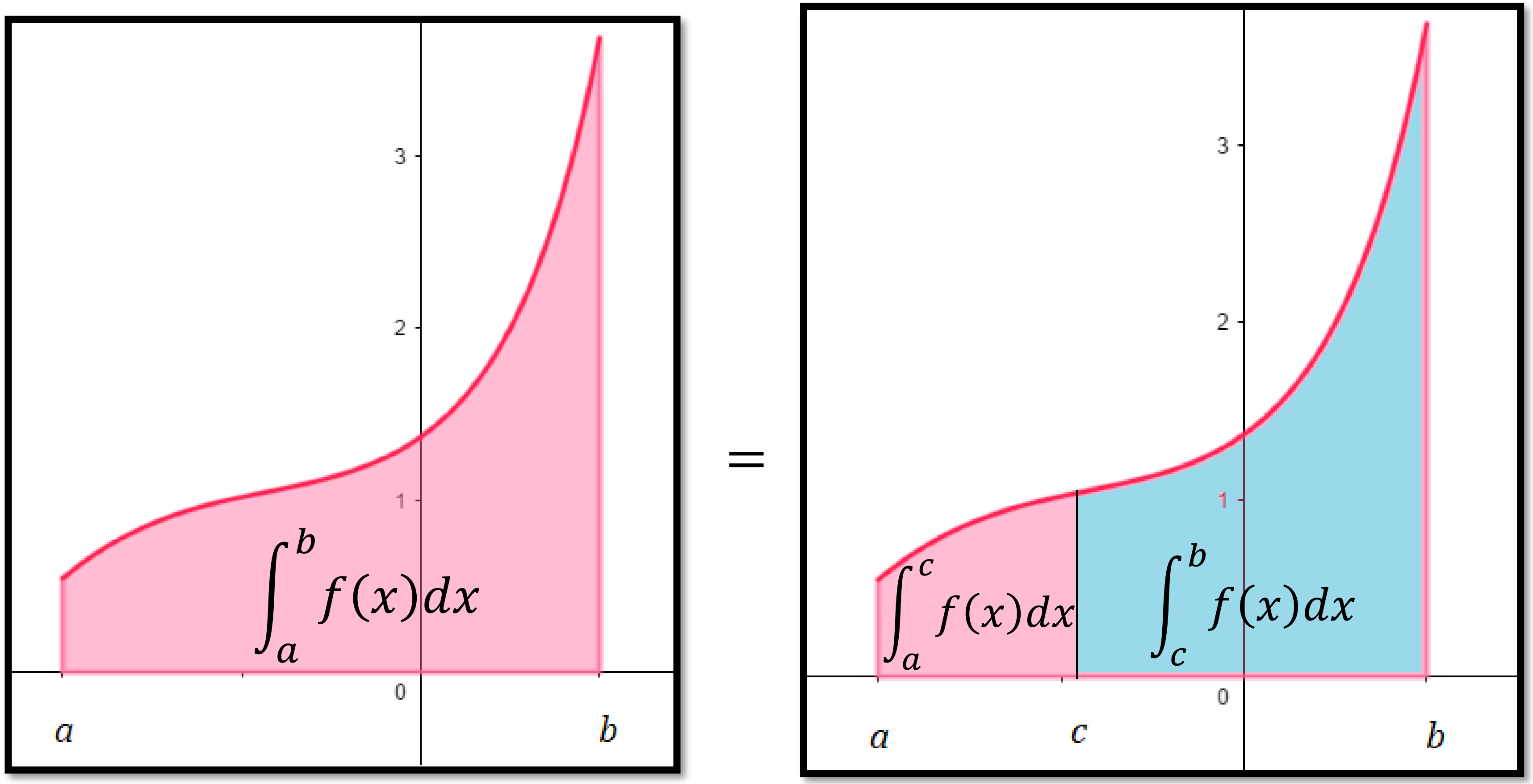
Geometricamente, a propriedade indica que o intervalo de integração é “percorrido” da esquerda para direita (pois $a < b$).

Portanto, caso seja invertida a ordem dos limitantes, deve-se alterar o sinal da integral!

Propriedades da Integral Definida

- Propriedade 3: Se $c \in [a, b]$ então $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Justificativa: Geometricamente, a propriedade indica que uma região qualquer pode ser "decomposta" em duas regiões, a partir de qualquer ponto c pertencente ao intervalo $[a, b]$:



Observação: A propriedade também é válida caso a região esteja abaixo do eixo x.

Propriedades da Integral Definida

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Algebricamente, a propriedade anterior decorre do fato que

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{b-c+c-a}{n} = \frac{b-c}{n} + \frac{c-a}{n} = \frac{c-a}{n} + \frac{b-c}{n}.$$

E com isso, por distributividade:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left(\frac{c-a}{n} + \frac{b-c}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i)\frac{c-a}{n} + f(x_i)\frac{b-c}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{c-a}{n} + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-c}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{c-a}{n} + \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{b-c}{n} = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Propriedades da Integral Definida

- Propriedade 4: $$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Justificativa: Algebricamente, a propriedade decorre da distributividade e de propriedades de limites:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)+g(x_i)\big)\Delta x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)\Delta x + g(x_i)\Delta x)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x + \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x + \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\,.$$

Propriedades da Integral Definida

- Propriedade 5: Se $k \in \mathbb{R}$ então

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx\,.$$

Justificativa: Algebricamente, a propriedade decorre de propriedades de limites:

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x)dx &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} kf(x_i)\Delta x\\ &= \lim_{n\to+\infty} k\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\\ &= k\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \;=\; k\int_a^b f(x)dx\,.\end{aligned}$$

Observação: As propriedades 4 e 5 indicam que Integral Definida mantém propriedades da integral indefinida, o que será de grande valia!

Exercício

Exercício 1: Utilize propriedades e a interpretação geométrica da integral definida para calcular o valor de

$$I = \int_{-2}^{2} \left(7 - 5x + 3\sqrt{4 - x^2}\right) dx.$$

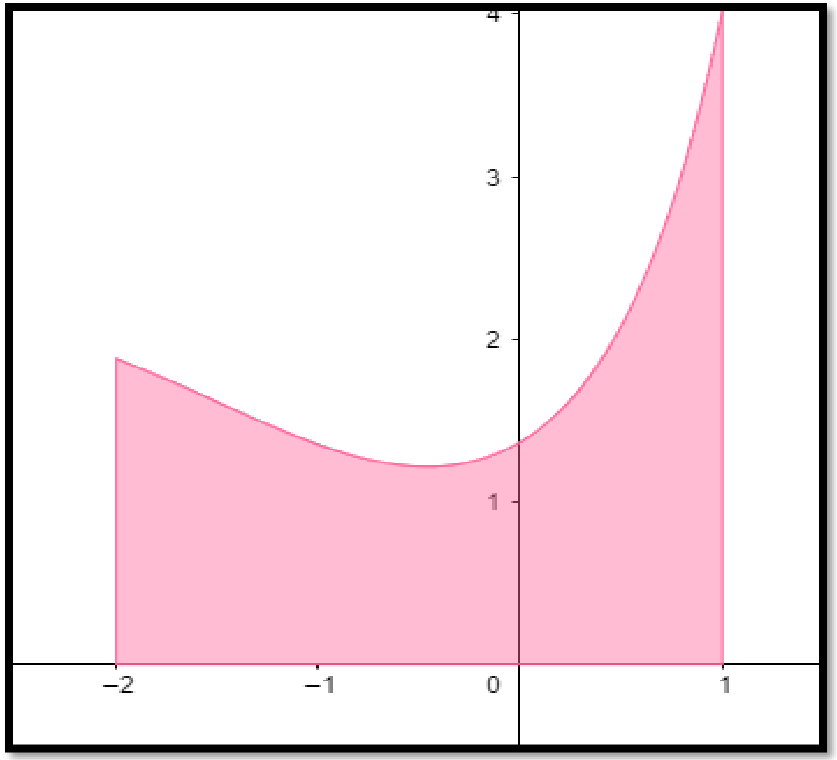
Teorema do Valor Intermediário (TVI)

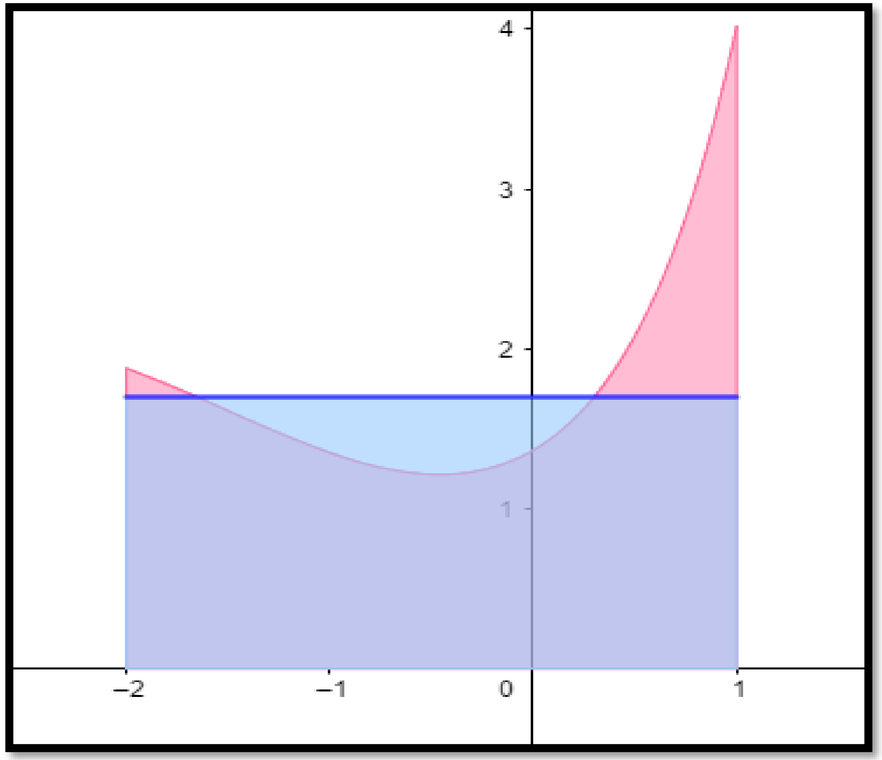
- TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO (TVI):

  Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

- Interpretação Geométrica: O TVI indica que existe um único retângulo (que não é necessariamente nem circunscrito nem inscrito), cuja área é exatamente igual à área da região situada entre o gráfico de f e o eixo x:





A ideia é de uma **compensação de áreas**: a região em rosa, que ficou de fora do retângulo, é compensada pela área em branco, que faz parte do retângulo.

Observações e Exercício

- Observações:
  - O TVI não garante a unicidade de c $\in [a, b]$, apenas sua existência.
  - No caso em que $a \neq b$, o TVI garante que existe c $\in [a, b]$, tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\,.$$

O valor $f(c)$ pode ser chamado de “média” de uma distribuição contínua f.
Por isso, o TVI também é chamado, na literatura, por Teorema do Valor Médio (TVM).

Exercício 2: Encontre todo(s) o(s) valor(es) de $c \in [-1, 2]$ que satisfaçam o TVI para

$$f(x) = -x^2 + 4x + 7.$$

Exercício 3: Encontre todo(s) o(s) valor(es) de $c \in [0, 2]$ que satisfaçam o TVI para

$$f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Exemplo

Exemplo 1: Utilize propriedades e a interpretação geométrica geral da integral definida para calcular o valor de

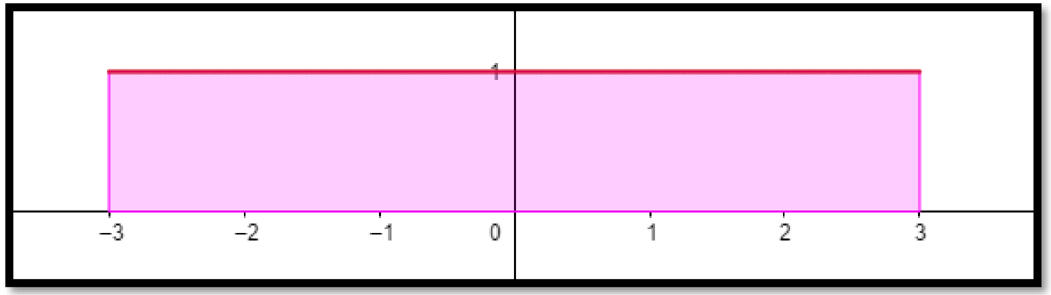
$$I = \int_{-3}^{3} \left(5 - 7x + 4\sqrt{9 - x^2}\right) dx.$$

Solução: Utilizando as propriedades, temos que

$$I = \int_{-3}^{3} \left(5 - 7x + 4\sqrt{9 - x^2}\right) dx \ = 5\int_{-3}^{3} 1\, dx \ - \ 7\int_{-3}^{3} x\, dx \ + 4\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx.$$

Agora vamos obter o valor de cada uma das três integrais separadamente, a partir da interpretação geométrica:

Para a integral $\int_{-3}^{3} 1\, dx$, a região R corresponde à:

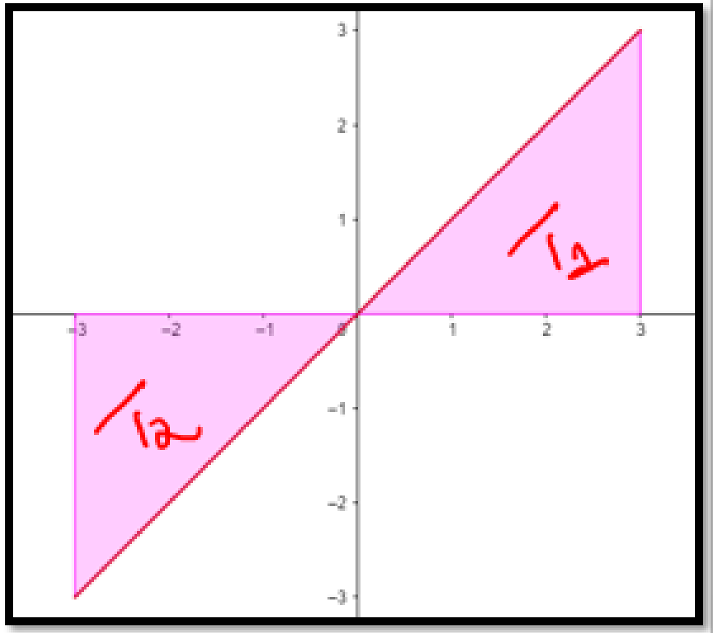


Como a função $f(x) = 1$ é positiva, pelo primeiro caso da intepretação geométrica, a integral calcula a área dessa região, que é um ÚNICO retângulo. Portanto, temos diretamente que

$$\int_{-3}^{3} 1\, dx = área(R) = 6.1 = 6.$$

Exemplo

Para a integral $\int_{-3}^{3} x\,dx$, a região corresponde à:



Como a função $f(x) = x$ é negativa para $x \in [-3{,}0]$ e positiva para $x \in [0{,}3]$, a integral calcula a diferença entre as áreas de duas regiões triangulares idênticas (pois a função é simétrica em relação à origem). Assim, temos que:

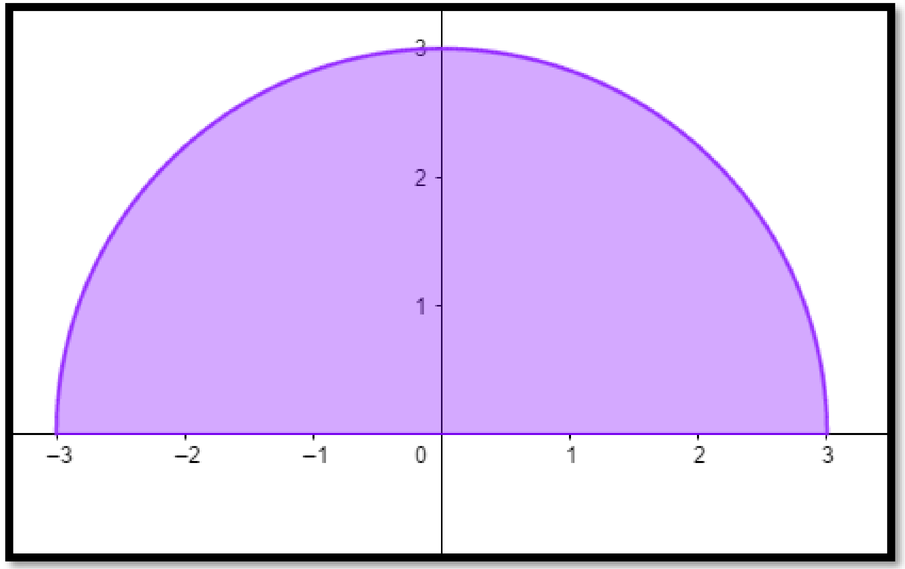
$$\int_{-3}^{3} x\,dx = \int_{-3}^{0} x\,dx + \int_{0}^{3} x\,dx = -área(T_2) + área(T_1) = 0.$$

Para a integral $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx$, iniciamos com o gráfico da função $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, que é positiva. Manipulando algebricamente, obtemos:

$$y = f(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 9 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 9.$$

Com isso, o gráfico da função é a porção de uma circunferência com centro na origem e de raio 3, em que $y = f(x) \geq 0$, ou seja, é somente a parte superior dessa circunferência.

Exemplo



Com isso, a região correspondente é dada por e a terceira integral calcula a área dessa região semicircular.

Utilizando a expressão conhecida para a área de uma semicircunferência de raio 3, obtemos que

$$\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx = \acute{a}rea(R) = \frac{1}{2}\pi.3^2 = \frac{9\pi}{2}.$$

Portanto, a integral desejada é igual a:

$$I = 5\int_{-3}^{3} 1\, dx - 7\int_{-3}^{3} x\, dx + 4\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx = 5.6 - 6.0 + 4.\frac{9\pi}{2} = 30 + 18\pi.$$

Exemplo Resolvido

Exemplo 2: Aplique o TVI para $f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$.

Solução: Vamos mostrar que existe $c \in [-1,2]$ tal que

$$\int_{-1}^{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3\right) dx = f(c).\left(2 - (-1)\right) = 3\,f(c).$$

Como $f(c) = -\frac{1}{2}c^2 + 2c + 3$ e ainda, no Exemplo 1 resolvido no material da aula do dia 03 de agosto obtivemos que

$$\int_{-1}^{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3\right) dx = \frac{21}{2},$$

substituindo em

$$\int_{-1}^{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3\right) dx = 3f(c),$$

obtemos que

$$\frac{21}{2} = 3f(c) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}c^2 + 2c + 3\right).$$

Exemplo

Manipulando a igualdade, encontramos que

$$\frac{7}{2} = f(c) = -\frac{1}{2}c^2 + 2c + 3.$$

Ou seja

$$7 = -c^2 + 4c + 6.$$

Isto é

$$-c^2 + 4c - 1 = 0$$

Resolvendo a equação, temos

$$c = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{-2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{-2} = 2 \mp \sqrt{3}.$$

Assim, obtemos $c_1 = 2 - \sqrt{3}$ e $c_2 = 2 + \sqrt{3}$.

Lembre que desejamos obter $c \in [-1,2]$.

Como $c_2 = 2 + \sqrt{3} > 3$, esse valor não pertence ao intervalo dado $[-1,2]$ e deve ser descartado. Portanto, obtemos que

$$c = 2 - \sqrt{3} \in [-1,2]$$

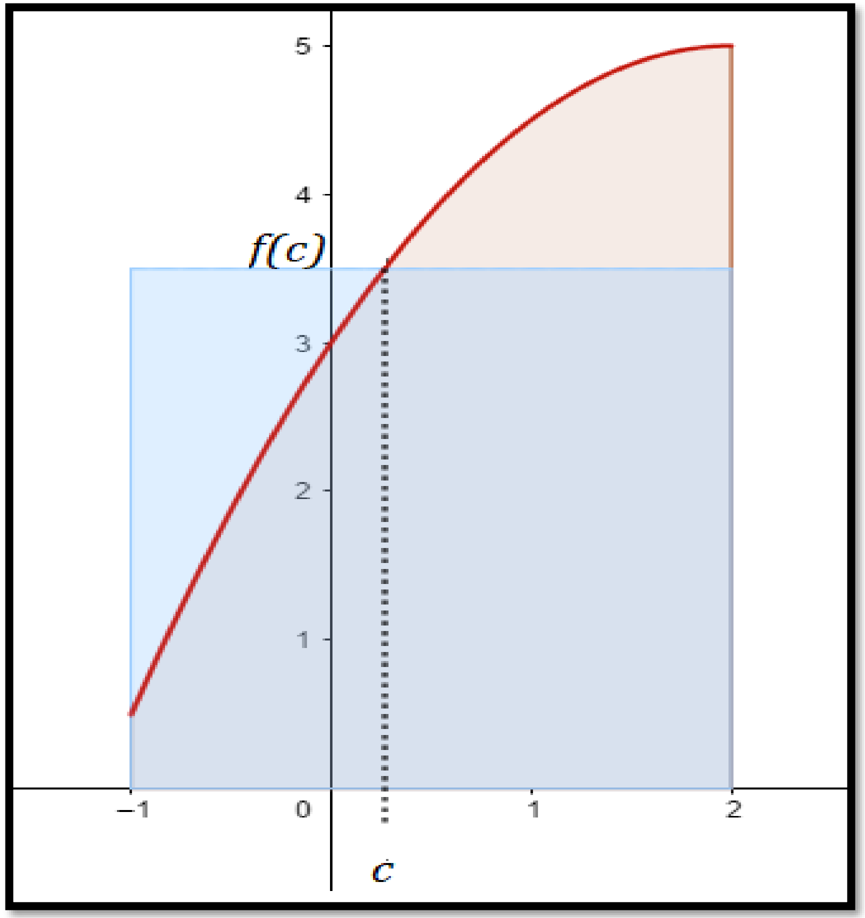
é o valor (único nesse exemplo) que satisfaz o TVI.

Exemplo

Geometricamente, o retângulo com base sobre o eixo x (no intervalo $[-1,2]$) e com altura dada por

$$f(c) = f\left(2-\sqrt{3}\right) = \frac{7}{2}$$

possui exatamente a mesma área que a região (em rosa) situada entre o gráfico de f e o eixo x:



Exercícios Propostos:

Exercício 1: Encontre todo(s) o(s) valor(es) de $c \in [0, 2]$ que satisfaçam o TVI para

$$f(x) = x^2 - 4x - 1.$$

Exercício 2: Encontre todo(s) o(s) valor(es) de $c \in [-2, 2]$ que satisfaçam o TVI para

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + 2.$$

Da lista: Exercícios 10, 11, 12.