Regras de Arredondamento:

Ⓘ Se o algarismo que vem depois da ultima casa decimal for menor que 5, o ultimo algarismo é mantido.

Ⓘⓘ... Se maior que 5, o ultimo algarismo de interesse é acrescido de uma unidade.

Ⓘⓘⓘ ... Se for igual a 5:

* Seguido de zero: arredondar para o par mais próximo
* Seguido de números diferentes de zero: o ultimo algarismo de interesse é acrescido de uma unidade.

Teoria de Erros e Normas

Erro Absoluto: $EA = |x - \bar{x}|$ — x: valor exato; $\bar{x}$: valor aproximado

Erro Relativo: $ER = \frac{|x-\bar{x}|}{|x|} \cdot 100$ → vantagem adimensional

Norma: forma de expressar a magnitude de um vetor

$$\|\vec{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1} |x_i|^p}$$

Norma Euclidiana: $p=2$ $\quad \|\vec{x}\|_2 = \sqrt[2]{\sum_{i=1} |x_i|^2}$

Norma Infinita: $\|\vec{x}\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1} |x_i|^p} = \underset{1\le i\le n}{\text{Máx}} |x_i|$

$EA_2 = \|x - \bar{x}\|_2$; $ER_2 = \frac{\|x-\bar{x}\|_2}{\|x\|}$; $EA_\infty = \|x-\bar{x}\|_\infty$

$ER_\infty = \frac{\|x-\bar{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$

Equações lineares

$Ax = b$ → vetor termos indepen.
- x ↳ vetor incognitas
- A ↳ matriz dos coeficientes

SPD - Sistema Possível Determinado
- ↳ Unica Solução
- ↳ $\det(A) \neq 0$

SPI - Sistema Possível Indeterminado
- ↳ $\det(A) = \det(A_i)^* = 0$

SI - Sistema Impossível
- ↳ $\det(A) = 0$ e $\det(A_i) \neq 0$

* Substituimos a coluna i pela coluna dos termos independentes

MÉTODOS DIRETOS

Eliminação de Gauss

• Operações:
- ↳ Permutar linhas: $L_1 \leftrightarrow L_3$
- ↳ Multiplicar linha: $L_i = KL_i \mid K \neq 0$
- ↳ Somar duas linhas: $L_2 = L_2 + KL_1 \mid K \neq 0$

multiplicadores: $m_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{jj}}$

Matriz triangular superior

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = b_1 \\ 0 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = b_2 \\ 0 + 0 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}}$

$x_2 = \frac{b_2 - a_{32}x_3}{a_{22}}$

$x_1 = \frac{b_1 - a_{21}x_2 + a_{31}x_3}{a_{11}}$

Substituições Retroativas

Avaliando a qualidade do resultado

• 1° caso: Sem a solução exata:

$Ax - b = R$ → vetor resíduo se $R=0$ → solução exata,,
- x ↳ solução encontrada

Aritmética de Ponto Flutuante

• Decimal → Base Qualquer: Divisões sucessivas

Ex:
```
23 |2
 1  11 |2
     1  5 |2
        1  2 |2
           0  1 |2
              1  0
```
⚠ nesta direção

$23_{10} = 10111_2$

Conversão Decimal → Binário (Float)

```
K=1
F=r10
Do { F = 2.F ;
     dk = ParteInteiro F;
     F = F - dk;
     K++;
} while(F≠0 && K ≤ max_d);
```

Ex: $3{,}375_{10}$

	F	Res
x2	0,375	0,
	0,75	0,0
(F-0)x2	1,5	0,01
(F-1)x2	1	0,011

$\therefore 11{,}011_2 = 3{,}375_{10}$

Ponto Flutuante:

- Normalizar o número;
- Se o primeiro bit for 1 é negativo, 0 é positivo.
- Float:

1bit	8 bits	23 bits
S	Expoente	Mantissa

- Double:

1bit	11 bits	52 bits
S	Expoente	Mantissa

- Expoente:

Float	Double
$0111\,1111_2$ + expoente$_2$ (bias 127_{10})	$011\,1111\,1111_2$ + expoente$_2$ (bias 1023_{10})

• 2° caso: conhecendo a solução exata

$ER_\infty = \frac{\|x-\bar{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$ $\quad x$ = solução exata, $\bar{x}$ = solução encontrada

Pivotamento Parcial: O pivô será o maior número absoluto na coluna cujo os elementos serão eliminados. Logo teremos: $-1 \le m_{ij} \le 1$

Fatoração LU

- U = matriz triangular superior (upper)
- L = matriz triangular inferior (Lower)
- $Ax = b \Rightarrow LUx = b \Rightarrow Ly = b \mid Ux = y$

$$L_{ij} = \begin{cases} l_{ij} = 0, \text{ se } i<j \\ l_{ij} = 1, \text{ se } i=j \\ l_{ij} = -m_{ij}, \text{ se } i>j \end{cases}$$

U = método de Gauss

* Na fatoração LU com pivotamento parcial é necessário alterar os multiplicadores e o vetor dos termos independentes. Ex: $L_2 \leftrightarrow L_3$ temos $m_{31} \leftrightarrow m_{21}$,,

METODOS INDIRETOS

Metodo Jacobi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Temos:

$$x_1^{k+1} = \frac{b_1 - a_{21}x_2^k - a_{31}x_3^k}{a_{11}}$$

$$x_2^{k+1} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^k + a_{32}x_3^k}{a_{22}}$$

$$x_3^{k+1} = \frac{b_3 - a_{31}x_1^k - a_{32}x_2^k}{a_{33}}$$

eq. de recorrência do metodo Jacobi

k = iteração; x^0 = estimativa inicial

Critério de parada:

$\|x_i^k - x_i^{k+1}\|_\infty < \varepsilon$ | ε = Erro

Ex 01: $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = -3 \\ x_1 + 3x_2 = 13 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{-3 + 2x_2}{5}$; $x_2 = \frac{13 - x_1}{3}$

$x^0 = [0 \quad 6]^T$ $\quad \varepsilon = 0{,}1 = 10^{-1} \rightarrow$ se não especificar, usar expoente-1 de truncamento.

	0	1	2	3	4
x_1	0	1,80	1,13	0,81	0,98
x_2	6	4,33	3,73	3,95	4,04

$\|x_1^4 - x_1^3\| = 0{,}09$

$\|x_2^4 - x_2^3\| = 0{,}09$

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$; $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0{,}98 \\ 4{,}04 \end{bmatrix}$

Teste de Convergência

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}} |a_{ij}|$$

Cada elemento que pertence a diagonal principal deve ser maior em módulo, que a soma em módulo, dos demais elementos dessa linha.

Método Gauss-Seidel

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Temos:

$$x_1^{k+1} = \frac{b_1 - a_{21}x_2^k - a_{31}x_3^k}{a_{11}}$$

$$x_2^{k+1} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{k+1} + a_{32}x_3^k}{a_{22}}$$

$$x_3^{k+1} = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1}}{a_{33}}$$

Ao calcular x_1^{k+1}, usamos todos os valores que já foram atualizados.