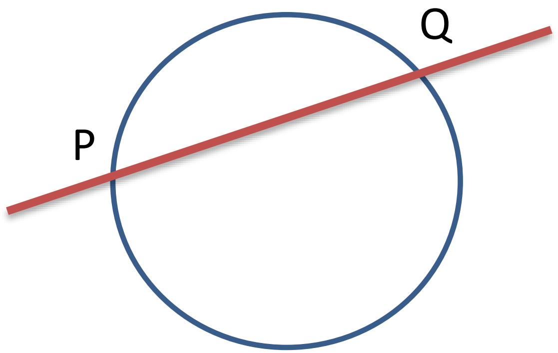
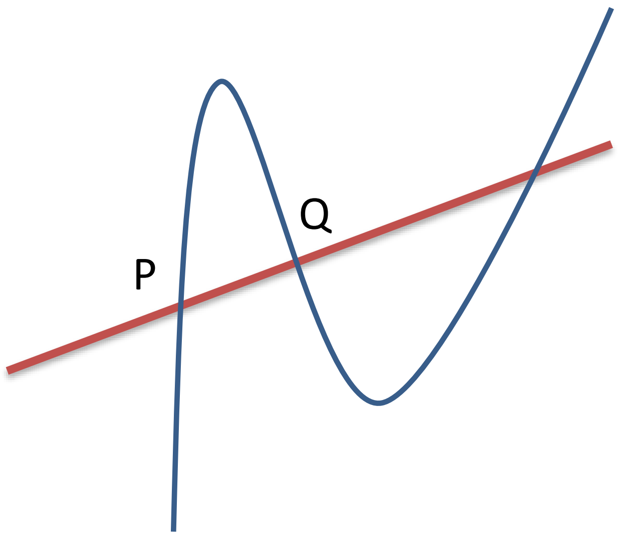
Derivada – Interpretação Geométrica

Exemplo:

Seja C o gráfico da função $f(x) = x^2$.

a. Sabendo que a ***reta secante*** ao gráfico de uma função *f* é definida como sendo uma reta que intercepta ao menos em dois pontos o gráfico de *f*,





Derivada – Interpretação Geométrica

Exemplo:

Seja C o gráfico da função $f(x) = x^2$.

a. Sabendo que a ***reta secante*** ao gráfico de uma função *f* é definida como sendo uma reta que intercepta ao menos em dois pontos o gráfico de *f*, determine o coeficiente angular da reta secante a C que passa pelos pontos P e Q, sendo que P(2,4) e:

i. $Q(0,0)$; ii. $Q(1,1)$; iii. $Q\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$; iv. $Q(1{,}9; 3{,}61)$; v. $Q(x_0, x_0^2)$.

O coeficiente angular de uma reta é dado por: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}$

$$m_i = \frac{4-0}{2-0} = 2$$

$$m_{ii} = \frac{4-1}{2-1} = 3$$

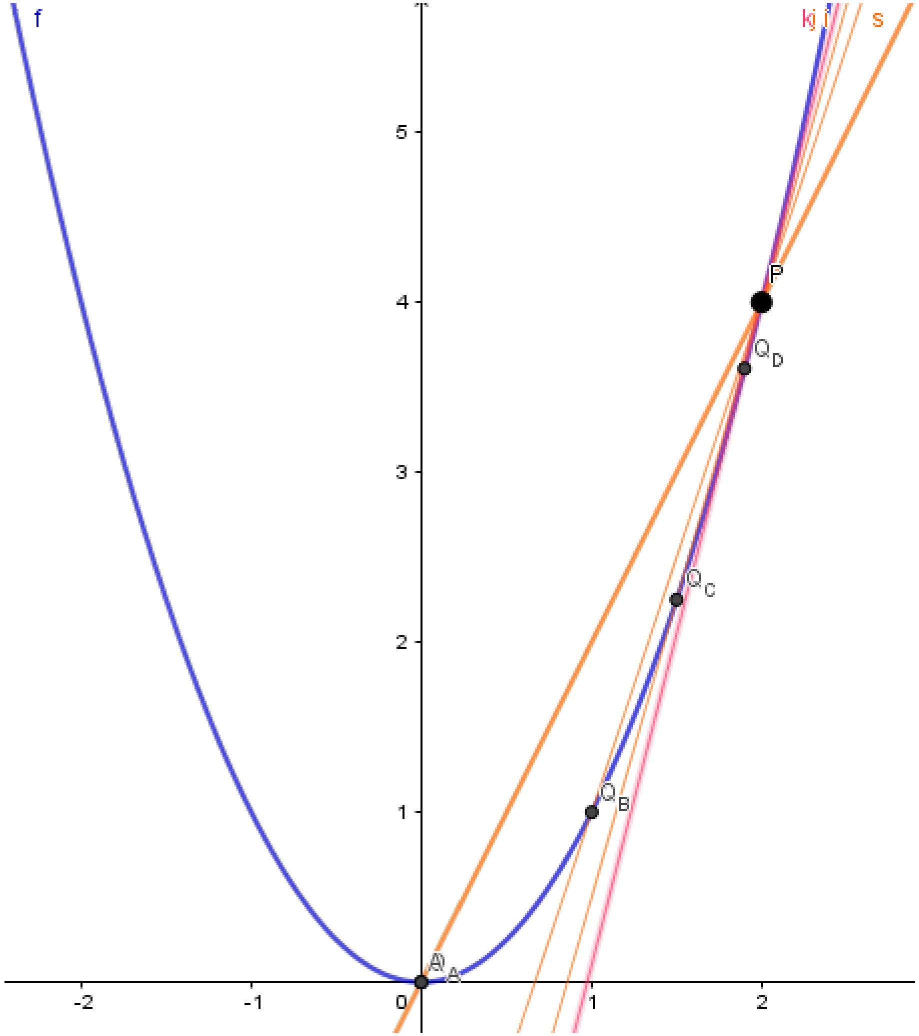
$$m_{iii} = \frac{4-\frac{9}{4}}{2-\frac{3}{2}} = \frac{4-2{,}25}{2-1{,}5} = 3{,}5$$

$$m_{iv} = \frac{4-3{,}61}{2-1{,}9} = 3{,}9$$

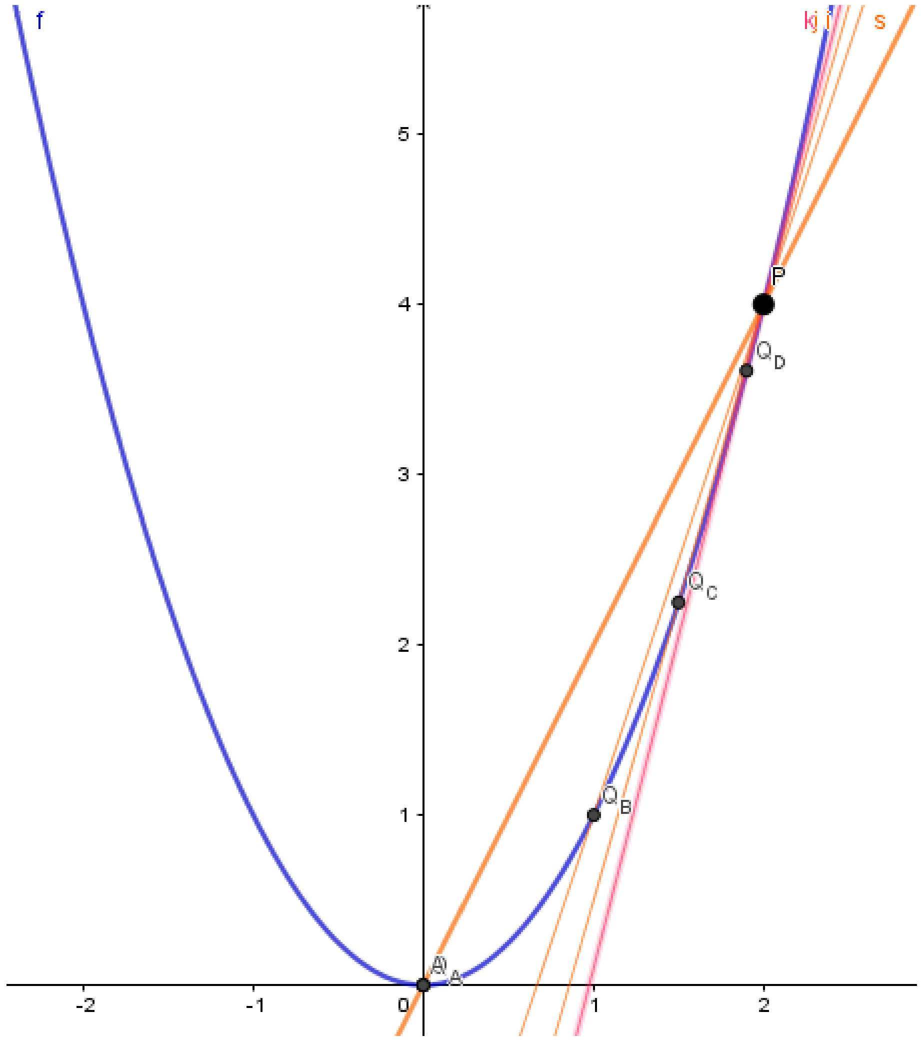
$$m_v = \frac{4-x_0^2}{2-x_0} = \frac{(2-x_0)(2+x_0)}{2-x_0}$$

$\boxed{m_v = 2 + x_0}$, se $x_0 \neq 2$

b. Represente geometricamente o gráfico de f e, no mesmo plano cartesiano, trace as retas secantes que passam pelos pontos P e Q dados no item a.



c) O que você pode observar com relação aos valores das abscissas dos pontos Q (do item b) com relação ao valor da abscissa de P?

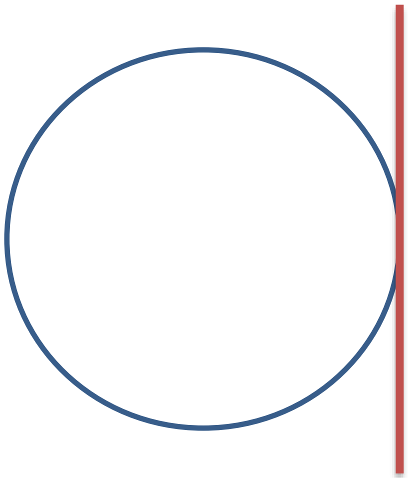


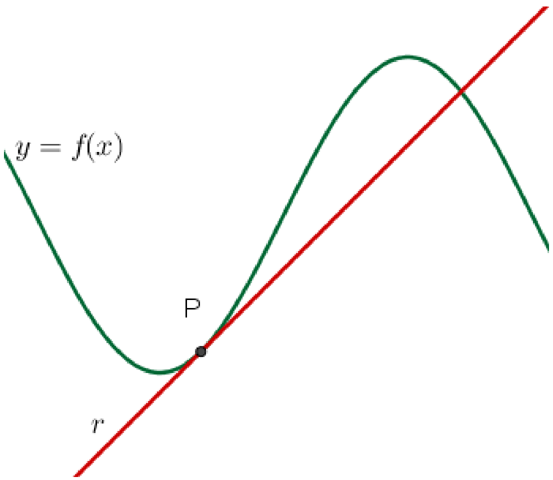
As abcissas do ponto Q se aproximam das abscissas do ponto P.

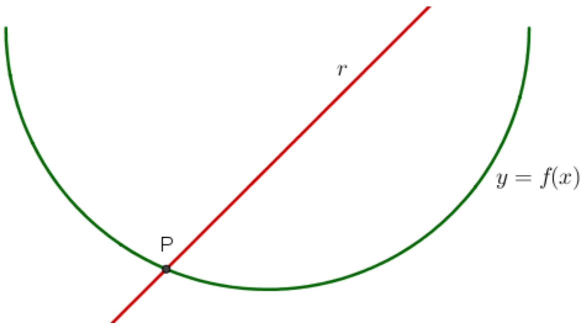
Q$\rightarrow P$ ⇨ $x_0 \rightarrow 2$

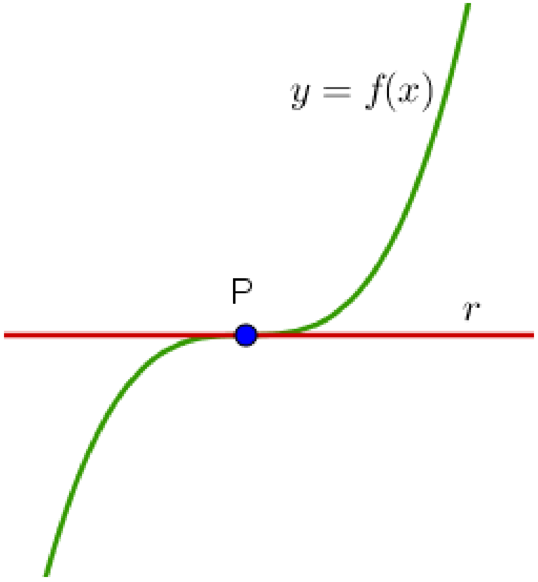
d. O que pode falar a respeito de como se determina o coeficiente angular da reta tangente a C em *P*? Por quê?

O que você entende sobre reta tangente?

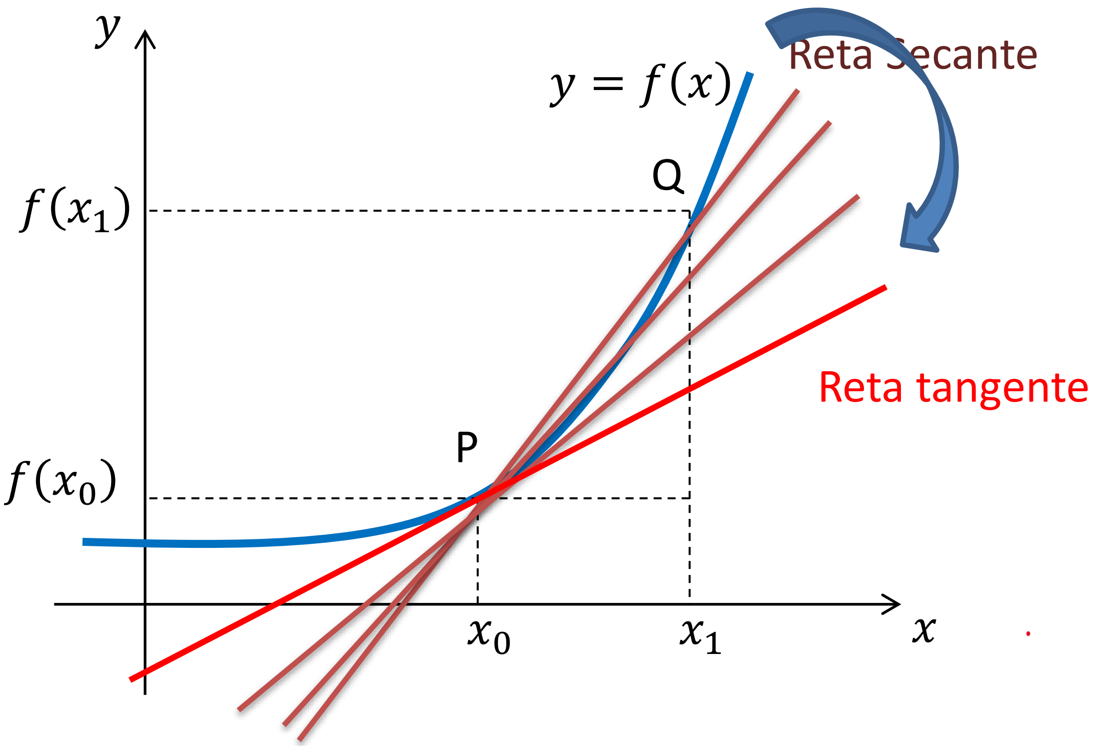








De forma geral, considerando dois ponto P e Q que pertencem ao gráfico de $y = f(x)$ e a reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos P e Q. Fixando o ponto P e fazendo Q se deslocar pelo gráfico de f em direção ao ponto P, temos que:



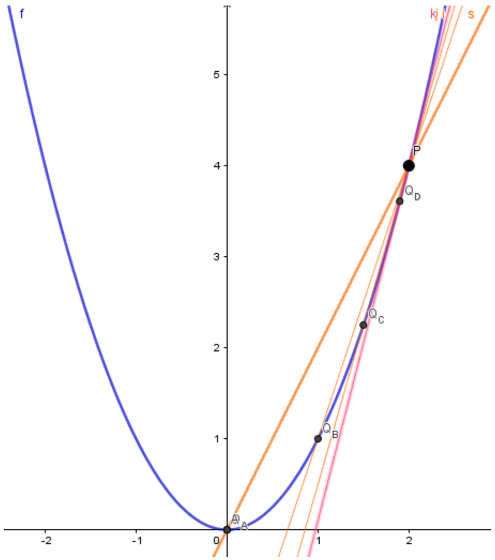
O coeficiente angular da reta tangente é: $m_t = \lim_{Q \to P} m_s$

$$m_t = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_Q \to x_P} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \Rightarrow \boxed{m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

$$x_1 - x_0 = \Delta x \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

Retornando ao item d:

d. O que pode falar a respeito de como se determina o coeficiente angular da reta tangente a C em *P*? Por quê?



A reta tangente é a posição limite da reta secante, ou seja,

$$m_t = \lim_{Q \to P} m_s$$

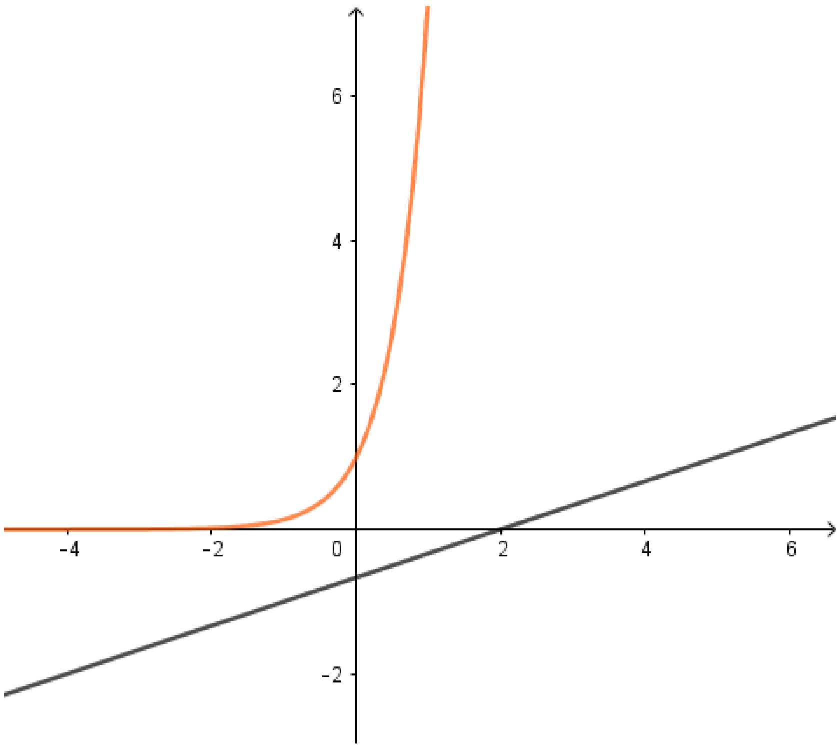
$$m_t = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_0 \to 2} \frac{4 - x_0^2}{2 - x_0}$$

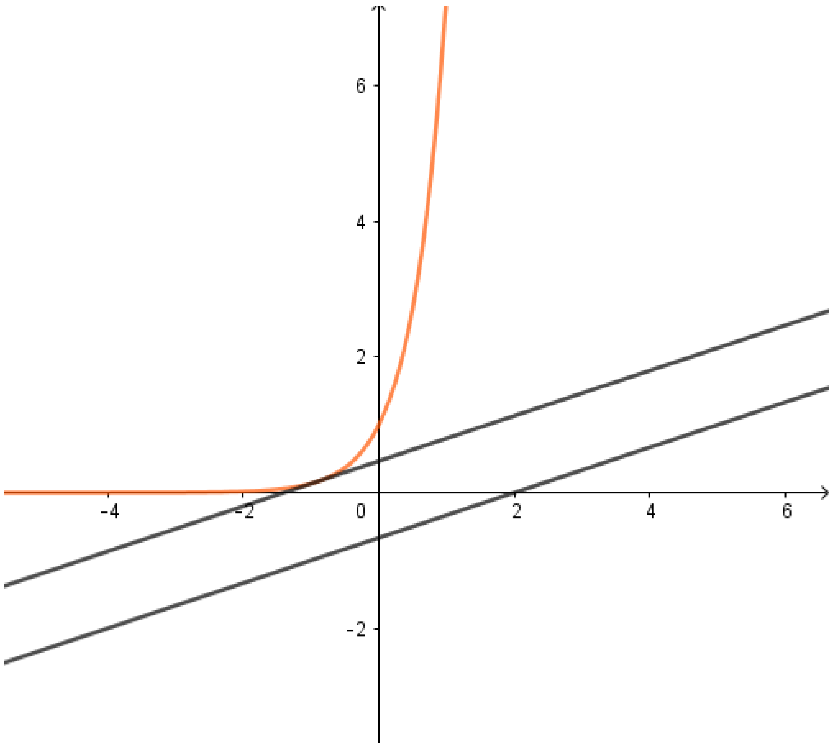
$$m_t = \lim_{x_0 \to 2} \frac{(2 - x_0)(2 + x_0)}{2 - x_0}$$

$$m_t = \lim_{x_0 \to 2} (2 + x_0)$$

Exemplos:

1. Determine a equação da reta tangente ao gráfico da curva $C: y = e^{2x}$ que seja paralela à reta r: $3y - x + 2 = 0$.





Exemplos:

1. Determine a equação da reta tangente ao gráfico da curva $C: y = e^{2x}$ que seja paralela à reta $r:\ 3y - x + 2 = 0$.

Seja t a reta tangente ao gráfico de C e paralela a reta r.

A equação de uma reta é $y = ax + b$ ou $y - y_0 = m_t(x - x_0)$.

$\Rightarrow$ $\boxed{y - f(x_0) = m_t(x - x_0).}$

Como a reta $t//r$ $\Rightarrow$ $m_t = m_r$

Temos que: $r:\ 3y - x + 2 = 0 \Rightarrow y = \underbrace{\frac{1}{3}}_{m_r}x - \frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $\boxed{m_t = m_r = \frac{1}{3}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{y - f(x_0) = \frac{1}{3}(x - x_0).}$

Como a reta t é tangente ao gráfico de C, então: $m_t = f'(x_0)$ $\Rightarrow$ $\boxed{f'(x_0) = \frac{1}{3}}$

Pela definição de derivada aplicada em um ponto, temos que:

$$m_t = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{2(x_0 + \Delta x)} - e^{2x_0}}{\Delta x}$$

$$m_t = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{2x_0} e^{2\Delta x} - e^{2x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{2x_0}(e^{2\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^{2x_0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(e^2)^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$m_t = f'(x_0) = e^{2x_0} \ln(e^2) = 2e^{2x_0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = 2e^{2x_0} \Rightarrow \frac{1}{6} = e^{2x_0} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{6}\right) = ln(e^{2x_0}) \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{6}\right) = 2x_0 \ln(e) \Rightarrow \boxed{x_0 = -\frac{1}{2}\ln(6)}$$

Logo, a equação da reta t é:

$$y - f\left(-\frac{1}{2}\ln(6)\right) = \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\ln(6)\right)$$

$$\Rightarrow y - e^{2\left(-\frac{1}{2}\ln(6)\right)} = \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{2}\ln(6)\right) \Rightarrow y - \frac{1}{6} = \frac{x}{3} + \frac{1}{6}\ln(6)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{x}{3} + \frac{1}{6}\ln(6) + \frac{1}{6}}$$