2. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(1)^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$

No cálculo do limite de uma função, quando obtivermos uma das sete formas

$$\frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0.(\pm\infty),\ +\infty-\infty,\ 0^0,\ 1^{\pm\infty} \text{ e } (\pm\infty)^0,$$

conhecidas como **formas indeterminadas** ou **indeterminações**, nada se poderá concluir de imediato antes que sejam feitas manipulações algébricas de forma que a indetermincão seja eliminada.

Primeira técnica: Decomposição do polinômio

Teorema da Decomposição

Todo polinômio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

de grau n pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau. Isto é

$$f(x) = a_n (x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n).$$

$$L = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \Longrightarrow L = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

$$b)\ L = \lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 - 2x + 6}{x - 3} = \frac{0}{0}$$

$$L = \lim_{x \to 3} \frac{(x^2 - 2)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x^2 - 2)$$

$$c)\ L = \lim_{x \to -3} \frac{|x + 3|}{2x^2 + 11x + 15} = \frac{0}{0}$$

Pela definição de módulo: $|x + 3| = \begin{cases} x + 3, se\ x + 3 \geq 0 \\ -(x + 3), se\ x + 3 < 0 \end{cases}$

Limites laterais:

$$L_1 = \lim_{x \to -3^+} \frac{|x + 3|}{2x^2 + 11x + 15} = \lim_{x \to -3^+} \frac{x + 3}{2x^2 + 11x + 15} = \lim_{x \to -3^+} \frac{x + 3}{(x + 3)(2x + 5)} = \lim_{x \to -3^+} \frac{1}{(2x + 5)} = -1$$

$$L_2 = \lim_{x \to -3^-} \frac{|x + 3|}{2x^2 + 11x + 15} = \lim_{x \to -3^-} \frac{-(x + 3)}{(x + 3)(2x + 5)} = \lim_{x \to -3^-} \frac{-1}{(2x + 5)} = 1$$

d) $L = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} = \frac{0}{0}$

Segunda técnica: **Mudança de variável**

Definindo $u = \sqrt{x+2} \Rightarrow x = u^2 - 2$

Se $x \to 2$, então $u \to 2$

$$L = \lim_{u \to 2} \frac{u^2 - 2 - 2}{u - 2} = \lim_{u \to 2} \frac{u^2 - 4}{u - 2} = \frac{0}{0}$$

$$L = \lim_{u \to 2} \frac{(u-2)(u+2)}{u-2} = \lim_{u \to 2}(u+2) = 4$$

Terceira técnica: **Conjugado**

$$L = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} = \lim_{x \to 2} \left(\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} \; \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2} \right)$$

$$L = \lim_{x \to 2} \left(\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2 - (2)^2} \right)$$

$$L = \lim_{x \to 2} \left(\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} \right)$$

$$L = \lim_{x \to 2} \left(\sqrt{x+2} + 2 \right)$$

$$e)\ L = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^5 + 2x + 1}{4x^7 + 5x^5}$$

Colocando em evidência o termo de maior grau no numerador e no denominador, temos que:

$$L = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^5\left(1 + \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right)}{4x^7 + 5x^5} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^5\left(1 + \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right)}{x^7\left(4 + \frac{5}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 + \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^5}}{x^2\left(4 + \frac{5}{x^2}\right)} = \frac{1}{\infty} \Rightarrow \boxed{L = 0}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x^4} = 2 \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^4} = 2 \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^4 = 2\left(\underbrace{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}}_{0}\right)^4$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^5} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^5 = \left(\underbrace{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}}_{0}\right)^5$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{x^2} = 5 \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 5 \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 5\left(\underbrace{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x}}_{0}\right)^2$$

Propriedade:
Se p e q são polinômios de grau n e m, respectivamente, então

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}}$$

Demonstração:

Como p e q são polinômios de grau n e m, respectivamente, então

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}}{}_1 + \frac{a_0}{x^n}\right)}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{x^m}\lim_{x\to\infty}\frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}}{}_1 + \frac{a_0}{x^n}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \frac{b_{m-2}}{x^2} + \cdots + \frac{b_1}{x^{m-1}}{}_1 + \frac{b_0}{x^m}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{x^m}\lim_{x\to\infty}\frac{a_n + \overbrace{\frac{a_{n-1}}{x}}^{0} + \overbrace{\frac{a_{n-2}}{x^2}}^{0} + \cdots + \overbrace{\frac{a_1}{x^{n-1}}{}_1}^{0} + \overbrace{\frac{a_0}{x^n}}^{0}}{b_m + \underbrace{\frac{b_{m-1}}{x}}_{0} + \underbrace{\frac{b_{m-2}}{x^2}}_{0} + \cdots + \underbrace{\frac{b_1}{x^{m-1}}{}_1}_{0} + \underbrace{\frac{b_0}{x^m}}_{0}} = \frac{a_n}{b_m}\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{x^m} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}}$$

$$f)\ L = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^5 + 2x + 1}{4x^3 + 5x^2}$$

$$L = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^5}{4x^3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{4} = +\infty$$

$$g)\ L = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^5 + 2x + 1}{4x^5 + 5x^2}$$

$$L = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^5}{4x^5} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$