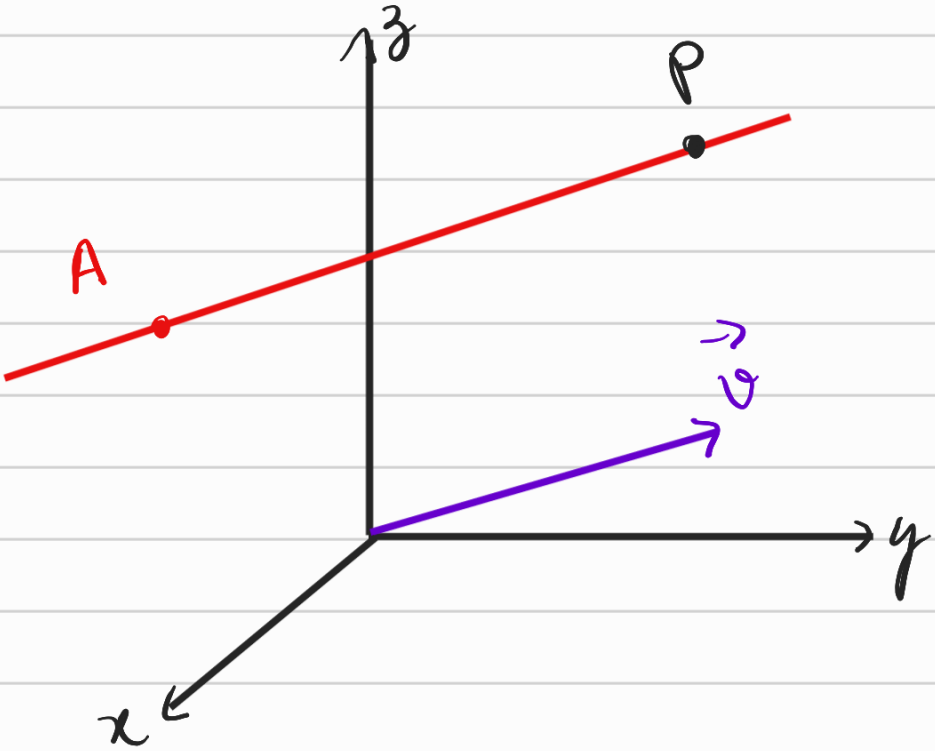
Equação Vetorial da reta

Seja r uma reta que passa por um ponto A e tem a direção de um vetor não nulo $\vec{v}$.

P pertence à reta r $\iff$ $\vec{AP} = t\vec{v}$ para algum $t \in \mathbb{R}$

ou $P - A = t\vec{v}$



$\Rightarrow$ $P = A + t\vec{v}$ com $\vec{v} \neq \vec{0}$

ou

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct)$$

(eq. vetorial da reta)

Ainda, podemos escrever

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases},$$ (equações paramétricas da reta)

onde a, b e c não são todos nulos e $t \in \mathbb{R}$.

O vetor $\vec{v}$ é chamado vetor diretor da reta r e t é chamado parâmetro.

Quando t varia de $-\infty$ a $+\infty$, o ponto P descreve a reta r.

$\boxed{\text{Exemplo 1:}}$ Determine a eq. vetorial da reta que passa pelo ponto $A(3,0,-5)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (2,2,-1)$.

Temos

$$P = A + t\vec{v}$$

$$\Rightarrow r: (x,y,z) = (3,0,-5) + t(2,2,-1)$$
$$= (3+2t, 2t, -5-t).$$

Verifique se o ponto $P(7,4,-7)$ pertence à reta r:

Devemos ter

$$(7,4,-7) = (3+2t, 2t, -5-t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3+2t = 7 \\ 2t = 4 \\ -5-t = -7 \end{cases} \Rightarrow t = 2.$$

Logo, $(7,4,-7)$ pertence à r.

Já o ponto $Q(3,0,1)$ não pertence à r, pois

$$(3,0,1) = (3+2t, 2t, -5-t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = 3+2t \\ 0 = 2t \\ 1 = -5-t \end{cases}$$

Observe que $t=0$ é o único valor que satisfaz as duas primeiras identidades, mas $t=0$ não satisfaz a terceira. Logo, o ponto Q não pertence à r.

Reta definida por dois pontos

A reta definida pelos pontos $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ tem como vetor diretor o vetor

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Exemplo: Encontre as eq paramétricas da reta r que passa pelos pontos $A(1,-2,-3)$ e $B(3,1,0)$.

O vetor diretor de r é dado por

$$\vec{AB} = B - A = (3-1, 1-(-2), 0-(-3)) = (2, 3, 3).$$

Logo, as eq paramétricas podem ser escritas como

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$$ usando o ponto A

ou

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3t \end{cases}$$ usando o ponto B.

OBS: Observe que os dois sistemas acima descrevem a mesma reta. O que muda é o valor de t necessário p/ encontrar o ponto desejado.

Como exemplo, o ponto A é encontrado pelo 1º sistema fazendo $t=0$. Já no 2º, temos

$$\begin{cases} 1 = 3+2t \\ -2 = 1+3t \\ -3 = 3t \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{t=-1}}$$

que o ponto A é obtido fazendo $t=-1$.

Equações simétricas da reta

Da eq vetorial

$$(x,y,z) = (x_1+at, y_1+bt, z_1+ct)$$

com $abc \neq 0$, temos

$$\begin{cases} x-x_1 = at \\ y-y_1 = bt \\ z-z_1 = ct \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}}$$

(equações simétricas da reta)

Voltando ao exemplo anterior, temos as eq simétricas

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{3}.$$

Exemplo: As eq simétricas da reta que passa pelo ponto $A(3,0,-2)$ e tem vetor diretor $\vec{v} = (-1,5,3)$ são

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y}{5} = \frac{z+2}{3}.$$

//

Equações Reduzidas da reta

Das eq simétricas

$$r: \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c},$$

pode-se fazer

$$y-y_1 = \frac{b}{a}(x-x_1) \Rightarrow y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}x_1 + y_1$$

$$\Rightarrow y = mx+n,$$

onde $m = \frac{b}{a}$ e $n = -\frac{b}{a}x_1 + y_1$.

Ainda,

$$z-z_1 = \frac{c}{a}(x-x_1) \Rightarrow z = \frac{c}{a}x - \frac{c}{a}x_1 + z_1$$

$$\Rightarrow z = px+q,$$

onde $p = \frac{c}{a}$ e $q = -\frac{c}{a}x_1 + z$.

Assim, temos

$$r: \begin{cases} y = mx+n \\ z = px+q \end{cases}$$ (eq reduzidas da reta)

$\boxed{\text{Exemplo}}$: Encontre as equações reduzidas da reta r que passa pelos pontos

$A(2,1,-3)$ e $B(4,0,-2)$.

Temos o vetor diretor $\vec{v} = \vec{AB} = (2,-1,1)$.
Eq simétricas (com B):

$$\underbrace{\frac{x-4}{2} = \frac{y}{-1}}_{\text{I}} = \frac{z+2}{1} \quad \text{II}$$

I

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y}{-1} \Rightarrow \frac{4-x}{2} = y \Rightarrow y = -\frac{x}{2} + 2$$

II

$$\frac{x-4}{2} = z+2 \Rightarrow z = \frac{x}{2} - 2 - 2 = \frac{x}{2} - 4$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} y = -x/2 + 2 \\ z = \dfrac{x}{2} - 4 \end{cases}$$ (equações reduzidas)

//

(*)

Também podemos escrever as eq reduzidas como

$$\begin{cases} x = -2y + 4 \\ z = -y - 2 \end{cases}$$ (x e z em função de y)

$\boxed{\text{OBS}}$ Observe que, das eq. reduzidas

$$r: \begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases},$$

podemos escrever as seguintes eq paramétricas para r:

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = mt + n \\ z = pt + q \end{cases}$$

Logo, um vetor diretor de r é

$$\vec{v} = (1, m, p).$$

Voltando ao exemplo anterior, podemos ver de ⊛ que a reta r tem um vetor diretor

$$\left(1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(2, -1, 1) = \frac{1}{2}\vec{v}$$

Como os dois vetores são colineares, ambos são vetores diretores de r.

Retas paralelas aos eixos coordenados

CCI TADS
19/09

Eq paramétricas

$$r: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

representam uma reta r que tem como vetor diretor o vetor $\vec{v} = (a, b, c)$ e passa pelo ponto $A(x_1, y_1, z_1)$.

Casos especiais:

1º) Uma das componentes de $\vec{v}$ é nula:

(a) $a = 0 \Rightarrow \vec{v} = (0, b, c) \perp \vec{i}$.
$\Rightarrow$ a reta é paralela ao plano yz.

Eq. simétricas:

$$r: \begin{cases} x = x_1 \\ \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c} \end{cases}$$

(b) $b = 0 \Rightarrow \vec{v} = (a, 0, c) \perp \vec{j}$
$\Rightarrow$ a reta é paralela ao plano xz.

Eq. simétricas:

$$r: \begin{cases} y = y_1 \\ \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{z - z_1}{c} \end{cases}$$

(c) $c = 0 \Rightarrow \vec{v} = (a, b, 0) \perp \vec{k}$

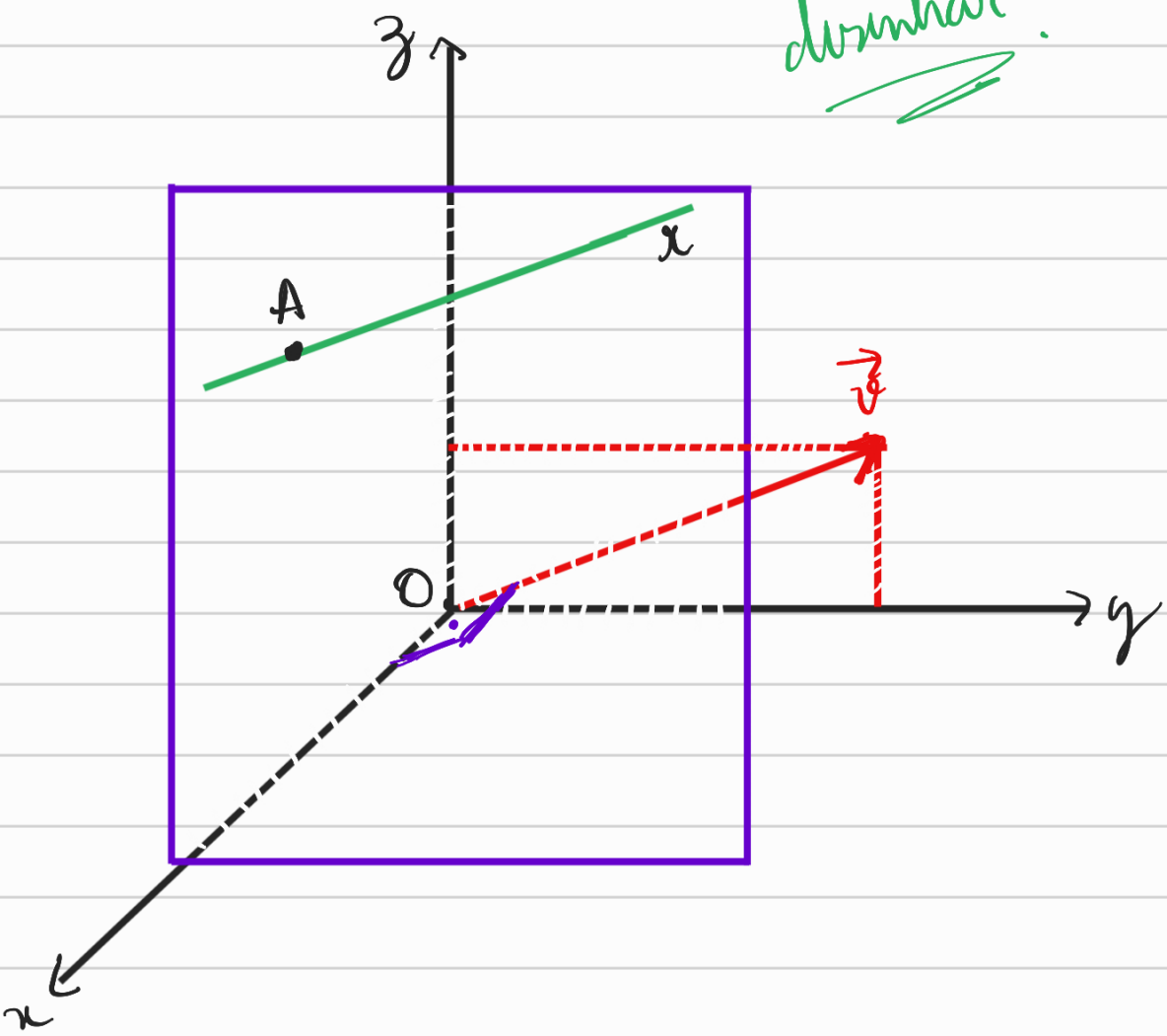
$\Rightarrow$ a reta é paralela ao plano xy

Eq. simétricas:

$$r: \begin{cases} z = z_1 \\ \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} \end{cases}$$

Ilustração do caso (a):

desenhar!

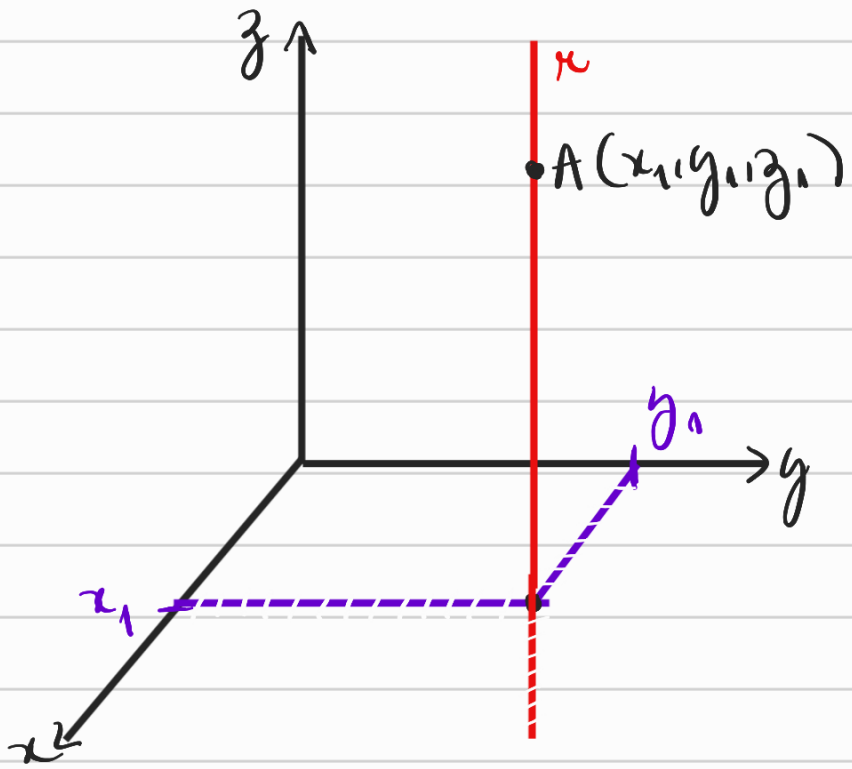


2º caso Duas componentes de $\vec{v}$ são nulas:

(a) $a = b = 0 \Rightarrow \vec{v} = (0,0,c) \parallel \vec{k}$
$\Rightarrow$ a reta é paralela ao eixo z.

Nesse caso, podemos escrevemos as eq da reta simplesmente como

$$r: \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$$ subentendendo-se o z_1 que é livre.



(b) $a = c = 0 \Rightarrow \vec{v} = (0,b,0) \parallel \vec{j}$
$\Rightarrow$ a reta é paralela ao eixo y.

(c) $b = c = 0 \Rightarrow \vec{v} = (a,0,0) \parallel \vec{i}$
$\Rightarrow$ a reta é paralela ao eixo x.

OBS Podemos enxergar os eixos coordenados como retas, onde

- eixo x: $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

- eixo y: $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$

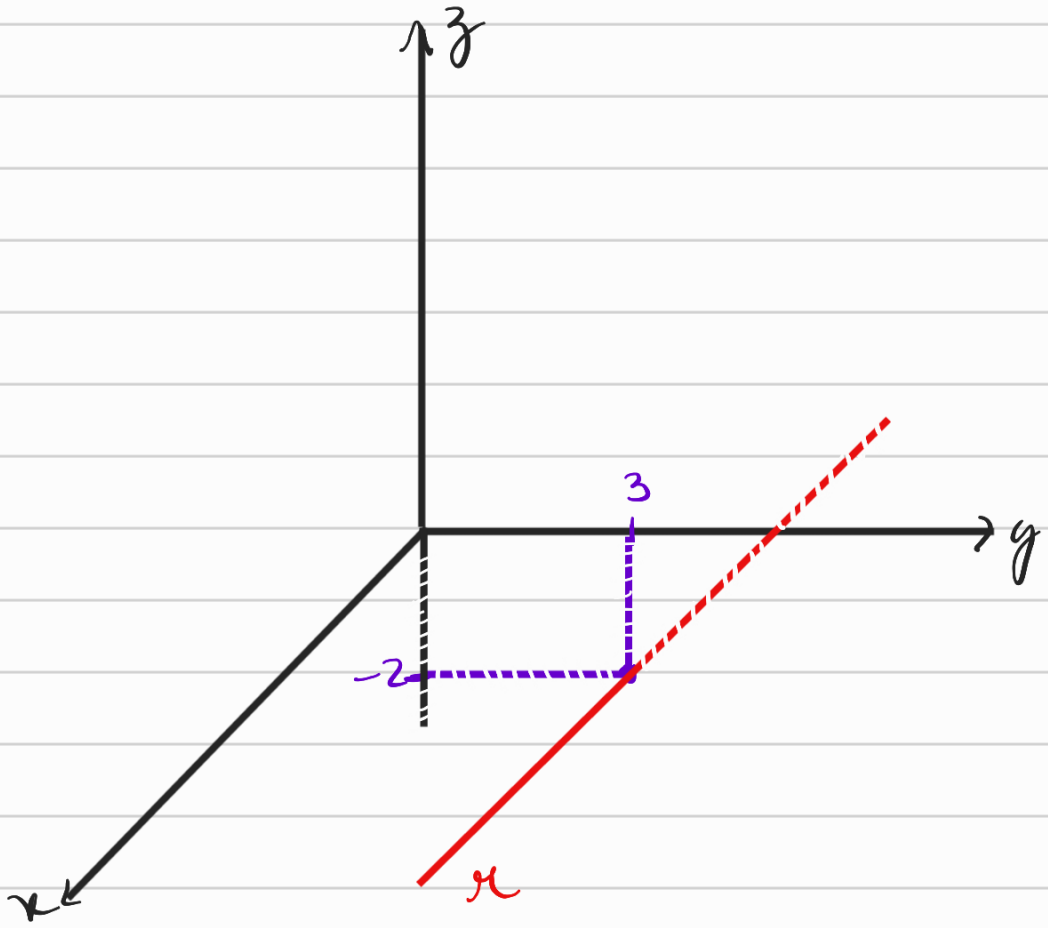
- eixo z: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Exemplo: Determine as eq da reta r que passa pelo ponto $A(0,3,-2)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = 4\vec{i}$.

Resolução: Temos que $\vec{v} = (\underset{a}{4}, \underset{b}{0}, \underset{c}{0})$. Então

$$r: \begin{cases} x = 0 - 4t \\ y = 3 - 0t \\ z = -2 - 0t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -4t \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

Também podemos descrevê-la como

$$r: \begin{cases} y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

Observe que poderíamos usar o vetor $\vec{i}$ para a direção, pois o comp do vetor diretor não é relevante.