Exemplo:

1. $I = \int \sqrt{9 - x^2}\ \ dx$

Definindo $u = 9 - x^2 \Longrightarrow du = 2x\, dx$

Não faz parte do argumento.

Técnica da substituição não é aplicável..

Substituição trigonométrica

Geralmente, usa-se esta técnica quando o integrando contém uma expressão da forma

$$\left(a^2 - u^2\right)^{\frac{n}{2}}, \left(u^2 + a^2\right)^{\frac{n}{2}} \text{ ou } \left(u^2 - a^2\right)^{\frac{n}{2}}, \text{ para } n \in \mathbb{N}^*.$$

o objetivo é eliminar a soma/diferença do termo $a^2 - u^2$, $a^2 + u^2$ou $u^2 - a^2$.

A substituição trigonométrica deve ser escolhida de forma que ao utilizar alguma das identidades triginonométricas abaixo seja possível eliminar a soma/diferença de quadrados.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

Exemplificando:

$$cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1 \Longrightarrow cos^2(\theta) = 1 - sen^2(\theta)$$

$$(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}} = \left(a^2 - a^2 sen^2(\theta)\right)^{\frac{n}{2}} = \left(a^2\left(1 - sen^2(\theta)\right)\right)^{\frac{n}{2}} = \left(a^2 cos^2(\theta)\right)^{\frac{n}{2}} = \left(a\ cos(\theta)\right)^n$$

$$u = a\ sen(\theta)$$

$$(a^2 + \boxed{u^2})^{\frac{n}{2}} = (a^2 + a^2 tg^2(\theta))^{\frac{n}{2}} = \left(a^2(1 + tg^2(\theta))\right)^{\frac{n}{2}} = (a^2 sec^2(\theta))^{\frac{n}{2}} = \left(a\ sec(\theta)\right)^n$$

$$u = a\ tg(\theta)$$

$$tg^2(\theta) + 1 = sec^2(\theta)$$

$$(\boxed{u^2} - a^2)^{\frac{n}{2}} = (a^2 sec^2(\theta) - a^2)^{\frac{n}{2}} = \left(a^2(sec^2(\theta) - 1)\right)^{\frac{n}{2}} = \left(a^2 tg^2(\theta)\right)^{\frac{n}{2}} = \left(a\ tg(\theta)\right)^n$$

$$u = a\ sec(\theta)$$

$$tg^2(\theta) + 1 = sec^2(\theta) \Longrightarrow tg^2(\theta) = sec^2(\theta) - 1$$

Resumindo:

- $a^2 - u^2 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{u = a \sin\theta}$ ou $u = a\cos\theta$
- $u^2 + a^2 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{u = a \tan\theta}$ ou $u = a\cot\theta$
- $u^2 - a^2 \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{u = a \sec\theta}$ ou $u = \csc\theta$

Exemplo:

1. $I = \int \sqrt{9 - x^2}\ dx = \int \sqrt{3^2 - x^2}\ dx$

Por substituição trigonométrica, temos que:

$$x = 3\ sen(\theta) \Longrightarrow dx = 3\ cos(\theta) d\theta$$

$$I = \int \sqrt{3^2 - x^2}\ dx = \int \sqrt{3^2 - \left(3\ sen(\theta)\right)^2}\, 3\ cos(\theta) d\theta$$

$$I = \int \sqrt{9 - 9\ sen^2(\theta)}\ 3\ cos(\theta) d\theta$$

$$I = \int \sqrt{9\left(1 - sen^2(\theta)\right)}\, 3\ cos(\theta) d\theta$$

$$I = \int \sqrt{9cos^2(\theta)}\, 3\ cos(\theta) d\theta$$

$$I = \int 3\ cos(\theta)\, 3\ cos(\theta) d\theta$$

$$I = 9\int cos^2(\theta)\,d\theta$$

$$I = 9\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos(2\theta)\right)d\theta$$

$$I = \frac{9}{2}\int d\theta + \frac{9}{2}\int cos(2\theta)\,d\theta$$

$$I = \frac{9}{2}\int d\theta + \frac{9}{2}\int cos(2\theta)\,d\theta$$

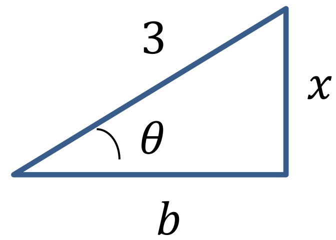
$$I = \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}sen(2\theta) + k$$

$$I = \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{4}2\,sen(\theta)cos(\theta) + k$$

Lembre que: $x = 3\,sen(\theta) \Longrightarrow sen(\theta) = \frac{x}{3}$

$$\Longrightarrow \theta = arcsen\left(\frac{x}{3}\right)$$

Do triângulo retângulo, temos que:



Por Pitágoras:

$$x^2 + b^2 = 3^2$$

$$\Longrightarrow b = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

$$\Longrightarrow cos(\theta) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{3}$$

Substituindo estas informações em I, temos que:

$$I = \frac{9}{2}arcsen\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{9}{4}2\frac{x}{3}\frac{\sqrt{9 - x^2}}{3} + k$$

$$\boxed{I = \frac{9}{2}arcsen\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x\sqrt{9 - x^2}}{2} + k}$$

2. $I = \int \frac{dx}{x^2 + a^2}$

Por substituição trigonométrica, temos que:

$$x = a\, tg(\theta) \Longrightarrow dx = a\, sec^2(\theta)\, d\theta$$

$$I = \int \frac{a\, sec^2(\theta)\, d\theta}{\big(a\, tg(\theta)\big)^2 + a^2}$$

$$I = \int \frac{a\, sec^2(\theta)}{a^2 tg^2(\theta) + a^2} d\theta$$

$$I = \int \frac{a\, sec^2(\theta)}{a^2(\, tg^2(\theta) + 1)} d\theta$$

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{sec^2(\theta)}{tg^2(\theta) + 1} d\theta$$

$$I = \frac{1}{a} \int \frac{sec^2(\theta)}{sec^2(\theta)} d\theta$$

$$I = \frac{1}{a} \int d\theta = \frac{1}{a} \theta + \mathrm{k}$$

Lembre que:

$$x = a\, tg(\theta) \Longrightarrow tg(\theta) = \frac{x}{a} \Longrightarrow \theta = arctg\left(\frac{x}{a}\right)$$

Conclusão:

$$\boxed{I = \frac{1}{a} arctg\left(\frac{x}{a}\right) + \mathrm{k}}$$