Cápitulo 2 - Limites.

Limites laterais: Seja $\lim_{x \to a^-} f(x) = b_1$ e $\lim_{x \to a^+} f(x) = b_2$

Estes limites laterais podem:

- Ser iguais, se $b_1 = b_2$;
- Diferentes, se $b_1 \neq b_2$;
- Pode existir um e outro não
- Ambos não existirem.

Limites Bilaterais: $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$

Propriedades de limites:

1. $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$;
2. $\lim [K \cdot f(x)] = K \lim f(x)$;
3. $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$;
4. $\lim \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$, se $\lim g(x) \neq 0$;
5. $\lim [f(x)]^n = (\lim f(x))^n$ com $n \in \mathbb{N}$;
6. $\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$;
7. $\lim (\ln f(x)) = \ln (\lim f(x))$, se $\lim f(x) > 0$;
8. $\lim (\cos f(x)) = \cos (\lim f(x))$;
9. $\lim (\sin f(x)) = \sin (\lim f(x))$;
10. $\lim e^{f(x)} = e^{(\lim f(x))}$;

Limite pela definição: Considerando $y = f(x)$ em uma vizinhança do ponto a ou para certos pontos desta vizinhança. A função $y = f(x)$, tende ao limite b, quando x tende para a, se para todo e qualquer número positivo ε, por pequeno que seja, é possível indicar um número positivo δ tal que, para todo e qualquer $x \neq a$ que satisfaz $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

$\lim_{x \to a} f(x) = b$, ou $f(x) \to b$ se $x \to a$.

Resumindo:

$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, se $0 < |x-a| < \delta$ então $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Limites Infinitos:

$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0$, se $0 < |x-a| < \delta$, então $f(x) > M$.

$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N < 0, \exists \delta > 0$, se $0 < |x-a| < \delta$, então $f(x) < N$.

Limites no Infinito:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$, se $x > M$, então $|f(x) - b| < \varepsilon$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N < 0$, se $x < N$, então $|f(x) - b| < \varepsilon$

Limites Infinitos no Infinito

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists m > 0$, se $x > m$, então $f(x) > M$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N < 0, \exists m > 0$, se $x > m$, então $f(x) < N$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists n < 0$, se $x < n$, então $f(x) > M$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N < 0, \exists n < 0$, se $x < n$, então $f(x) < N$

Limites Indeterminados

$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 \cdot (\pm\infty), +\infty - \infty, 0^0, 1^{\pm\infty}$ e $(\pm\infty)^0$.

Limites Notáveis

1. $\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$
2. $\lim_{u \to 0} \frac{1 - \cos u}{u} = 0$
3. $\lim_{u \to \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e$
4. $\lim_{u \to 0} \frac{a^u - 1}{u} = \ln a$

Continuidade de uma Função: Uma função é contínua no ponto em que $x = a$, se e somente se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Tipos de descontinuidade:

- Removível: Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $L \neq f(a)$.
- Salto: Se $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a^+} = L_2$, com $L_1 \neq L_2$
- Infinita: Se $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

Continuidade em Intervalos: $f(x)$ é dita contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, se as seguintes condições forem satisfeitas.

I. f é contínua em (a, b)
II. f é contínua a direita de a
III. f é contínua a esquerda de b