Definição: Um grafo representa relações entre objetos. É representado por uma tripla ordenada (N, A, g) onde:

- N = vértices ou nós. $N = V$
- A = arcos ou arestas. $A = E$
- g = função que associa cada arco um par ordenado x-y.

É normal omitirmos a função g é representar um grafo por $G = (N, A)$

Digrafo: Se os arcos começam em um nó e terminam em outro, então temos um grafo direcionado ou Digrafo.

Grau: de um vértice $v \in N$, denotado por $grau(v)$ é o número de vértices adjacentes a v.

- $\delta(G)$: menor grau de um grafo G.
- $\Delta(G)$: maior grau de um grafo G.

Handshaking Theorem: A soma dos graus de um grafo é o dobro do número de arestas.

$$\sum_{v \in V} grau(v) = 2|E|$$

Teorema 2: O número total de vértices com grau impar é sempre par.

Grafo Regular: Um grafo é regular quando todos os seus vértices têm o mesmo grau ou seja o mesmo número de adjacências.

↳ Se a sequência for par então é preciso usar outro procedimento.

- **Algoritmo de verificação de sequência gráfica:**
  1- Ordenar maior para o menor grau.
  2- Remova o primeiro elemento v_1 (maior).
  3- Conecte v_1 com os seguintes v_1 elementos, subtraindo cada elemento em 1 unidade.
  ↳ Se não for possível conectar, ou algum vertice fique negativo, não é sequência gráfica.
  4- Volte ao passo 1.
- **Montar o grafo:** basta seguir o processo anterior, fazendo o percurso inverso.

Operações sobre grafos:

↳ **União:** dados $G_1(V_1, E_1)$ e $G_2(V_2, E_2)$:
$G_1 \cup G_2 = G(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$
↳ Se G_1 e G_2 são disjuntos a união pode ser denotada por $G_1 + G_2$.
↳ Se G_1 e G_2 tiverem vértices comuns, G será um grafo conexo.

↳ **Remoção de arestas:** remove somente a aresta sem afetar os vértices.

↳ **Remoção de vértice:** remove um vertice e todas as arestas incidentes a ele.

↳ **Contração:** contração da aresta "$G \setminus e$" consiste na remoção da aresta com a união dos seu extremos

↳ **Contração de laço:** produz a remoção do laço.

Grafo Completo: Um grafo completo é quando existe uma aresta entre cada par de seus vértices. Um grafo completo não é direcionado, nem possui arestas multiplas ou laços. Denotado por K_n, sendo n o número de vertices.

- Grau de um $K_n \Rightarrow Grau(v_i) = n-1$.
- Todo grafo completo é regular, mas nem todo grafo regular é completo
- A quantidade de arestas de um K_n corresponde a combinação de n vértices dois a dois:

$$|A| = \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Grafo Complemento: O grafo $\bar{G}$ é o complemento de um grafo $G(V, E)$ se:

- Possuir o mesmo conjunto V de vertices de G
- Para todo par de vértices distintos $v, w \in V$, a aresta (v, w) pertencerá a $\bar{G}$ se não pertencer a G.

Sequências gráficas: Trata-se de uma forma de especificação de um grafo simples. Uma sequência gráfica é uma sequência de inteiros não negativos para o qual existe algum grafo simples cujos vértices admitem essa sequência como sequência dos seus graus.

- **Verificar sequência grafica:**
  ↳ Se a soma dos graus for ímpar então não há grafo para tal sequência gráfica.

Teorema de Kuratowski (Teorema da planaridade)

↳ Um grafo G não é planar sse G possuir K_5 ou $K_{3,3}$ como um grafo minor.
↳ Um grafo H é um minor de G se pudermos obter H contraindo ou deletando arestas de G.

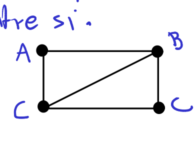
Grafo Bipartido: um grafo $G(V, E)$ é bipartido quando o seu conjunto de vértices V puder ser particionado em dois subconjuntos distintos V_1 e V_2, tais que toda aresta de G conecta um vértice de V_1 a outro de V_2 e vice-versa.

↳ $G = V_1 \cup V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
↳ não ocorrem arestas entre vértices de uma mesma partição.

Grafo bipartido completo: apresenta vértices com o grau máximo possível e com adjacências apenas entre partições diferentes. O bipartido completo é representado como $K_{m,n}$ e possui $n_1 * n_2$ arestas onde $n_1 = |V_1|$ e $n_2 = |V_2|$

Grafo bipartido emparelhado: Um emparelhamento M em um grafo $G = (V, A)$ é um subconjunto de arestas $M \subseteq A$, que não correspondem a laços e que não compartilham vertices entre si.

Ex: $\{(B, C)\}$ e $\{(A, C), (B, D)\}$ ⟶



↳ **Emparelhamento Maximal**: quando nenhuma aresta do grafo puder ser adicionada sem que a propriedade de não-adjacência entre as arestas seja destruída.

↳ **Emparelhamento Máximo**: emparelhamento maximal com o maior número de arestas possível.

↳ Todo máximo é maximal mas nem todo maximal é maximo.

↳ **Saturação**: Quando uma aresta do emparelhamento M é incidente a um vértice $v \in V$, então dizemos que v é saturado por M.

↳ **Emparelhamento Perfeito**: Um emparelhamento máximo é dito perfeito quando satura todos os vertices do grafo.

Projeção em grafo bipartido: é uma operação que transforma um grafo bipartido em um grafo comum, conectando vértices que estavam indiretamente conectados.

Isomorfismo: conceito que descreve quando dois grafos são "estruturalmente iguais", mas seus vértices possuem nomes diferentes.

↳ Dois grafos $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ são isomorfos se existe uma bijeção entre os vertices de G e os vertices de G', tal que:

Se dois vértices u e v estão conectados em G, então os vértices correspondentes $f(u)$ e $f(v)$ estão conectados em G'.

* A estrutura de conexões (arestas) é preservada

Subgrafo: Um subgrafo é uma parte de um grafo maior

↳ Se $G = (V, E)$ é um grafo, então $G' = (V', E')$ é subgrafo de G se:

* $V' \in V$
* $E' \in E$
* Cada aresta $(u, v) \in E'$ conecta vértices que estão em V'.

Subgrafo Induzido: um subgrafo induzido é formado a partir de um subconjunto de vertices $V' \in V$ de um grafo $G(V, E)$, incluindo todas as arestas que existam entre esses vértices no grafo original.

Subgrafo Gerador: um subgrafo gerador de G é um subgrafo H de G tal que $V(H) = V(G)$. Em outras palavras H tem os mesmos vértices de G mas não necessariamente todas as arestas de G.

Estrutura de dados

• **Matriz de adjacências**: representa um grafo com uma matriz onde as linhas e colunas são os vertices, a posição (i, j) indica a presença de uma aresta entre os vértices i e j.

↳ Se $M_{ij} = p$, com $i \neq j$, então existem p arestas ente i e j.

↳ Se $M_{ii} = q$, então v_i possui q laços.

↳ Apresenta simetria em relação a diagonal principal.

↳ Grau(v_i) = Somatório a i-ésima linha (ou coluna).

↳ Cada ocorrência de laço implica em contagem dobrada no cômpulo do grau.

↳ **Verificando Isomorfismo**.

* $|V(G)| = |V(G')|$ e $|E(G)| = |E(G')|$
* G' deve possuir a mesma sequência gráfica de G.
* Se G usa usa os vértices "$v_1, v_2, v_3, \dots, v_K$" para criar um ciclo de comprimento K, então G' deve usar "$f(v_1), f(v_2), f(v_3), \dots, f(v_K)$" para criar um mesmo ciclo de comprimento K.

⚠ Essas condições são necessárias mas não suficientes!

↳ **Matriz Permutação**:

* **Teorema**: Sejam G1 e G2 dois grafos e A1 e A2 suas matrizes de adjacencia respectivamente:

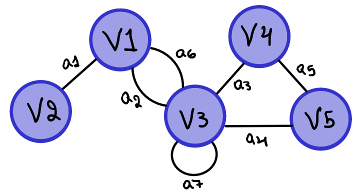
• $f: V(G1) \to V(G2)$ é um isomorfismo sse $P^{-1}(A1)P = A2$, onde P é a matriz de permutação representando f.

Automorfismo: é um caso especial de isomorfismo em vez de comparar dois grafos diferentes, estamos comparando um grafo consigo mesmo.

↳ Um automorfismo de um grafo $G(V, E)$ é uma bijeção $f: V \to V$ tal que:

* Para todo vértice $u \in v$, $(u, v) \in E$ sse $(f(u), f(v)) \in E$

↳ As matrizes de adjacências são iguais se houver automorfismo entre eles.

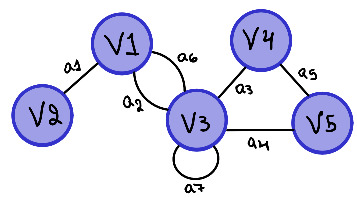


	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	2	0	0
v_2	1	0	0	0	0
v_3	2	0	1	1	1
v_4	0	0	1	0	1
v_5	0	0	1	1	0

• **Matriz de Incidências**: matriz onde as linhas são vértices e as colunas são arestas. Indica quais vértices estão ligados a quais arestas.

↳ Grau(v_i) = somatório na i-ésima linha;

↳ $a_{ij} > 1 \to$ laço.



	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
v_1	1	1	0	0	0	1	0
v_2	1	0	0	0	0	0	0
v_3	0	1	1	1	0	1	2
v_4	0	0	1	0	1	0	0
v_5	0	0	0	1	1	0	0

• **Lista de adjacências**: representa o grafo por meio de listas onde cada vértice aponta para os vértices adjacentes.

$v_1 \to 2 \to 3 \to 3 \to /$
$v_2 \to 1 \to /$
$v_3 \to 1 \to 1 \to 3 \to 4 \to 5 \to /$
$v_4 \to 3 \to 5 \to /$
$v_5 \to 3 \to 4 \to /$

Complexidades (pior caso)

• Matriz de adjacência: $O(n^2)$
• Matriz de Incidência: $O(n^3)$
• Lista de adjacência: $O(n^2)$