Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Integração Parcial e Integrais Duplas

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 do dia 13 de novembro de 2024.

UDESC

Integração Parcial

- Para uma função real de uma variável $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ aprendemos a calcular e a interpretar a **integral definida** de f:

$$I = \int_a^b f(x)dx\,.$$

- Agora, para uma função real de duas variáveis $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vamos aprender a calcular e (depois) a interpretar o que chamaremos de **integral dupla** de f, que será denotada por

$$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

e em que D será chamado de "domínio" ou "região" de integração.

- Vamos iniciar o estudo de integrais duplas com a ideia de **integração parcial indefinida.**

Exercícios

Exercício 1) Determine uma função $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 20x^3y^6 + 3x^2y - 2.$$

Exercício 2) Determine uma função $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^8 + 4x\mathrm{sen}(5y) - 3.$$

Exercício 3) Determine a função $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x^4y^7 + 2xe^{-3y} + 7\cos(7x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 14x^5y^6 - 3x^2e^{-3y} + \frac{1}{2\sqrt{y}} - 4.$$

Exemplos

Após vermos o processo de integração parcial indefinida, podemos passar para a integração parcial definida.

Exercício 4) Calcule o valor de $I = \int_{-1}^{2} 8\,x^3 y^2 dx$.

Exercício 5) Calcule o valor de $I = \int_{0}^{3} 30\,y^2 dy$.

Exercício 6) Calcule o valor de $I = \int_{-1}^{2}\int_{0}^{3} 8\,x^3 y^2 dy\,dx$.

Definição de Integral Dupla

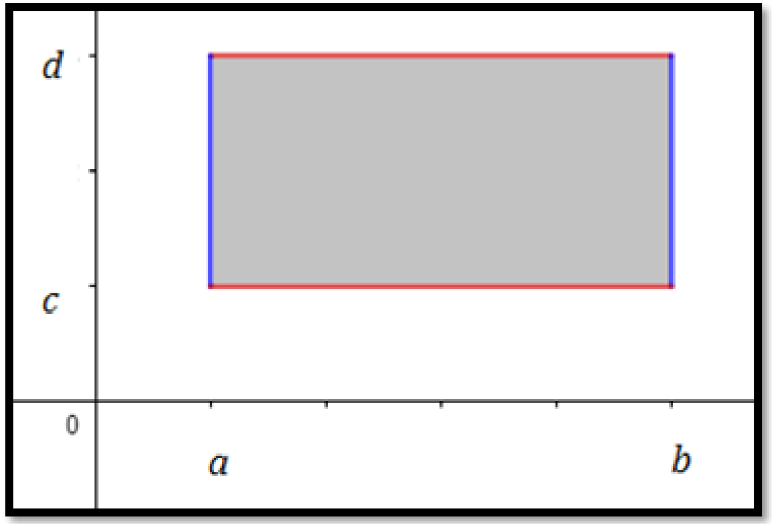
Agora vamos definir formalmente o conceito de integral dupla. Teremos **três casos**.

O primeiro é justamente para regiões retangulares, quando as curvas que definem a região de integração são retas (ou segmentos de reta):

Definição 1: Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais.
Se D é uma região retangular dada por $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b \ \ e \ \ c \leq y \leq d\}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, então

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy\,.$$

Para esse caso, veja que é possível resolver as integrais duplas nas duas ordens de integração ($dydx$ ou $dxdy$), desde que sejam adaptados os limitantes de cada variável.



Sempre deve ser resolvida primeiro a integral interna, ou seja, resolve-se uma integral dupla de "dentro para fora".

Definição de Integral Dupla

O segundo caso considera a situação em que a região de integração é definida por duas curvas, uma superior e outra inferior, dadas por funções que dependem de variável x:

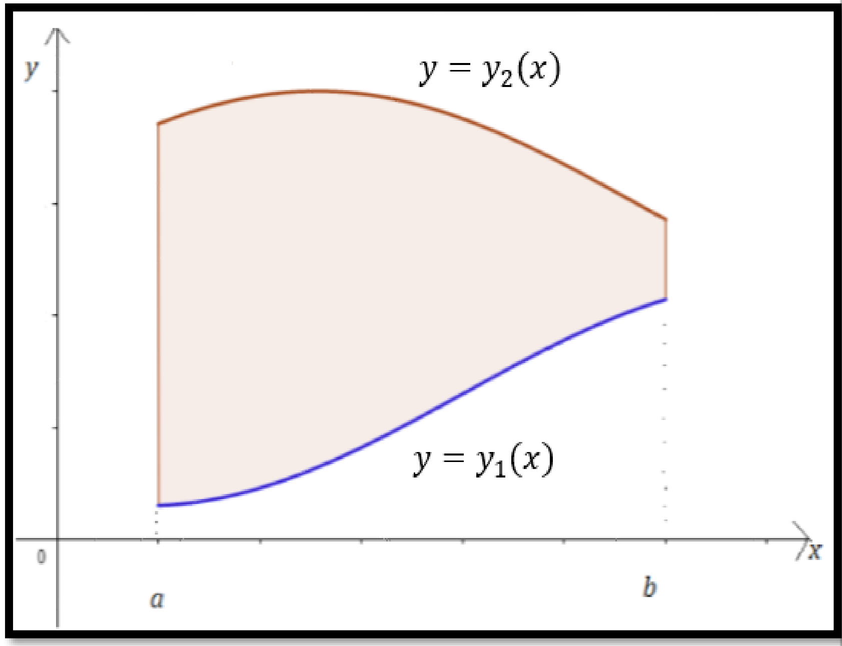
Definição 2: Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais. Se D for uma região não retangular dada por $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b \ \text{ e } \ y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, com $a, b \in \mathbb{R}$ então

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dydx\,.$$

Nesse caso, a região de integração D possui o formato representado na figura ao lado.

Veja que as curvas que definem os limitantes de y são da forma $y = y(x)$. Dizemos então que x é a variável independente e y a variável dependente.

Por causa disso, nesse caso é necessário sempre resolver a primeira integral (a interna) em relação à y (ou seja, em relação à variável dependente.



Definição de Integral Dupla

O terceiro caso considera a situação em que a região de integração é definida por duas curvas, uma na lateral esquerda e outra na lateral direita, dadas por funções que dependem de variável y:

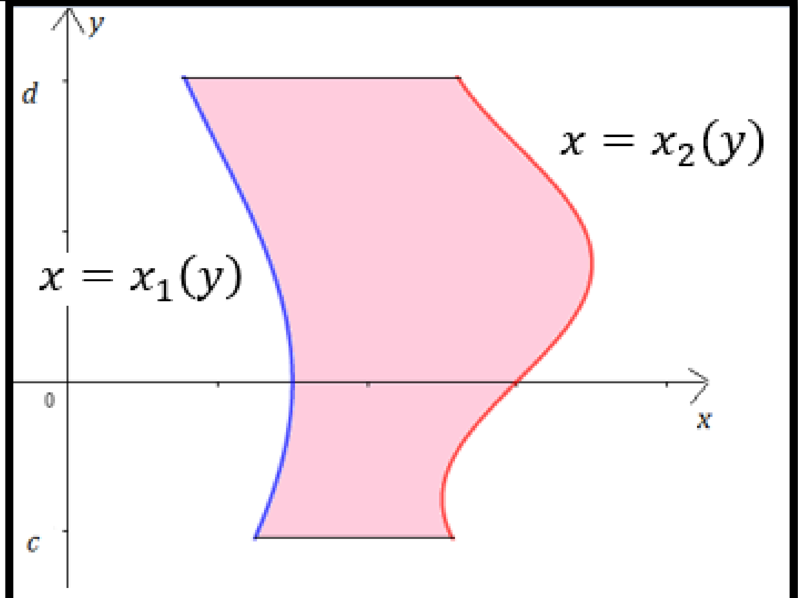
Definição 3: Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais. Se D for uma região não retangular dada por $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ c \leq y \leq d \text{ e } x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$ com $c, d \in \mathbb{R}$ então

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dxdy.$$

A região de integração D desse caso possui o formato representado ao lado.

Veja que agora, as curvas que definem os limitantes de x são da forma $x = x(y)$. Dizemos então que y é a variável independente e x a variável dependente.

Por causa disso, nesse caso é necessário sempre resolver a primeira integral (a interna) em relação à x (ou seja, em relação à variável dependente.



Exemplo

Observação: Muitas vezes, uma região não retangular D pode ser descrita tanto como no caso 2 (com x como variável independente) como no caso 3 (com y como variável independente).

Para essas situações, teremos duas formas distintas de calcular uma integral dupla!

Exercício 7) Resolva, de duas formas distintas, a integral dupla.

$$I = \iint_D (6y + x^2)\,dxdy\,.$$

em que D é a região delimitada por $y = 3x$ e $y = x^2$.

Exemplos

Exemplo 1) Determine uma função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^5y^3 + 4xy - 5.$$

Solução: Basta integrar parcialmente em relação a x, tomando y como constante e obter:

$$f(x,y) = \int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int (12x^5y^3 + 4xy - 5)dx = 2x^6y^3 + 2x^2y - 5x + c(y).$$

onde $c(y)$ é uma função que não depende de x (faz o papel de uma constante em relação a x).

Exemplo 2) Determine a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^3y^5 + 9xcos(3y) - 7.$$

Solução: Agora, basta integrar parcialmente em relação a y, tomando x como constante:

$$f(x,y) = \int \frac{\partial f}{\partial y}\, dy = \int (3x^3y^5 + 9xcos(3y) - 7\,)dy = \frac{1}{2}x^3y^6 + 3x\text{sen}(3y) - 7y + c(x),$$

onde $c(x)$ é uma função que não depende de y (faz o papel de uma constante em relação a y).

Exemplos

Exemplo 3) Determine a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3y^3 + 5y^2e^{5x} - \operatorname{sen}(4x) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^4y^2 + 2ye^{5x} + \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Solução: Iniciamos integrando parcialmente em relação a x (tomando y como constante):

$$f = \int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int (8x^3y^3 + 5y^2e^{5x} - \operatorname{sen}(4x))dx = 2x^4y^3 + y^2e^{5x} + \frac{\cos(4x)}{4} + c(y).$$

Agora, vamos determinar $c(y)$. Para isso, primeiro derivamos parcialmente em relação a y a função encontrada:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^4y^2 + 2ye^{5x} + 0 + c'(y).$$

Em seguida, comparamos a derivada parcial calculada com a derivada parcial dada no enunciado:

$$6x^4y^2 + 2ye^{5x} + \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{\partial f}{\partial y} = 6x^4y^2 + 2ye^{5x} + 0 + c'(y).$$

Exemplos

Comparando as derivadas e eliminando os termos que se repetem em ambos os lados, obtemos:

$$c'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Portanto, obtemos uma relação para a derivada de uma função de uma única variável. Integrando em relação a y, obtemos que

$$c(y) = \int c'(y)dy = \int \frac{1}{2\sqrt{y}}dy = \int \frac{1}{2}y^{-1/2}dy = \frac{1}{2}\frac{y^{1/2}}{1/2} + k = \sqrt{y} + k,$$

onde k agora é uma constante de fato, pois não pode depender nem de y nem de x. Portanto, substituindo na expressão anterior, obtemos que

$$f(x, y) = 2x^4y^3 + y^2e^{5x} + \frac{\cos(4x)}{4} + c(y)$$

$$= 2x^4y^3 + y^2e^{5x} + \frac{\cos(4x)}{4} + \sqrt{y} + k.$$

Observação: É possível tirar a prova real, derivando parcialmente em x e em y a função obtida.

Exemplos

Após vermos o processo de integração parcial indefinida, podemos passar para a integração parcial definida.

Exemplo 4) Calcule o valor de $I = \int_1^3 6\,x^2 y^3 dx$.

Solução: Veja que a função integrando depende de x e y.

Porém, como o diferencial de integração dado é dx, isso significa que devemos integral parcialmente em x (mantendo y como constante).

Depois de acharmos a primitiva, aplicamos o TFC para $x \in [1,3]$. Fazendo isso:

$$I = \int_1^3 6\,x^2 y^3 dx = (2x^3y^3 + c(y))\Big|_{x=1}^{x=3} = 2.3^3y^3 + c(y) - \left(2.1^3y^3 + c(y)\right) = 52y^3.$$

Note que, na integral parcial definida, a função $c(y)$ não interferiu no resultado, devido ao sinal negativo oriundo do TFC.

Por isso, em integrais parciais definidas, podemos inclusive desconsiderar da primitiva esse tipo de função, que depende de apenas uma das variáveis.

Além disso, veja que o resultado da integral parcial definida em relação a x é uma função que não depende mais de x (pois aplicamos os limitantes de integração em x).

Exemplos

Exemplo 5) Calcule o valor de $I = \int_{-1}^{2} 52\, y^3\, dy$.

Solução: Veja que a função integrando depende apenas de y.
Portanto, podemos integral normalmente na variável y, aplicando o TFC para $y \in [-1, 2]$:

$$I = \int_{-1}^{2} 52\, y^3\, dy = (13y^4 + k)\Big|_{y=-1}^{y=2} = 13.\,2^4 + k - (13.\,(-1)^4 y^3 + k) = 195.$$

Lembre que, na integral definida, a constante de integração k não interfere no resultado, devido ao sinal negativo oriundo do TFC.

Por isso, em integrais definidas, podemos inclusive desconsiderar essa constante.

Além disso, o resultado da integral definida em y é um número real (ou seja, não depende mais de y.

Observação Importante: Podemos reunir os resultados dos Exemplos 5 e 4 e obter que

$$195 = \int_{-1}^{2} 52\, y^3\, dy = \int_{-1}^{2} \left(\int_{1}^{3} 6\, x^2 y^3 dx \right) dy = \int_{-1}^{2} \int_{1}^{3} 6\, x^2 y^3 dx\, dy.$$

Exemplos

Veja que calculamos, em duas etapas, o valor da integral dupla:

$$I = \int_{-1}^{2}\int_{1}^{3} 6\,x^2y^3dx\,dy.$$

Para fazer isso, resolvemos primeiro a integral interna, ou seja, integramos a função de duas variáveis primeiro em relação a x (pois o primeiro diferencial é dx).

Depois de fazermos isso, obtivemos como resultado uma função que dependia apenas de y e então, integramos normalmente em relação ao segundo diferencial (dy).

Note que respeitamos os limitantes de integração em relação à cada variável: os limitantes da integral interna dizem respeito ao primeiro diferencial; os limitantes da integral externa dizem respeito ao segundo diferencial.

Esse é, em resumo, o processo de resolução de uma integral dupla.

Exemplo 6) Calcule o valor de $I = \int_{1}^{3}\int_{-1}^{2} 6\,x^2y^3dy\,dx.$

Solução: Resolvemos primeiro a integral interna, que agora é em relação à y (pois o primeiro diferencial é dy). Enquanto fazemos isso, apenas repetimos a integral externa:

$$I = \int_{1}^{3}\int_{-1}^{2} 6\,x^2y^3dy\,dx = \int_{1}^{3} \frac{3}{2}x^2y^4\bigg|_{y=-1}^{y=2} dx = \int_{1}^{3}\left(\frac{3}{2}x^2.\,2^4 - \frac{3}{2}x^2.\,(-1)^4\right)dx$$

Exemplos

$$I = \int_1^3 \left(24x^2 - \frac{3}{2}x^2\right) dx = \int_1^3 \frac{45}{2}x^2\, dx = \frac{15}{2}x^3 \Big|_{x=1}^{y=3} = \frac{15}{2}.3^3 - \frac{15}{2}.1^3$$

$$= \frac{15}{2}.(27 - 1) = \frac{15}{2}.26 = 15.13 = 195.$$

Note que desprezamos as constantes de integração nas duas etapas, pois elas não interferem na primitiva e no valor final, devido ao sinal negativo do TFC.

Além disso, note que, mesmo que tenhamos integrado em ordens diferentes a mesma função, apesar dos resultados parciais serem bem diferentes, o resultado final foi idêntico, isto é:

$$I = \int_1^3 \int_{-1}^2 6\,x^2 y^3 dy\, dx = 195 = \int_{-1}^2 \int_1^3 6\,x^2 y^3 dx\, dy.$$

Esse tipo de igualdade significa que, se **trocarmos a ordem de integração** e, ao mesmo tempo, **trocarmos os limitantes de integração**, o valor da integral dupla **não se altera**.

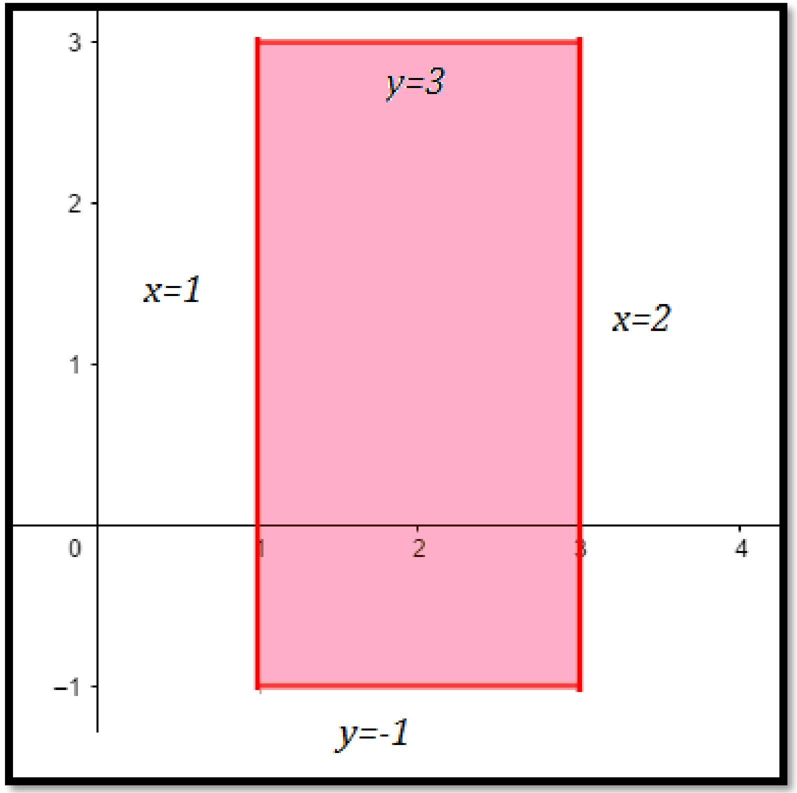
Isso é uma consequência do Teorema de Schwartz, que dizia que a ordem de derivação cruzada não afetava a derivada parcial de segunda ordem. Lembre que a integral parcial é o inverso da derivação parcial.

Integrais Duplas

Veja que, nos exemplos anteriores, a região de integração era dada por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad 1 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \; -1 \leq y \leq 2\}.$$

Nesse caso, quando todos os limitantes de integração são numéricos, dizemos que a região de integração ***D* é retangular**, conforme exibido na figura abaixo.



O caso de um região de integração retangular é o mais simples, pois nele todos os limitantes são numéricos.

Exemplo

Observação: Muitas vezes, uma região não retangular D pode ser descrita tanto como no caso 2 (com x como variável independente) como no caso 3 (com y como variável independente).

Para essas situações, teremos duas formas distintas de calcular uma integral dupla!

Exemplo 7) Resolva, de duas formas distintas, a integral dupla.

$$I = \iint_D (2y + x^2)dxdy\,.$$

onde D é a região delimitada por $y = 2x$ e $y = \frac{x^2}{2}$.

Solução: Para obter os limitantes de integração da variável independente, precisamos calcular a interseção entre as curvas que definem a região de integração:

$$2x = \frac{x^2}{2} \quad \Rightarrow \quad 4x = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = 0, y = 0 \quad ou \quad x = 4, y = 8.$$

Também precisamos efetuar a representação geométrica da região D, para determinar qual a posição ocupada pelas curvas dadas.

Exemplo

Interpretando a região de integração, obtemos as duas formas de resolver a integral:

<u>1ª Forma:</u> Tomando x como variável independente, temos:

$$0 \leq x \leq 4.$$

E como a curva inferior é a parábola e a superior é a reta, temos que:

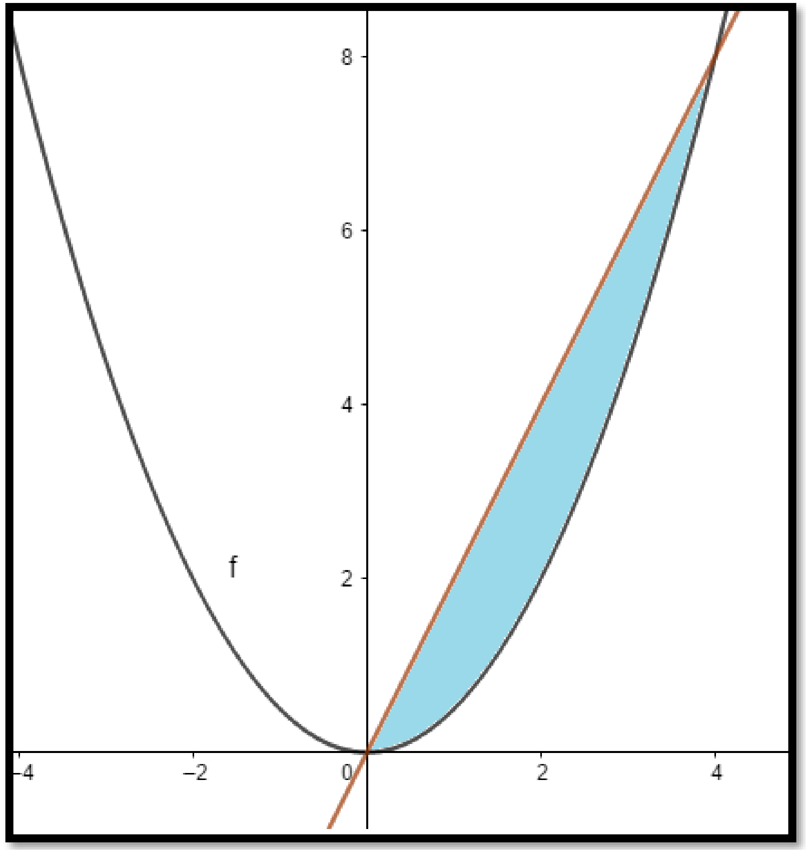
$$\frac{x^2}{2} \leq y \leq 2x.$$

Assim, obtemos que

$$I = \int_0^4 \int_{\frac{x^2}{2}}^{2x} (2y + x^2)\,dydx = \int_0^4 y^2 + x^2 y\Big|_{y=\frac{x^2}{2}}^{y=2x} dx$$

$$= \int_0^4 (2x)^2 + x^2(2x) - \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 - x^2.\frac{x^2}{2}dx = \int_0^4 4x^2 + 2x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{2}dx$$

$$= \int_0^4 4x^2 + 2x^3 - \frac{3x^4}{4}\,dx = \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{2} - \frac{3x^5}{20}\Bigg|_0^4 = \frac{256}{3} + 128 - \frac{768}{5} - 0 = \frac{896}{15}.$$



Exemplo

2ª Forma: Tomando y como variável independente, temos $0 \leq y \leq 8$.

Para determinar a limitação de x precisamos inverter as equações das curvas.

Como a curva à esquerda é a reta, temos $y = 2x$ ou seja, $x = \frac{1}{2}y$.

Como a curva à direita é a parábola temos que $y = \frac{x^2}{2}$ ou seja, $2y = x^2$ e $x = \pm\sqrt{2y}$.

Como a região é delimitada somente pelo ramo positivo da parábola, usamos $x = \sqrt{2y}$.

Portanto

$$\frac{1}{2}y \leq x \leq \sqrt{2y}.$$

Assim, obtemos que

$$I = \int_0^8 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{2y}} (2y + x^2)dxdy = \int_0^8 2yx + \frac{x^3}{3}\Bigg|_{x=\frac{y}{2}}^{x=\sqrt{2y}} dy$$

$$= \int_0^8 2y\sqrt{2y} + \frac{(\sqrt{2y}\,)^3}{3} - 2y\frac{y}{2} - \frac{(y/2\,)^3}{3}dy = \int_0^8 2\sqrt{2}\,y^{\frac{3}{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{3}y^{\frac{3}{2}} - y^2 - \frac{y^3}{24}\ dy$$

$$= \int_0^8 \frac{8\sqrt{2}}{3}y^{\frac{3}{2}} - y^2 - \frac{y^3}{24}\ dy = \frac{8\sqrt{2}}{3}.\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{96}\Bigg|_0^8 = \frac{16\sqrt{2}.64\sqrt{8}}{15} - \frac{512}{3} - \frac{4096}{96}$$

$$= \frac{4096}{15} - \frac{512}{3} - \frac{128}{3} = \frac{896}{15}.$$