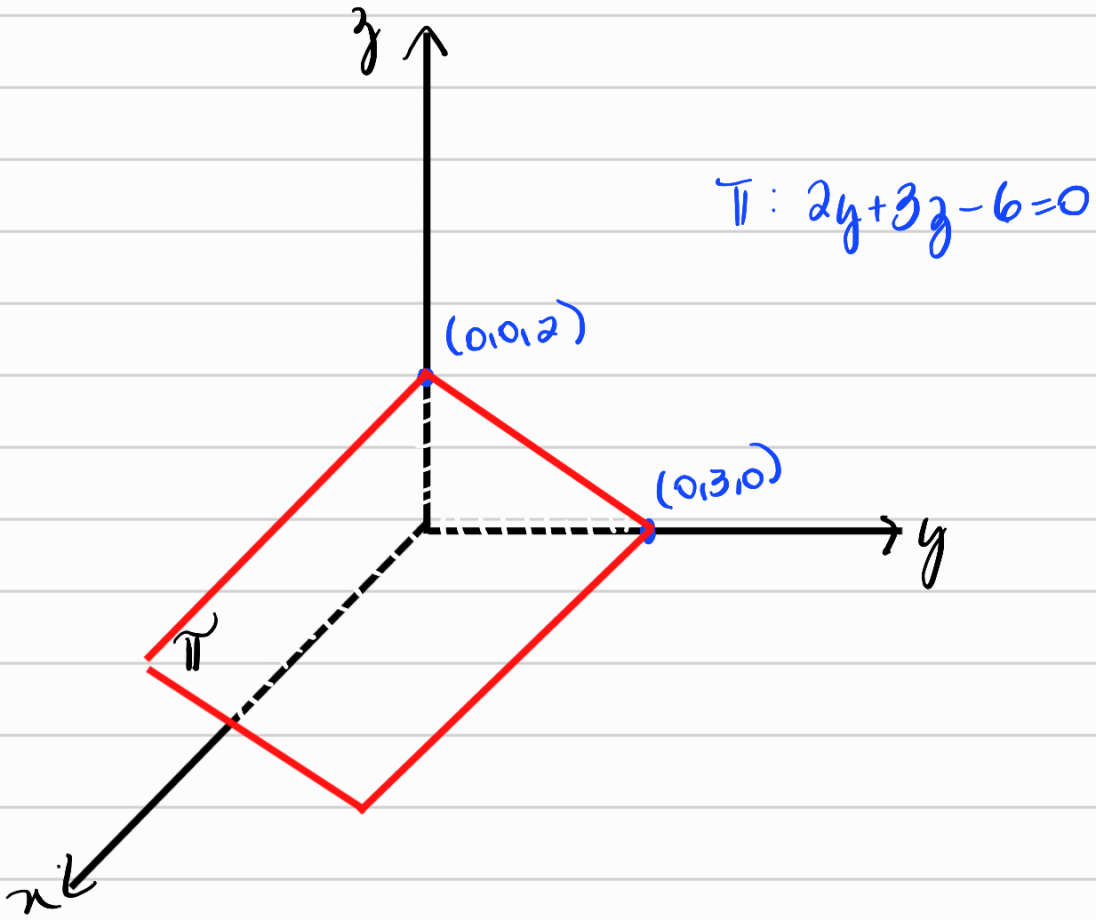
Planos - casos particulares

Considere o plano $\pi: ax+by+cz+d=0$.

(1) $d=0$ quando π passa pela origem.

(2) $a=0 \Rightarrow \pi: by+cz+d=0$

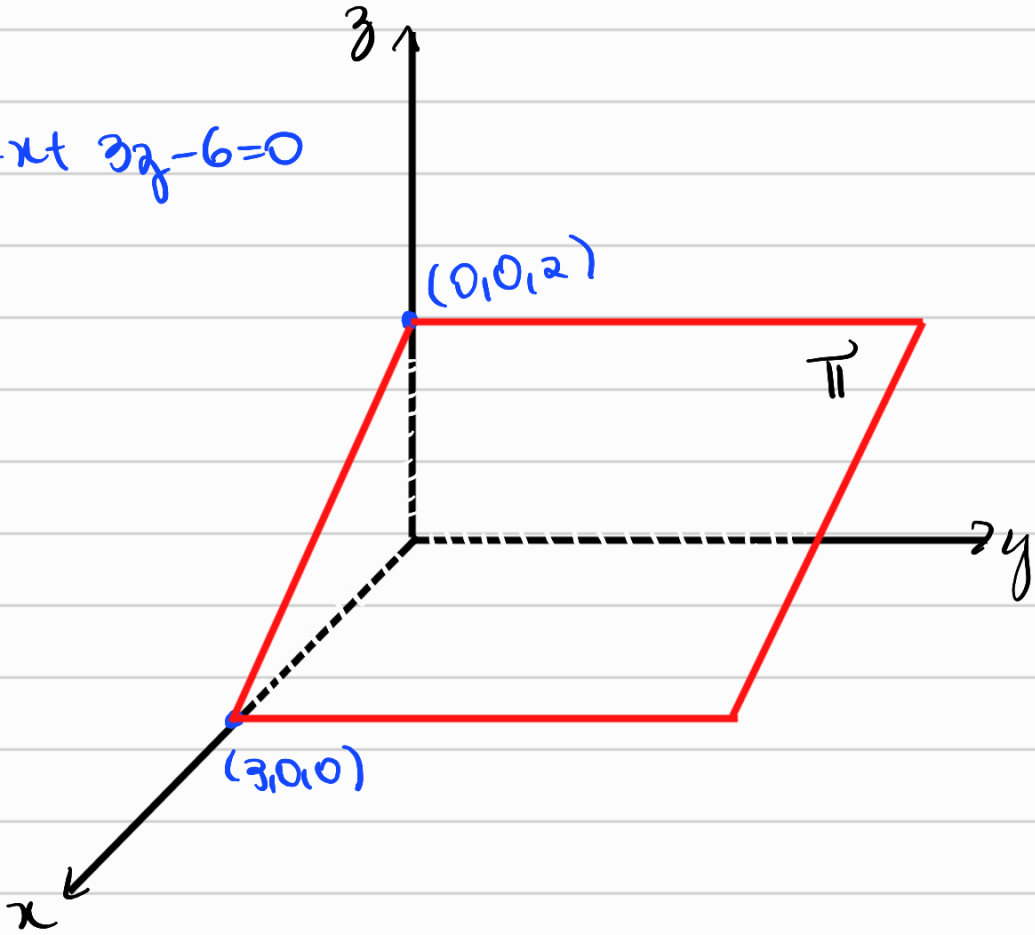
Nesse caso, temos $\vec{n}=(0,b,c) \perp \vec{i}$, ou seja, π é paralelo ao eixo x.



(3) $b=0 \Rightarrow \pi: ax+cz+d=0$

Nesse caso, temos $\vec{n}=(a,0,c) \perp \vec{j}$, ou seja, π é paralelo ao eixo y.

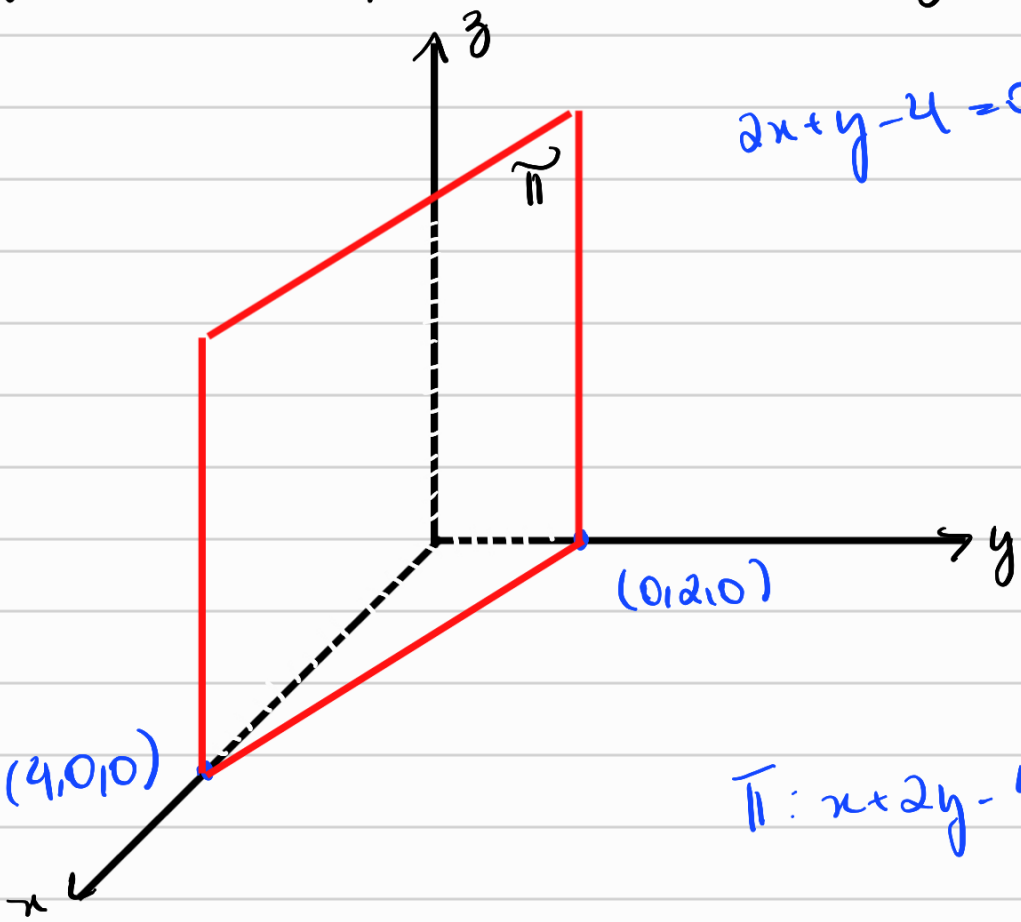
$\pi: 2x + 3z - 6 = 0$



(4) $c = 0 \Rightarrow \pi: ax + by + d = 0$

Nesse caso, temos $\vec{n} = (a, b, 0) \perp \vec{k}$, ou seja, π é paralelo ao eixo z.

$2x + y - 4 = 0$

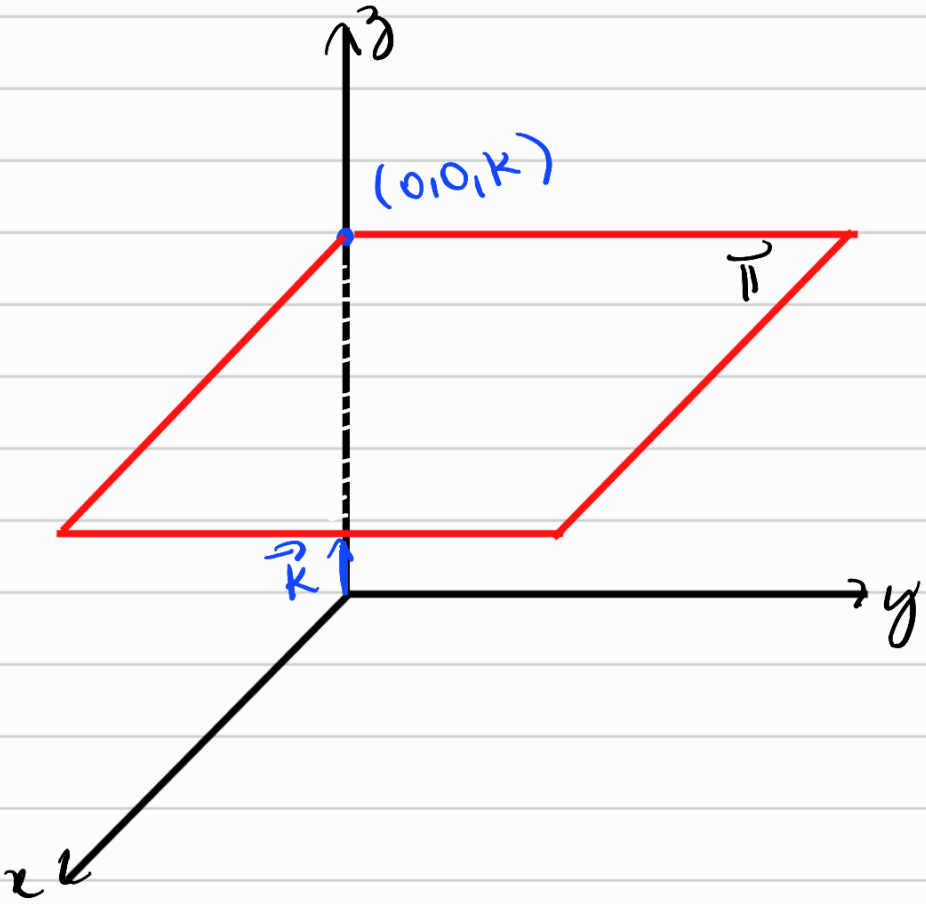


$\pi: x + 2y - 4 = 0$

(5) $a=b=0 \Rightarrow cz+d=0$

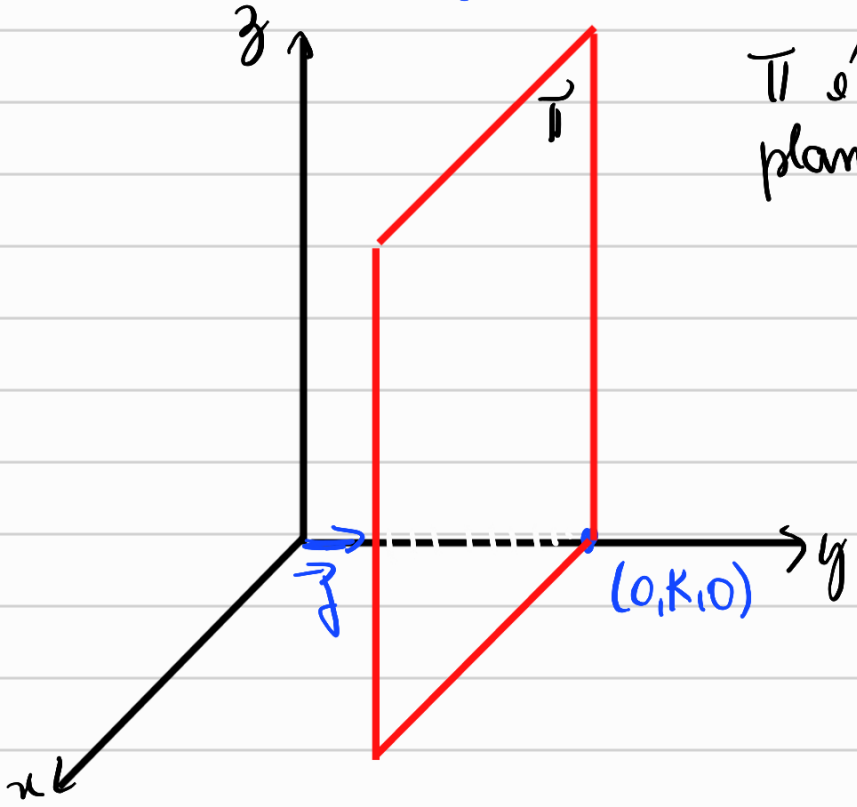
Nesse caso, temos $\vec{n}=(0,0,c) \parallel \vec{k}$, ou seja, π é paralelo ao plano xy.

$\pi: z=k$



(6) $a=c=0 \Rightarrow by+d=0$

$\pi: y=k$

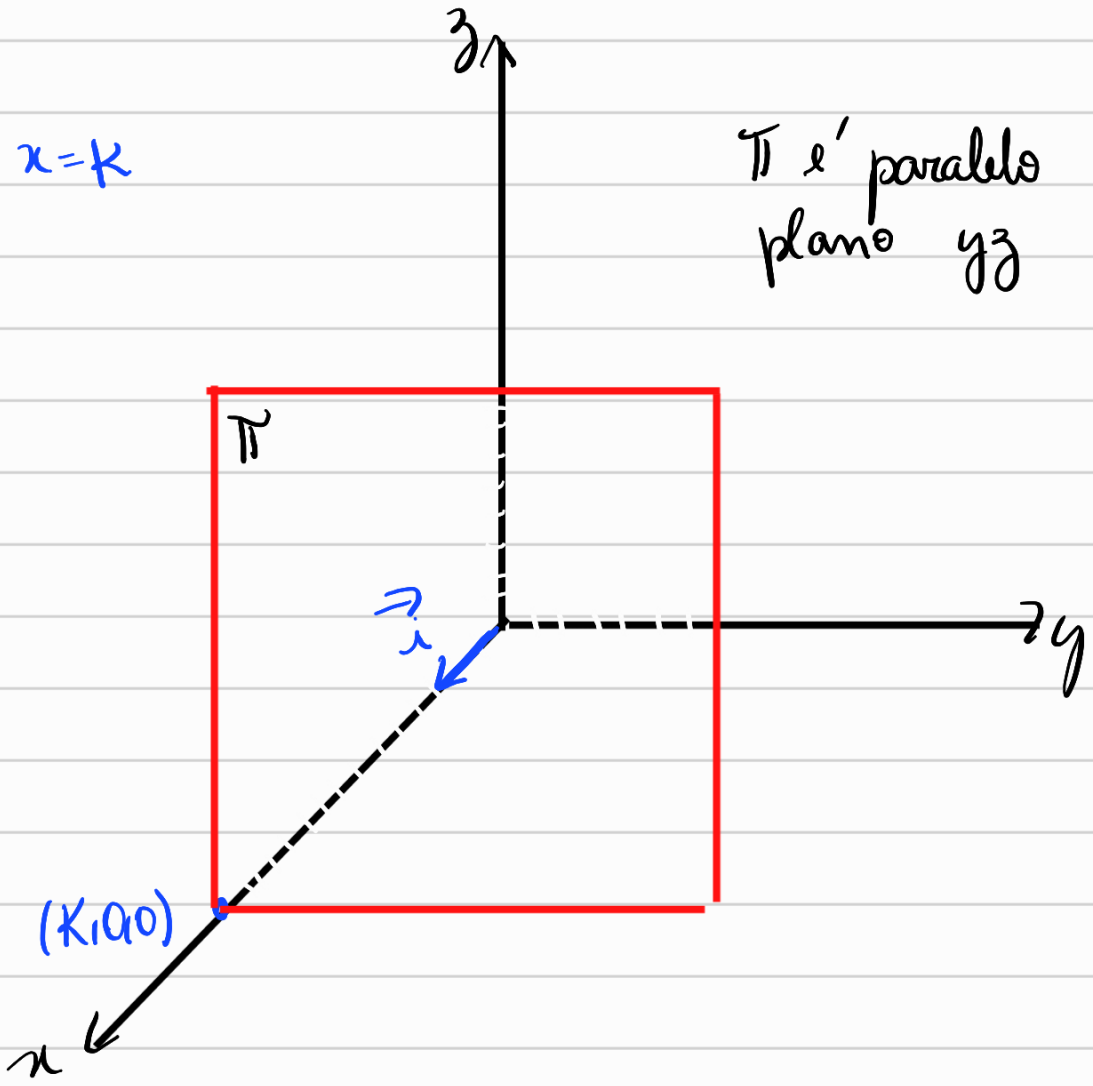


π é paralelo ao plano xz

(7) $b = c = 0 \Rightarrow ax + d = 0$

$\pi: x = k$

π é paralelo ao plano yz



$\boxed{\text{Exercício:}}$ Determine a eq geral do plano que contém o ponto $A(2,2,-1)$ e a reta

$$r: \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Observe que a reta r não varia nas direções de x e y. Logo, r tem como um vetor diretor o vetor $\vec{k}$

Também temos que o ponto $B(4,3,0)$ pertence a r.

Logo, o vetor $\vec{n} = \vec{k} \times \vec{AB}$ é um vetor normal a π, onde $\vec{AB} = (2,1,1)$.

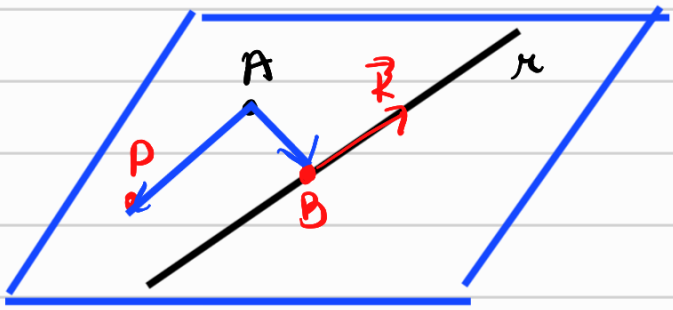
$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 2\vec{j} - \vec{i} = (-1,2,0).$$

Portanto, temos

$$\pi: \quad a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$$
$$-(x-2) + 2(y-2) + 0(z+1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad -x+2+2y-4 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{\pi: \quad -x+2y-2=0}$$

Maneira alternativa:



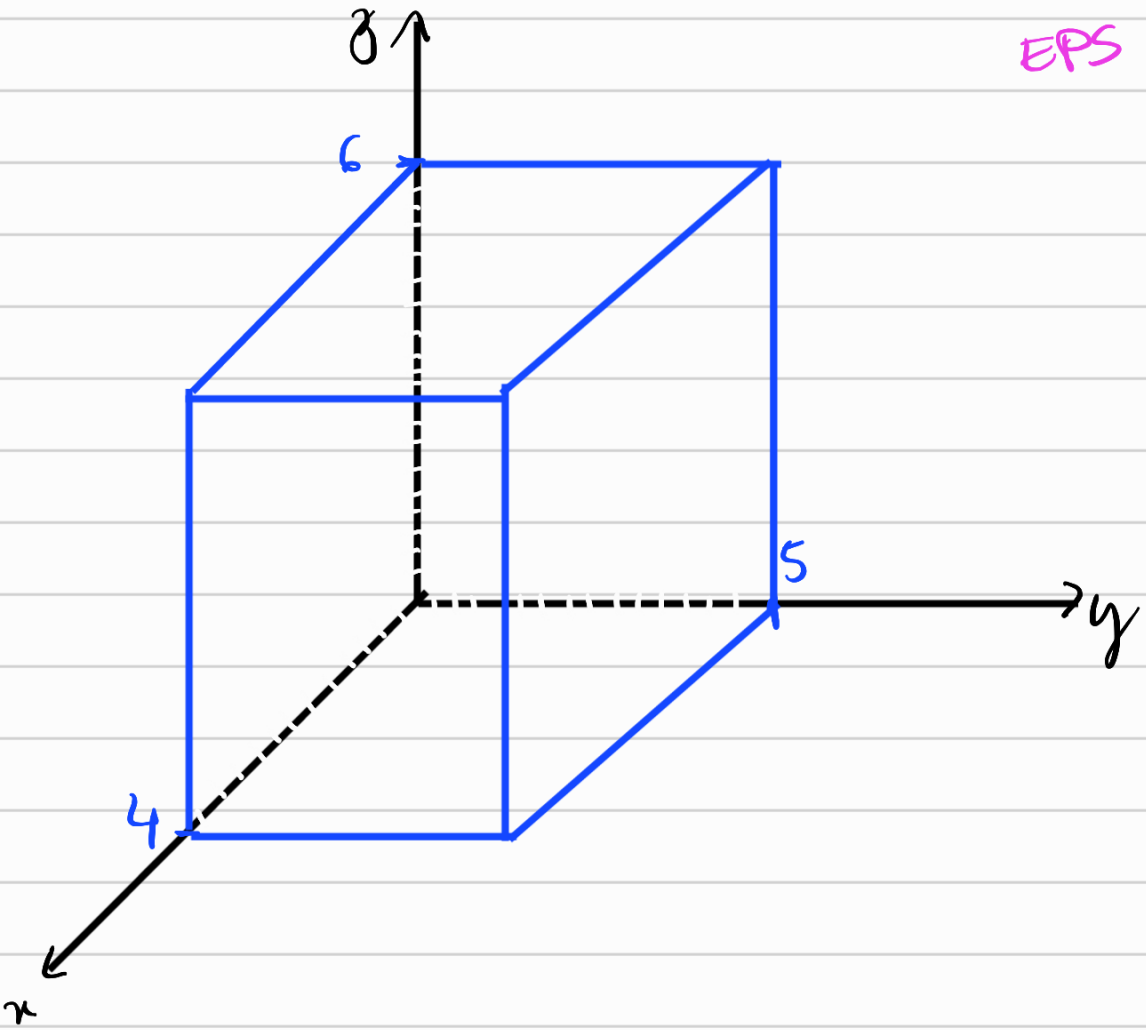
mostrar no geogebra

$\vec{AP}$, $\vec{AB}$ e $\vec{k}$ devem ser coplanares, com $P(x,y,z)$:

$$0 = (\vec{AP}, \vec{AB}, \vec{k}) = \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x-2 & y-2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

$$= x-2-2(y-2)$$
$$= x-2-2y+4 \Rightarrow \boxed{\pi: \quad x-2y+2=0}$$

Exemplo: Considere o paralelepípedo



EPS

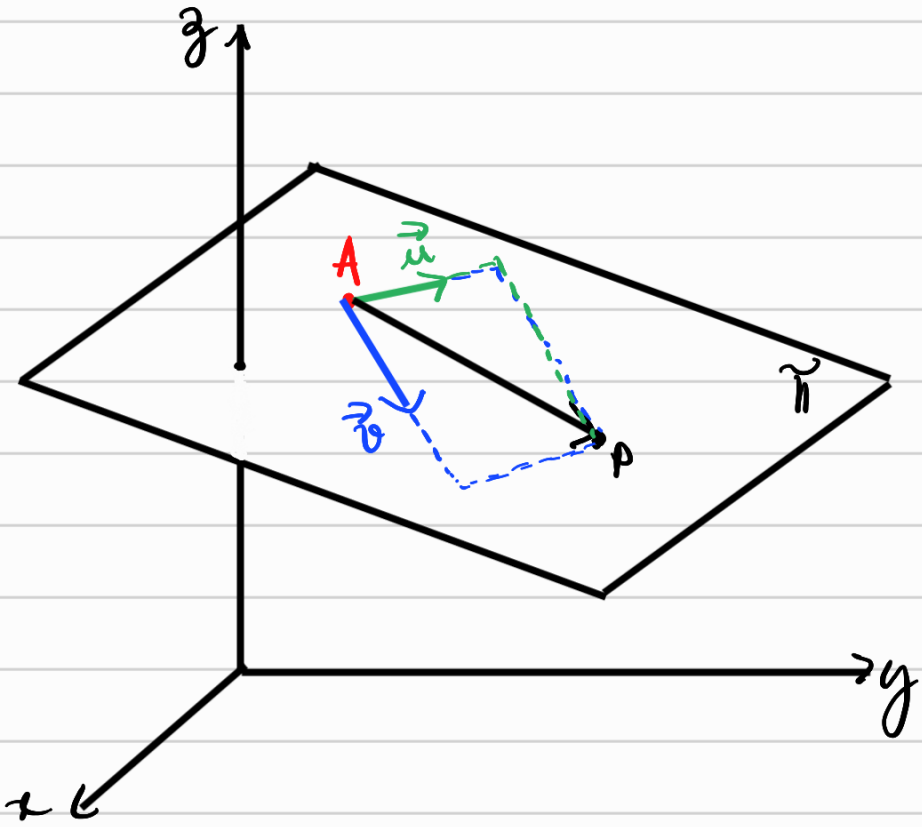
(a) Quais lados são paralelos aos planos coordenados?

(b) Quais lados são perpendiculares aos eixos coordenados?

Equações paramétricas do plano

não precisa

Seja $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto de um plano π e $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores não colineares.



Temos que $P(x, y, z)$ está no plano π se existem $h, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AP} = h\vec{u} + t\vec{v}$$

ou ainda

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$$

$$\boxed{\pi : \begin{cases} x = x_0 + a_1 h + a_2 t \\ y = y_0 + b_1 h + b_2 t \\ z = z_0 + c_1 h + c_2 t \end{cases}}$$

equações paramétricas de π

Exemplo: As equações paramétricas do plano que passa pelo ponto $A(2,1,3)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (-3,-3,1)$ e $\vec{v} = (2,1,-2)$ são

$$\boxed{\pi: \begin{cases} x = 2 - 3h + 2t \\ y = 1 - 3h + t \\ z = 3 + h - 2t \end{cases}}, \quad t, h \in \mathbb{R}$$

Observe que o vetor normal ao plano é

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ -3 & -3 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right|$$

$$= 6\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} - (-6\vec{k} + \vec{i} + 6\vec{j})$$

$$= 5\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$= (5,-4,3)$$

$$\Rightarrow \pi: \quad 5x - 4y + 3z + d = 0$$

com $d = -5 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 3 \cdot 3$

$$= -10 + 4 - 9$$

$$= -15$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: \quad 5x - 4y + 3z - 15 = 0}$$

Outra opção de parametrização de π a partir da equação geral é

$$\pi : \begin{cases} x = h \\ y = t \\ z = \dfrac{15 - 5h - 4t}{3} \end{cases} \qquad h, t \in \mathbb{R}$$

Ângulo de dois planos

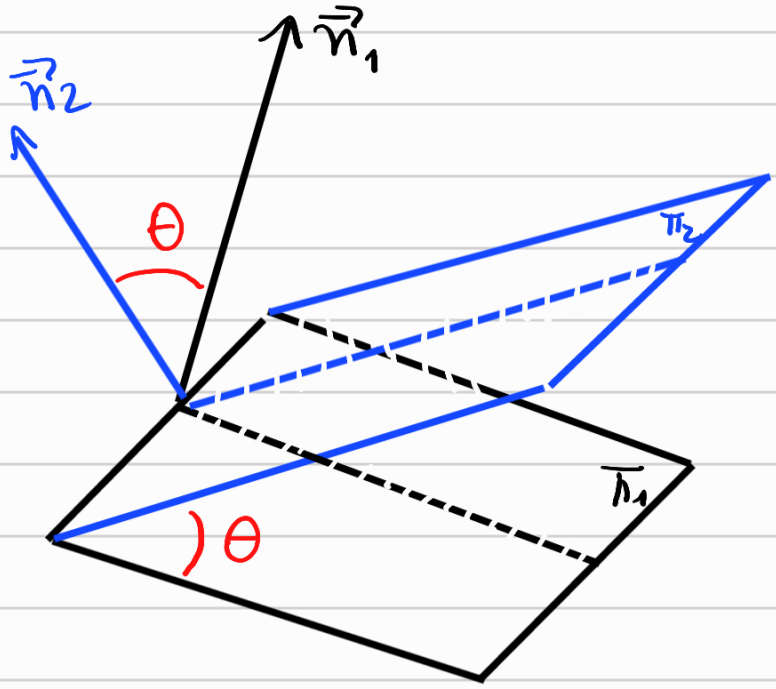
Sejam os planos $\pi_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$

e $\pi_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$.

O ângulo entre π_1 e π_2 é definido como o menor ângulo entre os vetores normais de π_1 e π_2. Logo, se θ é este ângulo,

$$\boxed{\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}} \qquad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

onde $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$.



Condições de Paralelismo e de Perpendicularismo

Dois planos $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$
e $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

- são paralelos se $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1) \parallel \vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, ou seja, se

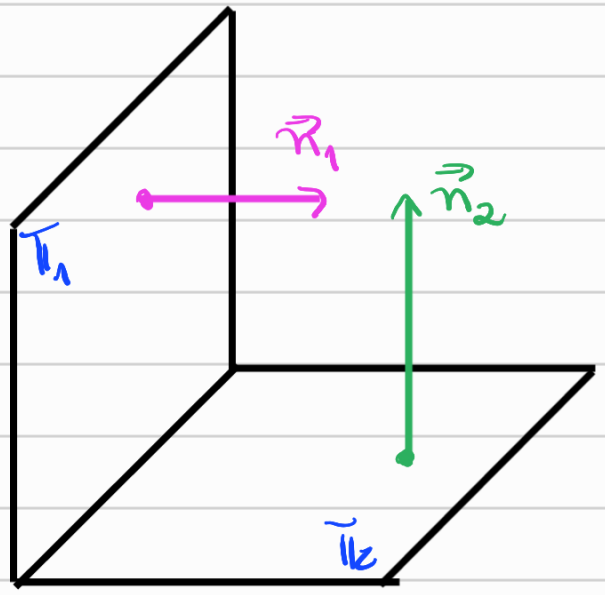
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Se, além disso, tivermos

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2},$$

então os planos são coincidentes.

- são perpendiculares se $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, ou seja, se $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.



TADS

Exercício: Determine o ângulo entre

$$\pi_1 : 2x - 3y + 5z - 8 = 0$$

e

$$\pi_2 : 3x + 2y + 5z - 4 = 0$$

Temos $\vec{n_1} = (2, -3, 5)$

e

$\vec{n_2} = (3, 2, 5)$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\,|\vec{n_2}|} = \frac{|6 - 6 + 25|}{\sqrt{4+9+25}\,\sqrt{9+4+25}}$$

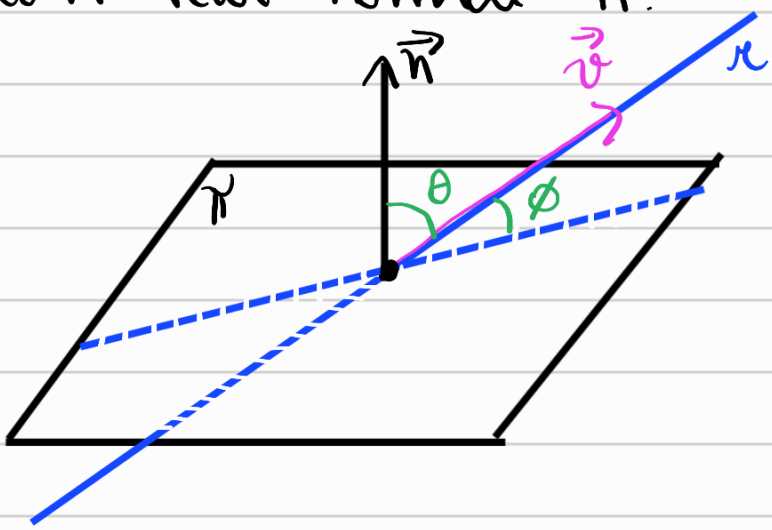
$$= \frac{25}{38}$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos \frac{25}{38} \cong 48{,}86^\circ$$

CCI

Ângulo entre reta e plano

Seja r uma reta com vetor diretor $\vec{v}$ e π um plano com vetor normal $\vec{n}$.



Note que o ângulo ϕ entre o plano e a reta r é o complemento do ângulo θ entre $\vec{n}$ e $\vec{v}$, com

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{v}|}{|\vec{n}||\vec{v}|}$$

$$\phi+\theta = 90^\circ \Rightarrow \operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen}(90^\circ-\theta) = \operatorname{sen}90^\circ\cos\theta = \cos\theta.$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\phi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{v}|}{|\vec{n}||\vec{v}|}} \qquad 0 \leq \phi \leq \pi/2$$

(ângulo entre reta e plano)

Exemplo: Determine o ângulo formado pela reta

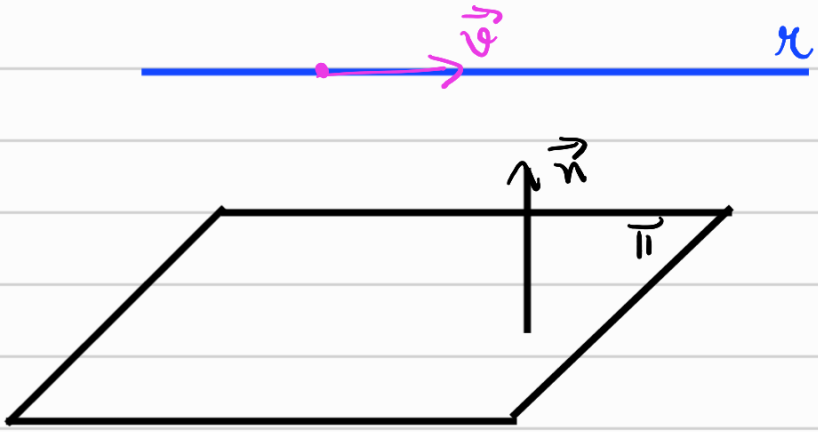
$$r: \begin{cases} y = -2x \\ z = 2x+1 \end{cases}$$ e o plano $\pi: x-y+5=0$.

Sendo ϕ o ângulo, $\vec{v} = (1,-2,2)$ vetor diretor de r e $\vec{n} = (1,-1,0)$ vetor normal, temos

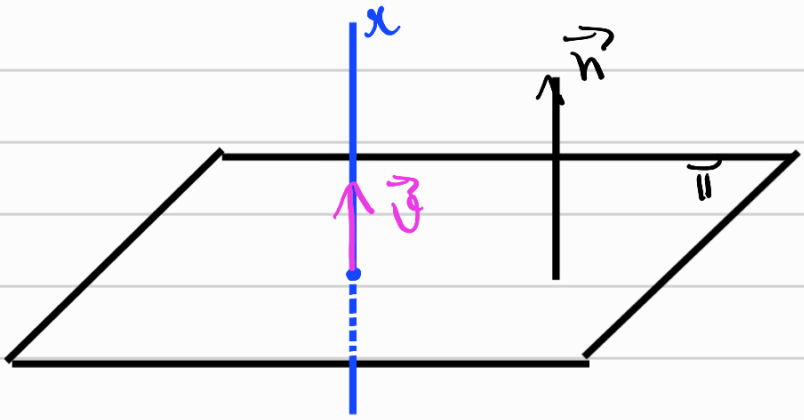
$$\operatorname{sen}\phi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{v}|}{|\vec{n}||\vec{v}|} = \frac{|1+2+0|}{\sqrt{1+1+0}\sqrt{1+4+4}} = \frac{3}{\sqrt{2}\cdot 3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ}$$

$\boxed{\text{OBS}}$ (1) Se $\vec{v} \perp \vec{n}$, então a reta r é paralela ao plano π.

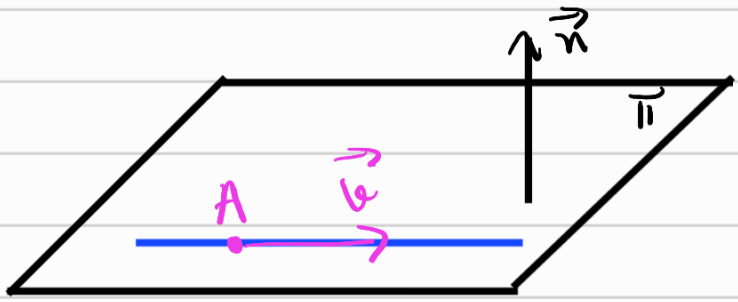


(2) Se $\vec{v} \parallel \vec{n}$, então r é perpendicular ao plano π.



(3) Para r estar contida no plano π, devemos ter

- $\vec{v} \perp \vec{n}$
- um ponto A de r pertence a π
  (isso implica que todos os pontos de r estão em π)



Também podemos garantir que a reta r está contida no plano π se dois pontos de r estão em π.

$\boxed{\text{Exercício}}$ Determine os valores de m e n para que a reta

$$r: \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = -3-2t \end{cases}$$

esteja contida no plano $\pi: mx + ny + 2z - 1 = 0$.

Temos $\vec{v} = (1,1,-2)$ vetor diretor de r, $A(2,1,-3)$ ponto de r e $\vec{n} = (m,n,2)$ vetor normal de π.

- Precisamos de $\vec{v} \perp \vec{n}$: então

$$0 = \vec{v} \cdot \vec{n} = (1,1,-2) \cdot (m,n,2)$$
$$= m+n-4$$

- Além disso, A deve pertencer a π:

$$m \cdot 2 + n \cdot 1 + 2(-3) - 1 = 0$$
$$\Rightarrow 2m + n - 7 = 0$$

Logo, devemos ter

$$-\begin{cases} m+n=4 \\ 2m+n=7 \end{cases}$$
$$-m = -3$$

$$\Rightarrow m = 3 \quad e \quad n = 4 - m = 4 - 3 = 1.$$

$$\Rightarrow \boxed{m=3} \text{ e } \boxed{n=1}.$$

Resolução alternativa:
fazendo $t=-1$ temos o ponto $B(1,0,-1)$ de r.

- B está em π $\Rightarrow$ $m \cdot 1 + n \cdot 0 + 2(-1) - 1 = 0$
$\Rightarrow \boxed{m=3}$

- A está em π $\Rightarrow$ $2m+n-7=0$ $\Rightarrow$ $n = 7 - 2 \cdot 3 = \boxed{1}$.

(18) lista 2

Determine a equação do plano π_2 que contém a reta $r: \begin{cases} y = 2x-3 \\ z = -x+2 \end{cases}$ e é perpendicular ao plano $\pi_1: 2x+y-z+5=0$.

Temos

- $\vec{v} = (1,2,-1)$ vetor diretor de r
- $A(0,-3,2)$ ponto de r.
- $\vec{n_1} = (2,1,-1)$ vetor normal de π_1.

Sendo $\vec{n_2} = (a,b,c)$ um vetor normal ao plano π_2, devemos ter

- $\vec{n_2} \cdot \vec{n_1} = 0$, pois π_1 e π_2 são perpendiculares:

$$(a,b,c)\cdot(2,1,-1) = 2a+b-c$$
$$\Rightarrow 2a+b-c=0$$

- $\vec{n_2} \cdot \vec{v} = 0$, pois r está contida em π_2:

$$(a,b,c)\cdot(1,2,-1) = a+2b-c$$
$$\Rightarrow a+2b-c=0$$

Então, temos

$$-\begin{cases} 2a+b-c=0 \\ a+2b-c=0 \end{cases}$$
$$a-b=0$$

$\Rightarrow \quad a = b$

$\Rightarrow \quad c = a + 2b = a + 2a = 3a$

$\Rightarrow \quad \vec{n}_2 = (a, a, 3a) = a(1,1,3)$

$\Rightarrow$ o vetor $(1, 1, 3)$ é normal a π_2.

Assim, π_2 passa pelo ponto $A(0,-3,2)$ e tem como vetor normal o vetor $\vec{n} = (1,1,3)$.

$\Rightarrow \pi_2: \; 1\cdot(x-0) + 1(y+3) + 3(z-2) = 0$

$\Rightarrow \pi_2: \; x + y + 3 + 3z - 6 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\pi_2: \; x + y + 3z - 3 = 0}$

Interseção de dois planos

Exemplo: Considere os planos $\pi_1: 2x + y - z + 5 = 0$ e $\pi_2: x + y + 3z - 3 = 0$, do exercício anterior

Como os dois planos não são paralelos, a interseção de π_1 e π_2 deve ser uma reta s.

Um ponto qualquer (x,y,z) de s deve satisfazer

$$\begin{cases} 2x + y - z + 5 = 0 & (1) \\ x + y + 3z - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Subtraindo as equações, temos

$$x - 4z + 8 = 0 \Rightarrow x = 4z - 8$$

Substituindo $x = 4z - 8$ em (2), temos

$$(4z - 8) + y + 3z - 3 = 0$$

$$\Rightarrow y + 7z - 11 = 0$$

$$\Rightarrow y = -7z + 11$$

Portanto, as equações reduzidas da reta s são

$$s: \begin{cases} x = 4z - 8 \\ y = -7z + 11 \end{cases}.$$

$\boxed{\text{OBS}}$ Para encontrar a intersecção de uma reta e um plano, o processo é análogo ao do exemplo anterior: primeiro verificamos se a reta é paralela ao plano. Se não, combinamos as equações gerais para encontrar o único ponto de intersecção.

(15) lista 2

O plano π é perpendicular ao plano yz, que tem como vetor normal o vetor $\vec{i} = (1,0,0)$. Se $\vec{n} = (a,b,c)$ é o vetor normal de π, temos

$$\vec{n} \cdot \vec{i} = 0 \Rightarrow a = 0$$
$$\Rightarrow \vec{n} = (0, b, c).$$

- Interseção dos planos $\pi_1: x - 3y - z + 3 = 0$ e $\pi_2: 3x + y - 2z + 2 = 0$:

Um ponto da reta r de interseção deve satisfazer

$$\begin{cases} x - 3y - z + 3 = 0 \quad \times 3 \\ 3x + y - 2z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 9y - 3z + 9 = 0 \\ 3x + y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$
$$-10y - z + 7 = 0$$

$$\Rightarrow z = -10y + 7$$
e $x = 3y + z - 3 = 3y - 10y + 7 - 3 = -7y + 4$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = -7y + 4 \\ z = -10y + 7 \end{cases}$$

com vetor diretor $\vec{v} = (-7, 1, -10)$ e um ponto $A(4,0,7)$.

Como π contém a reta r, devemos ter

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$
$$\Rightarrow (0, b, c) \cdot (-7, 1, -10) = 0$$
$$\Rightarrow \quad b - 10c = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 10c$$

Logo, $\vec{n} = (0, 10c, c) \parallel (0, 10, 1)$.

Portanto, a equação de π é dada por

$$\pi: \quad 10y + z + d = 0$$

Usando o ponto $A(4, 0, 7)$, temos

$$10 \cdot 0 + 7 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -7.$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: \quad 10y + z - 7 = 0.}$$