Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

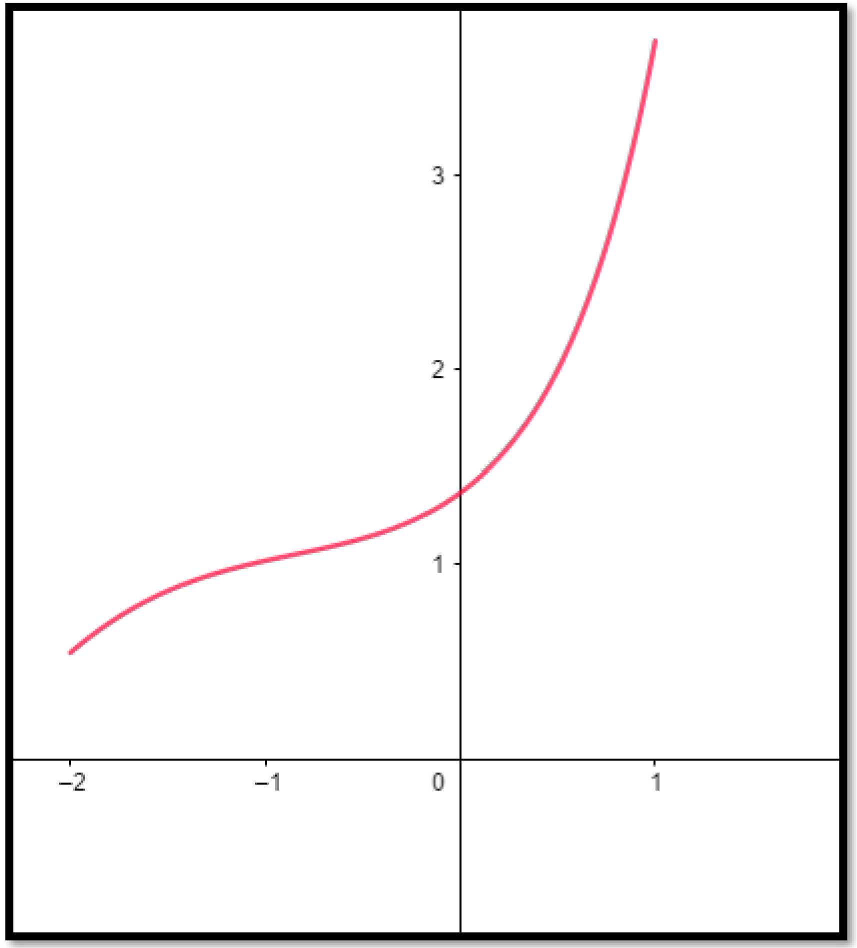
Somas de Riemann e a Integral Definida

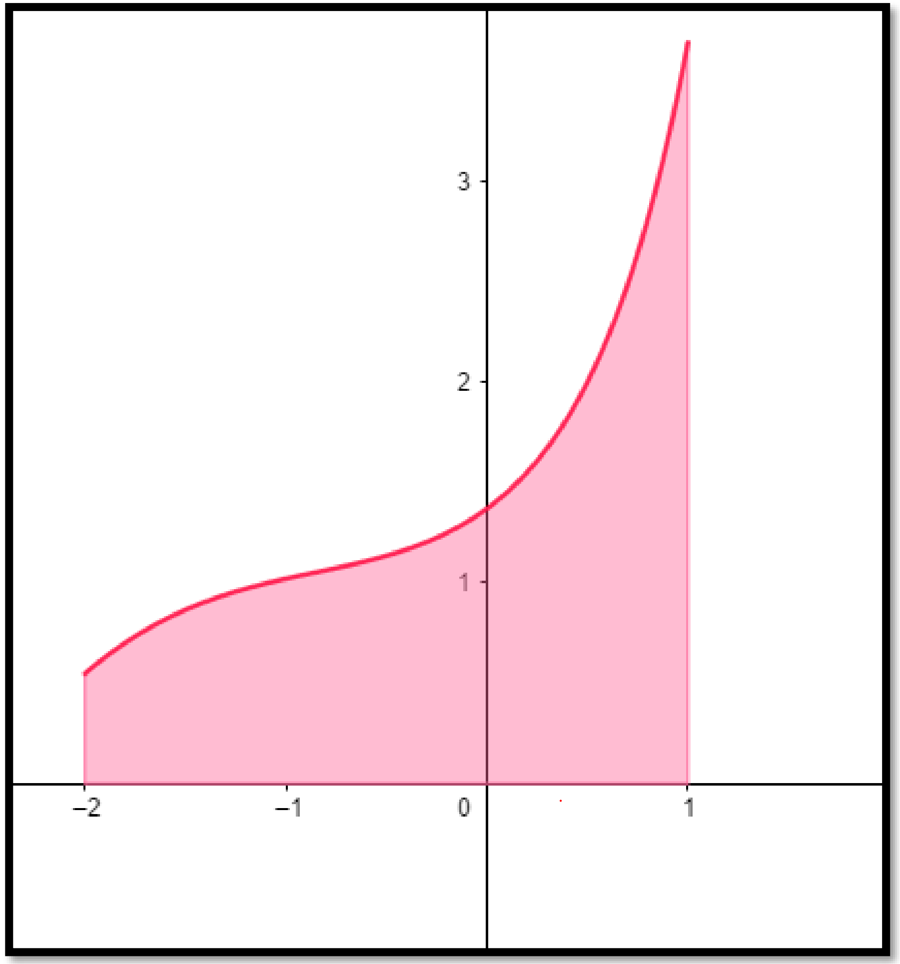
Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 de 07 de agosto de 2024.

Introdução

Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e crescente.





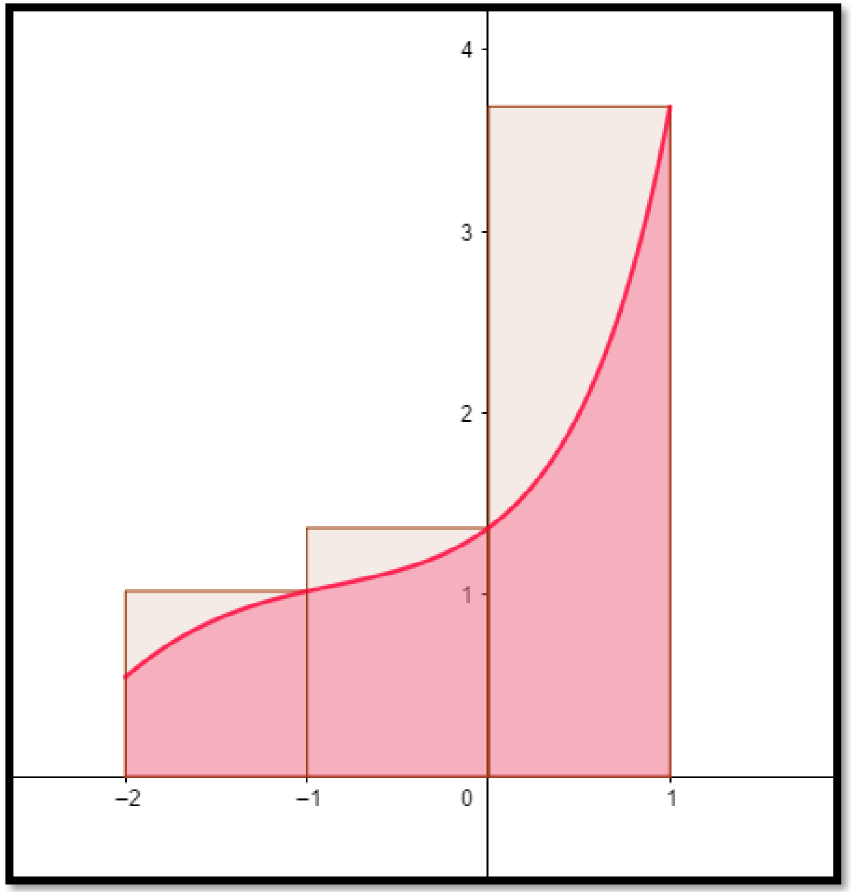
Questão:

Qual a área da região R situada abaixo do gráfico de f, acima do eixo $\overrightarrow{Ox}$ e entre os segmentos de retas $x = a$ e $x = b$?

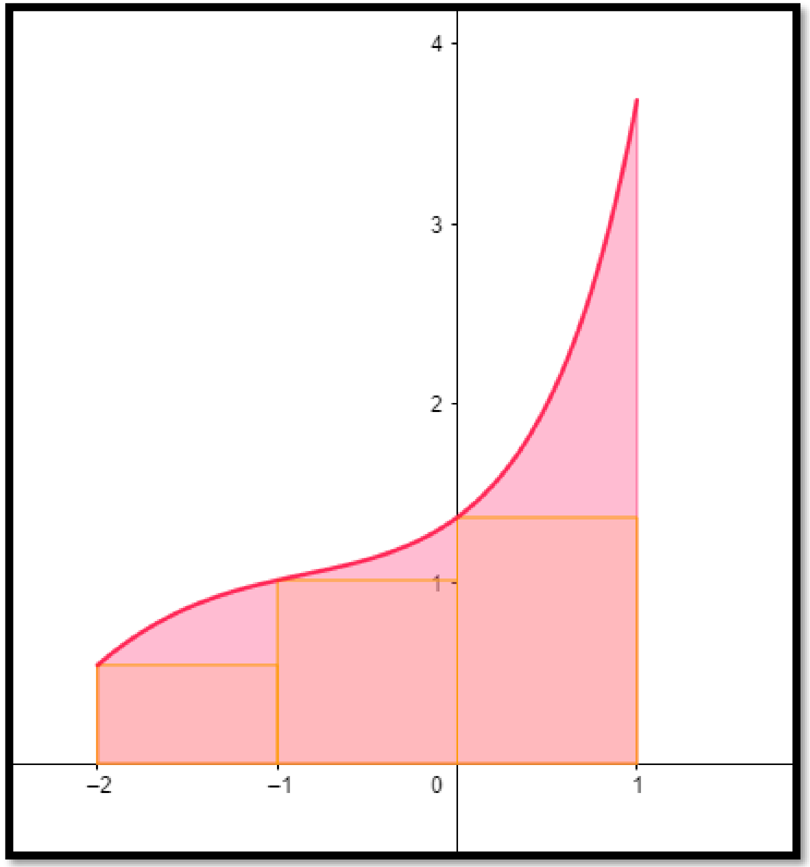
Somas de Riemann

Podemos aproximar a área da região desejada pela SOMA das áreas de retângulos que extrapolam a região (SOMA SUPERIOR) ou de retângulos inteiramente contidos na região (SOMA INFERIOR).

Para facilitar os cálculos, usaremos n retângulos, todos de mesma base:



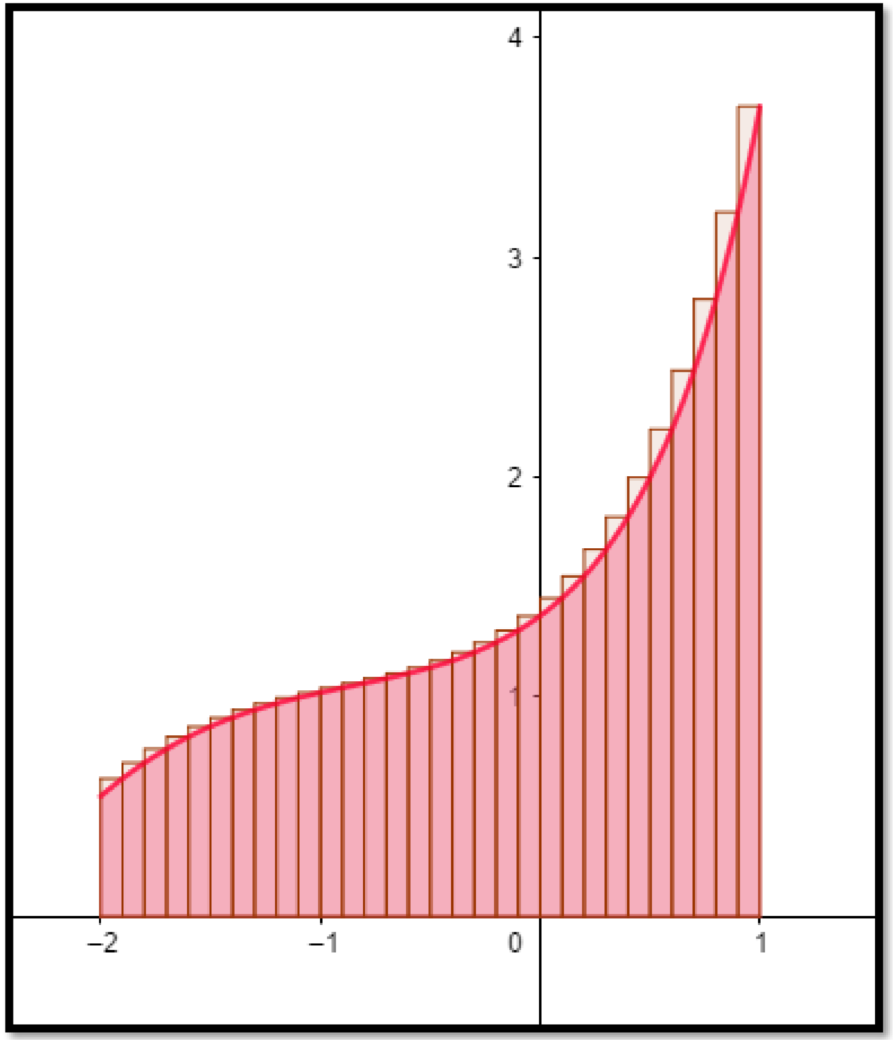
Soma Superior com $n = 3$.



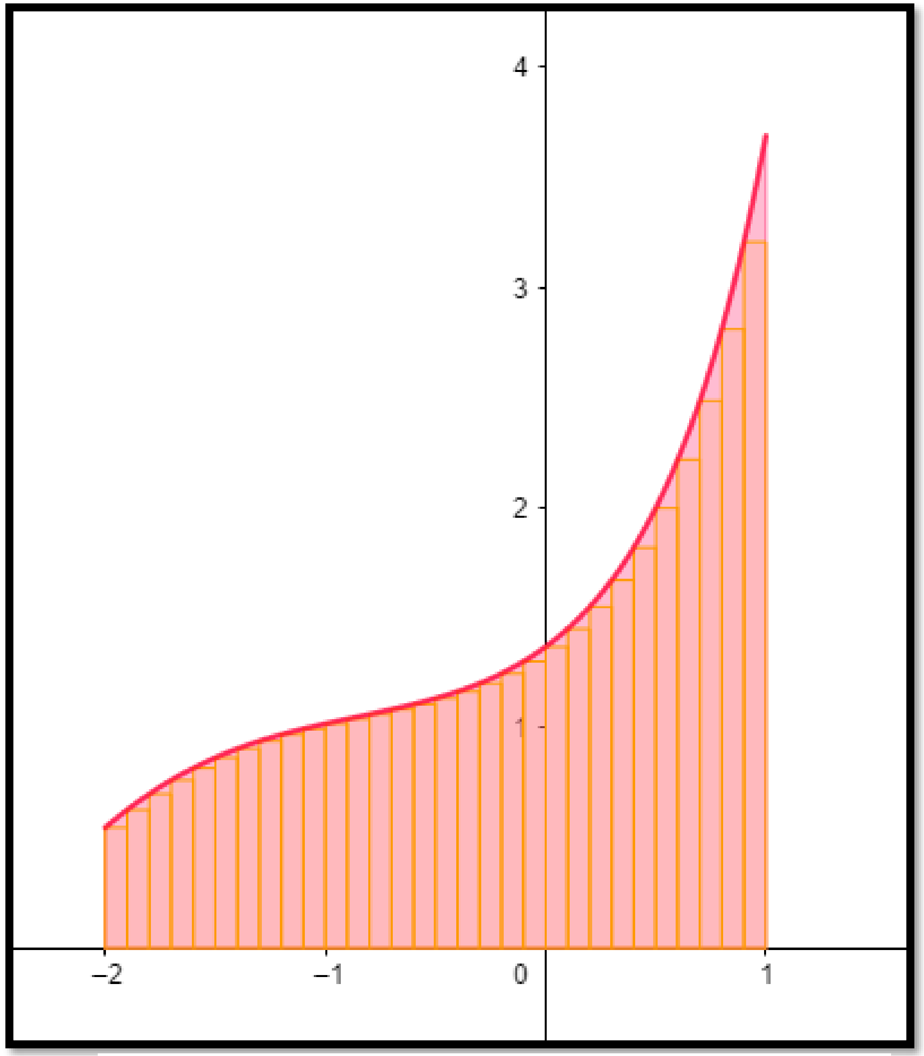
Soma Inferior com $n = 3$.

Somas de Riemann

Conforme aumentarmos a quantidade de retângulos (circunscritos ou inscritos) a soma das áreas dos retângulos se aproxima cada vez mais da área desejada:



Soma Superior com $n = 30.$



Soma Inferior com $n = 30.$

Definição de Soma Superior e Soma Inferior

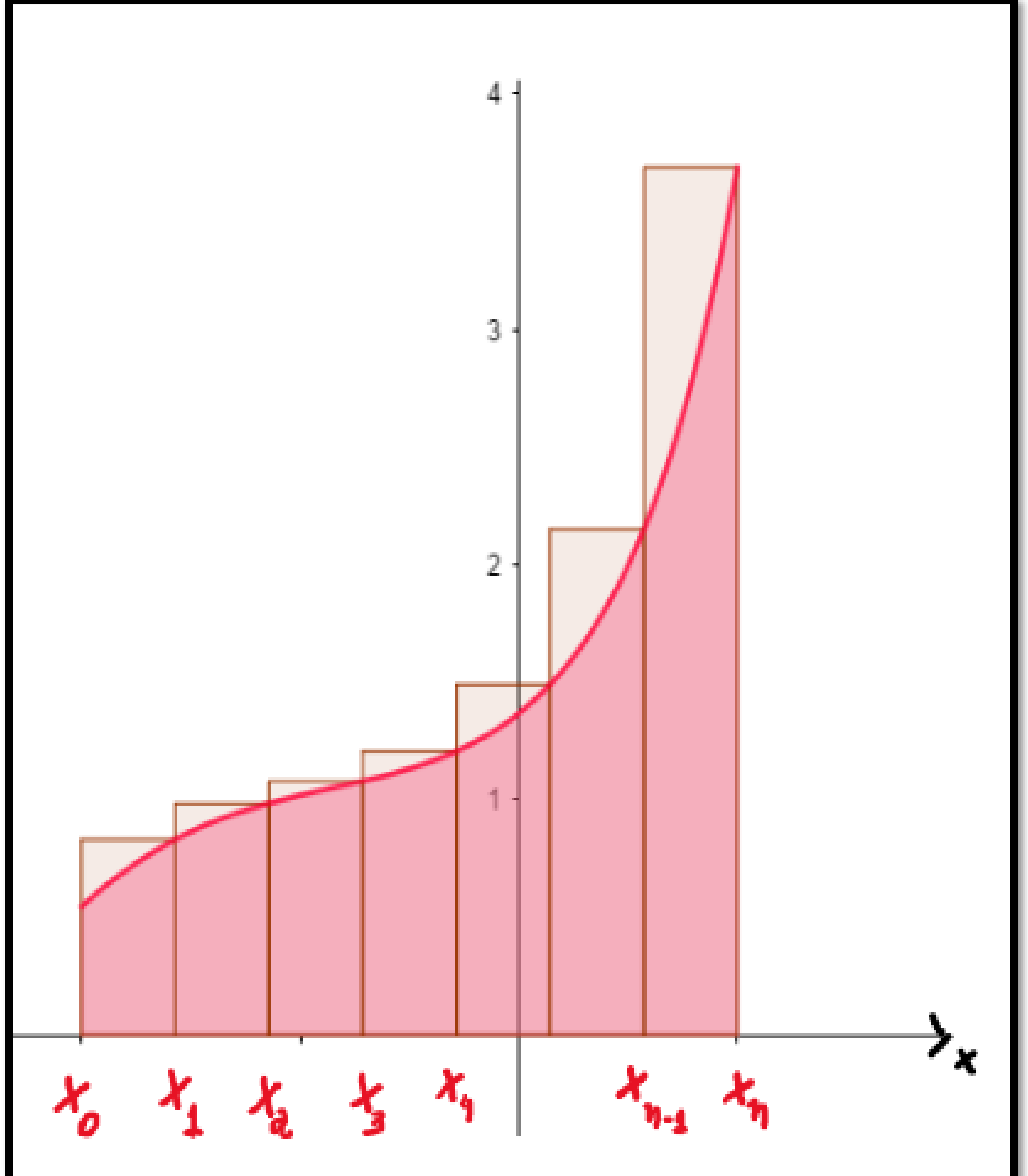
Para definir a Soma Superior de $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ usaremos n retângulos que extrapolam a região (circunscritos), todos de mesma base, dada por:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Para obter as alturas dos retângulos, definimos os seguintes pontos auxiliares:

$$x_0 = a$$
$$x_1 = a + \Delta x$$
$$x_2 = a + 2\Delta x$$
$$x_3 = a + 3\Delta x$$
$$\vdots$$
$$x_n = a + n\Delta x.$$

Tais pontos formam uma "PARTIÇÃO" do intervalo $[a,b]$.

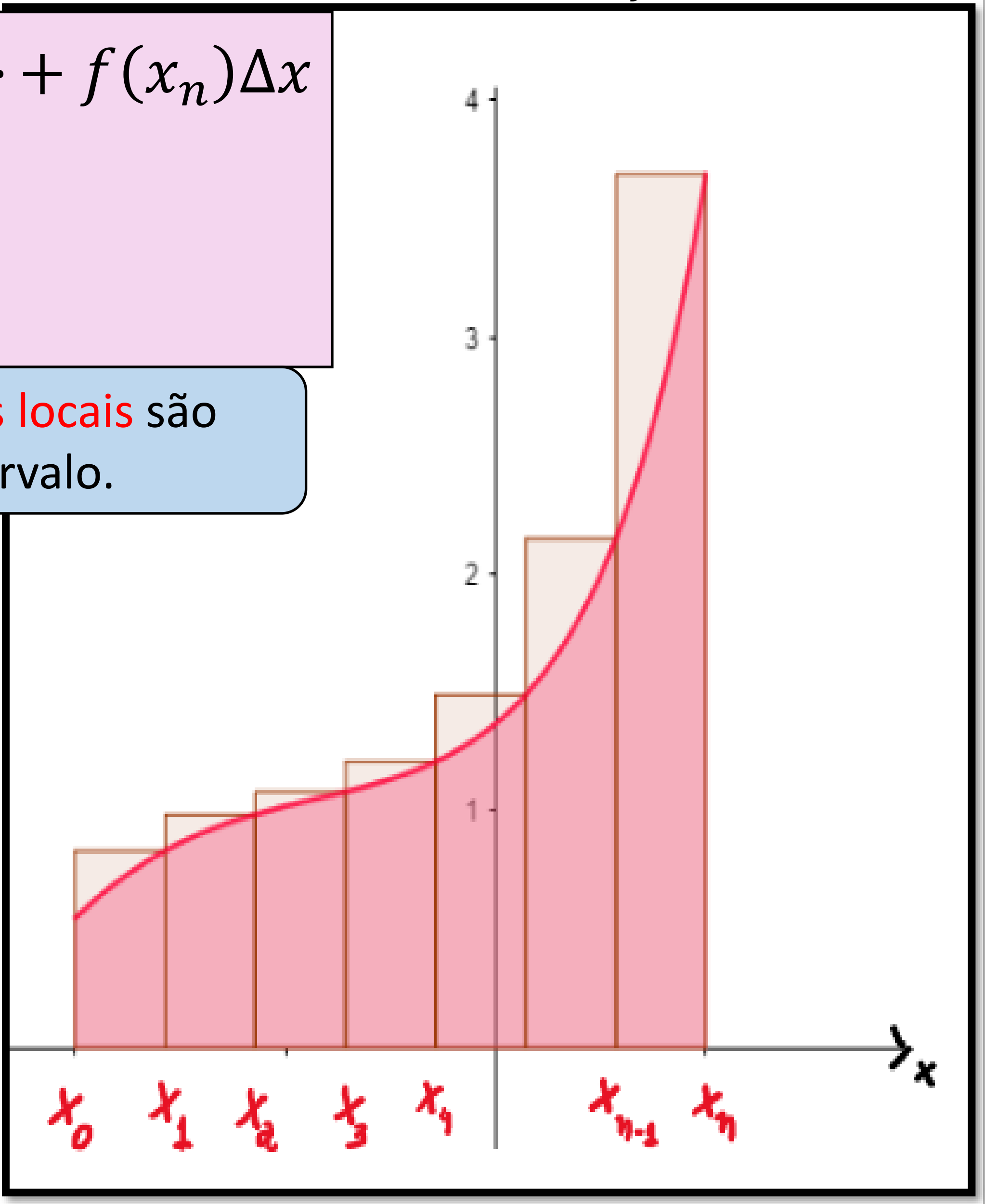


Definição de Soma Superior de Função Positiva Crescente

Somando as áreas dos retângulos circunscritos, obtemos a Soma Superior de f, dada por:

$$\overline{S}\,(f^{+}_{cresc}) = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\,.$$

Como f é crescente (por hipótese) os seus valores máximos locais são sempre atingidos no extremo à direita de cada subintervalo.



onde

$$f(x_i) = \max_{[\,x_{i-1},\, x_i\,]} f$$

representa o valor máximo de f em cada subintervalo fechado $[\,x_{i-1}, x_i\,]$.

Ainda:

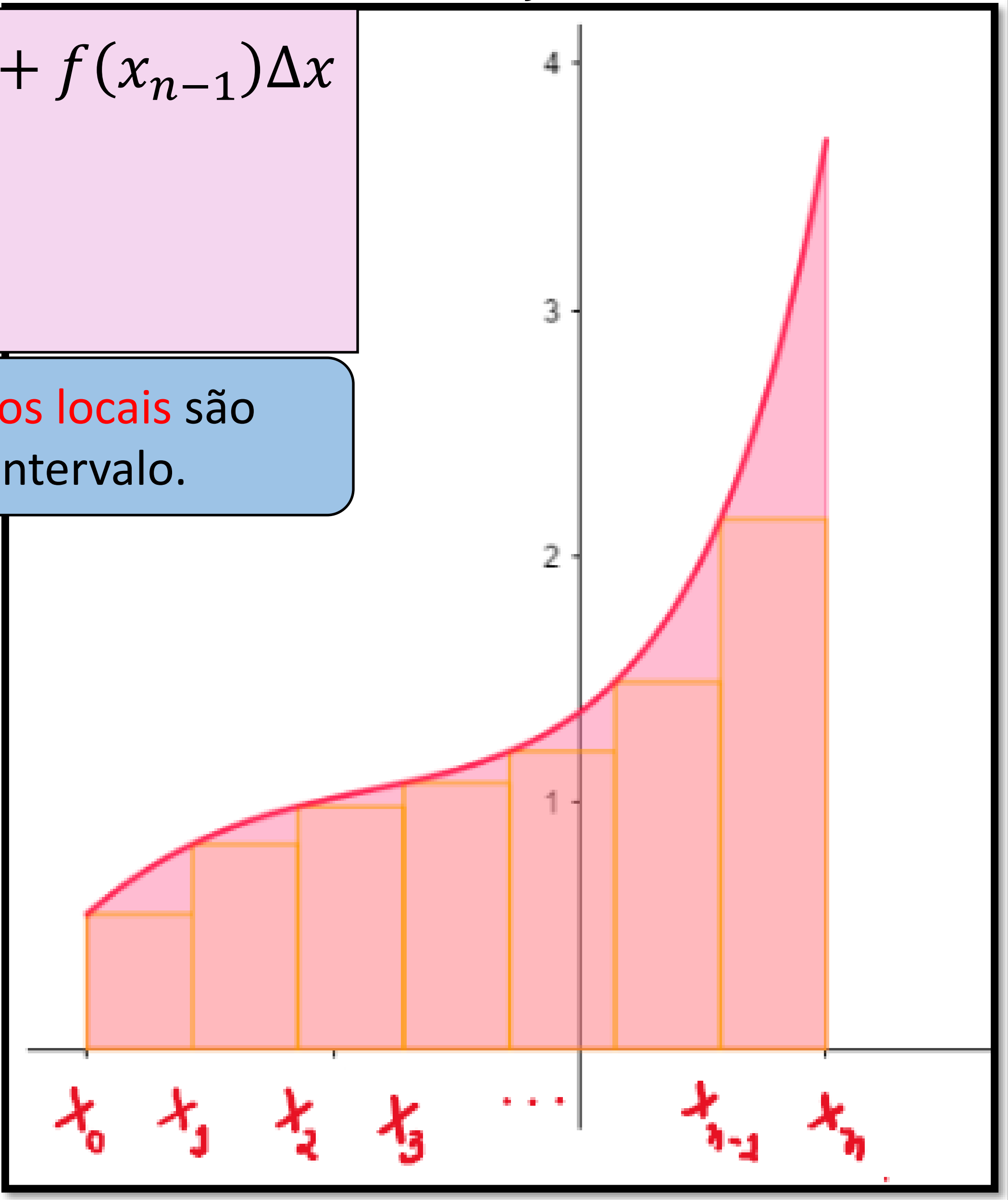
$$área(R) = \lim_{n\to+\infty} \overline{S}\,(f) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Definição de Soma Inferior de Função Positiva Crescente

Somando as áreas dos retângulos inscritos, obtemos a Soma Inferior de f:

$$\underline{S}(f^+_{cresc}) = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

Como f é crescente (por hipótese) os seus valores mínimos locais são sempre atingidos no extremo à esquerda de cada subintervalo.



em que

$$f(x_{i-1}) = \min_{[x_{i-1},\, x_i]} f$$

representa o valor mínimo de f em cada subintervalo fechado $[\, x_{i-1}, x_i \,]$.

Ainda:

$$\text{área}(R) = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

A Integral Definida

Como f é continua e positiva, é esperado que

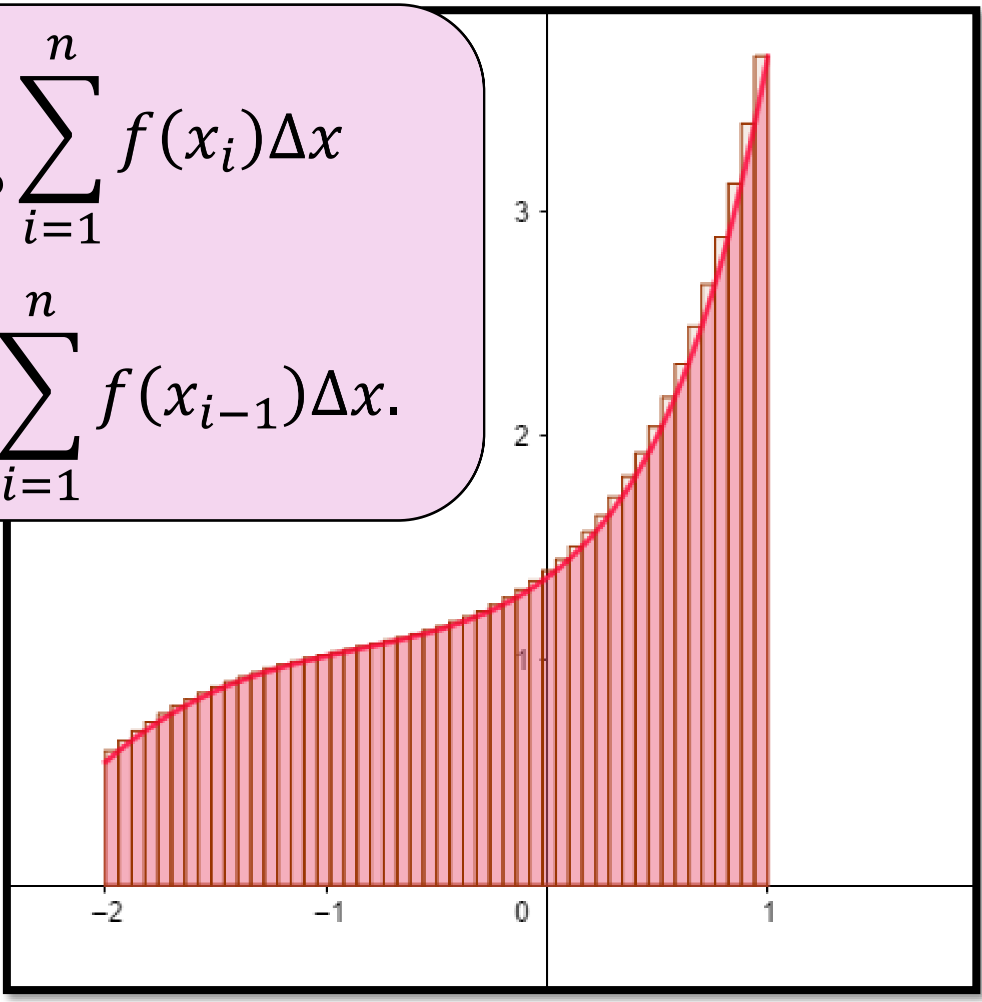
$$\lim_{n\to+\infty} \overline{S}(f) = área(R) = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f)$$

Sempre que tal igualdade ocorre, dizemos que f é uma função integrável à Riemann e denotamos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \overline{S}(f) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x.$$

Integral Definida de f, no intervalo $[a,b]$.



Nomenclatura:

a: limitante inferior de integração

b: limitante superior de integração

$f(x)$: função integrando

dx: diferencial da variável de integração