Exemplos:

1. Se possível, calcule o valor da constante a para que $L = \lim_{x \to 0} \frac{1+ax-\sqrt{1+x}}{x^2}$ exista.

Note que: $L = \lim_{x \to 0} \frac{1+ax-\sqrt{1+x}}{x^2} = \frac{1+a.0-1}{0} = \frac{0}{0}$

Multiplicando e dividindo pelo conjugado do numerador, temos que:

$$L = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1+ax-\sqrt{1+x}}{x^2} \cdot \frac{1+ax+\sqrt{1+x}}{1+ax+\sqrt{1+x}} \right)$$

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{(1+ax)^2-\left(\sqrt{1+x}\right)^2}{x^2\left(1+ax+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{1+2ax+(ax)^2-1-x}{x^2\left(1+ax+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{2ax+a^2x^2-x}{x^2\left(1+ax+\sqrt{1+x}\right)} = \frac{0}{0}$$

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{x\left(2a+a^2x-1\right)}{x^2\left(1+ax+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{2a+a^2x-1}{x\left(1+ax+\sqrt{1+x}\right)} = \frac{2a-1}{0}$$

Se $2a-1 \neq 0$, segue que: $L = \frac{constante\ não\ nula}{0} \Rightarrow \boxed{L = \infty}$

Se $2a-1 = 0$, segue que: $L = \frac{0}{0}$

Assumindo $a = \frac{1}{2}$, temos que:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{2\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2x-1}{x\left(1+\frac{1}{2}x+\sqrt{1+x}\right)} = \frac{1}{4} \lim_{x \to 0} \frac{x}{x\left(1+\frac{1}{2}x+\sqrt{1+x}\right)} = \frac{1}{4} \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+\frac{1}{2}x+\sqrt{1+x}}$$

2. Use a definição de continuidade para investigar se a função $f(x) = \begin{cases} 3 - 7\cos(2+x)\,, se\ x \leq -2 \\ \frac{x^4-16}{x^2-4} \qquad\quad , se\ x > -2 \end{cases}$ é contínua para todo número real. Caso haja descontinuidade(s), classifique-a(s).

<u>Objetivo</u>: Verificar se $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Analisando a primeira sentença de f, observamos que $f(x) = 3 - 7\cos(2+x)$ é definida para todo $x \leq -2$, pois é a diferença de funções cujo domínio é $\mathbb{R}$. Logo, $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, para todo $c \epsilon (-\infty, 2)$.

Analisando a segunda sentença de f, observamos que $f(x) = \frac{x^4-16}{x^2-4}$ é definida para todo x real tal que $x^2 - 4 \neq 0$

➡ $x \neq \pm 2$

➡ $f(x) = \frac{x^4-16}{x^2-4}$ não está definida em $x = 2 \in (2, +\infty)$.

➡ f não é contínua em $x = 2$, pois $f(2)$ não está definida.

$$L = \lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}(x^2+4) = 8$$

Como $L = \lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x^2-4}$ existe, mas $f(2)$ não está definida a **descontinuidade** é do tipo **removível** em $x = 2$.

Resta-nos ainda analisar a continuidade em $x = -2$, que ocorre a mudança de definição de f.

$i)$ $f(-2) = 3 - 7\cos(2 - 2) = 3 - 7\cos(0) = -4$

$ii)$ Limite bilateral existe em $x = 2$?

$$L_1 = \lim_{x\to -2^+} \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4} = \lim_{x\to -2^+} \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^2-4} = \lim_{x\to -2^+}(x^2+4) = 8$$

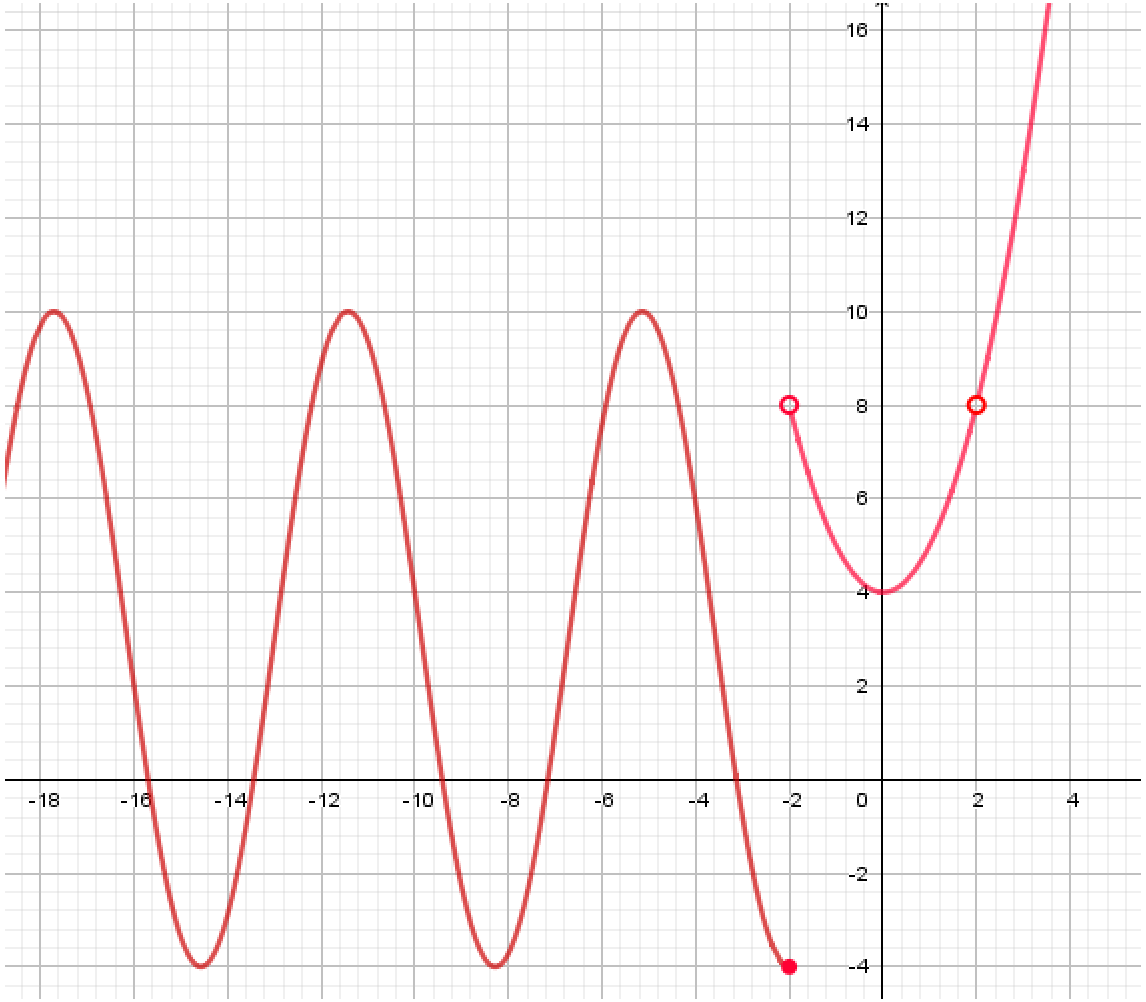
$$L_2 = \lim_{x\to -2^-}(3 - 7\cos(x+2)) = 3 - 7\cos(0) = -4$$

Como os limites laterais existem, mas $L_1 \neq L_2$, então f não é contínua em $x = -2$.

E, a descontinuidade é do tipo salto, pois os limites laterais existem, mas são diferentes.

<u>Conclusão</u>: f é contínua em $\mathbb{R} - \{-2,2\}$. Em $x = 2$ há uma descontinuidade do tipo removível e, em $x = -2$, descontinuidade do tipo salto.

$$f(x) = \begin{cases} 3 - 7\cos(2 + x)\,, se\ x \leq -2 \\ \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4} \qquad\qquad , se\ x > -2 \end{cases}$$



Continuando os exemplos de técnicas para calcular limites...

$$L = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x - a}$$

Definindo $u = \sqrt[3]{x}$. $\Rightarrow$ $x = u^3$

Se $x \to a$, então $u \to \sqrt[3]{a}$

$$L = \lim_{u \to \sqrt[3]{a}} \frac{u - \sqrt[3]{a}}{u^3 - a}$$

Definindo b $= \sqrt[3]{a}$. $\Rightarrow$ $a = b^3$

$$L = \lim_{u \to b} \frac{u - b}{u^3 - b^3}$$

$$L = \lim_{u \to b} \frac{u - b}{(u - b)(u^2 + bu + b^2)}$$

$$L = \lim_{u \to b} \frac{1}{u^2 + bu + b^2} = \frac{1}{3b^2}$$ $\Rightarrow$ $$\boxed{L = \frac{1}{3(\sqrt[3]{a})^2} = \frac{1}{3a^{\frac{2}{3}}}}$$

e) $L = \lim_{x \to 8} \frac{(x-8)^2}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} - 2} = \frac{0}{0}$

Mudando de variável, temos que:

Definindo $u = \sqrt[3]{x}$. $\Rightarrow$ $x = u^3$

Se $x \to 8$, então $u \to 2$

$$L = \lim_{u \to 2} \frac{(u^3 - 8)^2}{u^2 - u - 2} = \frac{0}{0}$$

$$L = \lim_{u \to 2} \frac{\left((u-2)(u^2 + 2u + 4)\right)^2}{u^2 - u - 2}$$

$$L = \lim_{u \to 2} \frac{(u-2)^2(u^2 + 2u + 4)^2}{u^2 - u - 2}$$

$$L = \lim_{u \to 2} \frac{(u-2)^2(u^2 + 2u + 4)^2}{(u+1)(u-2)}$$

$$L = \lim_{u \to 2} \frac{(u-2)(u^2 + 2u + 4)^2}{(u+1)}$$

$$L = \frac{(2-2)(2^2 + 2 * 2 + 4)^2}{(2+1)}$$

$$\boxed{L = 0}$$