CDI-2

Revisão: Curvas em coordenadas Polares

por: Elisandra Bar de Figueiredo

Algumas equações em coordenadas polares e seus gráficos

Retas

1. $\theta = \theta_0$ ou $\theta = \theta_0 \pm n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ é uma reta que passa pelo pólo e faz um ângulo θ_0 ou $\theta_0 \pm n\pi$ radianos com o eixo polar.

2. $r \sin\theta = a$ e $r\cos\theta = b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, são retas paralelas ao eixo polar e $\theta = \frac{\pi}{2}$, respectivamente.

Circunferências

1. $r = a, \ \ a \in \mathbb{R}$ é uma circunferência de raio $|a|$.

2. $r = 2a\cos\theta$ é uma circunferência de raio $|a|$, com centro sobre o eixo polar e tangente ao eixo $\theta = \frac{\pi}{2}$ de modo que

   (i) se $a > 0$ o gráfico está à direita do pólo;

   (ii) se $a < 0$ o gráfico está à esquerda do pólo.

3. $r = 2b\sin\theta$ é uma circunferência de raio $|b|$, com centro sobre o eixo $\theta = \frac{\pi}{2}$ e tangente ao eixo polar de modo que

   (i) se $b > 0$ o gráfico está acima do pólo;

   (ii) se $b < 0$ o gráfico está abaixo do pólo.

Limaçons

Equações do tipo $r = a \pm b\cos\theta$ ou $r = a \pm b\sin\theta$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ o gráfico varia conforme os casos abaixo.

1. se $b > a$, então o gráfico tem um laço. Veja a Figura 6.

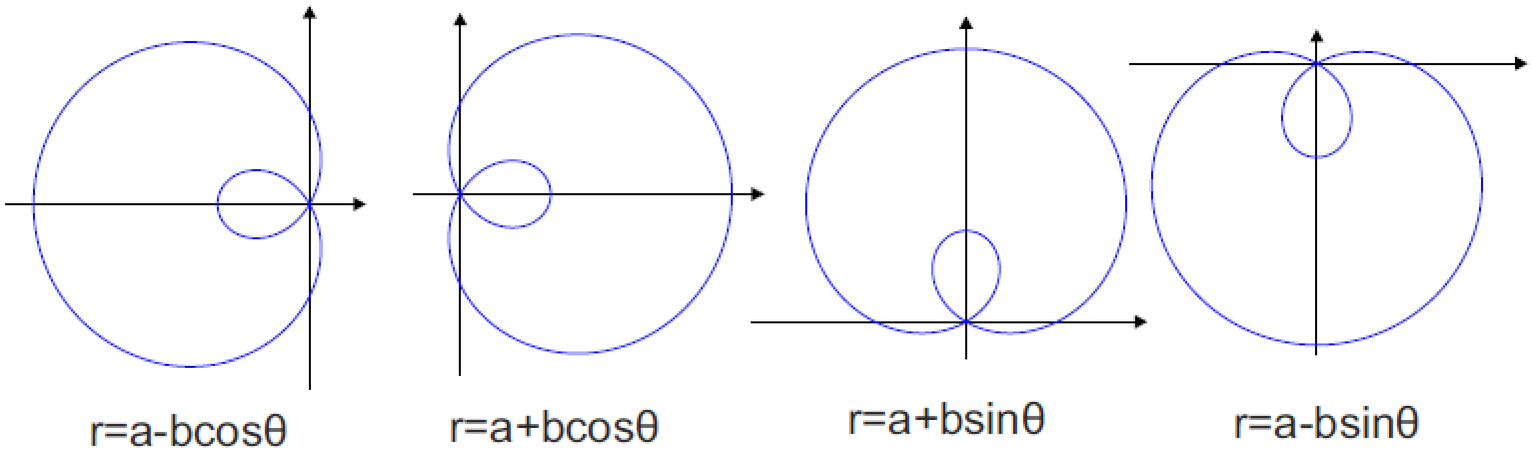

Figura 6: Limaçons com laço

2. se $b = a$, então o gráfico tem o formato de um coração, por isso é conhecido como **Cardióide**. Veja a Figura 7.

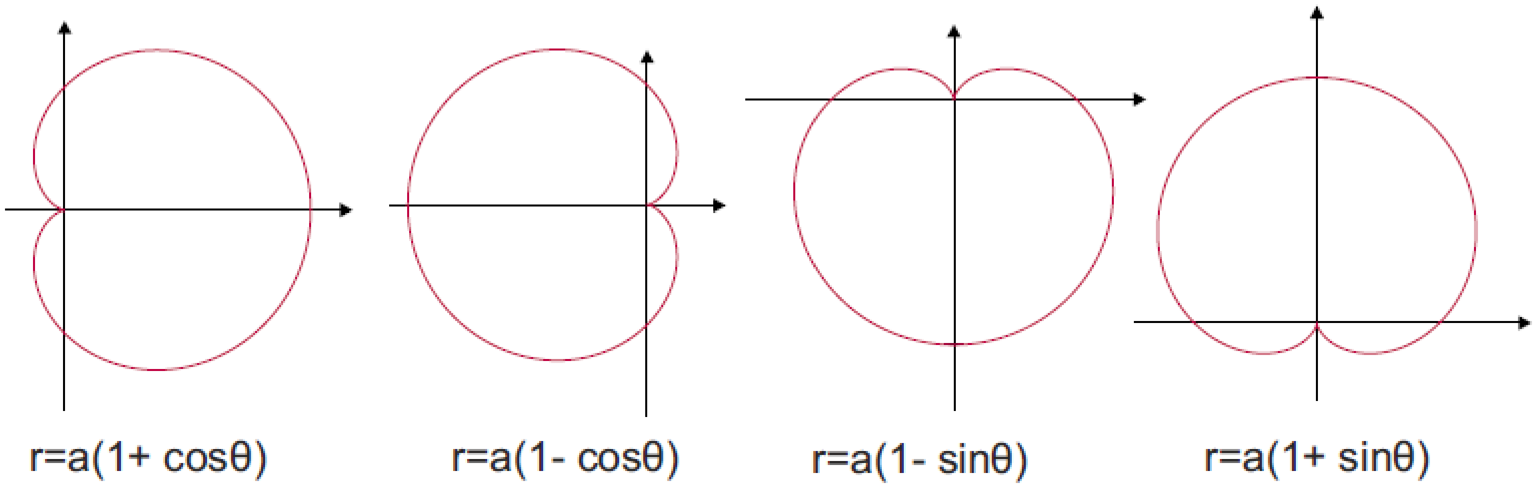

Figura 7: Cardióide

3. se $b < a$, então o gráfico não tem laço e não passa pelo pólo. Veja a Figura 8.

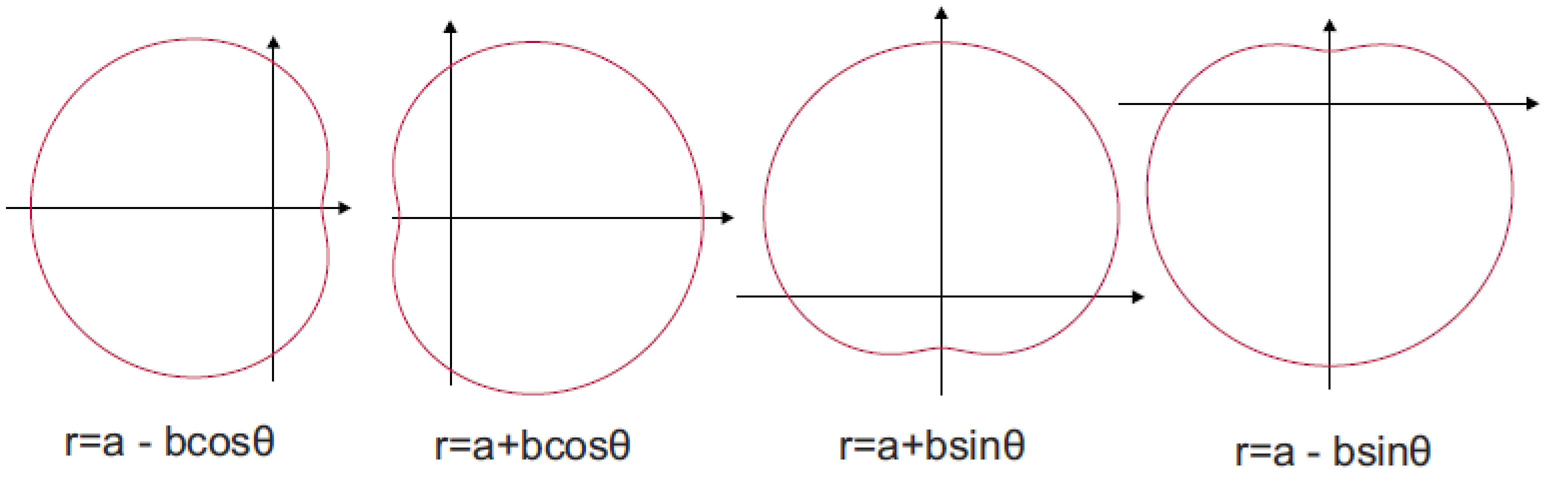

Figura 8: Limaçons sem laço

Rosáceas

Equações do tipo $r = a\cos(n\theta)$ ou $r = a\sin(n\theta)$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ o gráfico varia conforme os casos abaixo.

1. Se n é par temos uma rosácea com $2n$ pétalas. Veja a Figura 13.

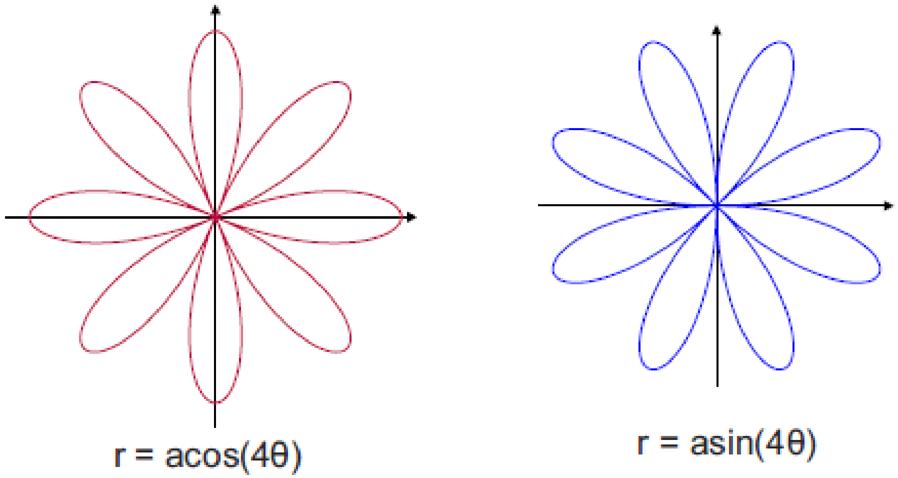

Figura 13: Rosáceas com $2n$ pétalas

2. Se n é ímpar temos uma rosácea com n pétalas. Veja a Figura 14.

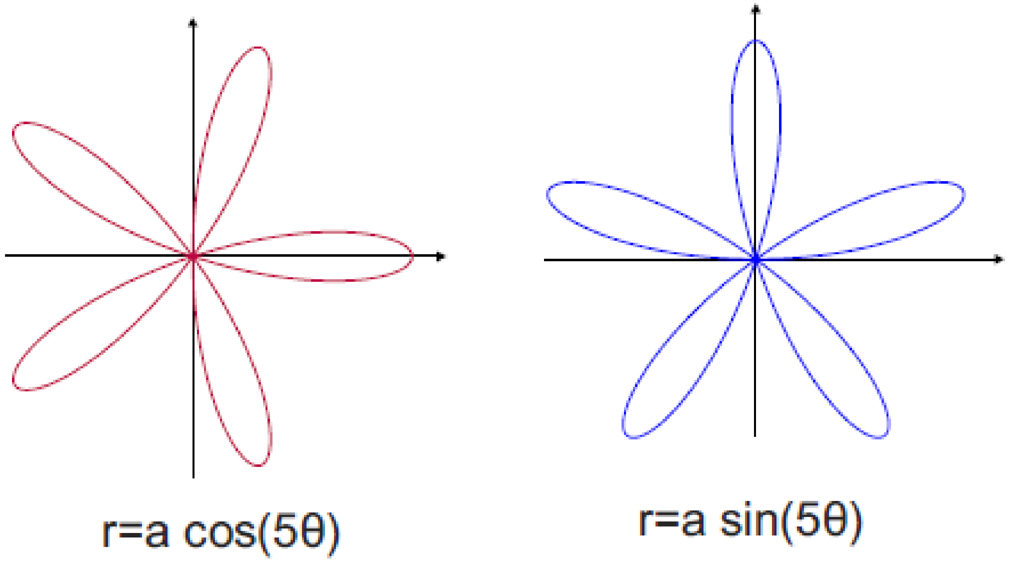

Figura 14: Rosáceas com n pétalas

Lemniscatas

Equações do tipo $r^2 = \pm a^2 \cos(2\theta)$ ou $r^2 = \pm a^2 \sin(2\theta)$, onde $a \in \mathbb{R}$. É fácil ver que trocando r por $-r$ a equação das lemniscatas permanece a mesma, desta forma existe simetria em torno do pólo. Os gráficos para cada caso estão na Figura 10.

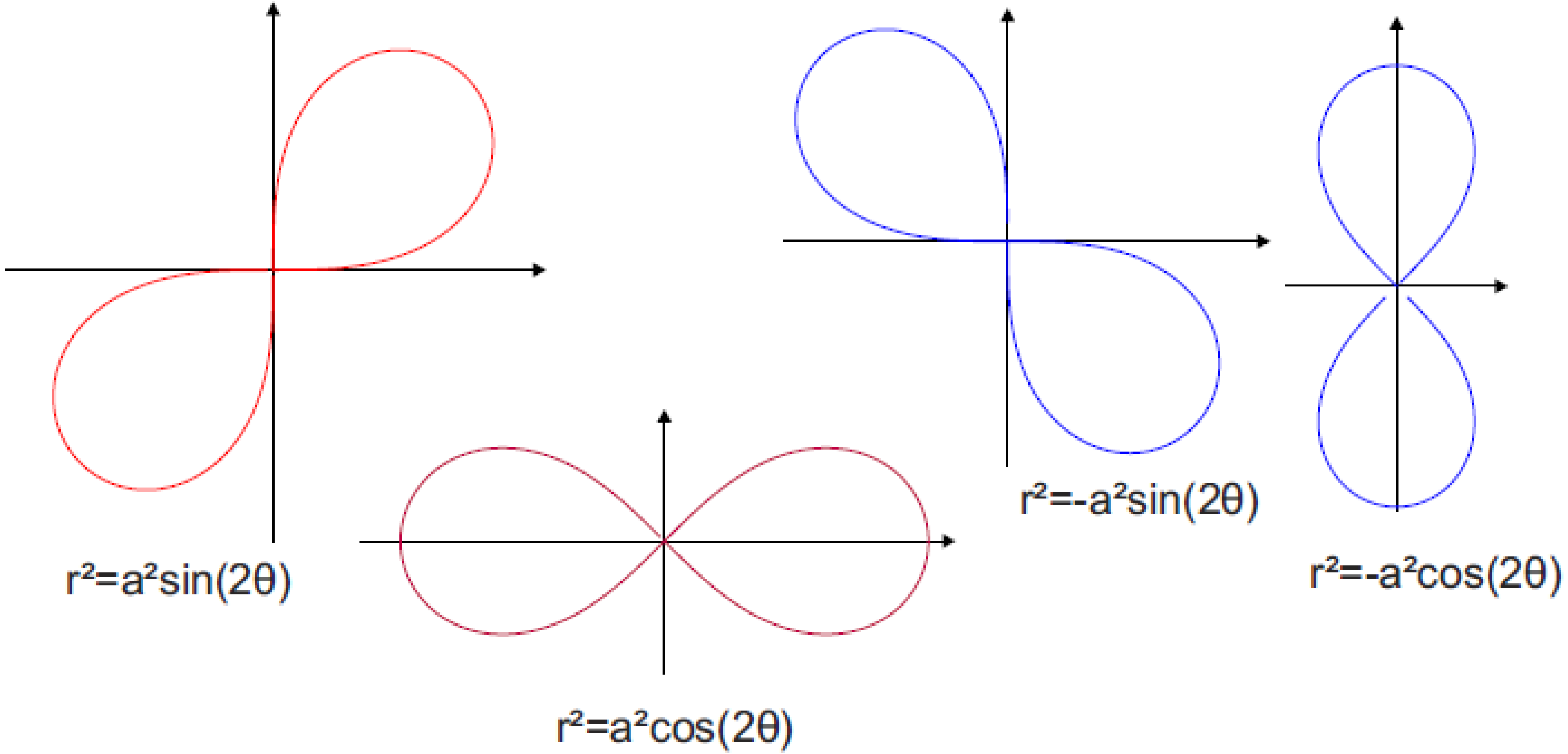

Figura 10: Lemniscatas

Espirais

As equações seguintes representam algumas espirais.

1. Espiral hiperbólica: $r\theta = a, \;\; a > 0$.
2. Espiral de Arquimedes: $r = a\theta, \;\; a > 0$.
3. Espiral logarítmica: $r = e^{a\theta}$.
4. Espiral parabólica: $r^2 = \theta$.

A Figura 12 ilustra estas espirais.

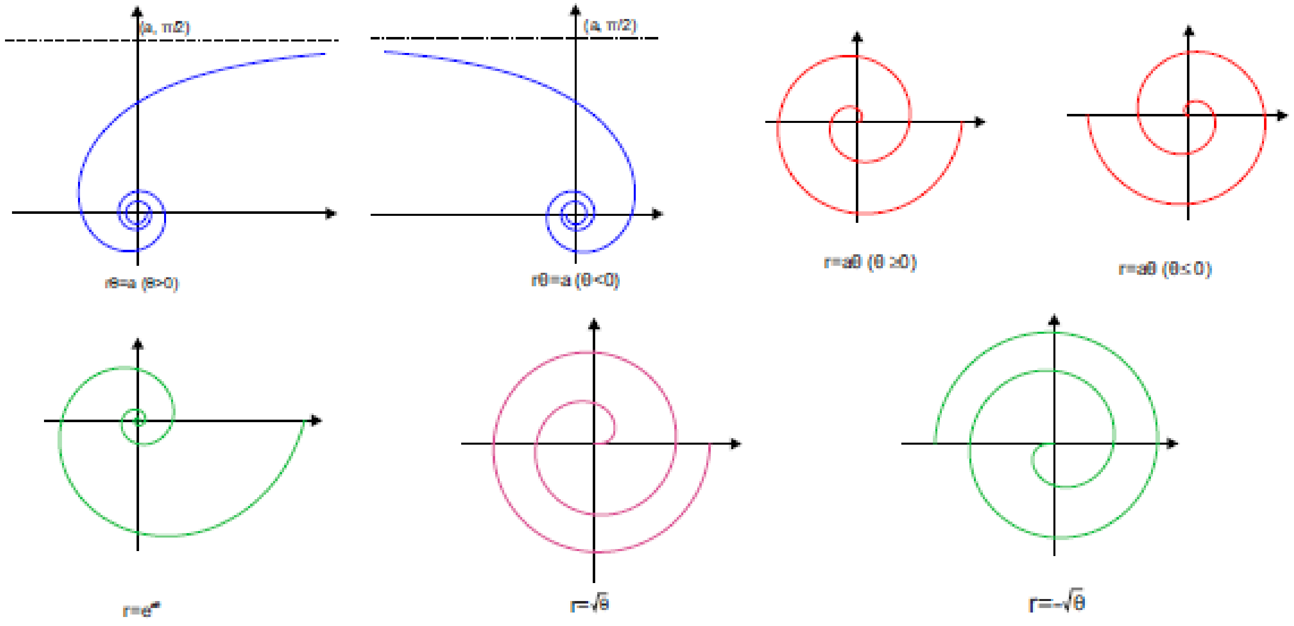

Figura 12: Espirais