Álgebra Linear

Aula 3: Combinação Linear e subespaço gerado

Combinação linear

Definição: Um vetor v em um espaço vetorial V é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ em V quando v pode ser escrito na forma

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

onde $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são escalares.

Assista o vídeo

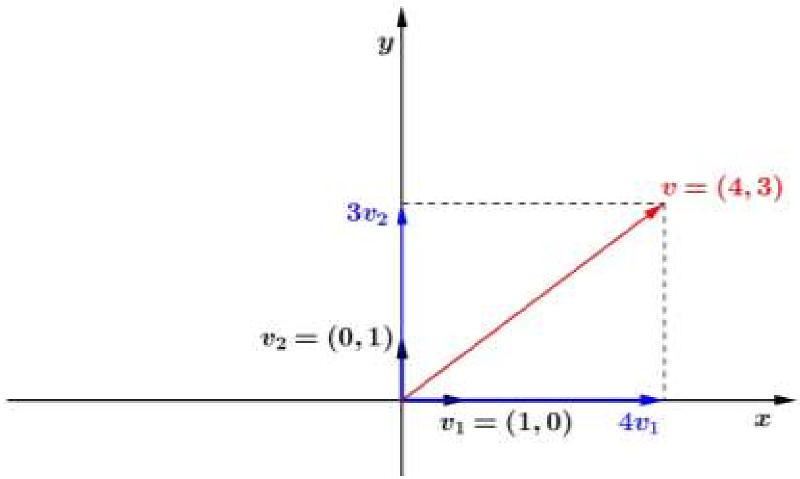
https://www.youtube.com/watch?v=eB7KJKV2k-E&t=1013s

Exemplo 1: *O elemento* $v = (4,3) \in \mathbb{R}^2$ *é combinação linear dos elementos* $v_1 = (1,0)$ *e* $v_2 = (0,1)$.

De fato, v pode ser escrito como:

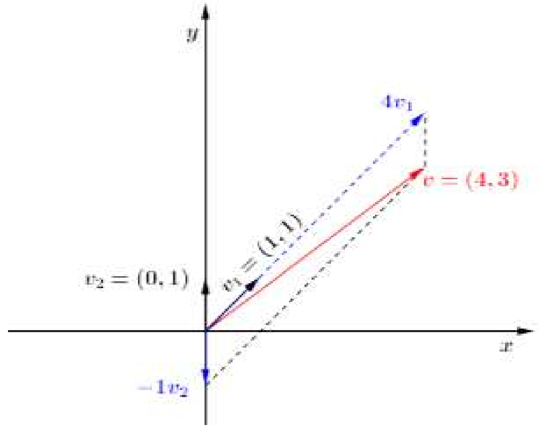
$$v = (4,3) = 4(1,0) + 3(0,1) = 4v_1 + 3v_2$$

Assim, existem os escalares $\alpha_1 = 4$ e $\alpha_2 = 3$ tais que v pode ser escrito como $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Logo, v é combinação linear de v_1 e v_2.



Exemplo 2: *Considere o mesmo vetor $v = (4,3) \in \mathbb{R}^2$ do exemplo anterior, ele também pode ser escrito como combinação linear dos vetores $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (0,1)$ da forma:*

$$v = (4,3) = 4(1,1) - 1(0,1)$$



Exemplo 3 : *O elemento $v = (7,8,9) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear de $v_1 = (2,1,4)$, $v_2 = (1,-1,3)$ e $v_3 = (3,2,5)$.*

É preciso achar escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ de modo que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \iff (7,8,9) = \alpha_1(2,1,4) + \alpha_2(1,-1,3) + \alpha_3(3,2,5) \iff$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rl} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = & 7 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = & 8 \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = & 9 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{escalonamento}} \left\{ \begin{array}{rr} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = & 8 \\ 21\alpha_2 - 7\alpha_3 = & -63 \\ -2\alpha_3 = & -6 \end{array} \right.$$

Obtemos um sistema linear cuja solução é: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -2$ e $\alpha_3 = 3$.

Assim, $\boxed{v = 0v_1 - 2v_2 + 3v_3}$. Note que, como $\alpha_1 = 0$, podemos concluir que v também é combinação linear apenas de v_2 e v_3: $v = -2v_2 + 3v_3$.

Exemplo 4: *O elemento* $p(x) = 6x^2 + 11x + 6 \in P^2(\mathbb{R})$ *pode ser escrito como combinação linear dos polinômios* $p_1(x) = 4x^2 + x + 2,\ p_2(x) = 3x^2 - x + 1$ *e* $p_3(x) = 5x^2 + 2x + 3$.

Vamos encontrar escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ de modo que:

$$p(x) = \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) \Longrightarrow 6x^2 + 11x + 6 = \alpha_1(4x^2 + x + 2) + \alpha_2(3x^2 - x + 1) + \alpha_3(5x^2 + 2x + 3)$$

Para que os polinômios sejam iguais, basta que cada coeficiente de cada termo do polinômio seja igual. Obtemos então o seguinte sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{rr} 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = & 6 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = & 11 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = & 6 \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema obtemos: $\alpha_1 = 4,\ \alpha_2 = -5$ e $\alpha_3 = 1$.

Assim, $\boxed{p(x) = 4p_1(x) - 5p_2(x) + p_3(x)}$.

Exemplo 5 : *A matriz* $A = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$, *pode ser escrita como combinação linear das matrizes:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Temos que encontrar escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rr} 4\alpha_1 + \alpha_2 + 0 = & 6 \\ 0 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = & -8 \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = & -1 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = & -8 \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema obtemos $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = -3.$

Assim, $\boxed{A = A_1 + 2A_2 - 3A_3}$.

Subespaço Gerado

- Seja V um espaço vetorial. Consideremos um subconjunto $A = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$, $A \neq \emptyset$. O conjunto S de todos os vetores de V que são combinações lineares dos vetores de A é um **subespaço vetorial** de V.
  Simbolicamente, podemos escrever $S = \{v \in V: v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n\}$

JUSTIFICATIVA de que S é subespaço de V:
Sejam u e v vetores de S. Então podemos escrever

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$
$$u = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_nv_n$$

Assim,

i. $u + v = (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + \cdots + (a_n + b_n)v_n$ é um vetor de S

ii. $kv = (ka_1)v_1 + (ka_2)v_2 + \cdots + (ka_n)v_n$ é um vetor de S

Tendo em vista que $u + v \in S$ e que $kv \in S$, por serem combinações lineares de $v_1, v_2, \cdots, v_n$, conclui-se que S é um subespaço vetorial de V.

Subespaço Gerado

- O subespaço S é chamado de **subespaço gerado** pelos vetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$, ou gerado pelo conjunto A, e denota-se:

$$S = ger\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \text{ ou } S = ger\{A\}$$

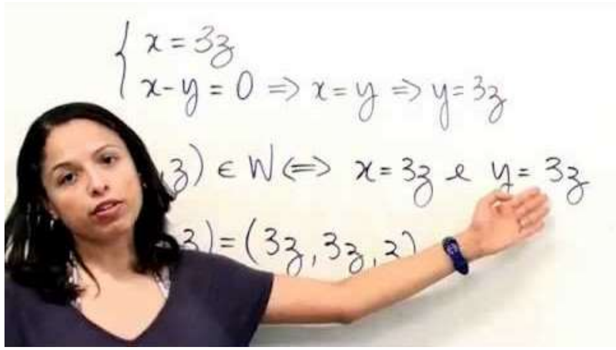
- Os vetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ são chamados de geradores do subespaço S, enquanto que A é o conjunto gerador de S.

- Note que $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset S$.

Obs.: Alguns livros, ao invés de denotar $S = ger\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, utilizam uma notação alternativa, como:

1. $S = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$
2. $S = span\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$

Sugestões de vídeos para assistir:



https://www.youtube.com/watch?v=nRJViGVC6iU&t=43s

https://www.youtube.com/watch?v=lqfAoCG1CMY

https://www.youtube.com/watch?v=zE9g8XT2oMg

Exemplos

1) Os vetores $i = (1,0)$ e $j = (0,1)$ geram o $\mathbb{R}^2$, pois qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ é combinação linear de i e j:

$$(x,y) = xi + yj = x(1,0) + y(0,1)$$

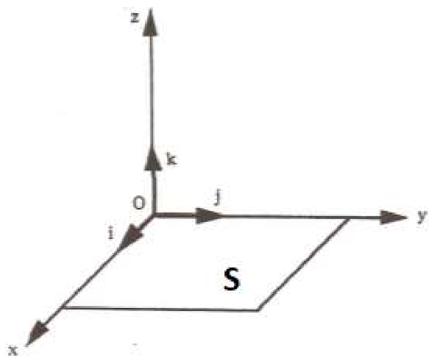
Então:

$$\mathbb{R}^2 = ger\{(1,0),(0,1)\}$$

2) Os vetores $i = (1,0,0)$ e $j = (0,1,0)$ do $\mathbb{R}^3$ geram o subespaço $S = \{(x,y,0); x, y \in \mathbb{R}\}$, pois

$$(x,y,0) = x(1,0,1) + y(0,1,0)$$

Então $\mathrm{S} = ger\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ é um subespaço do $\mathbb{R}^3$ e representa o plano xoy



3. Mostre que o $\mathbb{R}^2$ é gerado pelos vetores do conjunto $A = \{v_1 = (1,2), v_2 = (3,5)\}$.

Para que o conjunto A gere o $\mathbb{R}^2$ é necessário que qualquer vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ seja combinação linear de v_1 e v_2, isto é, devem existir números reais a_1 e a_2 , tais que:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2$$

$$(x,y) = a_1(1, 2) + a_2 (3,5)$$

$$(x, y) = (a_1, 2a_1) + (3a_2, 5a_2)$$

$$(x,y) = (a_1 + 3a_2,\ 2a_1 + 5a_2).$$

Dessa igualdade resulta o sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 = x \\ 2a_1 + 5a_2 = y \end{cases}$$

que, resolvido em função de x e y, fornece:

$a_1 = -5x + 3y$ e $a_2 = 2x - y$,

Portanto, $(x, y) = (-5x + 3y)(1,2) + (2x - y)(3,5)$

Para cada x e y, o sistema é possível com uma única solução. Por exemplo:
Se $v = (3, -2)$, tem-se que a_1= -21 e $a_2 = 8$, ou seja,

$$(3, -2) = -21(1,2) + 8(3,5)$$

Como o sistema tem solução, independente dos valores de x e y, significa que é possível obter qualquer vetor (x, y) como combinação linear dos vetores de A. Logo,

$$\mathbb{R}^2 = ger\{(1,2), (3,5)\}$$

4. Verifique se os vetores $u = (1,0), v = (0,1)$ e $w = (7,4)$ geram o $\mathbb{R}^2$.

Para que os vetores gerem o $\mathbb{R}^2$ é necessário que qualquer vetor $r = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ seja combinação linear de u, v e w, isto é, devem existir números reais $a_1, a_2\ e\ a_3$, tais que:

$$r = (x, y) = a_1u + a_2v + a_3w$$
$$(x, y) = a_1(1,0) + a_2(0,1) + a_3(7,4)$$
$$(x, y) = (a_1 + 7a_3, a_2 + 4a_3)$$

Dessa igualdade resulta o sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 7a_3 = x \\ a_2 + 4a_3 = y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_1 = x - 7a_3 \\ a_2 = y - 4a_3 \end{cases}$$

O sistema tem infinitas soluções, pois a_3 é uma variável livre. Por exemplo, se (x,y)=(3,10), temos:
a_1=3 - 7 a_3 e $a_2 = 10 - 4a_3$

Para cada valor de a_3 o sistema terá uma solução diferente.

Portanto há infinitas formas de obter um vetor (x,y) como combinação linear de u, v e w.

Assim, $\mathbb{R}^2 = ger\{u, v, w\}$

Observação:

- Nos exemplos 1 e 3 mostramos que o $\mathbb{R}^2$ pode ser gerado por conjuntos formados por dois vetores. Já no exemplo 4 mostramos que o $\mathbb{R}^2$ pode ser gerado por três vetores. De modo análogo pode-se mostrar que o $\mathbb{R}^3$ pode ser gerado por três, quatro ou mais vetores.

- Tal fato sugere que um espaço vetorial dado pode ser gerado por um número variável de vetores. No entanto, existe um número mínimo de vetores que gera um espaço vetorial, como nos sugerem os próximos dois exemplos.

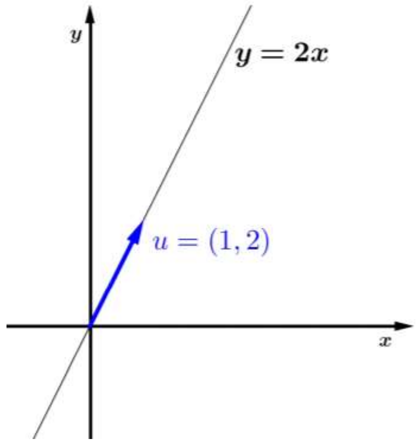
6. O vetor v_1=(1,2) gera o $\mathbb{R}^2$?

Para que o vetor v_1 gere o $\mathbb{R}^2$ é necessário que qualquer vetor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ seja combinação linear de v_1.

$$(x, y) = a(1,2) \Rightarrow x = a \ e \ y = 2a \Rightarrow y = 2x$$

Isso significa que não é todo vetor (x, y) que é gerado por $(1,2)$. É necessário que $y = 2x$. Ou seja, somente vetores da forma $(x, 2x)$ são gerados por $(1,2)$.

Note que o subespaço gerado pelo vetor $(1,2)$ é $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$.



Concluímos então que, para gerar o $\mathbb{R}^2$ são necessários no mínimo dois vetores. Entretanto, estes dois vetores devem ser não-colineares, como nos exemplos 1 e 3. Pois se forem colineares, estarão numa mesma reta e, portanto vão gerar esta reta.

7. Encontre o subespaço gerado pelos vetores $u = (1,2,3)$ e $w = (2,0,-3)$.

Seja $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Vamos encontrar as condições sobre x, y e z para que $v = (x,y,z)$ seja um vetor de $S = ger\{u, v\}$

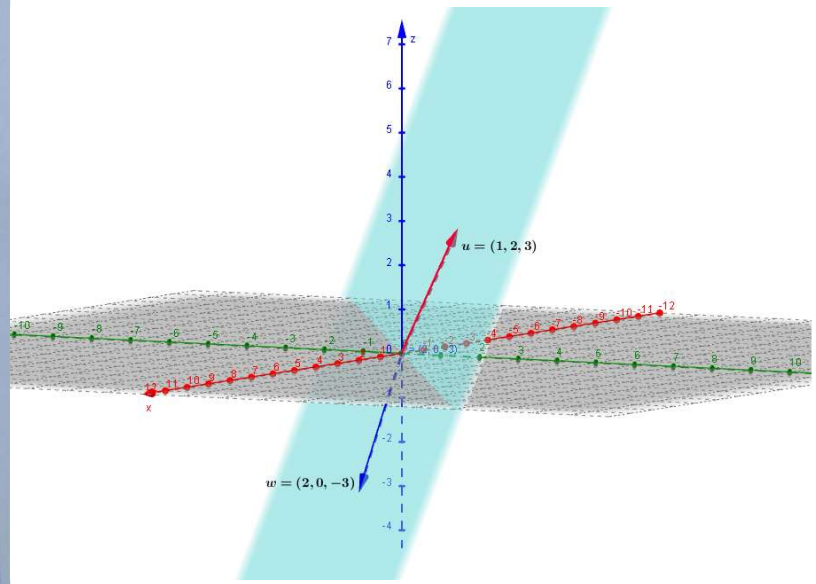
$$v = (x,y,z) = a(1,2,3) + b(2,0,-3)$$

$$\begin{cases} a + 2b = x \\ 2a = y \\ 3a - 3b = z \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & -3 & z \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -4 & y-2x \\ 0 & -9 & z-3x \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & \frac{2x-y}{4} \\ 0 & -9 & z-3x \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & \frac{2x-y}{4} \\ 0 & 0 & \frac{6x-9y+4z}{4} \end{array}\right]$$

O sistema só é possível se $6x - 9y + 4z = 0$ significa que apenas vetores que satisfizerem esta eq. é que serão gerados por u e v.

Logo $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 6x - 9y + 4z = 0\}$



Observações:

- 1 vetor do $\mathbb{R}^3$ gera uma reta no $\mathbb{R}^3$
- 2 vetores não colineares no $\mathbb{R}^3$ geram um plano.
- Para gerar todo o $\mathbb{R}^3$ são necessários no mínimo 3 vetores não-colineares.

8. $P_2 = ger\{x^2, x, 1\}$, pois qualquer polinômio $p(x) \in P_2$, é ele próprio uma combinação linear de $x^2, x, 1$:

$p(x) = ax^2 + bx + c$= $a.x^2$ $+b.x + c$.1, onde a, b e c são escalares.

9. $\mathrm{M}(2,2) = \mathrm{ger}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$, pois qualquer matriz $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \in \mathrm{M}(2,2)$ pode ser escrita da forma

$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} =$ a$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$, onde a,b,c,d são escalares.

Exercícios propostos:

1. Encontre o subespaço W gerado pelos vetores $v_1 = (2,1,0,3)$, $v_2 = (3,-1,5,2)$, $v_3 = (-1,0,2,1)$?

2. Os polinômios $x^2 + 2x$, $2x^2 - 1$ e $x^2 - x - 2$ geram P_2?

3. Enconstre o subespaço U gerado pelas matrizes do conjunto $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \right\}$

4. Para cada subespaço vetorial abaixo, encontre o conjunto de geradores S.

a. $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2) / \; b = a + 2d \right\}$

b. $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 / \; 2a + 3b + d = 0 \; e \; a + b + c + d = 0\}$