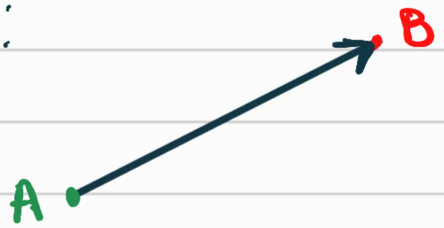
Segmento orientado

• Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos, o primeiro chamado origem e o segundo chamado extremidade.

Representação:



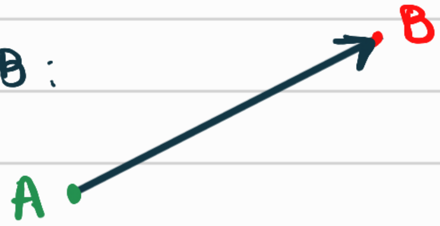
"segmento AB"

A seta caracteriza o sentido do segmento.

• Um segmento é nulo se a origem e a extremidade coincidem.

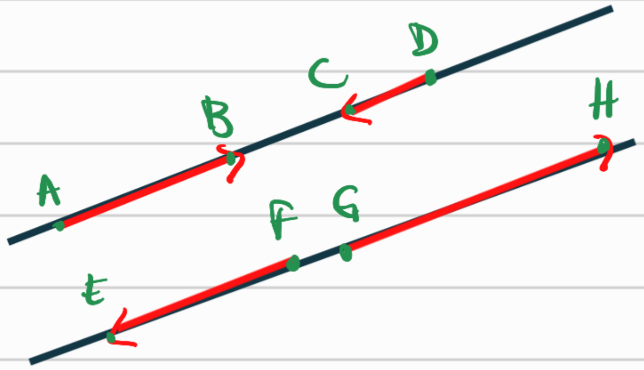
• Se AB é um segmento orientado, BA é oposto de AB:

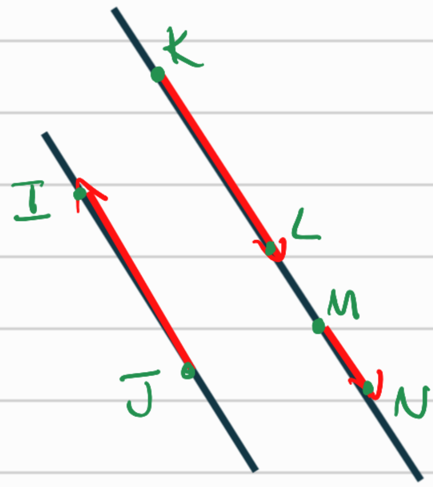
AB:



BA:

Direção e sentido:





- Dois segmentos orientados têm a mesma direção se estão sobre retas paralelas.

Quando dois segmentos possuem a mesma direção, podemos comparar seus sentidos

Observe que
AB, DC, FE e GH têm mesma direção. Destes, AB e GH têm o mesmo sentido, assim como DC e FE.

Do mesmo modo, vemos que JI, KL e MN têm a mesma direção. Destes, KL e MN têm o mesmo sentido e podemos dizer que JI é oposto de KL e MN.

- Comprimento

Representamos por $\overline{AB}$ o comprimento de um segmento orientado AB.
Note que $\overline{AB} = \overline{BA}$.

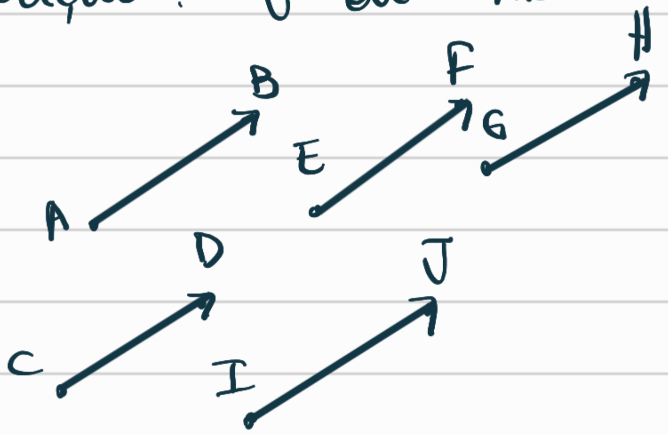
Dizemos que dois segmentos orientados AB e CD são equipolentes quando têm a mesma direção, sentido e comprimento.

GAN PRO

Vetor

Vetor determinado por um segmento orientado AB é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB.

Notação: $\vec{v}$ ou $\overrightarrow{AB}$

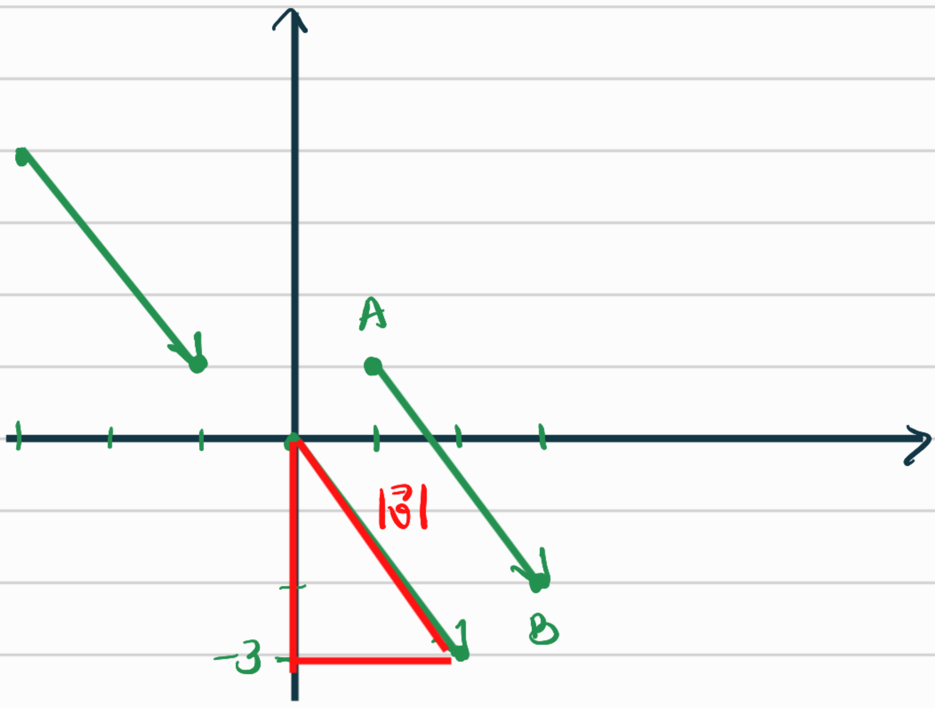


Assim, um mesmo vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é determinado por uma infinidade de segmentos orientados, chamados de representantes desse vetor, todos equipolentes entre si.

Definimos então a direção e o sentido de $\vec{v}$ como a direção e o sentido de qualquer representante de $\vec{v}$ e vamos chamar de módulo de $\vec{v}$ o comprimento de qquer representante de $\vec{v}$.

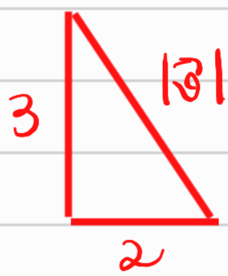
O módulo de $\vec{v}$ se indica por $|\vec{v}|$.

Exemplo: Considere o segmento orientado AB no sistema cartesiano, com $A = (1,1)$ e B o ponto $(3,-2)$:



Observe que todos os segmentos orientados desenhados acima são representantes do mesmo vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Observe também que



$$|\vec{v}|^2 = 3^2 + 2^2 = 9+4 = 13$$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{13}$$

ALGA

Outras definições:

(1) Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais se AB e CD são equipolentes.

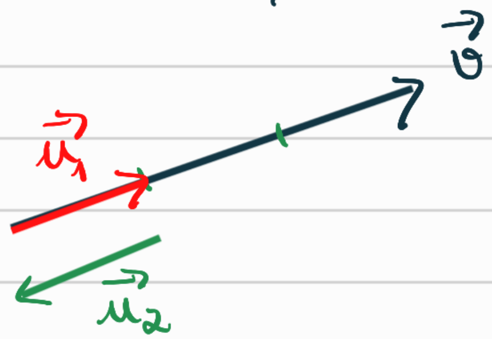
(2) O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ é chamado vetor nulo se AB é o segmento nulo.

Notação: $\vec{0}$

(3) Dado o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, o vetor $\overrightarrow{BA}$ é o oposto de $\overrightarrow{AB}$ e se indica por $-\overrightarrow{AB}$ ou $-\vec{v}$.

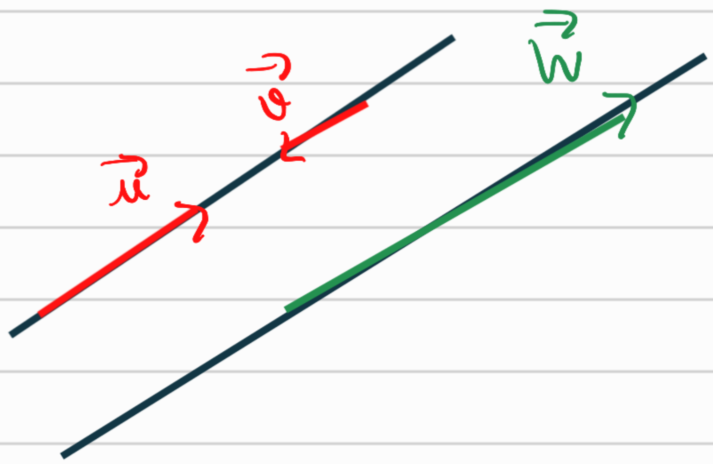
(4) O vetor $\vec{v}$ é chamado de unitário se $|\vec{v}| = 1$.

(5) O versor de um vetor $\vec{v}$ é o vetor unitário com a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{v}$.
Exemplo

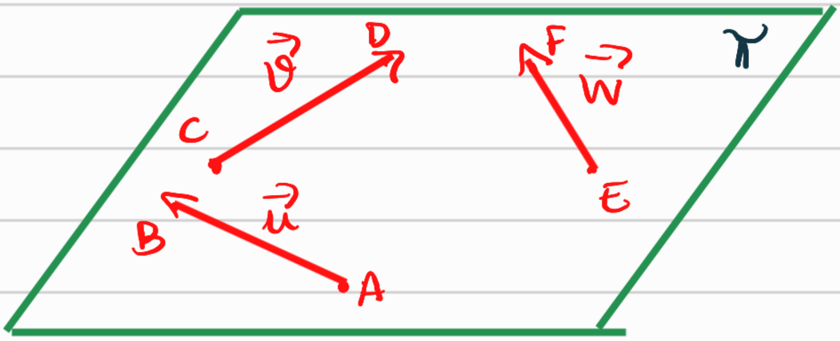


O vetor $\vec{u}_1$ é o versor de $\vec{v}$.
Observe que $\vec{u}_2$ é unitário, tem a mesma direção de $\vec{v}$, mas tem sentido oposto.
Logo, não é versor de $\vec{v}$.

(6) Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se tiverem a mesma direção. Em outras palavras, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se tiverem representantes AB e CD pertencentes a uma mesma reta ou a retas paralelas.



(7) Os vetores não nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são ditos coplanares se possuem representantes AB, CD e EF pertencentes a um mesmo plano π.



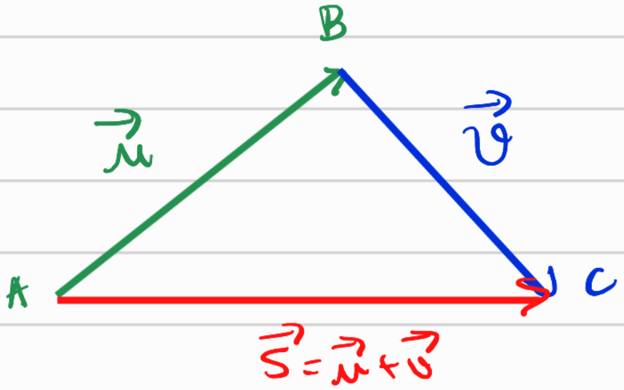
Observação: dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ quaisquer são sempre coplanares. Para enxergar isso, basta tomar representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com a mesma origem.

(mostrar no geogebra).

Operações com vetores

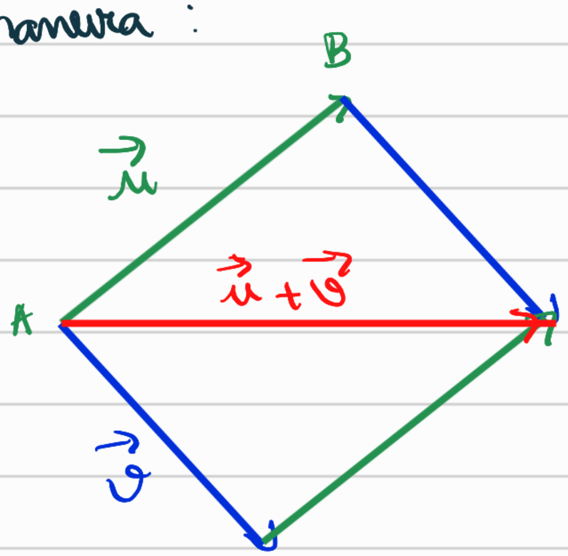
- Adição de vetores

Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados pelos segmentos orientados AB e BC:



O segmento orientado AC representa o vetor soma $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$.

Outra maneira:



Propriedades: Dados $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores,

(a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

(b) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

(c) O vetor nulo $\vec{0}$ é o único tal que

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

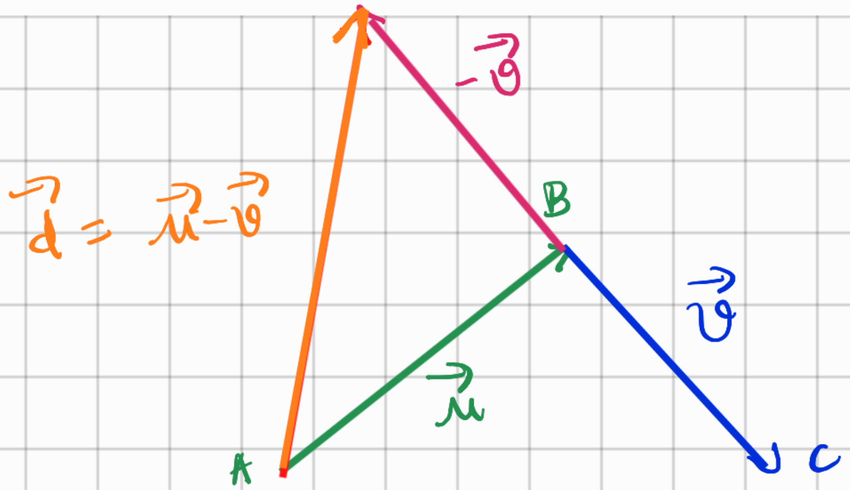
(d) $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ (desenhar)

Diferença de vetores:

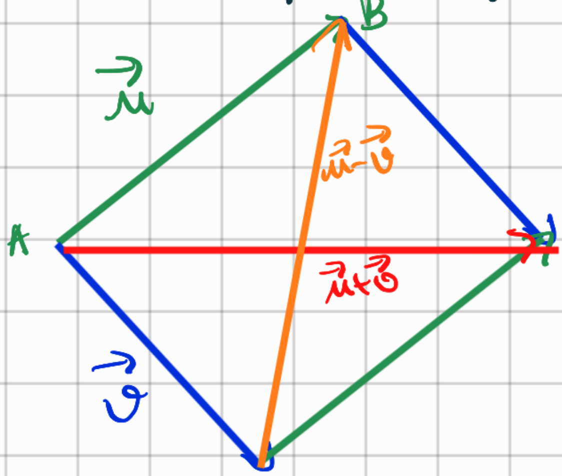
1ª maneira: basta fazer

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Usando os vetores do exemplo anterior:

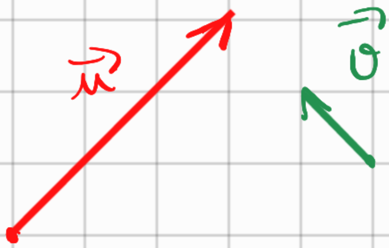


2ª maneira: regra do paralelogramo

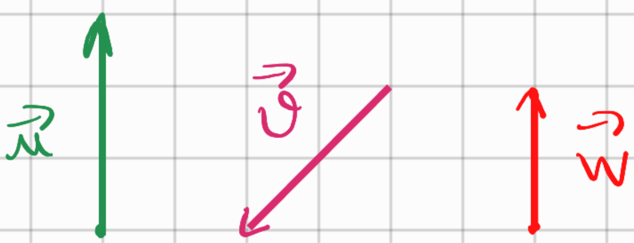


Exemplos: Efetue as operações a seguir:

(a) Encontre $\vec{u}+\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$ para

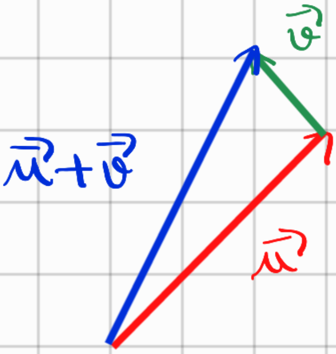


(b) Encontre $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ e $\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}$ para

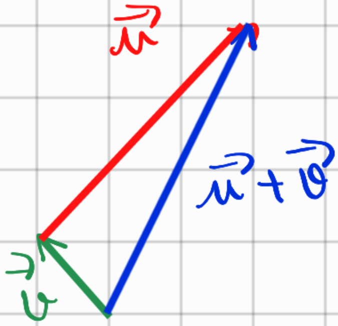


Respostas:

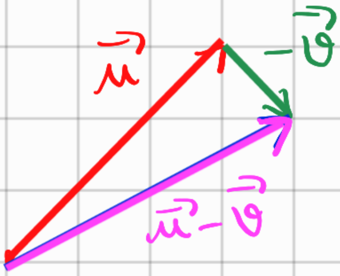
(a) $\vec{u}+\vec{v}$:



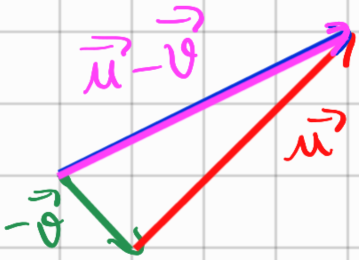
ou



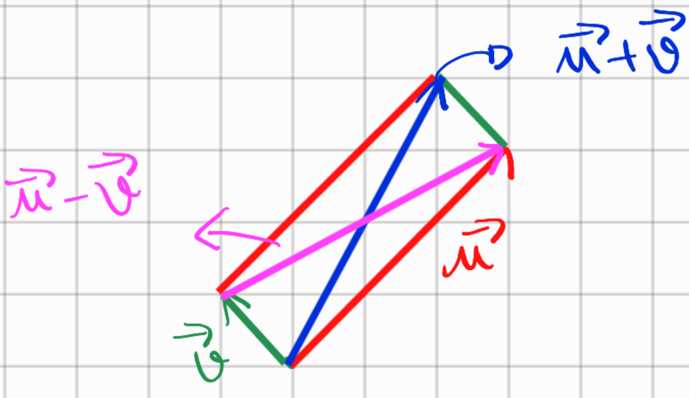
$\vec{u}-\vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$:



ou

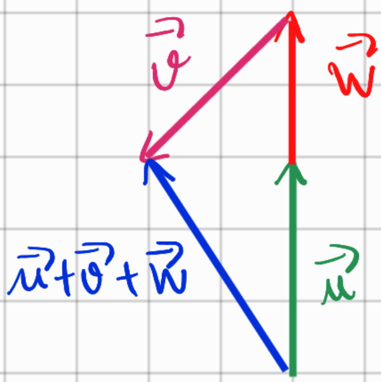


ou ainda, os dois juntos:



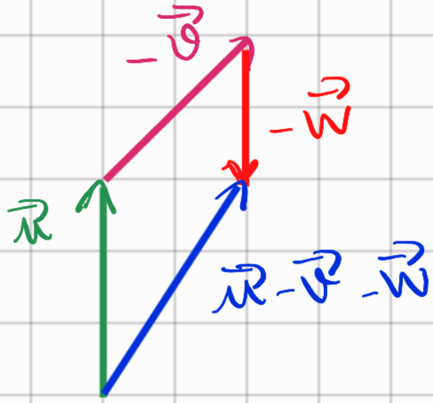
regra do paralelogramo

(b) $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$



ou

$\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$:



Observe que $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são colineares, logo

As duas maneiras de efetuar as operações são equivalentes.

Multiplicação por um número real

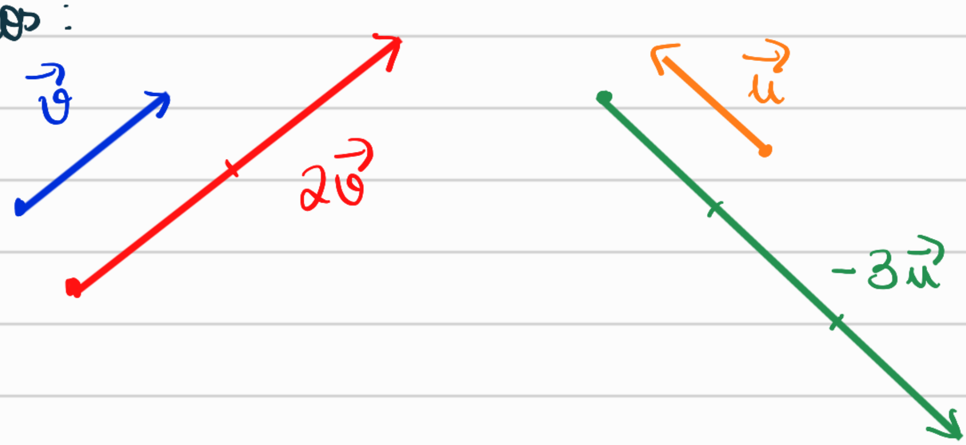
Dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um número real $k \neq 0$, chama-se produto do número real k pelo vetor $\vec{v}$ o vetor $\vec{p} = k\vec{v}$, tal que

(a) módulo: $|\vec{p}| = |k\vec{v}| = |k|\,|\vec{v}|$

(b) direção: a mesma de $\vec{v}$

(c) sentido: o mesmo de $\vec{v}$ se $k > 0$,
o contrário de $\vec{v}$ se $k < 0$.

Exemplos:



OBS:

(i) se $k = 0$, então $k\vec{v} = \vec{0}$

se $\vec{v} = \vec{0}$, então $k\vec{v} = \vec{0}$ p/ qualquer k.

ALGA

!! (ii) dados dois vetores colineares $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sempre existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\boxed{\vec{u} = k\vec{v}}$.

(iii) Seja $\vec{v}$ um vetor não nulo e considere o vetor

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}.$$

Observe que $\vec{u}$ tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{v}$, pois $\frac{1}{|\vec{v}|} > 0$.

Ainda,

$$|\vec{u}| = \left|\frac{1}{|\vec{v}|}\right| |\vec{v}| = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot |\vec{v}| = 1$$

Portanto, $\vec{u}$ é o versor de $\vec{v}$.

Assim, para qualquer vetor $\vec{v} \neq 0$, o seu versor é escrito como

$$\boxed{\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}$$

Propriedades

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores quaisquer e a e b números reais. Então

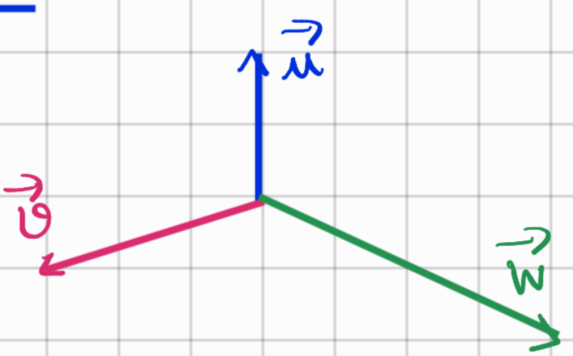
I) $a(b\vec{v}) = (ab)\vec{v}$

II) $(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$

III) $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

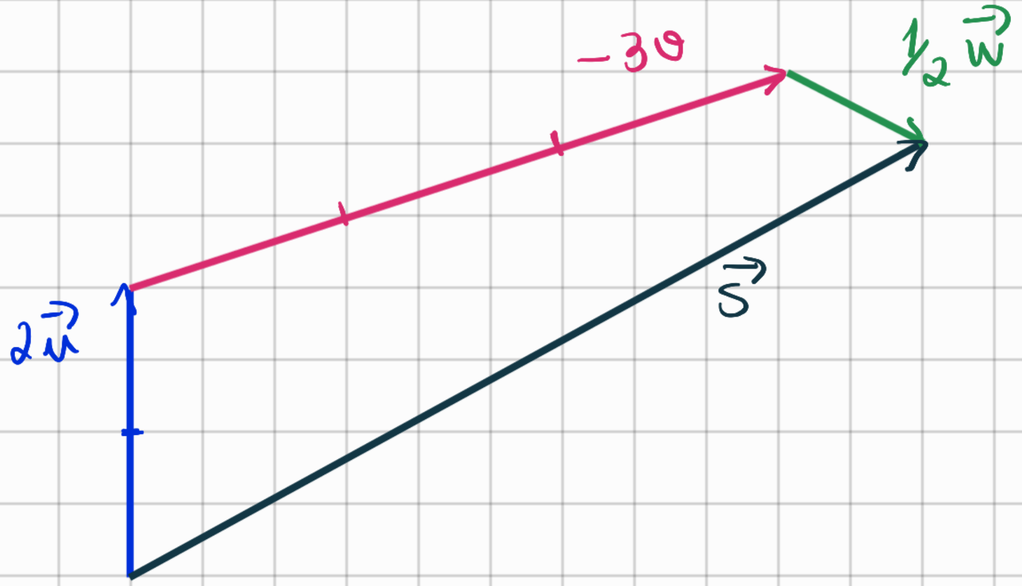
IV) $1\vec{v} = \vec{v}$.

Exemplo ① Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$

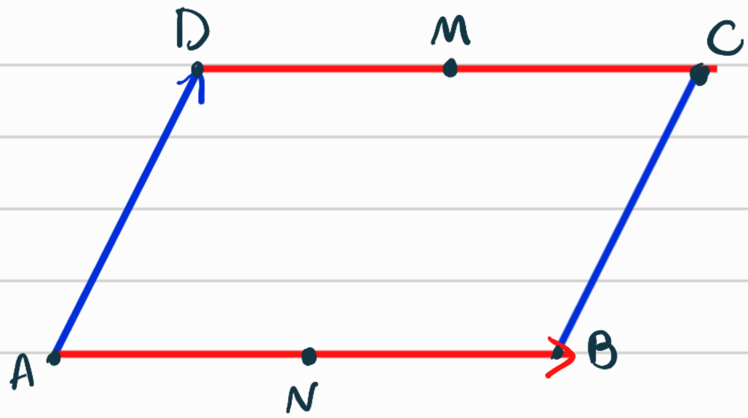


GAN CCI

construa o vetor $\vec{s} = 2\vec{u} - 3\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$



② O paralelogramo ABCD é determinado pelos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AD}$, sendo M e N pontos médios dos lados DC e AB, respectivamente. Complete:



(a) $\vec{AD} + \vec{AB}$

(b) $\vec{BA} + \vec{DA}$

(c) $\vec{AC} - \vec{BC}$

(d) $\vec{AN} + \vec{BC}$

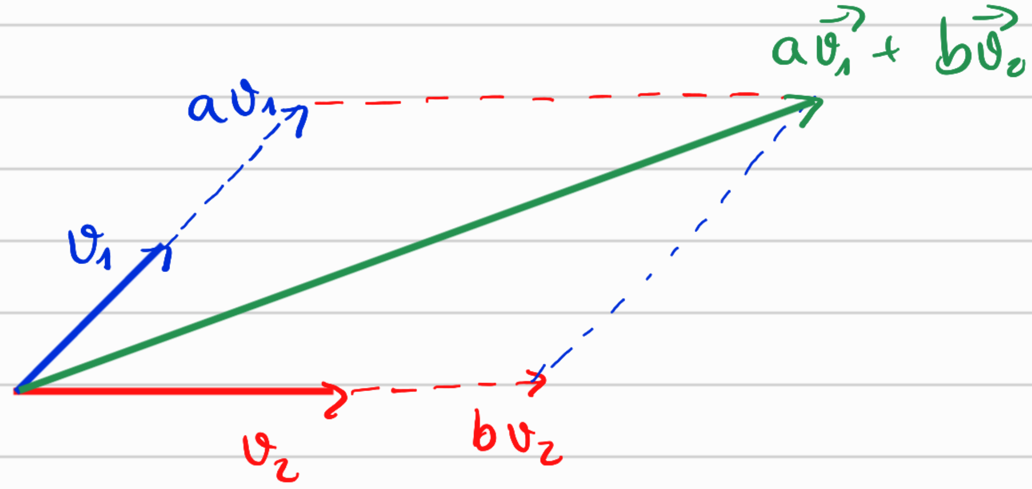
(e) $\vec{MD} + \vec{MB}$

(f) $\vec{BM} - \frac{1}{2}\vec{DC}$

Respostas: (a) $\vec{AC}$
(b) $\vec{CA}$
(c) $\vec{AB}$
(d) $\vec{AM}$
(e) $\vec{MN}$
(f) $\vec{BD}$

$\boxed{\text{OBS}}$ Sejam $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ dois vetores não colineares.

Sabemos que eles são coplanares.
Considere, então, os vetores $a\vec{v}_1$ e $b\vec{v}_2$:



Observe que os três vetores $a\vec{v}_1$, $b\vec{v}_2$ e $a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$ podem ser representados no mesmo plano.

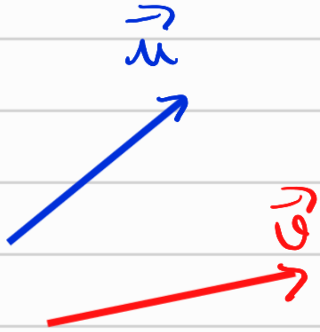
Mais do que isso, qualquer vetor representado no plano de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ será do tipo

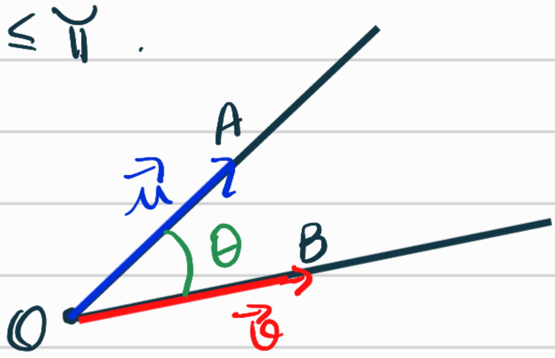
$$a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2, \text{ para } a \text{ e } b \text{ reais.}$$

Ângulo de dois vetores

O ângulo de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos é o ângulo θ formado pelas semirretas OA e OB com

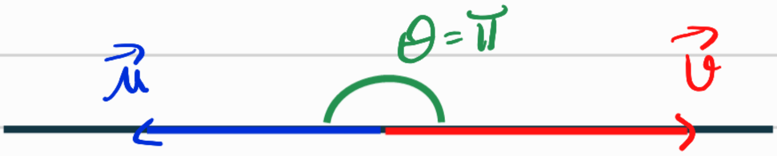
$$0 \leq \theta \leq \pi .$$



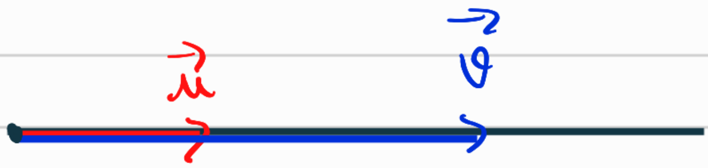


Observações:

(a) Se $\theta = \pi$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesma direção e sentidos contrários:



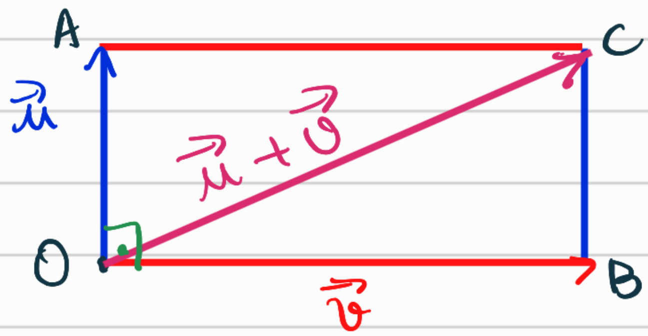
(b) Se $\theta = 0$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesma direção e mesmo sentido:



(c) Se $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais.

Indica-se $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Nesse caso, temos

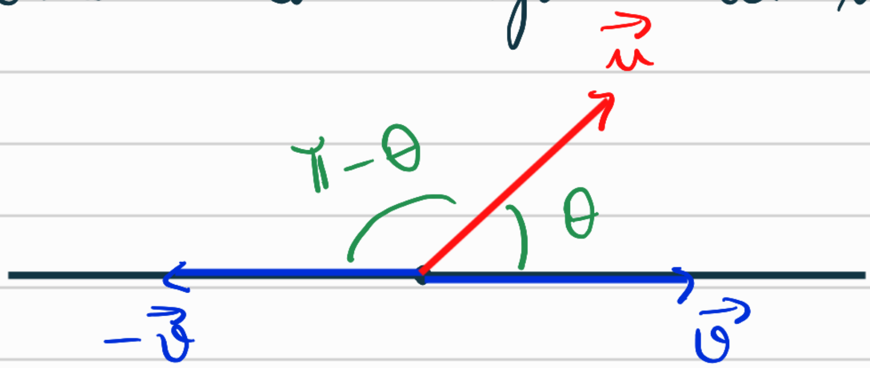


Observe que vale Pitágoras:

$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = |\vec{u}+\vec{v}|^2.$$

(d) O vetor nulo é considerado ortogonal a qualquer vetor.

(e) O ângulo formado por $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ é o suplemento do ângulo de $\vec{u}$ e $\vec{v}$:



Exercício: Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60°, determinar o ângulo formado pelos vetores

(a) $\vec{u}$ e $-\vec{v}$
(b) $-\vec{u}$ e $\vec{v}$
(c) $-\vec{u}$ e $-\vec{v}$
(d) $2\vec{u}$ e $3\vec{v}$

Respostas:

(a) $180^\circ - \underset{\vec{u},\vec{v}}{60^\circ} = 120^\circ$

(b) $180^\circ - \underset{\vec{u},\vec{v}}{60^\circ} = 120^\circ$

(c) $180^\circ - \underset{-\vec{u},\vec{v}}{120^\circ} = 60^\circ$

(d) O mesmo de $\vec{u}$ e $\vec{v}$: 60°.