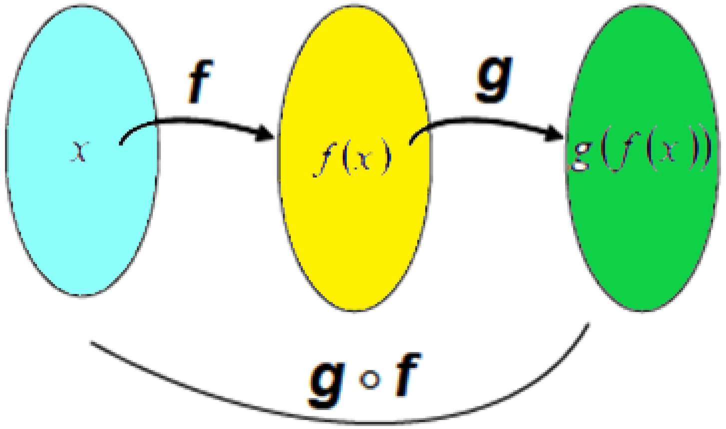
Função Composta

Definição: Dadas duas funções f e g, a **função composta** de g com f, denotada por $g \circ f$ é definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



O domínio de $g \circ f$ é o conjunto de todos os pontos x do domínio de f tais que $f(x)$ está no domínio de g. Simbolicamente,

$$D(g \circ f) = \{x \in Df : f(x) \in Dg\}.$$

Exemplo. Considere a função $y = g(x)$ apresentada na Figura 1 e que f é a função ilustrada na Figura 2:

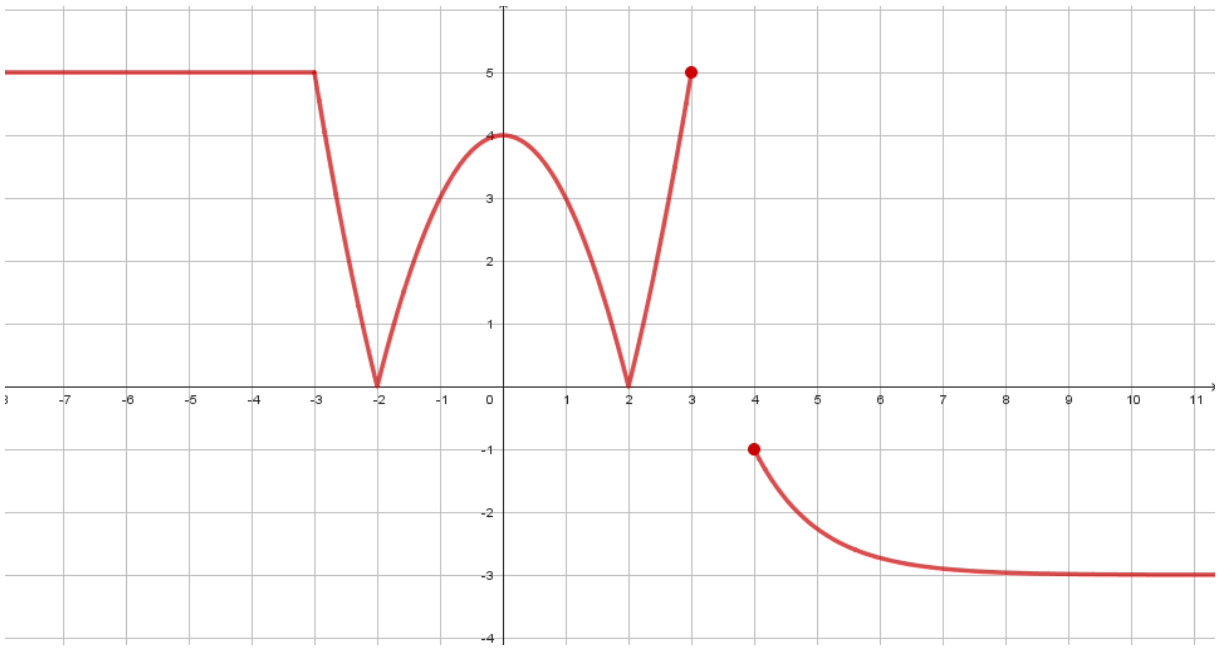


Figura 1 – Gráfico da função $y = g(x)$

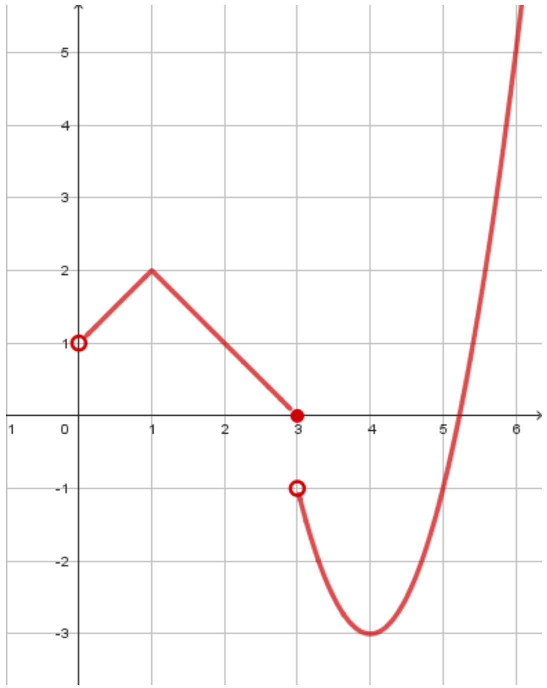


Figura 2 – Gráfico da função $y = f(x)$

Se possível, usando a definição de função composta, obtenha o valor de:

a) $(gof)(4)$;

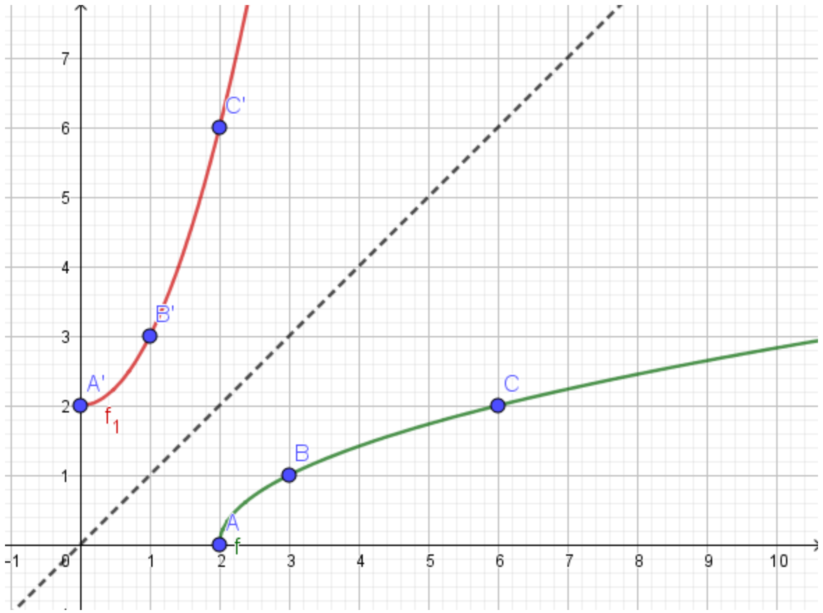
b) $(fog)(1)$;

c) $(gog)(-2)$.

Exemplo. Sejam $f: [2, +\infty) \to [0, +\infty)$ e g: $[0, +\infty) \to [2, +\infty)$ definidas por

$$f(x) = \sqrt{x-2} \text{ e } g(x) = x^2 + 2.$$

Obtenha, se possível, $(gof)(x)$ e $(fog)(x)$.



Função Inversa

DEF: Se as funções f e g satisfazem as duas condições

$$(gof)(x) = g(f(x)) = x, \text{ para todo } x \in Df.$$
$$(fog)(x) = f(g(x)) = x, \text{ para todo } x \in Dg.$$

então, dizemos que f e g são *funções inversas*.

Se usarmos a notação f^{-1}, em vez de g, e se usarmos x como variável independente, temos que se f e f^{-1} são inversas, então:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x, \forall x \in Df,$$
$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x, \forall x \in Df^{-1}.$$

Como encontrar a função inversa?

De forma resumida, para encontrar a função inversa deve-se:
1. Deve-se isolar a variável independente x;
2. Troca-se a variável x pela variável y e vice-versa.

Observações:

- $Df = Imf^{-1}$ e $Imf = Df^{-1}$
- Existe função inversa de f se, e somente se, f é uma função bijetora.
- Graficamente, f e f^{-1} são simétricas com relação à reta $y = x$.
- **Cuide para não confundir função inversa com inverso de uma função, pois**

$$\boldsymbol{f^{-1}(x) \neq \left(f(x)\right)^{-1} = \frac{1}{f(x)}}$$

Função Injetora:

- $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1\ ) \neq f(x_2\ )$, para todo $x_1, x_2 \in Df$.
- $f(x_1\ ) = f(x_2\ ) \Leftrightarrow x_1 = x_2$, para todo $x_1, x_2 \in Df$.

Função Sobrejetora: conjunto imagem igual ao contradomínio.

Função Bijetora: função injetora e sobrejetora.

Exemplo. Retorne ao primeiro exemplo e avalie se a função g é uma função bijetora, considerando todo o seu domínio. Justifique a sua resposta. Caso g não seja bijetora, faça alguma restrição no domínio e/ou imagem para que ela seja uma função bijetora.

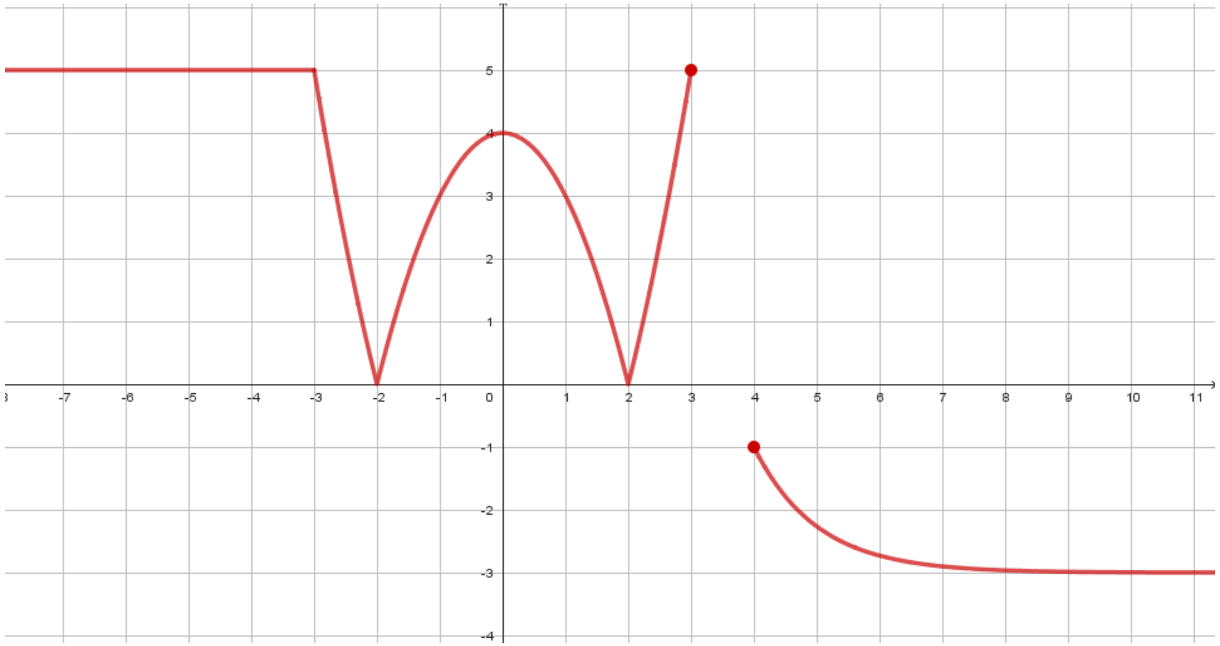
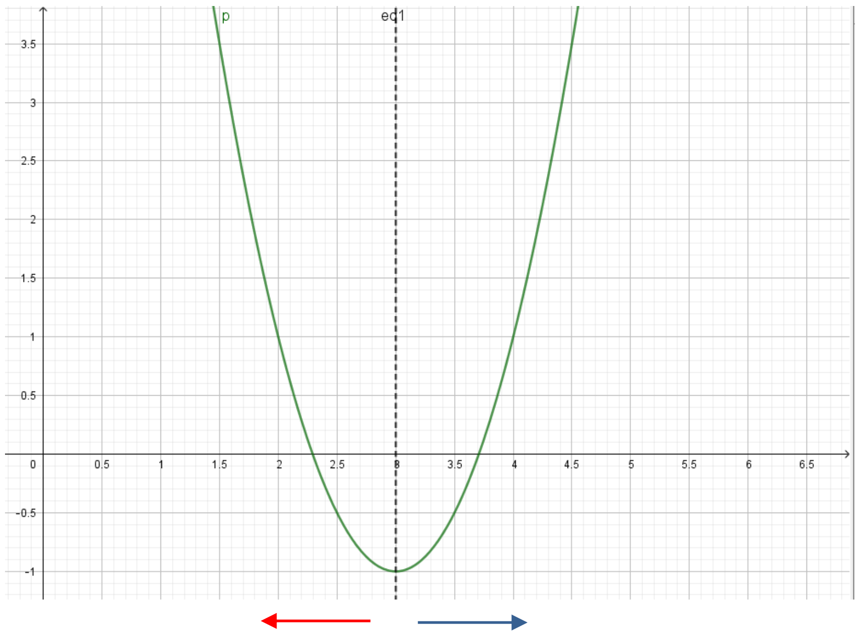


Figura 1 – Gráfico da função $y = g(x)$

Exemplo. Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$y = f(x) = 2x^2 - 12x + 17.$$

Faça uma restrição no domínio e/ou imagem de f para que esta função seja bijetora e determine f^{-1}.



$$x = 3 - \sqrt{\frac{y+1}{2}}$$

$$x = 3 + \sqrt{\frac{y+1}{2}}$$

Completando quadrados, tem-se que:

$$y = f(x) = 2x^2 - 12x + 17 = 2(x-3)^2 - 1$$

Isolando a variável x, tem-se que:

$$x = 3 \pm \sqrt{\frac{y+1}{2}}$$

A função f é bijetora para :

$$f{:}(-\infty, 3] \to [-1, +\infty);\ f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{\frac{x+1}{2}}$$

$$f{:}[3, +\infty) \to [-1, +\infty);\ f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{\frac{x+1}{2}}$$

Exemplo. Mostre que as funções exponenciais e funções logarítmicas são funções inversas.

Seja f uma função exponencial e g uma função logaritmo.
Temos que:

$$f(x) = a^x \quad \text{e} \quad g(x) = log_a(x), \quad \text{com } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

<u>Objetivo</u>: Mostrar que f e g são funções inversas $\Longrightarrow$ $(fog)(x) = (gof)(x) = x$

Pela definição de função composta, temos que:

$$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = a^{g(x)} = a^{log_a(x)} = x$$

$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = log_a\big(f(x)\big) = log_a(a^x) = x\, log_a(a) = x$$

Portanto:

$(fog)(x) = (gof)(x) = x$ ➡ f e g são funções inversas uma da outra.

Exemplo. Considere as funções f e fog definidas por

$$f(x) = ln(x^3) - 2 \text{ e } (fog)(x) = \sqrt{x+1}.$$

Determine g e g^{-1}. A seguir, determine o domínio e a imagem de g^{-1}.