Relações

Def: Uma relação binária R de A em B é
$R \subseteq A \times B$

- **Endorrelação:** Seja A um conjunto $R: A \to A$ é uma endorrelação. Dizemos que R é uma relação em A.
  Notação: $\langle A, R \rangle$

Relação Inversa: Seja $R \subseteq A \times B$ uma relação. A relação Inversa é $R^{-1} \subseteq B \times A$ tal que:
$$R^{-1} = \{\langle b,a \rangle \mid \langle a,b \rangle \in R\}$$

Composição de Relação: Sejam $R: A \to B$ e $S: B \to C$ relações. A composição de R e S, denotado por $S \circ R: A \to C$ é o conjunto $\{\langle a,c \rangle \mid \exists b \in B (aRb \wedge bSc)\}$

Propriedade de Endorrelações

Dado uma endorrelação binária $R \subseteq A^2$:

- **Reflexividade:** todos os elementos se relacionam consigo próprio. $\forall a \in A\ (aRa)$
- **Irreflexividade:** não há elemento que se relacione consigo próprio. $\forall a \in A\ \neg(aRa)$
- **Transitividade:** se há sequência de pares que ligam um elemento x a outro y, então há a relação de x para y. $\forall a,b,c \in A\ (aRb \wedge bRc \to aRc)$
- **Simetria:** Tudo que vai volta. $\forall a,b \in A\ (aRb \to bRa)$
- **Antissimétrica:** dois elementos relacionam-se no máximo de uma forma. $\forall a,b \in A\ (aRb \wedge bRa \to a=b)$

Relação de Equivalência: $R \subseteq A^2$ é uma relação de equivalência, se e somente se, R é uma endorrelação reflexiva, simétrica e transitiva.

Tipos de Relações: Seja $R: A \to B$ uma relação.

- **Relação Funcional:** R é uma relação funcional se e somente se,
  $(\forall a \in A)(\forall b_1, b_2 \in B)(aRb_1 \wedge aRb_2 \to b_1 = b_2)$
- **Relação Injetoras:** R é uma relação Injetoras se e somente se,
  $(\forall b \in B)(\forall a_1, a_2 \in A)(a_1Rb \wedge a_2Rb \to a_1 = a_2)$
- **Relação total:** R é uma relação total, se e somente se
  $(\forall a \in A)(\exists b \in B)(aRb)$
- **Relação Sobrejetora:** R é uma relação Sobrejetora, se e somente se
  $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(aRb)$

Fecho de Endorrelações

- **Fecho Reflexivo:** Seja $\langle A, R \rangle$ uma endorrelação, então o fecho reflexivo de R é a endorrelação sobre A tal que
$$Fecho_{refl}(R) = R \cup \{\langle a,a \rangle \mid a \in A\}$$

- **Fecho Simetrico:** Seja $\langle A, R \rangle$ uma endorrelação, então o fecho simétrico de R é a endorrelação sobre A tal que
$$Fecho_{sime}(R) = R \cup \{\langle b,a \rangle \mid \langle a,b \rangle \in R\}$$

- **Fecho Simetrico:** Seja $\langle A, R \rangle$ uma endorrelação, então o fecho transitivo de R é a endorrelação sobre A definida indutivamente como:
  - se $\langle a,b \rangle \in R$ então $\langle a,b \rangle \in Fecho_{tran}(R)$
  - se $\langle a,b \rangle, \langle b,c \rangle \in Fecho_{tran}(R)$ então $\langle a,c \rangle \in Fecho_{tran}(R)$
  - nada mais pertence à $Fecho_{tran}(R)$

Relação de Ordem: $R \subseteq A^2$ é uma relação de ordem parcial se e somente se R é uma endorrelação reflexiva, Antissimétrica e transitiva