Álgebra Linear

Propriedades das transformações lineares
Transformações Identidade e nula
Transformação linear dada por uma matriz
Núcleo de uma transformação linear

Professores Graciela, Katiani e Marnei

Propriedades de Transformações Lineares

- Propriedade 2: Se $T: V \rightarrow W$ é uma transformação linear então para todos $u, v, w \in V$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$ têm-se que

$$T(au + bv + cw) = aT(u) + bT(v) + cT(w)$$

ou seja, a imagem de uma combinação linear de vetores em V é a combinação linear das imagens desses vetores em W, com exatamente os mesmos coeficientes.

Justificativa: Se $T: V \rightarrow W$ é uma transformação linear, temos que T preserva a soma e a multiplicação por escalar, portanto temos que

$$T(au + bv + cw) = T(au) + T(bv) + T(cw) = aT(u) + bT(v) + cT(w)$$

para todos $u, v, w \in V$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$

Propriedades de Transformações Lineares

- Propriedade 3: Uma transformação linear $T: V \to W$ fica unicamente determinada conhecendo-se as imagens dos vetores de uma base de V.

Justificativa: Se $T: V \to W$ é uma transformação linear e $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de V, temos que para qualquer $v \in V$ existem $a_i \in \mathbb{R}$ tal que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

Assim, pela linearidade de T, temos que

$$T(v) = T(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \cdots + a_n T(v_n)$$

e com isso, se conhecermos as imagens dos vetores da base, dadas por $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$ conseguimos determinar unicamente a imagem de qualquer vetor $v \in V$.

Indicação de vídeo-aula

https://www.youtube.com/watch?v=f1YpffBzDUQ

Exemplo:

1) Uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é tal que $T(\vec{v}_1) = (1,-2)$, $T(\vec{v}_2) = (3,1)$ e $T(\vec{v}_3) = (0,2)$, onde $\boldsymbol{v}_1$ = (0,1,0), $\boldsymbol{v}_2$ = (1,0,1) e $\boldsymbol{v}_3$ = (1,1,0) formam uma base $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Determine a lei de formação de *T.*

Solução: Como $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, para qualquer $u = (x, y, z)$ temos que

$$(x,y,z) = a \cdot \vec{v}_1 + b \cdot \vec{v}_2 + c \cdot \vec{v}_3$$

$$(x,y,z) = a \cdot (0,1,0) + b \cdot (1,0,1) + c \cdot (1,1,0)$$

$$(x,y,z) = (0,a,0) + (b,0,b) + (c,c,0)$$

$$\begin{cases} b + c = x \\ a + c = y \\ b = z \end{cases} \rightarrow \quad a = -x + y + z, \quad b = z, \quad c = x - z$$

Exemplo:

Assim, obtemos que

$$(x,y,z) = (-x+y+z)\cdot(0,1,0) + (z)\cdot(1,0,1) + (x-z)\cdot(1,1,0)$$

Aplicando a transformação T *nos vetores:*

$$T(x,y,z) = (-x+y+z)\cdot T(0,1,0) + (z)\cdot T(1,0,1) + (x-z)\cdot T(1,1,0)$$

$$T(x,y,z) = (-x+y+z)\cdot(1,-2) + (z)\cdot(3,1) + (x-z)\cdot(0,2)$$

$$T(x,y,z) = (-x+y+z, 2x-2y-2z) + (3z,z) + (0,2x-2z)$$

Finalmente:

$$\boxed{T(x,y,z) = (-x+y+4z,\ 4x-2y-3z)}$$

Exemplo:

2) Uma transformação linear $T: P_2 \to M(2,2)$ é tal que

$$T(1+x) = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}; \quad T(-1-x^2) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } T(x+x^2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Qual é a lei de formação de *T?*

Solução:

Note que $\alpha = \{1+x, -1-x^2, x+x^2\}$ é um conjunto linearmente independente (verifique isso como exercício) e como temos três vetores em α e $\dim(P_2) = 3$, obtemos que α é uma base de P_2.

Portanto, conhecemos a imagem dos vetores de uma base e podemos utilizar a Propriedade 3.

Seja $p(x) = a + bx + cx^2 \in P_2$. Como α é base de P_2, sabemos que $p(x)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores de α . Assim, existem $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} p(x) = a + bx + cx^2 &= a_1(1+x) + a_2(-1-x^2) + a_3\,(x+x^2) \\ &= (a_1 - a_2) + (a_1 + a_3)x + (-a_2 + a_3)x^2 \end{aligned}$$

Exemplo:

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = a \\ a_1 + a_3 = b \\ -a_2 + a_3 = c \end{cases} \quad \text{obtemos} \quad a_1 = \frac{a+b-c}{2}, \quad a_2 = \frac{-a+b-c}{2}, \quad a_3 = \frac{-a+b+c}{2}$$

Assim, obtemos que

$$a + bx + cx^2 = \frac{a+b-c}{2}(1+x) + \frac{-a+b-c}{2}(-1-x^2) + \frac{-a+b+c}{2}(x+x^2)$$

E aplicando a transformação linear em ambos os lados e usando a linearidade de T temos

$$T(a+bx+cx^2) = \frac{a+b-c}{2}T(1+x) + \frac{-a+b-c}{2}T(-1-x^2) + \frac{-a+b+c}{2}T(x+x^2)$$

e substituindo as imagens dadas no enunciado da questão, obtemos

$$T(a+bx+cx^2) = \frac{a+b-c}{2}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \frac{-a+b-c}{2}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \frac{-a+b+c}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Exemplo:

Portanto, a lei de T é dada por

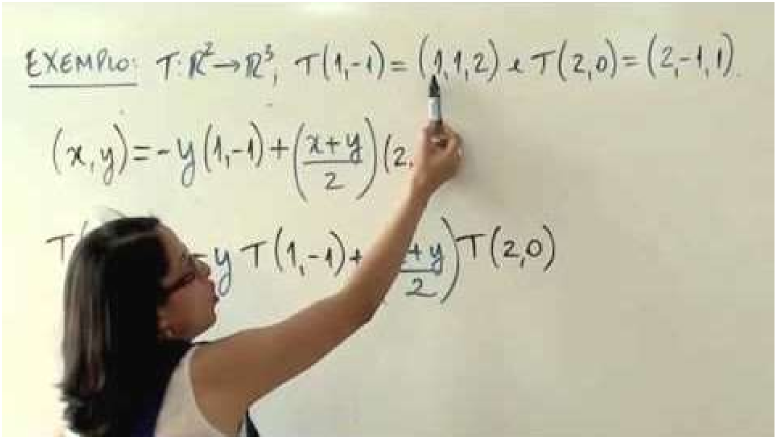
$T(a+bx+cx^2) =$

$$= \begin{bmatrix} 4a+4b-4c & -a-b+c \\ \dfrac{3a+3b-3c}{2} & 3a+3b-3c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2a+2b-2c & -3a+3b-3c \\ a-b+c & \dfrac{-3a+3b-3c}{2} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -a+b+c & 0 \\ 0 & a-b-c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+7b-5c & -4a+2b-2c \\ \frac{5a+b-c}{2} & \frac{5a+7b-11}{2} \end{bmatrix}.,$$

Mais um exemplo no vídeo a seguir:



https://www.youtube.com/watch?v=W4F13A5y2vg

Algumas transformações lineares especiais

Exemplo 1:

A transformação identidade

$$\begin{array}{rccl} I: & V & \to & V \\ & \mathbf{v} & \mapsto & \mathbf{v}, \end{array} \text{ ou seja } \boxed{I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}} \text{ é linear.}$$

De fato:

i) $I(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{u}+\mathbf{v} = I\mathbf{u} + I\mathbf{v}$

ii) $I(\alpha\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{u} = \alpha I\mathbf{u}$

Exemplo 2:

A transformação nula

$$\begin{array}{rccl} T: & V & \to & W \\ & \mathbf{v} & \mapsto & 0, \end{array} \quad \boxed{T(\mathbf{v}) = 0} \text{ é linear.}$$

De fato:

i) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = 0 = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$

ii) $T(\alpha\mathbf{u}) = 0 = \alpha \cdot 0 = \alpha T(\mathbf{u})$

Algumas transformações lineares especiais

Exemplo 3:

Defina a função $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T(v) = Av = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

a. Encontre $T(v)$ quando $v = (2, -1)$

b. Mostre que T é uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

Solução:

a) $\mathrm{T}(2, -1) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ o que significa que $\mathrm{T}(2, -1) = (6,3,0)$

b) Sejam $u, v \in \mathbb{R}^2$ e $k \in \mathbb{R}$. Então:

$\mathrm{T}(u + v) = A(u + v) = Au + Av = T(u) + T(v)$

$\mathrm{T}(ku) = A(ku) = k(Au) = kT(u)$

Algumas transformações lineares especiais

O Exemplo 3 apresenta um resultado importante em relação à representação de transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Este resultado é apresentado pelo próximo teorema, que afirma que cada matriz $A_{m\times n}$ representa uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$.

Teorema: Transformação linear dada por uma matriz

Seja A uma matriz $m \times n$. A função T definida por

$$T(v) = Av$$

é uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$.

Transformação linear dada por uma matriz

$$\mathbf{Av} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n \end{bmatrix}.$$

Vetor em R^n

Vetor em R^m

Por exemplo, a a lei da transformação linear associada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é dada por:

$$T(v) = Av = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y - z \\ 2x + y \end{bmatrix}$$

Vetor em $\mathbb{R}^3$

Vetor em $\mathbb{R}^2$

Ou seja, a matriz A, está associada a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + 3y - z, 2x + y)^T$$

Exercícios:

1. Nos casos abaixo, defina a transformação linear $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por $T(v) = Av$ e interprete-a geometricamente:

$a)\, A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$b)\, A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

$c)\, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

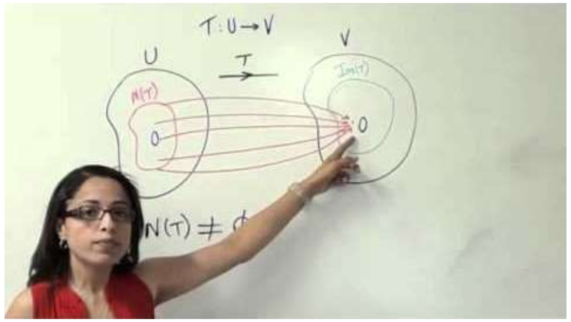
2. Qual a matriz associada a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x - 2y, 2x + 3y, 2y)$?

Núcleo de uma transformação linear

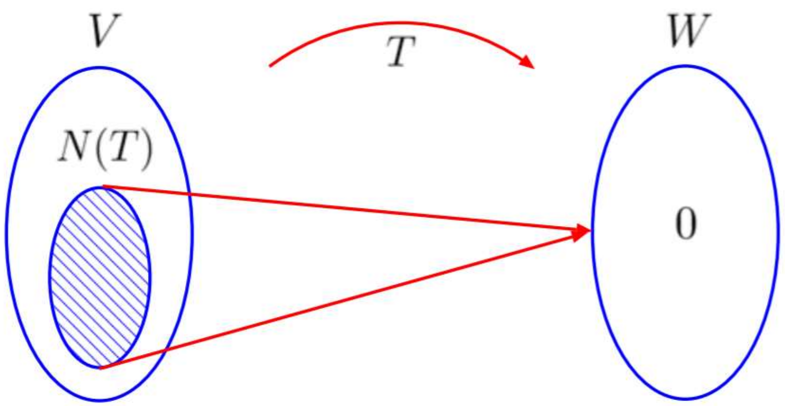
- **Definição:**
  - Chama-se núcleo de uma transformação linear **T: V→W** ao conjunto de vetores $v \in V$ que são transformados em $0 \in W$.
  - Indica-se esse conjunto por N(T) ou ker(T):

$$\mathbf{N(T) = \{v \in V/\ T(v) = 0\}}$$

Observemos que $N(T) \subset V$ e $N(T) \neq \phi$, pois $0 \in N(T)$, tendo em vista que $T(0) = 0$.



https://www.youtube.com/watch?v=_KK9fMtCe7o



OBS.: O núcleo de T também é denotado por alguns autores por $\boldsymbol{Ker(T)}$

Assista o vídeo a seguir:

https://www.youtube.com/watch?v=D3qi6FdH5m8

Exemplo 1:

O núcleo da transformação linear

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (x + y, 2x - y)$$

é o conjunto:

$$N(T) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / T(x, y) = (0, 0) \}$$

o que implica:

$$(x + y, 2x - y) = (0, 0)$$

ou:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \qquad x = 0 \quad e \quad y = 0$$

$$N(T) = \{ (0, 0) \}$$

Exemplo 2: Determine uma base para o núcleo da transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x - y + 4z, 3x + y + 8z)$

Solução:

$$N(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; T(x, y, z) = (0, 0)\}$$

ou seja, $(x, y, z) \in N(T)$ se e somente se:

$$(x - y + 4z, 3x + y + 8z) = (0, 0)$$

Que gera o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ 3x + y + 8z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema para $z = a$ obtemos:

$$\boxed{x = -3a \quad \text{e} \quad y = a}$$

Assim:

$$N(T) = \{(-3a, a, a); a \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow$$
$$N(T) = \{a(-3, 1, 1); a \in \mathbb{R}\}$$

ou ainda, que o vetor $(-3, 1, 1)$ gera $N(T)$:

$$N(T) = ger\{(-3,1,1)\}$$

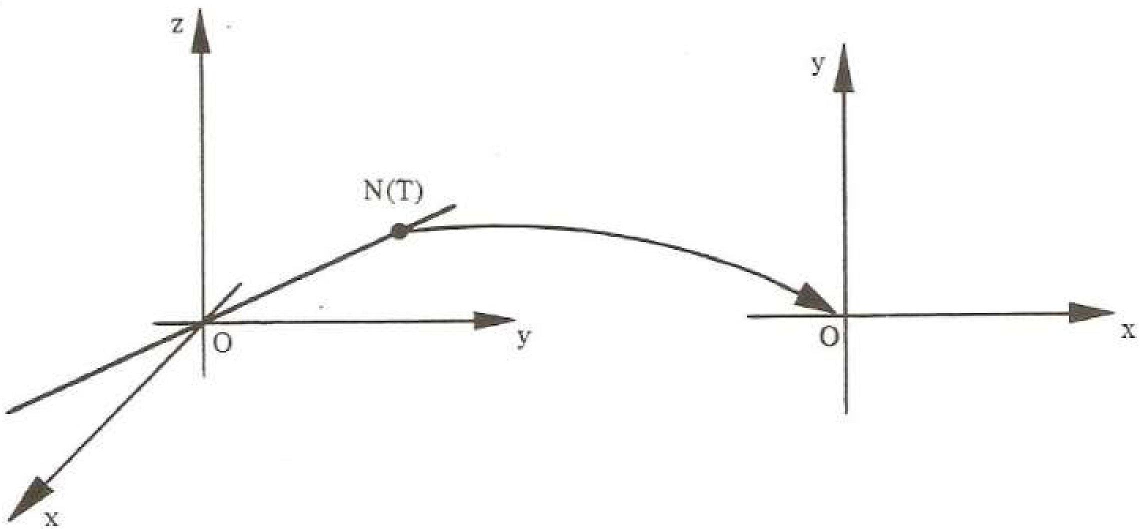
E portanto,

$$\alpha = \{(-3,1,1)\}$$

é uma base para o N(T).

Interpretação geométrica do núcleo do exemplo anterior

Esse conjunto representa uma reta do $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem e tal que todos os seus pontos tem por imagem a origem no $\mathbb{R}^2$.



Exemplo 3:

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a projeção ortogonal sobre o plano* xy*. Determine* $Ker(T)$.

Resolução

Neste caso temos $T(x,y,z) = (x,y,0)$*. Se* $T(x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow x = 0$ *e* $y = 0$*. Como nada é dito sobre a variável* z*, temos que* z *é qualquer, logo* $Ker(T) = \left\{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; z \in \mathbb{R}\right\}$*, ou seja o núcleo de* T *são todos os vetores que estão sobre o eixo* z*.* $\square$

Exemplo 4: *Encontre o núcleo da transformação linear:*

$$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$
$$T(x,y,z,t) = (x+y+z-t, 2x+z-t, 2y-t)$$

Resolução

Devemos encontrar os vetores $v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ *tais que* $T(v) = T(x,y,z,t) = (0,0,0)$. *Neste caso temos que resolver o sistema homogêneo:*

$$\begin{cases} x+y+z-t=0 \\ 2x+z-t=0 \\ 2y-t=0 \end{cases}$$

A matriz ampliada do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$p_a = p_c = 3$ *e* $p = 3 < n = 4$ *logo o sistema é compatível e indeterminado com grau de liberdade 1.*

UDESC

Continuação do Exemplo 4:

Logo,

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ -2y - z + t = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

o que nos fornece, $x = y$, $z = 0$ *e* $t = 2y$.

$$Portanto \ Ker(T) = \left\{(y, y, 0, 2y) \ \in \mathbb{R}^4 \diagup \ y \in \mathbb{R}\right\}$$

Teorema: **O núcleo é um subespaço de V**
O Núcleo de uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ é um subespaço vetorial do domínio V

De fato:

Sejam v_1 e v_2 vetores pertencentes ao N(T) e $\alpha \in$ IR.
Então $T(v_1) = 0$ e $T(v_2) = 0$. Assim:

I) $\mathbf{T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0 + 0 = 0}$
Isto é $v_1 + v_2 \in N(T)$.

II) $\mathbf{T(\alpha v_1) = \alpha\, T(v_1) = \alpha 0 = 0}$
Isto é $\alpha v_1 \in N(T)$.

UDESC