UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Centro de Ciências Tecnológicas - CCT - Joinville
Departamento de Matemática

Lista 3 de Cálculo Diferencial e Integral II

Integrais Duplas

1. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies $x^2+y^2+2y=0$, $z=0$ e $z=4+y$.

2. Calcule as integrais duplas dadas abaixo:

$(a)\ \displaystyle\int_0^1\int_x^{3x+1} xy\,dydx$ $\qquad (b)\ \displaystyle\int_0^1\int_y^{3y+1} xy^2\,dxdy$ $\qquad (c)\ \displaystyle\int_0^4\int_0^1 xe^{xy}\,dydx$

$(d)\ \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4\cos\theta} \cos\theta\sin\theta\ re^{r^2}\,drd\theta$ $\qquad (e)\ \displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{y^2} \cos\frac{x}{y}\,dxdy$ $\qquad (f)\ \displaystyle\int_0^{\ln 2}\int_0^{y} xy^5e^{x^2y^2}\,dxdy$

3. Escreva as integrais duplas que permitem calcular a área da região R delimitada simultaneamente pelas curvas dadas abaixo, tomando inicialmente x como variável independente e após tomando y como variável independente.

(a) $y=x^2-1$, $y=1-x$, $y=\frac{4x}{3}+12$ e $y=12-\frac{9x}{2}$.

(b) $y=\frac{4x}{3}+\frac{8}{3}$, $y=-2-x$, $y=\frac{x}{2}-2$ e $y=\frac{16}{3}-\frac{4x}{3}$.

4. Esboce a região de integração e calcule as integrais duplas dadas abaixo, trocando a ordem de integração, se necessário.

(a) $\displaystyle\int_0^2\int_{x^2}^4 x\sin(y^2)\,dydx.$

(b) $\displaystyle\int_0^1\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dxdy.$

5. Nos problemas a seguir, esboce geometricamente a região de integração e utilize coordenadas polares para calcular as integrais.

(a) $\displaystyle\iint_R \sqrt{14-x^2-y^2}\,dxdy$ onde R é a região dada por $4\le x^2+y^2\le 9$.

(b) $\displaystyle\iint_R \sqrt{14-x^2-y^2}\,dxdy$ onde R é a região dada por $x^2+y^2\le 4$ com $x\ge 0$ e $y\ge 0$.

(c) $\displaystyle\int_{-3}^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} e^{-x^2-y^2}\,dydx.$

(d) $\displaystyle\int_0^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} \frac{1}{4+\sqrt{x^2+y^2}}\,dydx.$

(e) $\displaystyle\int_{-2}^{0}\int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dydx.$

(f) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{1}{(x^2+y^2)^3}dxdy$ onde R é a região dada por $4 \leq x^2+y^2 \leq 9$.

6. Escreva, em coordenadas cartesianas, a(s) integral(is) dupla(s) que permite(m) calcular a área da **menor** região delimitada pelas curvas $x^2+y^2=9$ e $y^2+1=3x$, tomando:

   (a) x como variável independente; (b) y como variável independente.

7. Escreva a(s) integral(is) dupla(s) que permite(m) calcular a área da **menor** região delimitada pelas curvas $x^2+y^2=20$ e $y=x^2$, usando:

   (a) x como variável independente; (b) y como variável independente; (c) coordenadas polares.

8. Considere a expressão $\displaystyle I=\int_1^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}dydx.$

   (a) Reescreva a expressão dada, invertendo sua ordem de integração.

   (b) Transforme a expressão dada para coordenadas polares.

9. Transforme para coordenadas cartesianas a seguinte integral

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{3\cos\theta}^{3} \sin\theta drd\theta.$$

10. Considere a expressão $\displaystyle I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_y^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2x+4y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy.$

    (a) Reescreva a expressão dada, invertendo sua ordem de integração.

    (b) Transforme a expressão dada para coordenadas polares.

    (c) Utilize uma das expressões encontradas nos itens anteriores para calcular o valor numérico de I.

11. Transforme a integral $\displaystyle I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3 drd\theta$ de coordenadas polares para coordenadas cartesianas, tomando:

    (a) x como variável independente; (b) y como variável independente.

12. Considere a seguinte expressão:

$$I=\int_0^1\int_0^{x^2} x\cos((1-y)^2)dydx+\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{2-x^2} x\cos((1-y)^2)dydx.$$

    (a) Represente geometricamente a região de integração da expressão acima.

    (b) Calcule o valor numérico de I, adotando a melhor expressão para isso.

13. Utilize coordenadas polares para reescrever a soma

$$I = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xydydx + \int_{1}^{\sqrt{2}} \int_{0}^{x} xydydx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xydydx$$

em uma única integral dupla.

14. Considere a seguinte expressão:

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} dxdy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} dxdy.$$

(a) Reescreva esta expressão, invertendo a sua ordem de integração.

(b) Transforme esta expressão para coordenadas polares.

(c) Calcule o valor numérico de I, utilizando umas das expressões anteriores.

15. Calcule $\iint\limits_D (x+3y)dA$, onde D é a região triangular de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ e $(2,0)$.

16. Calcule $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dA$, sendo D a região do semiplano $x \geqslant 0$ interna à cardióide $r = 1+\cos\theta$ e externa à circunferência $r = 1$.

17. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies $z = 0$, $z^2 = x^2+y^2$ e $x^2+y^2 = 2ax$.

18. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies $x^2+y^2 = a^2$ e $x^2+z^2 = a^2$.

19. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies $r = 4\cos\theta$, $z = 0$ e $r^2 = 16-z^2$.

Respostas

1. $V = 3\pi$u.v.

2. $(a)\ \dfrac{9}{4} \qquad (b)\ \dfrac{103}{60} \qquad (c)\ e^4-5 \qquad (d)\ \dfrac{e^{12}-13}{64} \qquad (e)\ \pi \qquad (f)\ \frac{1}{8}(e^{\ln^4 2} - \ln^4 2 - 1)$

3. .

(a) $$A = \int_{-3}^{-2} \int_{x^2-1}^{\frac{4x}{3}+12} dydx + \int_{-2}^{0} \int_{1-x}^{\frac{4x}{3}+12} dydx + \int_{0}^{1} \int_{1-x}^{12-\frac{9x}{2}} dydx + \int_{1}^{2} dint_{x^2-1}^{12-\frac{9x}{2}} dydx$$

$$A = \int_0^3 \int_{1-y}^{\sqrt{y+1}} dxdy + \int_3^8 \int_{-\sqrt{y+1}}^{\frac{24-2y}{9}} dxdy + \int_8^{12} \int_{\frac{3y}{4}-9}^{\frac{24-2y}{9}} dxdy$$

(b) $$A = \int_{-2}^{0} \int_{-2-x}^{\frac{4x+8}{3}} dydx + \int_{0}^{1} \int_{\frac{x}{2}-2}^{\frac{4x+8}{3}} dydx + \int_{1}^{4} \int_{\frac{x}{2}-2}^{\frac{16}{3}-\frac{4x}{3}} dydx$$

$$A = \int_{-2}^{0} \int_{-2-y}^{2y+4} dxdy + \int_{0}^{4} \int_{\frac{3y-8}{4}}^{4-\frac{3y}{4}} dxdy$$

4. (a) $\dfrac{1-\cos 16}{4}$ (b) $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$

5. .

   (a) $\frac{10\pi}{3}(2\sqrt{10}-\sqrt{5})$ (b) $\frac{\pi}{3}(7\sqrt{14}-5\sqrt{10})$ $(c)\pi(1-e^{-9})$

   (d) $\pi + 4\pi\ln 2 - 2\pi\ln 6$ $(e)\dfrac{-64}{15}$ (f) $\dfrac{65\pi}{2592}$

6. (a) $A = \displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{2}\int_{-\sqrt{3x-1}}^{\sqrt{3x-1}} dydx + \int_{2}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dydx$

   (b) $A = \displaystyle\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\int_{\frac{y^2+1}{3}}^{\sqrt{9-y^2}} dxdy$

7. (a) $A = \displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{\sqrt{20-x^2}} dydx$

   (b) $A = \displaystyle\int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dxdy + \int_{4}^{\sqrt{20}}\int_{-\sqrt{20-y^2}}^{\sqrt{20-y^2}} dxdy$

   (c) $A = 2\displaystyle\int_{0}^{\arctan 2}\int_{0}^{\tan\theta\sec\theta} rdrd\theta + 2\int_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\sqrt{20}} rdrd\theta$

8. (a) $I = \displaystyle\int_{0}^{1}\int_{1}^{1+\sqrt{1-y^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}dxdy$

   (b) $I = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\sec\theta}^{2\cos\theta} \frac{r}{\cos\theta+\sin\theta}drd\theta$

9. $I = \displaystyle\int_{0}^{3}\int_{\sqrt{3x-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \frac{y}{x^2+y^2}dydx + \int_{0}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{-\sqrt{3x-x^2}} \frac{y}{x^2+y^2}dydx$

10. (a) $I = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{0}^{x} \frac{2x+4y}{\sqrt{x^2+y^2}}dydx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2x+4y}{\sqrt{x^2+y^2}}dydx$

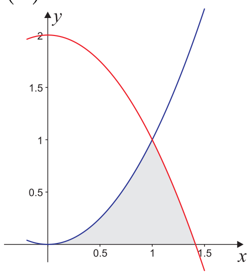
    (b) $I = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{1}(2r\cos\theta + 4r\sin\theta)drd\theta$

    (c) $2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

11. (a) $I = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{x}^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)dydx$

    (b) $I = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{0}^{y}(x^2+y^2)dxdy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}(x^2+y^2)dxdy$

12. (a)



(b) $I = \dfrac{1}{2}\sin 1$

13. $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 r^3 \cos\theta \sin\theta dr d\theta$

14. (a) $I = \displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} dydx$

(b) $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{2\cos\theta}^{2\sin\theta} dr d\theta$

(c) $I = 2\sqrt{2} - 2$

15. $I = 2$

16. $I = 2$

17. $V = \frac{32a^3}{9}$u.v.

18. $V = \frac{16a^3}{3}$u.v.

19. $V = \frac{192\pi - 256}{9}$u.v.