Álgebra Linear

Intersecção e Soma de Subespaços Vetoriais

Graciela, Katiani e Marnei

UDESC

Interseção

Definição: Sejam S_1 e S_2 dois subespaços vetoriais de V. A interseção S de S_1 e S_2, que se representa por $S = S_1 \cap S_2$, é o conjunto de todos os vetores $v \in V$ tais que $v \in S_1$ e $v \in S_2$.

Teorema: O conjunto interseção $S = S_1 \cap S_2$ é um subespaço vetorial de V.

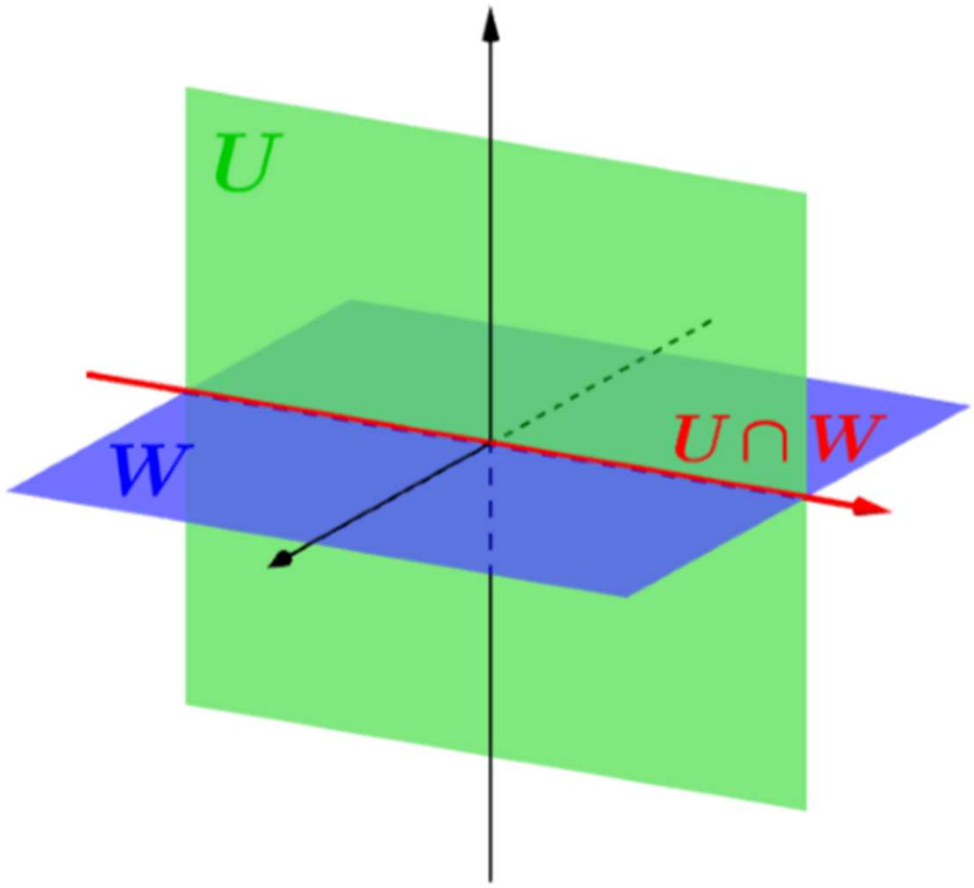
Dem.:

Exemplos: Interseção

1. Dados os subespaços do $\mathbb{R}^3$:

- $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0\}$
- $W=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid z=0\}$

$U\cap W=\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3 \mid x=0, z=0\}$



Exemplos: Interseção

2. Sejam $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | 2x - z + t = 0 \; e \; z + t = 0\}$ e W$= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | 4x + z + 5t = 0 \; e \; y + t = 0\}$ subespaços do $\mathbb{R}^4$. Encontre a $\dim(U \cap W)$.

3. Sejam $U = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3 \mid a + b - c + 3d = 0\}$ e W=$\{p(x) \in P_3 \mid p'(1) = 0\}$ subespaços de P_3 . Determine uma base para $U \cap W$

4. Considere os subespaços do $\mathbb{R}^3$, U=ger{(1,2,1),(0,1,−2)} e W=ger{(2,0,−1),(2,1,3)}. Encontre U∩W.

5. Mostre, utilizando um contraexemplo, que a união de dois subespaços de um mesmo espaço vetorial V nem sempre é um subespaço de V.

UDESC

Soma de subespaços

- Vimos que o principal problema quando consideramos a união de subespaços é que se tomamos um vetor em cada subespaço, a união deles pode não pertencer à união. Seria, então, natural considerarmos o conjunto soma definido a seguir:

<u>Definição</u>: Sejam U e W dois subespaços vetoriais de V. A soma $U+W$ é o conjunto:

$$U+W \ = \{u+w \mid u \in U \ e \ w \in W\}.$$

<u>Teorema: </u> A soma $U+W$ é um subespaço vetorial de V, de fato se:

i. Sejam v_1 e v_2 vetores de $U+W$. Então existem $u_1 \ e \ u_2$ elementos de U e existem $w_1 \ e \ w_2$ elementos de W tais que:

$v_1 = u_1 + w_1$ e $v_2 = u_2 + w_2$

Então, $v_1 + v_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U+W$

ii Faça a segunda parte como exercício

Soma direta

- Sejam U e W dois subespaços vetoriais de V.

V é a soma direta de U e W, e representamos por $V = U \bigoplus W$, se $V = U + W$ e $U \cap W = \{0\}$.

Teorema:

Se V é a soma direta de U e W, $V = U \bigoplus W$, todo o vetor $v \in V$ se escreve, de modo único, na forma:

- $v = u + w, u \in U \; e \; w \in W$

Teorema: Sejam U e W dois subespaços vetoriais de V tais que

- $U = ger\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$
- W$= ger\{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$.

Então,

$$U + W = ger\{u_1, u_2, \cdots, u_n, w_1, w_2, \cdots, w_m\}.$$

Teorema: Se U e W são subespaços vetoriais então

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Exemplo 1: O espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ é soma direta dos subespaços

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^4 |\, y = 0\}\, e\, W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x = 0\}$$

Vejamos:

Exemplo 2: Considere os subespaços de $\mathbb{R}^3$, U={(x,y,z) ∈ $\mathbb{R}^3$ | x=0} e W={(x,y,z) ∈ $\mathbb{R}^3$ | y=0}. Verifique se $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$

Exemplo 3: Sejam $U = \left\{ X \in M(2,2) / X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -c+2b \end{pmatrix} \right\}$, $W = ger\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,2) / 2a + b - d = 0 \right\}$ subespaços vetoriais de M(2,2). Determine:

a) uma base e a dimensão de $U \cap W \cap S$ e uma base e a dimensão de $S + W$;

b) $S + W = M(2,2)$?

c) uma base para M(2,2) que contenha uma base para $U \cap W \cap S$. Justifique.

Exemplo 4: Em $V = P_3$ considere os subespaços vetoriais dados por

$$W_1 = \{p(x) \in P_3;\ \ p(0) + p(-1) = 0\}$$

e

$$W_2 = \{\, a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3\,;\ \ b = -a, \quad c = 3a \ \text{ e } \ d = 4a\}.$$

Verifique se $W_1 \bigoplus W_2 = P_3$.

Solução: Precisamos verificar se $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ e se $W_1 + W_2 = P_3$.

i) $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$?

Seja $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W_1 \cap W_2$. Logo

$$\begin{cases} p(x) \in W_1 \\ p(x) \in W_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(0) + p(-1) = 0 \\ b = -a \\ c = 3a \\ d = 4a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b + c - d = 0 \\ b = -a \\ c = 3a \\ d = 4a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 = \vec{0}$$

E com isso, $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ está satisfeito.

ii) $W_1 + W_2 = P_3$?

Para verificar se essa igualdade é válida, vamos obter os geradores de $W_1 + W_2$. Pelo Teorema anterior, precisamos encontrar os geradores de cada um dos subespaços.

- Para W_1: Seja $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W_1$. Logo

$$p(0) + p(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (a + 0) + (a - b + c - d) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a - b + c - d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 2a - b + c$$

Assim

$$p(x) = a + bx + cx^2 + (2a - b + c)x^3 = a(1 + 2x^3) + b(x - x^3) + c(x^2 + x^3)$$

Portanto

$$W_1 = ger\{1 + 2x^3, x - x^3, x^2 + x^3\}$$

É fácil ver que esses geradores são L.I. (verifique como exercício) e com isso, obtemos que $\dim(W_1) = 3$

- Para W_2: Seja $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W_2$. Logo

$$b = -a, \qquad c = 3a \quad \text{e} \quad d = 4a$$

Assim

$$p(x) = a + (-a)x + 3ax^2 + 4ax^3 = a(1 - x + 3x^2 + 4x^3)$$

E então

$$W_2 = ger\{1 - x + 3x^2 + 4x^3\}$$

Esse conjunto de um único gerador é obviamente L.I. Assim

$$\dim(W_2) = 1.$$

- Portanto, pelo Teorema anterior, temos que

$$W_1 + W_2 = ger\{1 + 2x^3, x - x^3,\ x^2 + x^3, 1 - x + 3x^2 + 4x^3\}$$

Pelo Teorema da dimensão:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) = 3 + 1 - 0 = 4.$$

Portanto, os quatro geradores formam uma base de $W_1 + W_2$.

Por fim, como

$$\dim(W_1 + W_2) = 4 = \dim(P_3)$$

concluímos que

$$W_1 + W_2 = P_3$$

Enfim, como $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ e $W_1 + W_2 = P_3$, a soma é direta e temos $W_1 \oplus W_2 = P_3$.