UDESC
UNIVERSIDADE
DO ESTADO DE
SANTA CATARINA

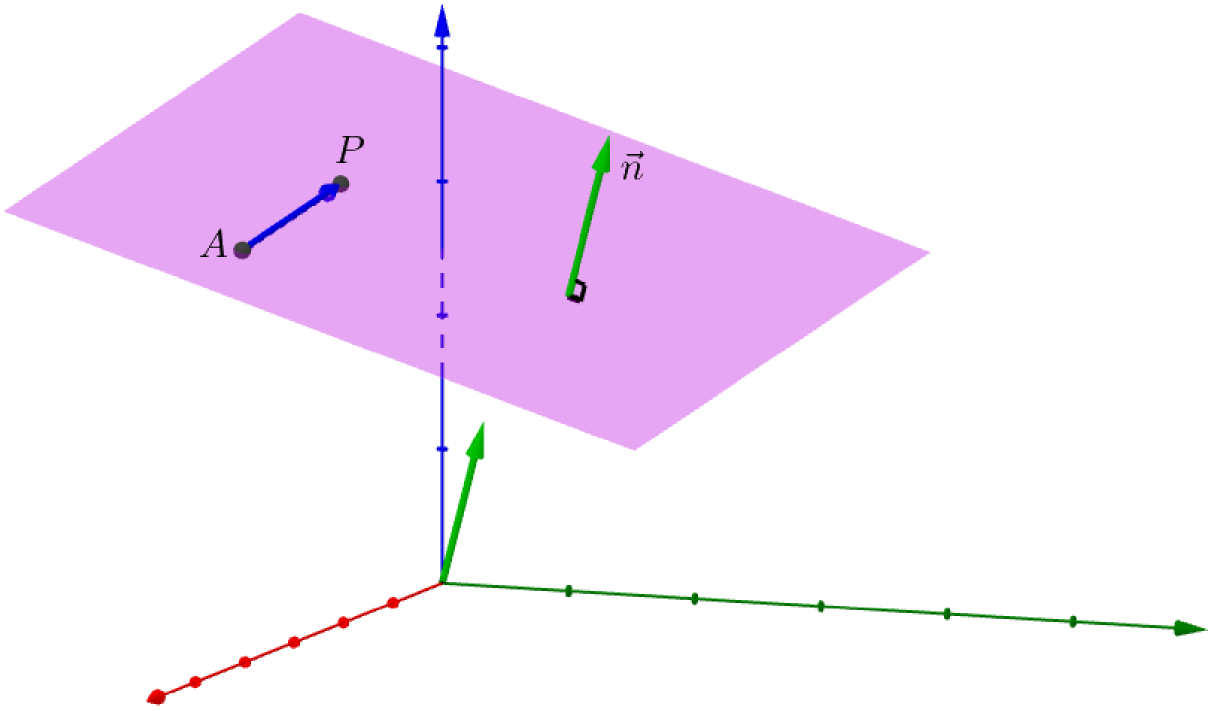
Geometria Analítica

Prof.: Francielle Kuerten Boeing

Planos

Equação geral do plano:

Seja $A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{n} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ um vetor normal (ortogonal) ao plano.



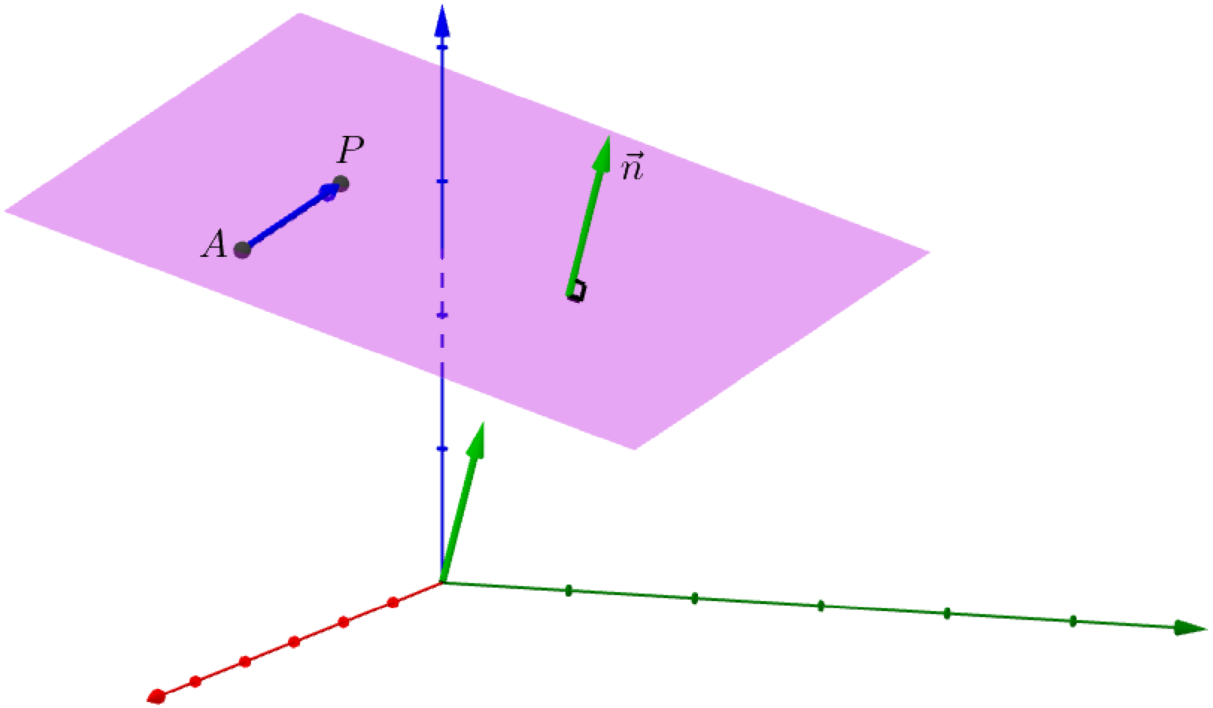
Planos

Equação geral do plano:

Seja $A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{n} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ um vetor normal (ortogonal) ao plano.

Assim, um ponto $P(x, y, z)$ pertence ao plano se, e somente se,

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0.$$



Planos

Equação geral do plano:

Dessa forma, temos

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) \cdot (a, b, c) = 0$$

$$\boxed{a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0}$$

(equação geral do plano)

ou ainda,

$$ax + by + cz - ax_1 - by_1 - cz_1 = 0$$

$$\pi\colon\ ax + by + cz + d = 0$$

com $d = -ax_1 - by_1 - cz_1$.

Planos

Observações:

(1) O plano é perfeitamente identificado por um vetor normal $\vec{n} \neq \vec{0}$ e um ponto P;

(2) O vetor $\vec{n}$ é ortogonal a qualquer vetor paralelo a π;

(3) Para obter pontos do plano, basta jogar valores aleatórios a duas das variáveis e encontrar o valor da terceira usando a equação do plano.

(4) O vetor normal $\vec{n}$ é também normal a qualquer plano paralelo a π. Como exemplo, o vetor normal $\vec{n} = (-1,3,4)$ é um vetor normal de qualquer plano da forma

$$-x + 3y + 4z + d = 0.$$

O que diferencia os planos paralelos é o valor de d.

Planos

Exemplo 1: Encontre a equação geral (ou cartesiana) do plano π_1 que passa pelo ponto $A(3,1,-4)$ e é paralelo ao plano $\pi_2: 2x - 3y + z - 6 = 0$.

Planos

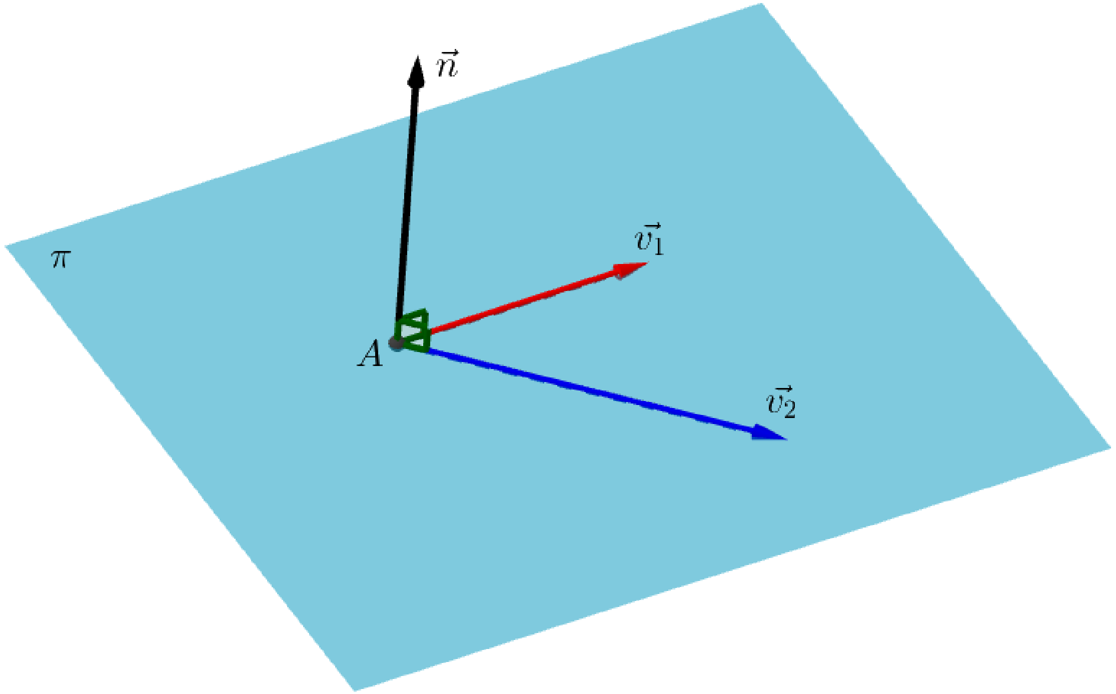
Determinação de um plano. Apenas um plano é determinado nas seguintes situações:

(1) O plano passa por um ponto A e é paralelo a dois vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ não colineares:

Planos

Determinação de um plano. Apenas um plano é determinado nas seguintes situações:

(1) O plano passa por um ponto A e é paralelo a dois vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ não colineares:



nesse caso, $\vec{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$.

Planos

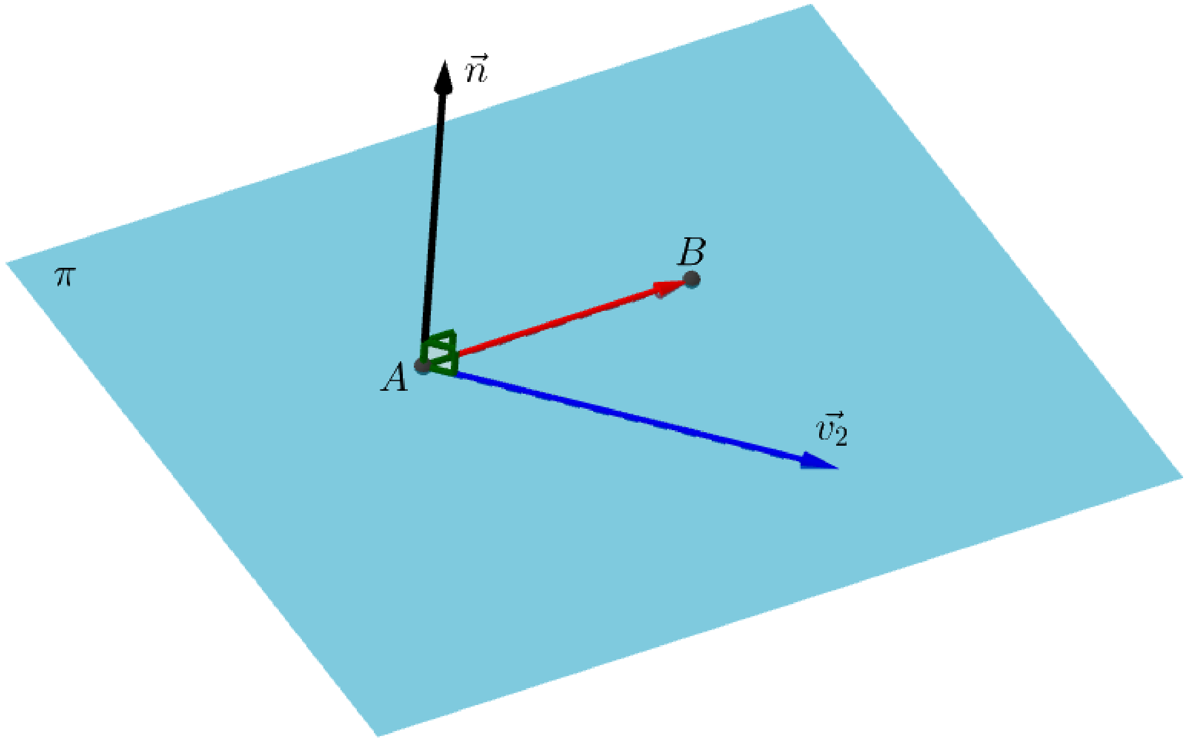
Determinação de um plano.

(2) O plano passa por dois pontos A e B e é paralelo a um vetor $\overrightarrow{v_2}$ não colinear ao vetor $\overrightarrow{AB}$:

Planos

Determinação de um plano.

(2) O plano passa por dois pontos A e B e é paralelo a um vetor $\overrightarrow{v_2}$ não colinear ao vetor $\overrightarrow{AB}$:



nesse caso, $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{v_2}$.

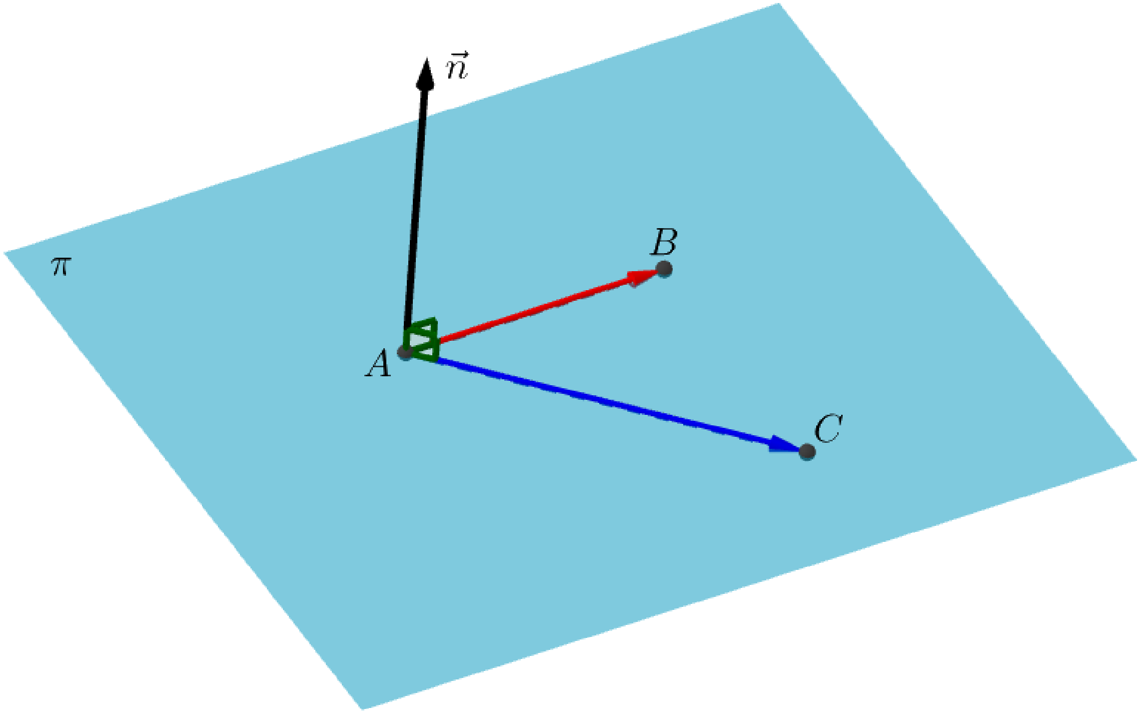
Planos

Determinação de um plano.

(3) Passa por três pontos não colineares A, B e C:

Determinação de um plano.

(3) Passa por três pontos não colineares A, B e C:



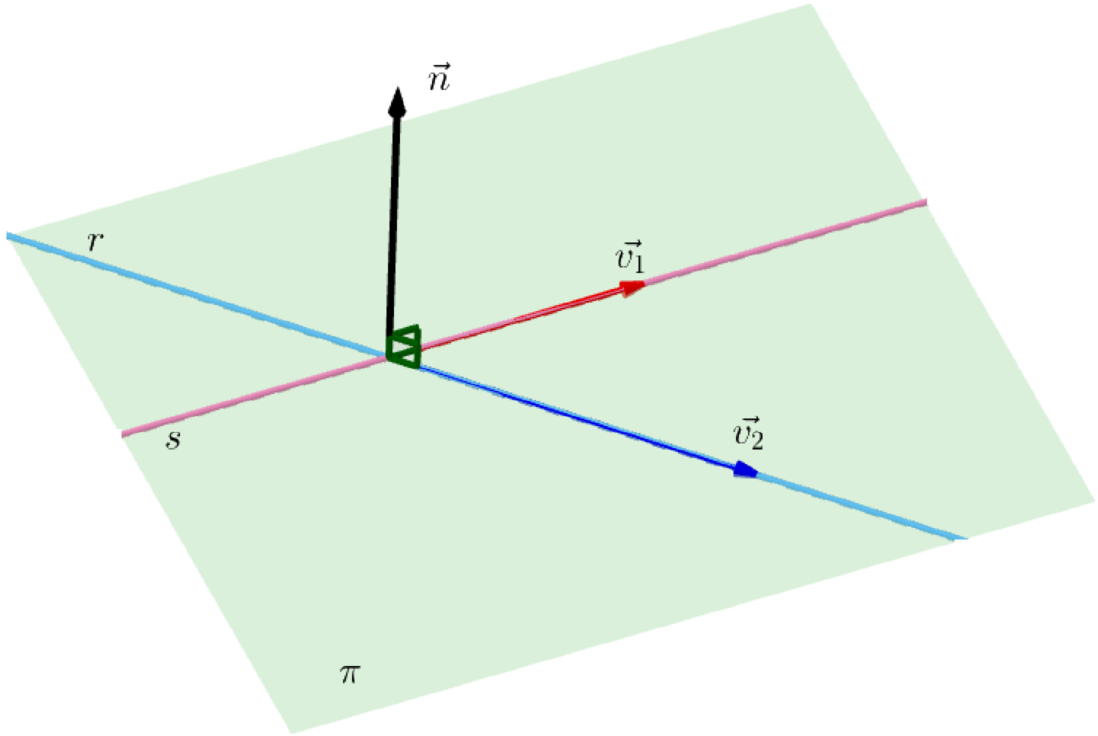
nesse caso, $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Determinação de um plano.

(4) Contém duas retas concorrentes r e s:

Determinação de um plano.

(4) Contém duas retas concorrentes r e s:



nesse caso, $\vec{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$. E basta tomar qualquer ponto de r ou de s.

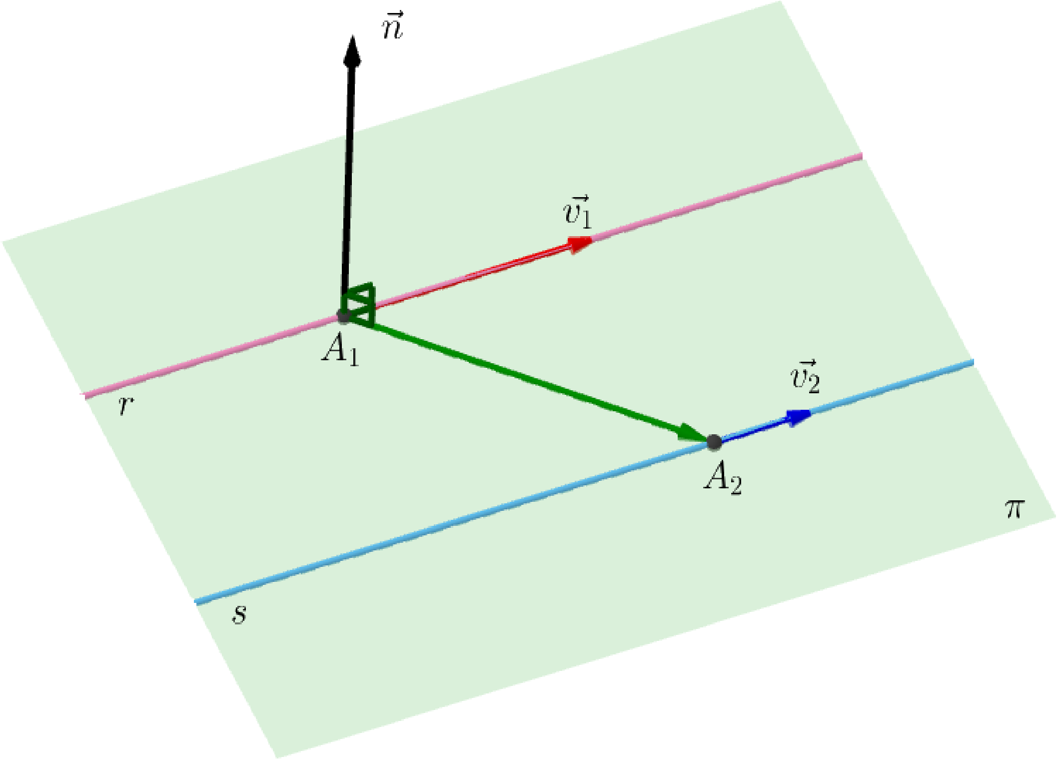
Planos

Determinação de um plano.

(5) Contém duas retas paralelas r e s:

Determinação de um plano.

(5) Contém duas retas paralelas r e s:



nesse caso, $\vec{n} = \vec{v_1} \times \overrightarrow{A_1A_2}$. E basta tomar qualquer ponto de r ou de s.

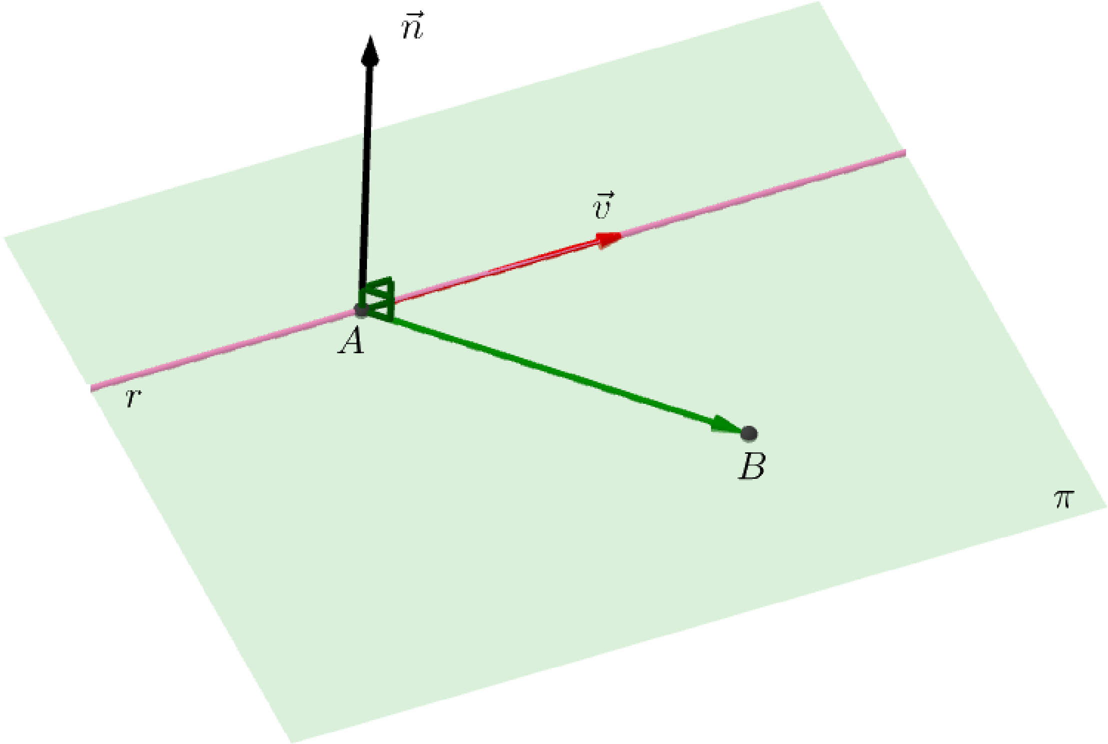
Planos

Determinação de um plano.

(6) Contém uma reta r e um ponto B $\notin r$:

Determinação de um plano.

(6) Contém uma reta r e um ponto B $\notin r$:



nesse caso, $\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{AB}$.

Planos

Exemplo 2: Encontre a equação do plano que passa pelo ponto $A(1,-3,4)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{v_1} = (3,1,-2)$ e $\overrightarrow{v_2} = (1,-1,1)$.

Planos

Exemplo 3: Encontre a equação do plano que contém as retas

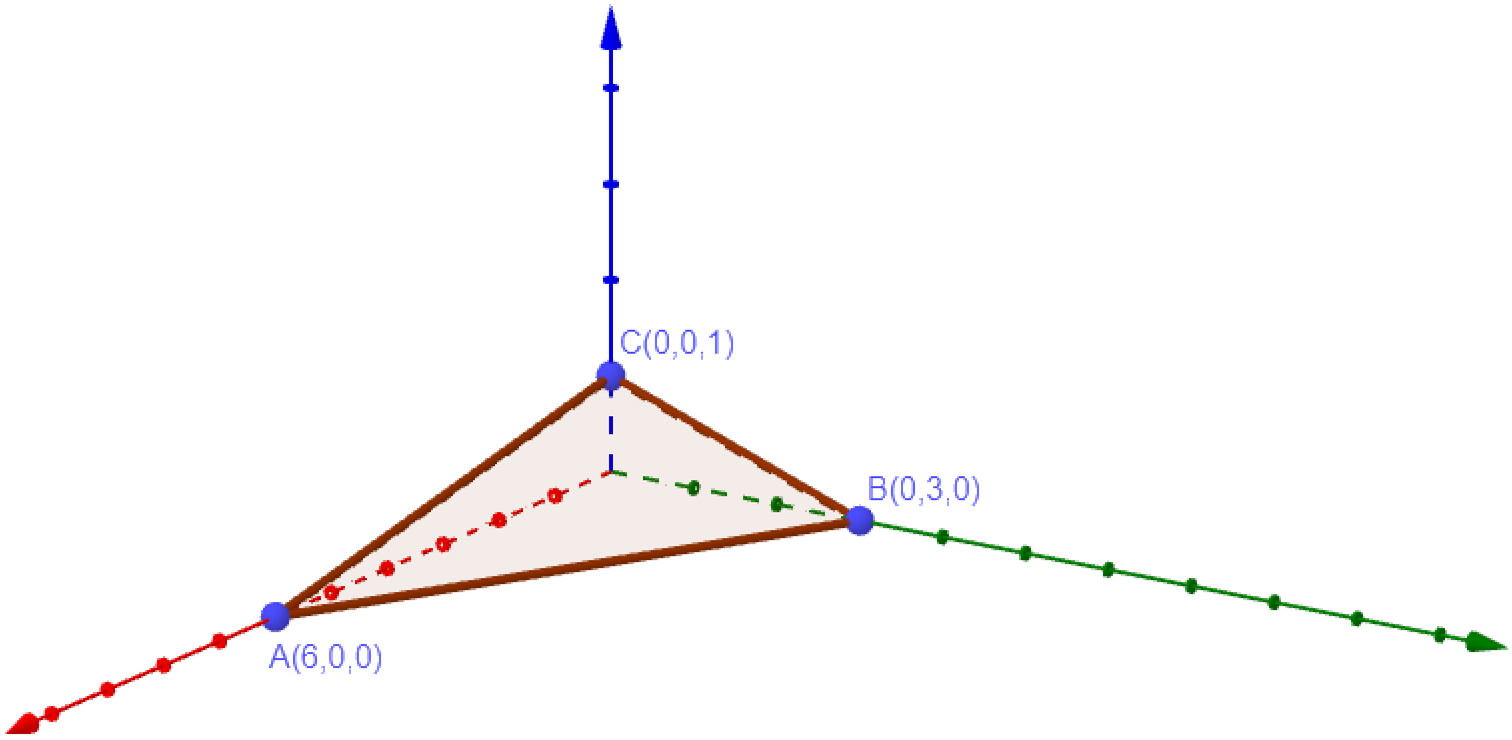
$$r_1: \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = -3x - 2 \end{cases} \qquad e \qquad r_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4t \\ z = 3 - 6t \end{cases}$$

Planos

Exemplo 4: Quando $a, b, c > 0$ e $d < 0$, a representação do plano

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

no primeiro octante é um triângulo. Para o plano $\pi: x + 2y + 6z - 6 = 0$, por exemplo, temos



Planos – Casos particulares

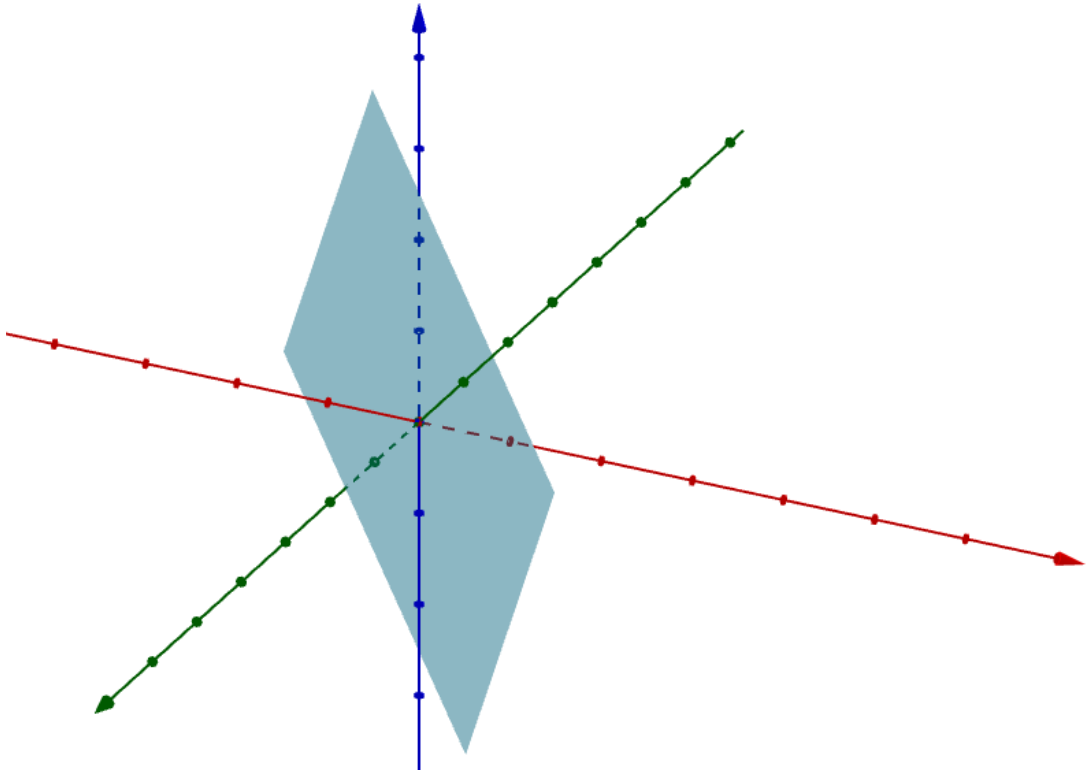
Considere o plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$ e os seguintes casos particulares:

(1) $d = 0$:

Planos – Casos particulares

Considere o plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$ e os seguintes casos particulares:

(1) $d = 0$: nesse caso, o plano π passa pela origem $O(0,0,0)$.



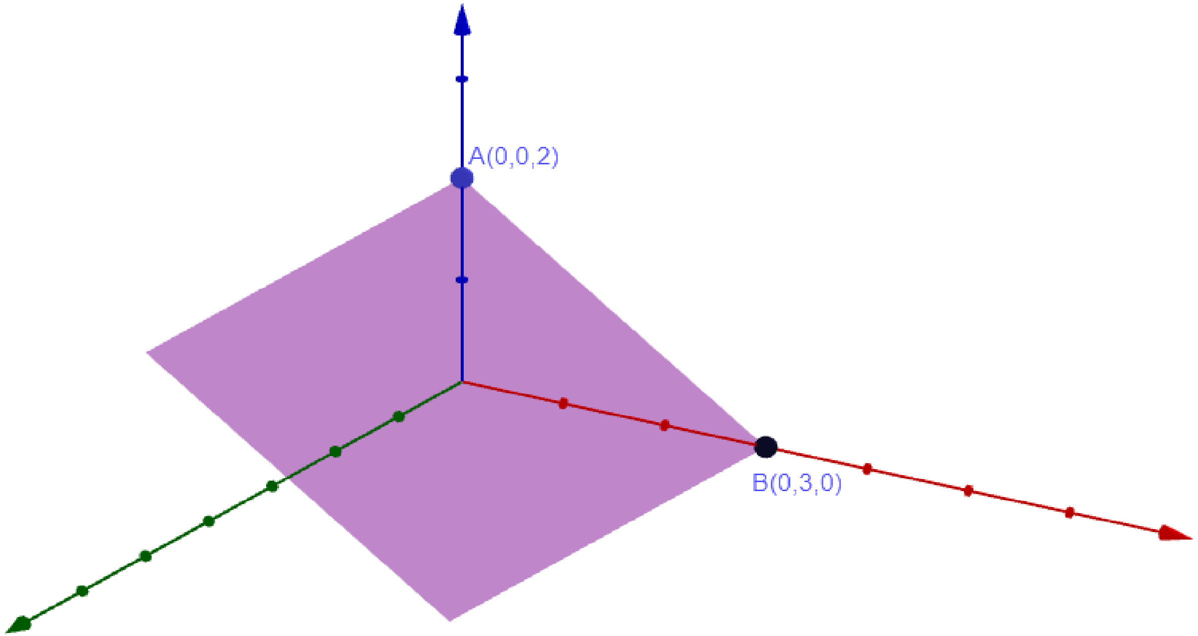
Planos – Casos particulares

(2) $a = 0$:

Planos – Casos particulares

(2) $a = 0$: nesse caso, temos a equação $\pi: by + cz + d = 0$, com $\vec{n} = (0, b, c) \perp \vec{i}$. Logo, π é paralelo ao eixo x.

Exemplo: $\pi: 2y + 3z - 6 = 0$.



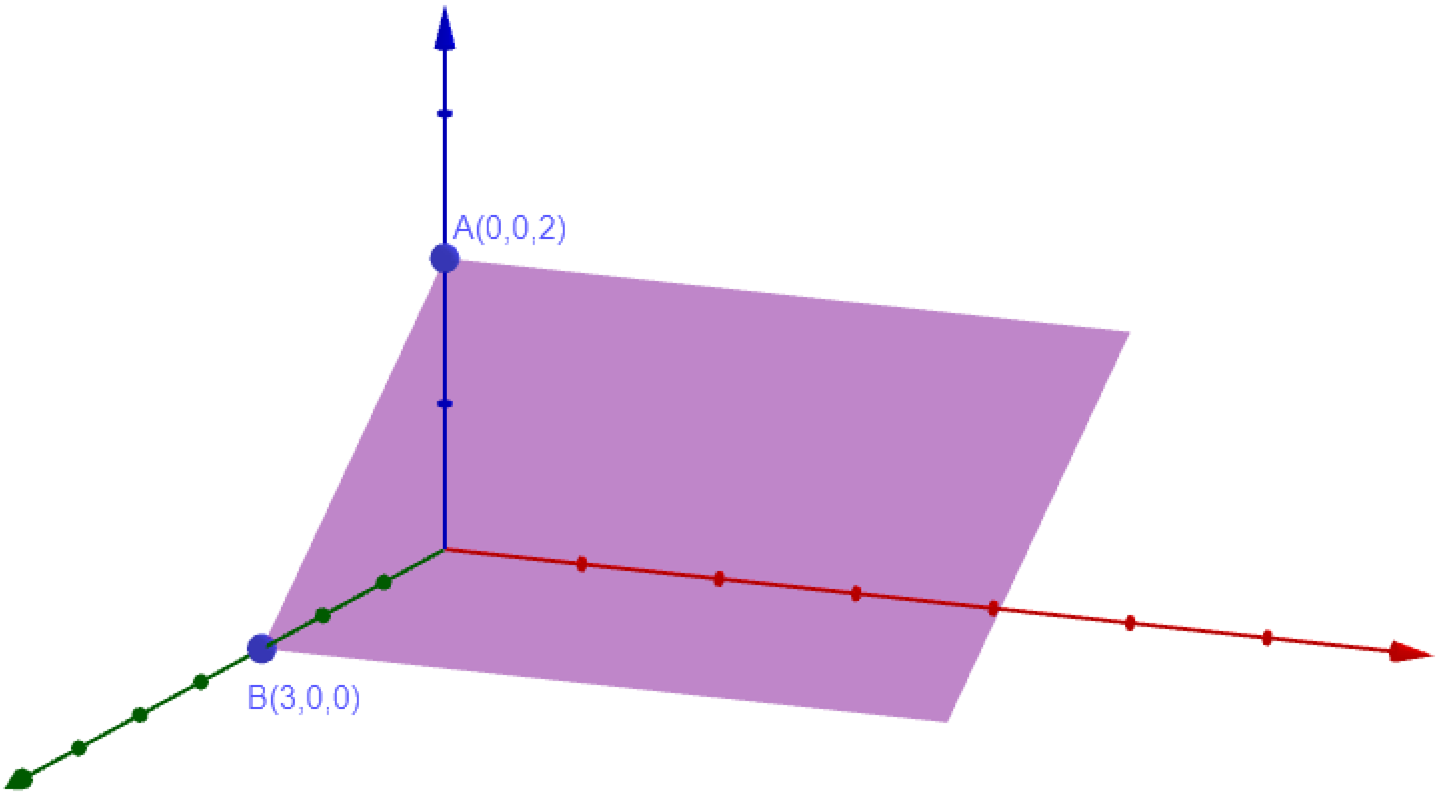
Planos – Casos particulares

(3) $b = 0$:

Planos – Casos particulares

(3) b $=$ 0: nesse caso, temos a equação $\pi: ax + cz + d = 0$, com $\vec{n} = (a, 0, c) \perp \vec{j}$. Logo, π é paralelo ao eixo y.

Exemplo: $\pi: 2x + 3z - 6 = 0$.



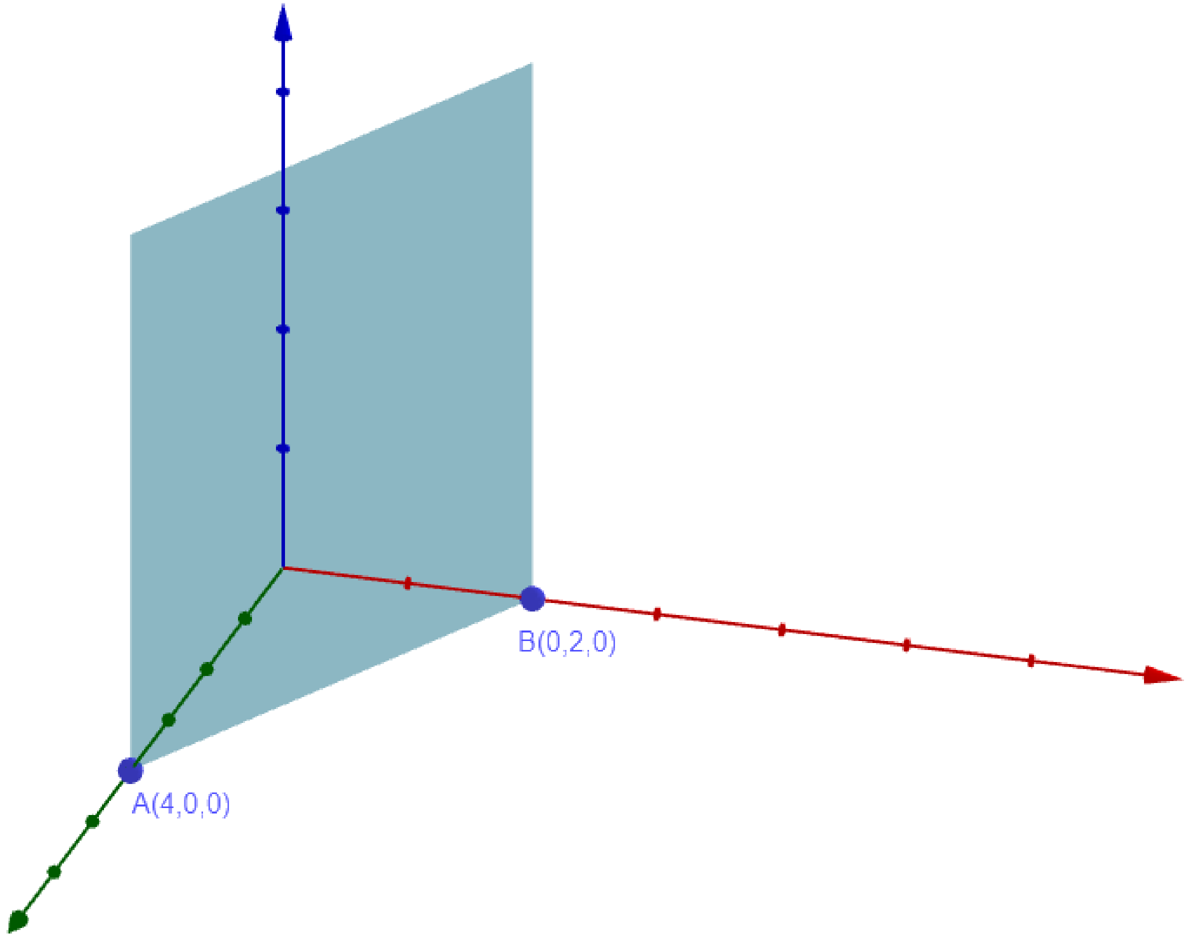
Planos – Casos particulares

(4) $c = 0$:

Planos – Casos particulares

(4) c = 0: nesse caso, temos a equação $\pi: ax + by + d = 0$, com $\vec{n} = (a, b, 0) \perp \vec{k}$. Logo, π é paralelo ao eixo z.

Exemplo: $\pi: x + 2y - 4 = 0$.

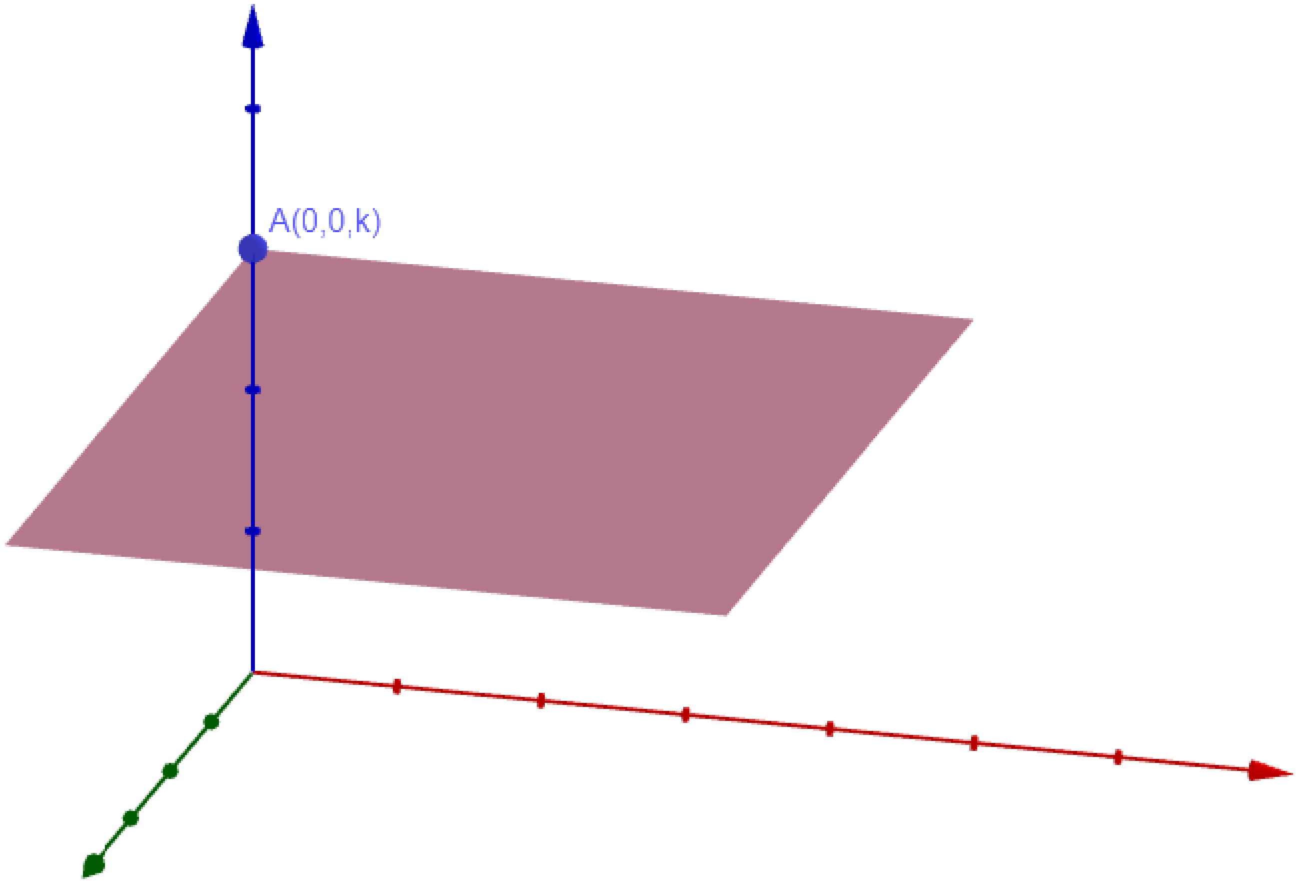


Planos – Casos particulares

(5) $a = b = 0$:

Planos – Casos particulares

(5) $a = b = 0$: nesse caso, temos a equação $\pi: cz + d = 0$, com $\vec{n} = (0,0,c) \parallel \vec{k}$. Logo, π é paralelo ao plano xy e tem $\vec{k}$ como vetor normal.

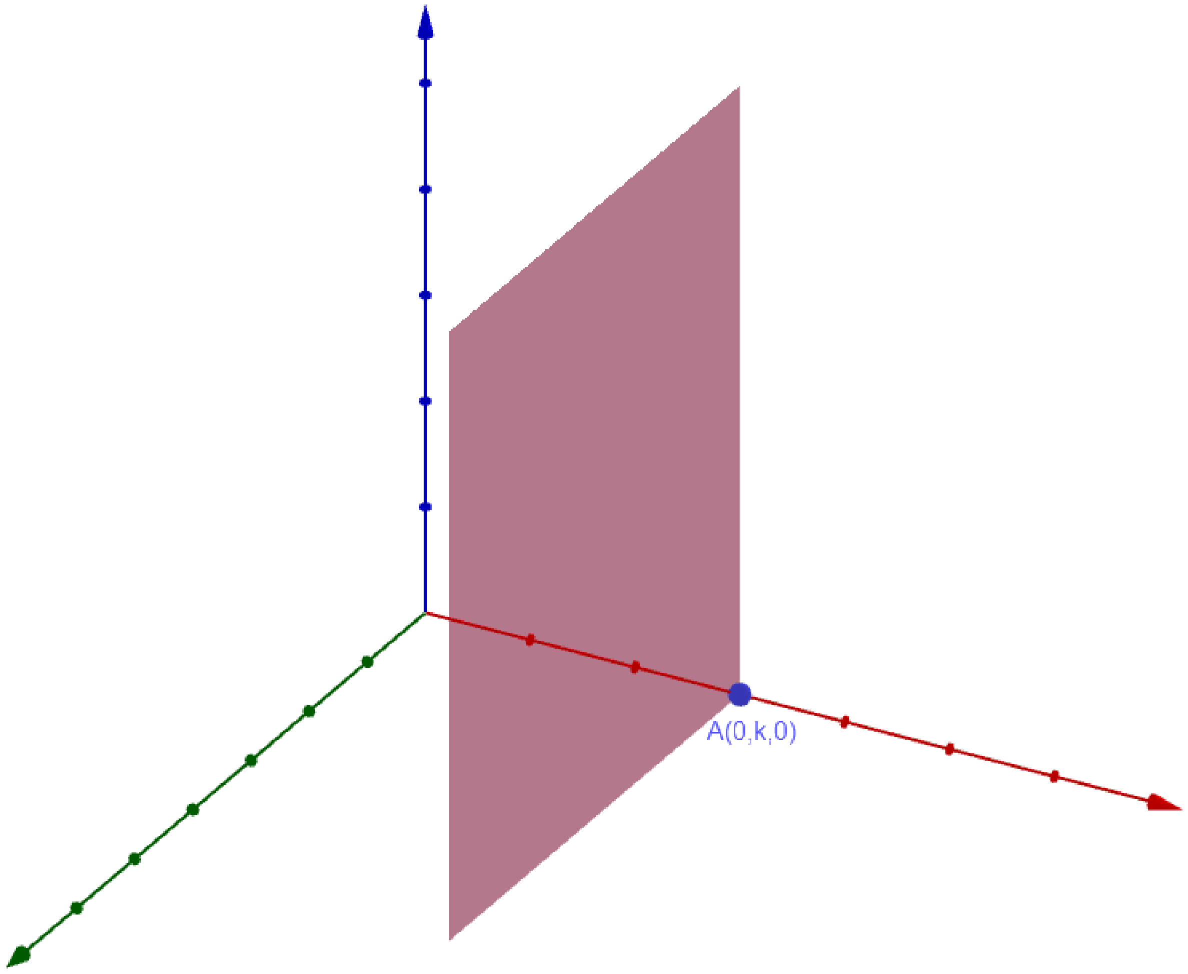


Planos – Casos particulares

(6) $a = c = 0$:

Planos – Casos particulares

(6) $a = c = 0$: nesse caso, temos a equação $\pi: by + d = 0$, com $\vec{n} = (0, b, 0) \parallel \vec{j}$. Logo, π é paralelo ao plano xz e tem $\vec{j}$ como vetor normal.

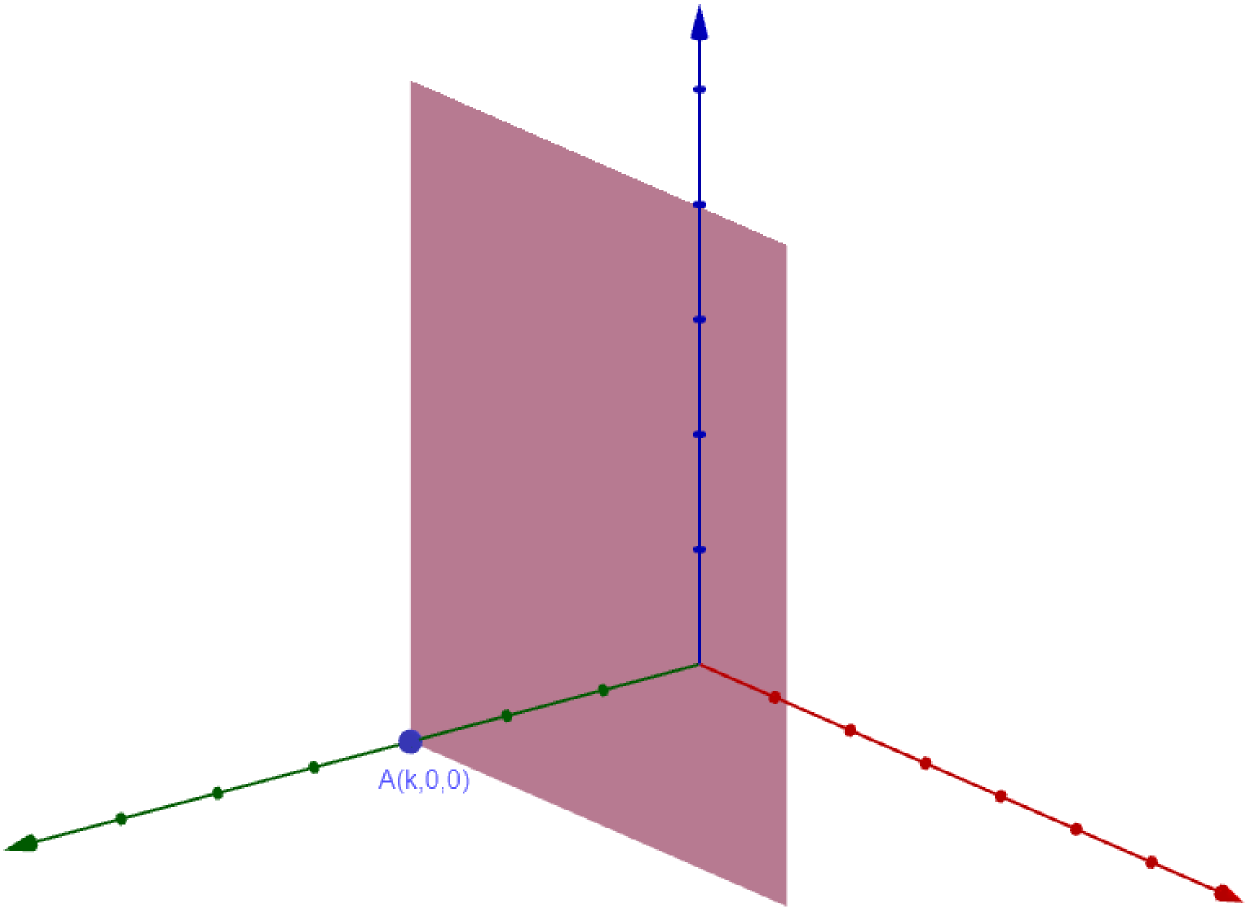


Planos – Casos particulares

(7) $b = c = 0$:

Planos – Casos particulares

(7) $b = c = 0$: nesse caso, temos a equação $\pi: ax + d = 0$, com $\vec{n} = (a, 0,0) \parallel \vec{\imath}$. Logo, π é paralelo ao plano yz e tem $\vec{\imath}$ como vetor normal.



Planos

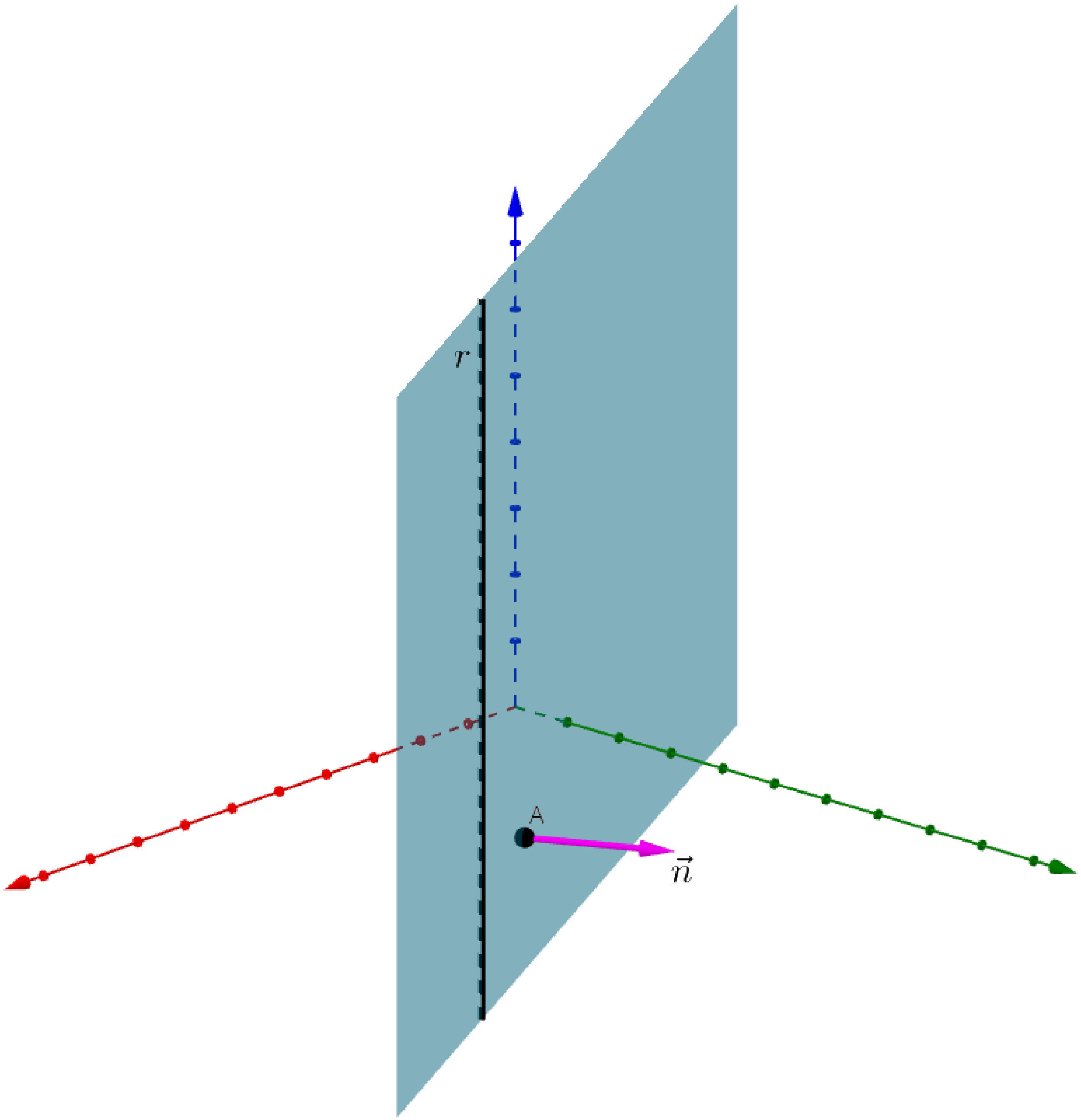
Exemplo 5: Determine a equação geral do plano que contém o ponto $A(2,2,-1)$ e a reta

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Planos

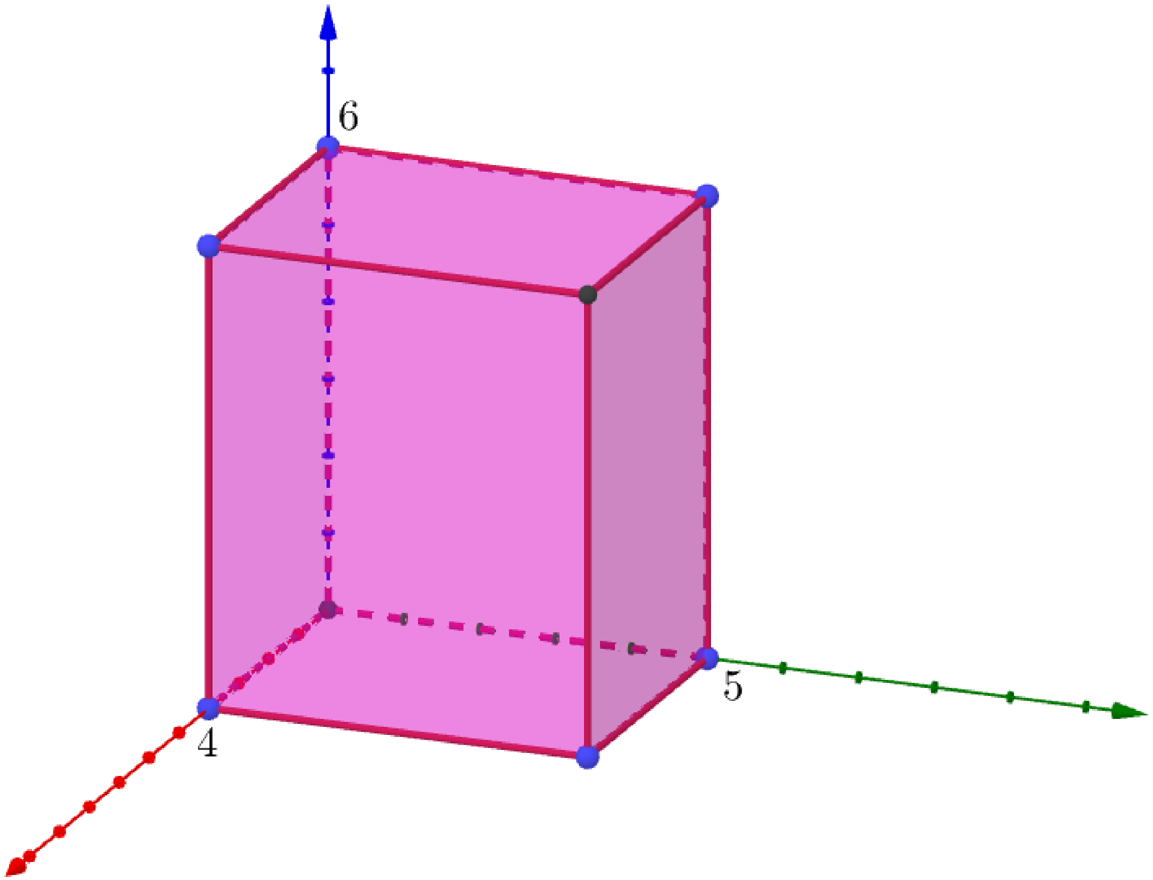
Exemplo 5: Determine a equação geral do plano que contém o ponto $A(2,2,-1)$ e a reta

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$



Planos

Exemplo 6: Considere o paralelepípedo.



(a) Quais lados são paralelos aos planos coordenados?

(b) Quais lados são perpendiculares aos eixos coordenados?

Equações paramétricas

Seja $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto de um plano π e $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores não colineares. Temos que um ponto $P(x, y, z)$ está no plano π se existem $h, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AP} = h\,\vec{u} + t\,\vec{v}.$$

Escrevendo com as coordenadas, temos

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2).$$

Então, as equações paramétricas do plano π são dadas por

$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + a_1 h + a_2 t \\ y = y_0 + b_1 h + b_2 t, \\ z = z_0 + c_1 h + c_2 t \end{cases}$$

com $h, t \in \mathbb{R}$.

Equações paramétricas

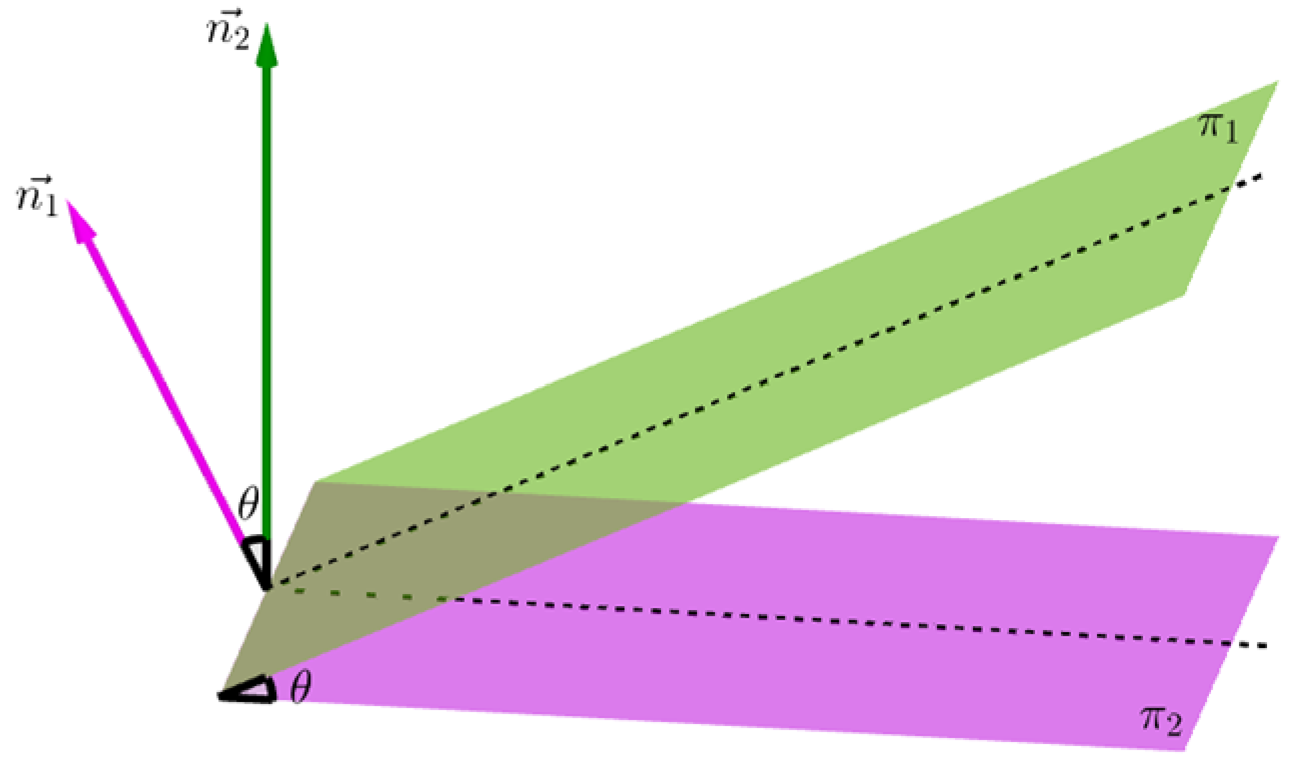
Exemplo 7: Escreva as equações paramétricas do plano que passa pelo ponto $A(2,1,3)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (-3,-3,1)$ e $\vec{v} = (2,1,-2)$.

Ângulo entre dois planos

Sendo os planos $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, o ângulo θ entre os planos π_1 e π_2 é o menor ângulo entre vetores normais de π_1 e π_2:

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|},$$

com $\overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$,
$\overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$ e
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.



Ângulo entre dois planos

Exemplo 8: Determine o ângulo entre os planos

$$\pi_1: 2x - 3y + 5z - 8 = 0$$

e

$$\pi_2: 3x + 2y + 5z - 4 = 0.$$

Condição de paralelismo

Sendo os planos $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, com $\overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$, temos

- π_1 e π_2 são paralelos se $\overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2}$, ou seja, se

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Se, além disso, tivermos

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2},$$

então π_1 e π_2 são coincidentes.

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Condição de perpendicularismo

Sendo os planos $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, com $\overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$, temos

- π_1 e π_2 são perpendiculares se $\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$, ou seja, se

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0.$$