Álgebra Linear

Definição de espaço vetorial
Subespaços vetoriais

Graciela Moro

Definição de espaço Vetorial:

Definição 2. Seja V um conjunto não vazio qualquer de objetos no qual estejam definidas duas operações, a **adição** e a **multiplicação por escalar**. Dizemos que V é um **espaço vetorial** e que os objetos de V são vetores se:

- V é um conjunto fechado para as operações de soma e multiplicação por escalar;
- os seguintes axiomas forem satisfeitos para qualquer elementos u, v e w de V e escalares α e β :

1. A adição é associativa: $(u+v)+w = u+(v+w)$
2. A adição é comutativa: $u+v = v+u$
3. A adição admite elemento neutro (nulo): existe $\vec{0} \in V$, tal que $v + \vec{0} = v$ para todo $v \in V$.
4. A adição admite simétricos: para todo $v \in V$, existe $-v \in V$, tal que $-v + v = \vec{0}$.
5. A multiplicação por escalar é associativa: $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$.
6. Distributividade sobre a adição de escalares: $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$.
7. Distributividade sobre a adição de vetores: $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$.
8. A mutiplicação por escalar admite elemento neutro: $1u = u$.

Observações:

- A definição de Espaço Vetorial não especifica nem a natureza dos vetores, nem das operações.

- Qualquer tipo de objeto pode ser um vetor (uma matriz, uma função, um polinômio etc), desde que considerado num conjunto munido de operações adequadas.

- As operações de Adição e Multiplicação por Escalar podem não ter relação alguma com as operações usuais.

- A única exigência é que o conjunto seja fechado para tais operações e que os 8 axiomas sejam satisfeitos.

Exemplos Clássicos de Espaços Vetoriais

- Dentre os diferentes conjuntos que, com operações apropriadas, são considerados espaços vetoriais, destacaremos três exemplos clássicos, que serão bastante utilizados em ALI.
- Esses exemplos nos permitem ver que vetores n dimensionais, polinômios de grau menor ou igual a n ou matrizes de ordem mxn, apesar de possuírem naturezas totalmente distintas, se comportam exatamente da mesma forma em relação à soma e à multiplicação por escalar.
- E é esse comportamento único que nos interessa quando estudamos espaços vetoriais.

Exemplo 1. *Para todo número natural n, o símbolo $\mathbb{R}^n$ representa o espaço vetorial euclidiano n-dimensional. Os elementos de $\mathbb{R}^n$ são as listas ordenadas (chamadas n-uplas) $u = (x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)$, $v = (y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_n)$ de números reais.* Em $\mathbb{R}^n$ definimos as operações:

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots . x_n + y_n)$$

e

$$\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots . \alpha x_n)$$

Verifica-se sem dificuldades, que estas definições fazem do $\mathbb{R}^n$ um *espaço vetorial.*

Exemplos Clássicos de Espaços Vetoriais

Exemplo 2 *O conjunto dos polinômios em x, de grau menor ou igual a n é definido por :*

$$P_n = \{p(x) = a_o + a_1x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \;/\; a_o, a_1, ..., a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}\}$$

com as operações de adição de polinômios e multiplicação de um polinômio por um escalar é um espaço vetorial. Note que cada elemento de P_n é uma função $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Exemplo 3 *O conjunto das matrizes definido por*

$$M(m,n) = \{A_{m\times n} = \{a_{ij}\} \;/\; a_{ij} \in \mathbb{R},\; i = 1,..,m \text{ e } j = 1,..,n\}$$

com a soma usual de matrizes e multiplicação usual de um escalar por uma matriz é um espaço vetorial.

No caso particular das matrizes quadradas de ordem n denotaremos $M(n,n)$ por M_n.

Exercícios propostos:

1. Verifique se o conjunto $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y - z = 0\}$ é um espaço vetorial, considerando as operações usuais de soma e de multiplicação por escalar em $\mathbb{R}^3$.

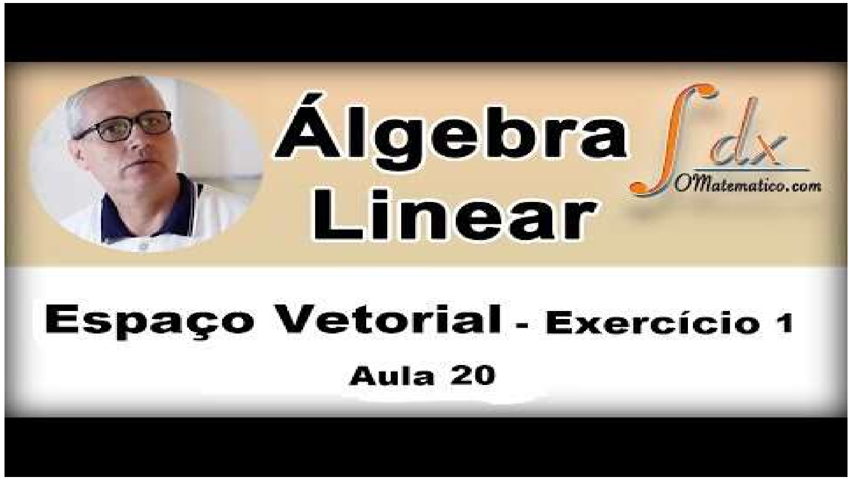
2. Considere $M(2,2)$ como o conjunto de todas as matrizes de ordem 2x2. Verifique se o conjunto

$$H = \{A \in M(2,2)\ ;\ A^T = A\}$$

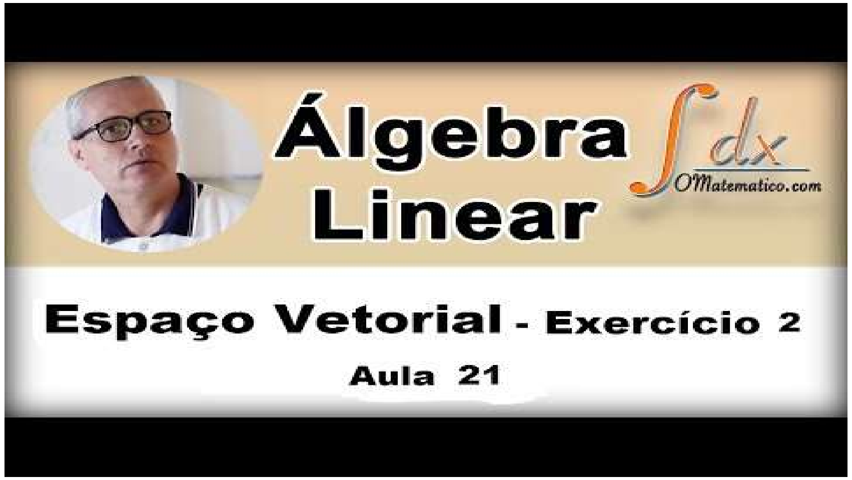
é um espaço vetorial vetorial, considerando as operações usuais de soma de matrizes e de multiplicação de uma matriz por um escalar.

Queres saber mais?

- Ficastes com alguma dúvida? Queres ver mais exemplos e contraexemplos de espaços vetoriais? Assista às seguintes videoaulas do canal OMATEMATICO, do professor Grings:



https://www.youtube.com/watch?v=e8kAs458cVI&t=420s

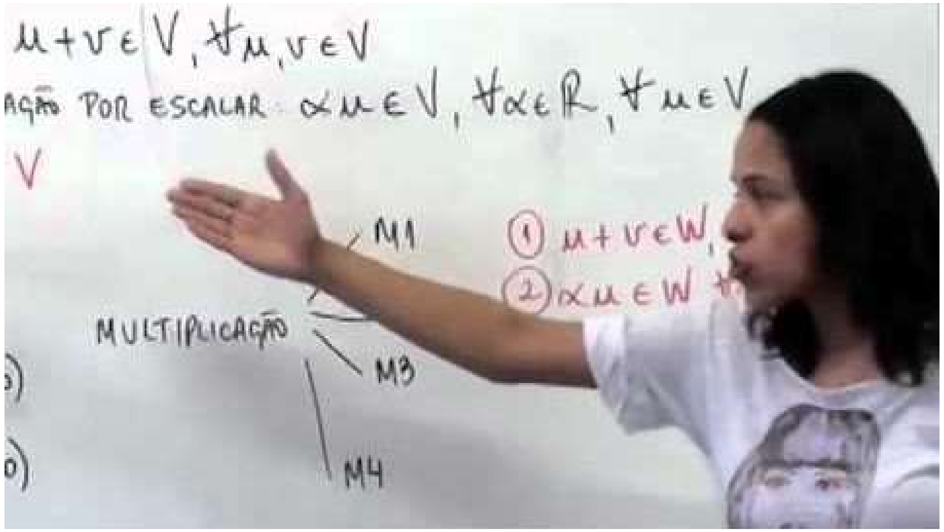


https://www.youtube.com/watch?v=KXVCjPjgpq4

Subespaços Vetoriais - Introdução

Por vezes, a escolha de um conjunto de vetores de um espaço vetorial V pode conduzir à constituição de um novo conjunto, subconjunto S de V, e que verifica ainda todos os axiomas da definição de espaço vetorial, sendo este subconjunto S também um espaço vetorial. Nestas condições, dizemos que S é um **subespaço vetorial** de V.

Para entender essa ideia, assista o vídeo a seguir:



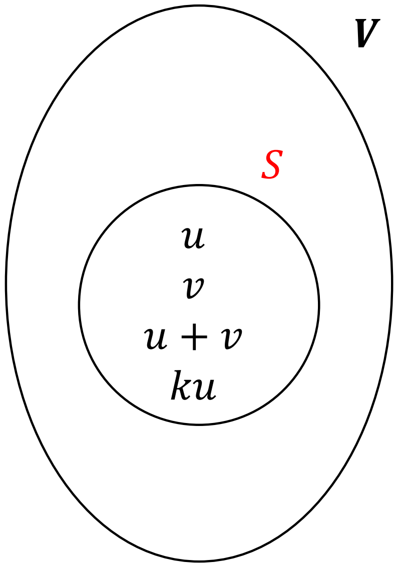
https://www.youtube.com/watch?v=e-lY-MSfeS4

Definição de Subespaço vetorial

Definição: Um subconjunto não vazio S de um espaço vetorial V é um subespaço de *V* quando S é ele próprio um espaço vetorial com as operações de soma e multiplicação por escalar definidas em V. Ou seja, S é um subespaço de V se:

1) Para quaisquer vetores $u \ e \ v \ \in S \Rightarrow u+v \in S$ (dizemos que S é fechado para a adição)

2) Para qualquer vetor $u \in S \ e \ k \in \mathbb{R} \Rightarrow ku \in S$ (dizemos que S é fechado para a multiplicação por escalar)



Podemos fazer 3 observações:

- As condições da definição garantem que ao operarmos em S (soma e multiplicação por escalar) não obteremos um vetor fora de S. Isto é suficiente para afirmar que **S é ele próprio um EV (espaço vetorial),** portanto, ele **deve conter o vetor nulo**.
- Todo espaço vetorial admite pelo menos dois subespaços:
  - O conjunto formado pelo vetor nulo, $S = \{\vec{0}\}$. Este é o subespaço nulo.
  - O próprio EV, ou seja S=V.

Justificativa:

Se V é um espaço vetorial, ambos os conjuntos $U = \{\vec{0}\}$ e $U = V$ são fechados para as operações de soma e multiplicação por escalar. Verifique isso!

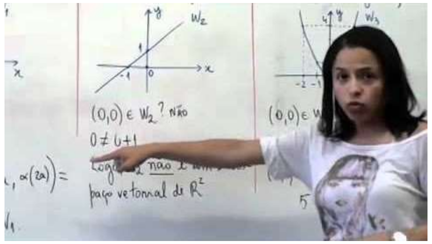
Nota: Todo EV contém estes dois **subespaços triviais** e, subespaços diferentes desses, são chamados de **subespaços próprios** (ou não triviais).

Para entender melhor as observações do slide anterior, assista os vídeos a seguir:

Parte 1:

https://www.youtube.com/watch?v=83nCgbvGsc4&t=108s

Parte 2:



https://www.youtube.com/watch?v=T3gVko9sYfc

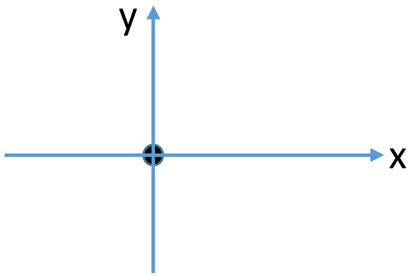
Conclusões a retirar dos exemplos exibidos nos vídeos:

- Se S é um subconjunto do $\mathbb{R}^2$, então é um subespaço se e somente se tiver uma das formas listadas abaixo:

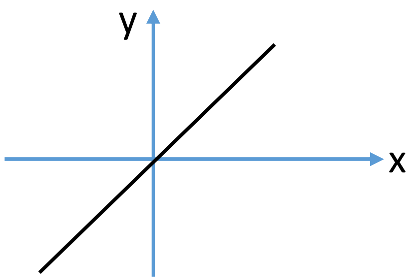
1. S consiste no único ponto vetor $(0,0)$. Ou seja, $S = \{(0,0)\}$.

2. S consiste em todos os pontos de uma reta que passa pela origem. Ou seja, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = ax, a \in \mathbb{R}\}$.

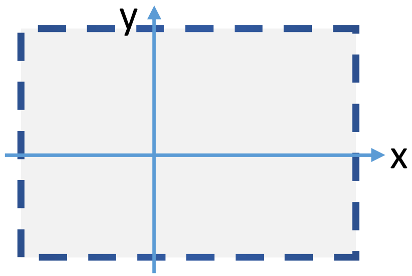
3. S consiste em todo o $\mathbb{R}^2$. Ou seja, $S = \mathbb{R}^2$.



$S = \{(0,0)\}$



S são todos os pontos de uma reta
que passa pela origem



$S = \mathbb{R}^2$

Exemplos:

1) Seja $\mathbf{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$, S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$?
Note que, geometricamente, S é o conjunto de todos os vetores do plano que passa pela origem, $\mathrm{x} + y + z = 0$

Característica de qualquer $v \in S, v = (x, y, -x - z)$
Vamos tomar dois vetores quaisquer de S:
$u = (a, b, -a - b) \in S$
$w = (c, d, -c - d) \in S$

Devemos mostrar que:

$$1)\ u + w \in S \Rightarrow (a, b, -a - b) + (c, d, -c - d) = (a + c, b + d, -a - b - c - d) =$$
$$= \big(a + c, b + d, -(a + c) - (b + d)\big) \in S$$

O vetor $u + w \in S$ porque preserva a característica dos vetores de S.

2) $ku \ \in S \Rightarrow k(a, b, -a - b) = (ka, kb, -ka - kb) \in S$ pois preserva a característica de S.

Portanto, S é um subspaço de $\mathbb{R}^3$.

Exemplos:

2) Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + z + 1 = 0\}$, S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$?
Note que, geometricamente, S é o conjunto de todos os vetores do plano que **não** passa pela origem, $x + z + 1 = 0$

Característica de qualquer $v \in S, v = (x, y, -x - 1)$
Vamos tomar dois vetores quaisquer de S:
$u = (a, b, -a - 1) \in S$
$w = (c, d, -c - 1) \in S$

Devemos mostrar que:
- $u + w \in S$

$u + w = (a, b, -a - 1) + (c, d, -c - 1) = (a + c, b + d, -a - c - 2) \notin S$, pois **não** preserva a característica dos vetores de S.

Portanto, S **não** é um subspaço de $\mathbb{R}^3$.

OBS.: Outra forma de mostrar que S **não** é um subspaço de $\mathbb{R}^3$, é utilizando um contraexemplo:
Sejam $u = (1,2,-2) \in S$ e $w = (-2,0,1) \in S$
$u + w$=(-1,2,-1). Ao substituir este vetor na equação do plano encontramos -1=0, o que é falso. Significa que o vetor $u + w$ não é um vetor do plano $x + z + 1 = 0$. Logo $u + w \notin S$, implicando que S não é um subespaço do $\mathbb{R}^3$.

Considerações a partir dos exemplos 1 e 2:

- Nos exemplos 1 e 2, cada subconjunto do $\mathbb{R}^3$ é um plano, mas o único que é subespaço é aquele representado por um plano que passa pela origem. Um subconjunto S do $\mathbb{R}^3$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ se e somente se tem uma das formas listadas abaixo:

1. S consiste no único ponto vetor $(0,0,0)$. Ou seja, $S = \{(0,0,0)\}$.
2. S consiste em todos os pontos de uma reta que passa pela origem. Ou seja, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = ax, z = bx, a, b \in \mathbb{R}\}$.
3. S consiste em todos os pontos de um plano que passa pela origem. Ou seja, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; ax + by + cz = 0\}$.
4. S consiste em todo o $\mathbb{R}^3$. Ou seja, $S = \mathbb{R}^3$.

Exemplo:

3) Verifique se $U = \{A \in M(2,2) \ / \ A^T = -A\}$ é um subespaço vetorial de $V = M(2,2)$.
Sejam $A, B \in U$. Logo

$$A^T = -A \qquad \text{e} \qquad B^T = -B.$$

Assim, temos que:

$i)$ $A + B \in U$, pois

$$(A + B)^T = A^T + B^T = (-A) + (-B) = -(A + B).$$

$ii)$ $kA \in U$, pois

$$(kA)^T = k(A)^T = k(-A) = -kA.$$

Portanto, U é um subespaço vetorial de $\mathrm{V} = M(2,2)$.

Exemplo

4) Verifique se $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2) \;/\; c = a + 3b \;\text{ e }\; d = -2b \right\}$ é um subespaço vetorial de $V = M(2,2)$.

Sejam $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U$ e $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in U$. Logo

$$c = a + 3b,\; d = -2b \qquad \text{e} \qquad z = x + 3y\,,\; w = -2y.$$

Assim, temos que:

$$i)\; A + B = \begin{bmatrix} a + x & b + y \\ c + z & d + w \end{bmatrix} \in U, \text{pois}$$

$$c + z = (a + 3b) + (x + 3y) = (a + x) + 3(b + y)$$
$$d + w = -2b - 2y = -2(b + y)\,.$$

$$ii)\; kA = k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} \in U,\; \text{pois}$$

$$kc = k(a + 3b) = ka + k(3b) = ka + 3(kb)$$
$$kd = k(-2b) = -2(kb).$$

Portanto, U é um subespaço vetorial de $\mathrm{V} = M(2,2)$.

Exemplo

5) Verifique se $U = \{ A \in M(n,n) \;/\; -A + 5A^T = I \}$ é um subespaço vetorial de $V = M(n,n)$.

Sejam $A, B \in U$. Logo

$$-A + 5A^T = I \quad \text{e} \quad -B + 5B^T = I.$$

Assim, temos que:

$i)\; A + B \in U?$

Como

$$-(A+B) + 5(A+B)^T = -A - B + 5(A^T + A^T) = (-A + 5A^T) + (-B + 5B^T) = I + I = 2I \neq I$$

Concluímos que $A + B \notin U$ e U não é fechado para a soma.

O que ocorre com a multiplicação por escalar?

Portanto, *U* não é um subespaço vetorial de $\text{V} = M(n,n)$.

Exemplo

6) Verifique se $U = \{ a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3 \ / \ 2a - 5b + c - 7d = 0 \}$ é um subespaço vetorial de $V = P_3$.
Sejam $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in U$ e $q(x) = e + fx + gx^2 + hx^3 \in U$. Logo

$$2a - 5b + c - 7d = 0 \quad \text{e} \quad 2e - 5f + g - 7h = 0.$$

Assim, temos que:

$i)\ p(x) + q(x) = (a + e) + (b + f)x + (c + g)x^2 + (d + h)x^3 \in U,$ pois

$$2(a + e) - 5(b + f) + (c + g) - 7(d + h) = 2a + 2e - 5b - 5f + c + g - 7d - 7h =$$
$$= (2a - 5b + c - 7d) + (2e - 5f + g - 7h) = 0 + 0 = 0.$$

$ii)\ kp(x) = ka + (kb)x + (kc)x^2 + (kd)x^3 \in U,$ pois

$$2(ka) - 5(kb) + kc - 7(kd) = k(2a - 5b + c - 7d) = k.0 = 0.$$

Portanto, U é um subespaço vetorial de $\mathrm{V} = P_3$.

Exemplo

7) Verifique se $U = \{ p(x) \in P_n \,/\, p(-1) + 2p(1) = p(4) \}$ é um subespaço vetorial de $V = P_n$.
Sejam $p(x),\ q(x) \in U$. Logo

$$p(-1) + 2p(1) = p(4) \quad \text{e} \quad q(-1) + 2q(1) = q(4).$$

Assim, temos que:

$i)$ $p(x) + q(x) \in U$, pois

$$\begin{aligned}(p+q)(-1) + 2(p+q)(1) &= p(-1) + q(-1) + 2[p(1) + q(1)] \\ &= [p(-1) + 2p(1)] + [q(-1) + 2q(1)] \\ &= p(4) + q(4) = (p+q)(4).\end{aligned}$$

$ii)$ $kp(x) \in U$, pois

$$(kp)(-1) + 2(kp)(1) = kp(-1) + 2kp(1) = k[p(-1) + 2p(1)] = kp(4) = (kp)(4).$$

Portanto, U é um subespaço vetorial de $\mathrm{V} = P_n$.

Propriedade de Subespaços Vetoriais

- **Propriedade :**

Se U é um subespaço vetorial de um espaço V então $\vec{0} \in U$.

Justificativa:

Se U é um subespaço vetorial de V sabemos que ele é fechado para a multiplicação por escalar. Assim, se $u \in U$, tomando $k = 0$, temos que

$$ku = 0.u = \vec{0} \in U.$$

Obs: Se um subconjunto não contiver o vetor nulo, pela propriedade anterior, ele não pode ser um subespaço vetorial.

Por exemplo, no exemplo 5, podemos garantir que $U = \{\, A \in M(n,n) \;/\; -A + 5A^T = I \,\}$ não é um subespaço vetorial de $M(n,n)$ pelo fato que a matriz nula (que corresponde ao vetor nulo de $M(n,n)$) não pertence a *U,* pois não satisfaz a condição do conjunto, já que

$$-0 + 5.0^T = 0 + 5.0 = 0 + 0 = 0 \neq I.$$

Cuidado: O fato de $\vec{0} \in U$ não garante que U é um subespaço vetorial. Essa é uma condição necessária, mas não suficiente.

Lembre que no exemplo visto no vídeo, $W_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\; y = x^2\}$, é tal que $\vec{0} = (0,0) \in W_3$(pois $0 = 0^2$), mas mesmo assim, W_3 não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Exercícios propostos:

Em cada caso, verifique se W é um subespaço vetorial do espaço vetorial V:

a) $V = M(2,2)$ e $W = \{A \in M(2,2); tr(A) = 0\}$, onde $tr(A)$ é o traço da matriz A. Definimos por traço de uma matriz, a soma dos elementos da diagonal principal.

b) $V = P_2$ e $W = \{p(x) = ax^2 + bx + c \,; b = a^2\}$

c) $V = M(2,2)$ e $W = \{A \in M(2,2); AB = BA\}$, onde B é uma matriz fixa.