Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Séries de Termos com sinais quaisquer

Classificação quanto à convergência

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 do dia 07 de outubro de 2024.

UDESC

Séries de Termos com Sinais Quaisquer

São séries cujos termos possuem sinais negativos e/ou positivos, não necessariamente alternados.

Exemplo: É uma série de termos com sinais quaisquer a série:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{n^5} = \frac{\sqrt{3}/2}{1} + \frac{1/2}{2^5} + 0 - \frac{1/2}{4^5} - \frac{\sqrt{3}/2}{5^5} - \frac{1/2}{6^5} - \frac{\sqrt{3}/2}{7^5} - \frac{1/2}{8^5} - \cdots$$

Para estudar a convergência/divergência de uma série com sinais quaisquer, não podemos aplicar diretamente os critérios estudados anteriormente, pois todos exigiam que $u_n \geq 0$ ou que a série fosse alternada. Precisaremos de um resultado para estudar tais séries:

Teorema: Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série de termos com sinais quaisquer. Se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4| + \cdots +$$

for convergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ também converge.

Demonstração: Como

$$|u_n| = \begin{cases} u_n, \text{se } u_n \geq 0 \\ -u_n, \text{se } u_n < 0 \end{cases}$$

Séries de Termos com Sinais Quaisquer

Segue que

$$u_n + |u_n| = \begin{cases} 2u_n, \text{se } u_n \geq 0 \\ 0, \text{se } u_n < 0 \end{cases}.$$

Assim

$$0 \leq u_n + |u_n|.$$

Ainda, como

$$u_n \leq |u_n|$$

segue que

$$0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n|.$$

Dessa forma, supondo que $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ converge, o mesmo ocorre com $\sum_{n=1}^{+\infty} 2|u_n| = 2\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$. Com isso, pelo critério da comparação, segue que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + |u_n|)$$

é convergente, por ser positiva e menor ou igual do que uma série convergente. Como

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + |u_n|) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$$

e provamos que a segunda parcela é uma série converge, a primeira parcela também deve ser convergente, pois do contrário, a soma das séries seria divergente. Portanto, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

Cuidado: Se $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ divergir, nada pode ser afirmado sobre $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Convergência Absoluta e Condicional

Exemplo: A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{n^5}$$

é tal que

$$0 \leq |u_n| = \left|\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{n^5}\right| = \frac{\left|\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right|}{n^5} \leq \frac{1}{n^5}.$$

Assim, $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ é menor do que uma p-série convergente

com $p = 5 > 1$.

Portanto, a série do módulo converge por comparação.

Com isso a série dada também é convergente, pelo teorema anterior.

Convergência Absoluta e Condicional

Classificação quanto à convergência:

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série de termos com sinais quaisquer. Dizemos que a série é:

- absolutamente convergente quando

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| \text{ é convergente.}$$

- condicionalmente convergente quando

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| \text{ é divergente} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ é convergente.}$$

- divergente, quando

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ divergem.}$$

Convergência Absoluta e Condicional

A série do Exemplo anterior, dada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{n^5}$$

é absolutamente convergente, pois converge em módulo. A série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}.\frac{1}{n}$$

é condicionalmente convergente, pois em módulo é a série harmônica, que diverge, e sem o módulo, é convergente por Leibnitz.

A diferença essencial em tal nomenclatura é que séries absolutamente convergentes preservam propriedades básicas de somas finitas (como a comutatividade e associatividade), enquanto séries condicionalmente convergentes não preservam tais propriedades.

Por exemplo, é possível mostrar que comutando a ordem com a qual são somados os termos de uma série condicionalmente convergentes, o resultado para o qual ela converge pode ser alterado.

O Teorema anterior pode ser aplicado para qualquer série, inclusive alternadas.

Em geral, o Teorema é aplicado em conjunto com outros testes, como o da Raiz, o da Razão, da Integral e da Comparação.

Exercícios

Exercício 1) Classifique as séries abaixo quanto ao tipo de convergência.

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3n}{8n^2 + 5}$$

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{8\cos(3n^2) + 5\operatorname{sen}^3(4n^7) + 2n^4}{9n^7 + n! + \sqrt{n}}$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2n}{5n + 1}$$

Séries de Funções

Séries de Funções são séries cujos termos gerais também dependem de uma variável real x, ou seja, são da forma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3\,(x) + u_4\,(x) + u_5\,(x) + \cdots +$$

em que $u_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, são funções reais de uma variável real x.

Em geral, o índice (n) de uma série de funções sempre inicia em 0, para possibilitar a soma de algum termo "constante" conforme veremos no exemplo a seguir:

Exemplo: Um exemplo de Série de funções é dada por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx^n)}{(n+1)^4} = 1 + \frac{\cos(x)}{2^4} + \frac{\cos(2x^2)}{3^4} + \frac{\cos(3x^3)}{4^4} + \frac{\cos(4x^4)}{5^4} + \cdots +$$

Ao estudarmos séries de funções, a questão consiste em determinar para quais valores de x a série converge.

Tal conjunto de valores de x para o qual a série de funções converge é chamado de Intervalo de Convergência da Série.

Séries de Funções e Séries de Potências

Para obter o intervalo de convergência de uma série de funções aplicamos os critérios estudados anteriormente.

Exemplo: A série do exemplo anterior é tal que, ao analisarmos sua convergência absoluta, obtemos

$$|u_n(x)| = \left|\frac{\cos(nx^n)}{(n+1)^4}\right| = \frac{|\cos(nx^n)|}{(n+1)^4} \leq \frac{1}{(n+1)^4} \leq \frac{1}{n^4}$$

pois

$$|\cos(nx^n)| \leq 1$$

e

$$n+1 \geq n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}.$$

Portanto, a série **converge absolutamente** para todos os valores reais de x, visto que

$|u_n(x)|$ é menor do que uma p –Série convergente (com $p = 4 > 1$).

Assim, seu intervalo de convergência é

$$I = (-\infty, +\infty).$$

Séries de Potências

Quando $u_n(x) = c_n(x-a)^n$ a série de funções é chamada de Séries de Potências:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots +$$

em que $a \in \mathbb{R}$ é dito centro da Série de Potências e c_n são ditos coeficientes da série.

Exercício 2: Determine o intervalo de convergência da Série de Potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3x-5)^n}{2^{3n-1}}$$

Exercício 3: Determine o intervalo de convergência da Série de Potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(7x+4)^n}{3^{2n}(n+1)}.$$

Séries Alternadas

Exemplo 1) Verifique se a série alternada $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{4n}{5n^2+1}$ é convergente ou divergente.

Solução: Desconsiderando a alternância de sinal, temos que

$$u_n = \frac{4n}{5n^2+1} \geq 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

e u_n é decrescente, pois

$$u_{n+1} = \frac{4(n+1)}{5(n+1)^2+1} < \frac{4n}{5n^2+1} = u_n.$$

Além disso,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n}{5n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 \cdot 4/n}{n^2 \cdot \left(5+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4/n}{\left(5+\frac{1}{n^2}\right)} = 0.$$

Portanto, a série dada converge pelo Critério de Leibnitz.

Veja que o Critério de Leibnitz garante apenas a convergência de uma alternada. Nada é afirmado sobre a divergência. Caso as hipóteses de Leibnitz não sejam verdadeiras, deve-se aplicar outro critério.