# Análise de Variação de Funções

**Ponto Crítico:** O ponto $c \in D_f$ tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c) \nexists$ é chamado de ponto crítico

**Teorema de Weirstrass:** Se $f$ é uma função contínua, definida em um intervalo fechado $[a,b]$. Enta $f$ assume seu máximo e mínimo absoluto em $[a,b]$

**Funções Crescentes / Decrescentes:**

- Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$ então $f$ é crescente em $[a,b]$;
- Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a,b)$ então $f$ é decrescente em $[a,b]$;
- Se $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$ então $f$ é constante em $[a,b]$;

**Teste da 1ª derivada:** Seja $y = f(x)$ uma função contínua num intervalo fechado $[a,b]$ que possui derivada em todo o ponto do intervalo $(a,b)$, exceto possivelmente num ponto $c$.

- Se $f'(x) > 0$ $\forall x < c$ e $f'(x) < 0$ $\forall x > c$, então $f$ tem máximo relativo em $c$;
- Se $f'(x) < 0$ $\forall x < c$ e $f'(x) > 0$ $\forall x > c$, então $f$ tem mínimo relativo em $c$;
- Se $f'(x) > 0$ $\forall x < c$ e $f'(x) > 0$ $\forall x > c$, então $f$ não tem ponto nem de maximo nem de mínimo relativo.
- Se $f'(x) < 0$ $\forall x < c$ e $f'(x) < 0$ $\forall x > c$, então $f$ não tem onto nem de maximo nem de mínimo relativo.

**Teste da 2ª derivada:** Seja $f$ uma função derivável num intervalo aberto $(a,b)$ e $c$ um ponto crítico de $f$ neste intervalo tal que $f'(c) = 0$, para $c \in (a,b)$. Se $f$ admite a derivada $f''$ em $(a,b)$ e se:

1. $f''(c) < 0$, então $f$ tem um valor máximo relativo em $c$;
2. $f''(c) > 0$, então $f$ tem um valor mínimo relativo em $c$;

**Concavidade:** Se $f$ for diferenciável num intervalo $I$ então:

1. $f$ tem concavidade para cima se $f'$ for crescente em $I$.
2. $f$ tem concavidade para baixo se $f'$ for decrescente em $I$.

Seja $f$ uma função duas vezes diferenciável em um intervalo $I = (a,b)$. Se:

1. $f''(x_0) > 0$ quando $x_0 \in I$, então o gráfico de $f$ tem concavidade para cima sobre $I$.
1. $f''(x_0) < 0$ quando $x_0 \in I$, então o gráfico de $f$ tem concavidade para baixo sobre $I$.

**Pontos de Inflexão:** Um ponto $P(c, f(c))$ do gráfico de uma função contínua $f$ é chamado de ponto de inflexão, se existe um intervalo $(a,b)$ contendo $c$, tal que uma das situações ocorra:

1. $f$ tem concavidade voltada para cima em $(a,c)$ e para baixo em $(c,b)$;
2. $f$ tem concavidade voltada para baixo em $(a,c)$ e para cima em $(c,b)$;

- Seja $f(x)$ uma função diferenciável sobre $(a,b)$ onde $c \in (a,b)$, se $P(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de $f(x)$ e se existe $f''(c)$, então $f''(c) = 0$
- Seja $f(x)$ uma função contínua sobre um conjunto $I$ onde $(a,b) \in I$, se $c \in (a,b)$ tal que $f''(c) = 0$ ou $f''(c) \nexists$ e se:

1. $f''(x) > 0$, quando $x \in (a,c)$ e $f''(x) < 0$ quando $x \in (c,b)$, então $P(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de $f(x)$;
2. $f''(x) < 0$, quando $x \in (a,c)$ e $f''(x) > 0$ quando $x \in (c,b)$, então $P(c, f(c))$ é um ponto de inflexão do gráfico de $f(x)$;
3. $f''(x) < 0$ quando $x \in (a,c)$ e $f''(x) < 0$ quando $x \in (c,b)$ (ou $f''(x) > 0$ quando $x \in (a,c)$ e $f''(x) > 0$ quando $x \in (c,b)$) então $P(c, f(c))$ não é um ponto de inflexão do gráfico de $f(x)$.

**Assíntotos do Gráfico de uma Função:**

- **Assíntota Vertical:** a reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições for verdadeira:
  - $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
  - $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
  - $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$
  - $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

- **Assíntotas Oblíquas:** A curva $f(x)$ tem uma assíntota oblíqua, cuja equação é da forma $y = Kx + b$, onde os valores dos coeficientes $K$ e $b$, se existirem os limites:

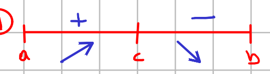
$$K = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - Kx)$$

- **Obs:** Se um dos limites acima não existir então a curva não tem assíntota obliqua.

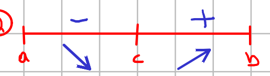
# Roteiro para construção do gráfico de funções usando Derivadas:

1. Domínio de $f$;
2. Achar pontos críticos: $\forall c \in Df \mid f'(c) = 0$ ou $f'(c)\ \nexists$
3. Estudo do sinal de $f'$:
   - → $f$ é crescente se $f' > 0$
   - → $f$ é decrescente se $f' < 0$
   - → nos pontos em que há troca de sinal de $f'$ e que são pontos críticos, são pontos extremos locais
     ↳ máx. ou mín.

· Teste da 1ª derivada: $f'(c) = 0$ ou $f'(c)\ \nexists$

① 

→ $c$ é um ponto de máximo local

② 

→ $c$ é um ponto de mínimo local

③ Se não há troca de sinal em $f'(c)$, $c$ não tem máx. nem mín. local.

4. Candidatos a serem pontos de inflexão
   - $f''(x_0) = 0$ ou $f''(x_0)\ \nexists$, $x_0 \in Df$

   Pode ocorrer algum ponto de inflexão em algum $x_0 \notin Df$ desde que, haja troca de concavidade. Para isso a função precisa estar definida na vizinhança de $x_0$.

5. Estudo do sinal de $f''$
   - → $f'' > 0$, então $f$ tem concavidade para cima
   - → $f'' < 0$, então $f$ tem concavidade para baixo
   - → ponto de inflexão nos pontos em que ocorre a troca de concavidade.

· Teste da 2ª derivada:
- → se $f''(c) < 0$ → $c$ é um ponto de máximo local
- → se $f''(c) < 0$ → $c$ é um ponto de mínimo local
- → se $f''(c) = 0$ → o teste é inconclusivo

6. Verificar se existem assíntotas

   6.1. Assíntota Vertical a reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições for verdadeira:

   - $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$
   - $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
   - $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$
   - $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

   6.2. Assíntota Oblíqua: A reta $y = Kx + b$ é assíntota oblíqua se:

   $$K = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - Kx)$$

· Obs: Se um dos limites acima não existir então a curva não tem assíntota oblíqua.

7. Esboço do Gráfico.