Álgebra Linear

Matriz de um transformação Linear

Katiani, Graciela e Marnei

Matriz de uma Transformação Linear

Transformação Linear associada a uma Matriz: Vimos que toda transformação linear $T: R^n \to R^m$ pode ser escrita matricialmente por:

$$T(v) = A\,v$$

Dada a transformação linear $T: R^3 \to R^2$ ➔ $T(x, y, z) = (10x - 20y - 30z, x - 2y - 3z)$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 10x - 20y - 30z \\ x - 2y - 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -20 & -30 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \Rightarrow T(v) = A\,v$$

Portanto, a matriz T, que denotamos por A é: $A = \begin{bmatrix} 10 & -20 & -30 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

Quando obtemos a matriz de uma transformação estamos levando em conta as bases associadas ao domínio e contradomínio. No caso acima estamos considerando as bases canônicas. Logo, a matriz A é chamada de ***matriz canônica*** da transformação. Alguns livros denotam A=[T], e portanto, $T(v) = [T]\,v$

Exemplo

Seja a Transformação Linear T: $R^3 \rightarrow R^2$ definida pela expressão:

$$T(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$$

Note que: $Im(T) = \{(2x - y + z, 3x + y - 2z); x, y, z \in \mathbb{R}\} = ger\{(2,3), (-1,1), (1,-2)\}$

Observe ainda que a matriz canônica A=[T]=$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ contém em suas colunas os geradores da Im(T).

$$T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$T(3, -4, 2) = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_{[T]} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Considerando as bases canônicas, tem-se:

$$R^3 \qquad\qquad R^2$$

$$A = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \qquad B=\{(1,0),(0,1)\}$$

$$u_1 = (1,0,0) \rightarrow T(u_1) = (2,3) = 2(1,0) + 3(0,1) \rightarrow [T(u_1)]_\beta = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

$$u_2 = (0,1,0) \rightarrow T(u_2) = (-1,1) = -1(1,0) + 1(0,1) \rightarrow [T(u_2)]_\beta = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$u_3 = (0,0,1) \rightarrow T(u_3) = (1,-2) = 1(1,0) - 2(0,1) \rightarrow [T(u_3)]_\beta = \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$$

$$(3,-4,2) \rightarrow (12,1)$$

$$[T]=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\3 & 1 & -2\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccc}[T(u_1)]_\beta & [T(u_2)]_\beta & [T(u_3)]_\beta\end{array}\end{array}$$

Podemos generalizar essa ideia para quaisquer outras bases para o domínio e contradomínio da transformação, e obter diferentes representações matriciais para uma mesma transformação T.

Matriz de uma Transformação Linear

Seja $T : V \to W$ *linear,* $\alpha = \{v_1, \cdots, v_n\}$ *base de* V *e* $\beta = \{w_1, \cdots, w_m\}$ *base de* W.

Então $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ *são vetores de* W *e portanto*

$$\begin{array}{ccccccc} T(v_1) & = & a_{11}w_1 & + & \cdots & + & a_{m1}w_m \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ T(v_n) & & a_{1n}w_1 & + & \cdots & + & a_{mn}w_m \end{array}$$

A transposta da matriz dos coeficientes deste sistema, denotada por $[T]_\beta^\alpha$

é chamada matriz de T *em relação às bases* α *e* β :

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} [T(v_1)]_\beta & \cdots & [T(v_n)]_\beta \end{array} \end{array}$$

Matriz de uma Transformação Linear

Teorema

Sejam V e W espaços vetoriais, α base de V, β base de W e $T : V \to W$ uma aplicação linear. Então, para todo $v \in V$ vale:

$$\boxed{[T(v)]_\beta = [T]^\alpha_\beta \cdot [v]_\alpha}$$

Observações

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear e α e β bases de V e W, respectivamente. Então

$$\begin{aligned} \dim Im(T) &= \textit{posto de } [T]^\alpha_\beta \\ \dim Ker(T) &= \textit{nulidade de } [T]^\alpha_\beta = \textit{número de colunas de } [T]^\alpha_\beta - \textit{posto}\, [T]^\alpha_\beta \end{aligned}$$

Matriz de uma Transformação Linear

Observações

Dada uma base β *e tranformação linear* $T : V \to V$ *denotaremos a matriz* $[T]_\beta^\beta$ *apenas por* $[T]_\beta$ *e ela será chamada de matriz de* T *em relação a base* β.

Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *uma transformação linear e* α *a base canônica de* $\mathbb{R}^n$, *então a matriz de* T *em relação a base canônica* α, $[T]_\alpha^\alpha$, *será denotada simplesmente por* $[T]$.

UDESC

Exemplo

Exemplo: Seja a Transformação Linear T: $R^3 \to R^2$ definida pela expressão

$T(x,y,z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$. Sejam as bases $A = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ e $B = \{(2,1),(5,3)\}$

a) Determine $[T]_B^A$

a) A matriz é de ordem 2×3:

$$[T]_B^A = \begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}\right] \\ \uparrow \quad\quad \uparrow \quad\quad \uparrow \\ T(v_1)_B \;\; T(v_2)_B \;\; T(v_3)_B \end{array}$$

$$T(v_1) = T(1,1,1) = (2,2) = a_{11}(2,1) + a_{21}(5,3)$$

$$\begin{cases} 2a_{11} + 5a_{21} = 2 \\ a_{11} + 3a_{21} = 2 \end{cases} \therefore \begin{cases} a_{11} = -4 \\ a_{21} = 2 \end{cases}$$

$$T(v_2) = T(0,1,1) = (0,-1) = a_{12}(2,1) + a_{22}(5,3)$$

$$\begin{cases} 2a_{12} + 5a_{22} = 0 \\ a_{12} + 3a_{22} = -1 \end{cases} \therefore \begin{cases} a_{12} = 5 \\ a_{22} = -2 \end{cases}$$

$$T(v_3) = T(0,0,1) = (1,-2) = a_{13}(2,1) + a_{23}(5,3)$$

$$\begin{cases} 2a_{13} + 5a_{23} = 1 \\ a_{13} + 3a_{23} = -2 \end{cases} \therefore \begin{cases} a_{13} = 13 \\ a_{23} = -5 \end{cases}$$

$$\boxed{[T]_B^A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 13 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}}$$

Exemplo

b) Se v=(3, -4,2) determinar $T(v)_B$

Sabe-se que:

$$[T(v)]_B = [T]_B^A\, [v]_A$$

Como v está expresso com componentes na base canônica, isto é,

$$v = (3, -4, 2) = 3(1, 0, 0) - 4(0, 1, 0) + 2(0, 0, 1),$$

teremos que, primeiramente, expressá-lo na base A. Seja $v_A = (a, b, c)$, isto é:

$$(3, -4, 2) = a(1, 1, 1) + b(0, 1, 1) + c(0, 0, 1)$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ a + b = -4 \\ a + b + c = 2, \end{cases}$$ sistema cuja solução é $a = 3$, $b = -7$ e $c = 6$,

$v_A = (3, -7, 6)$.

$$[T(v)]_B = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 13 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$[T(v)]_B = \begin{bmatrix} 31 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Seja a Transformação Linear T: $R^3 \rightarrow R^2$ definida pela expressão:

$$T(x,y,z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$$

Considerando as bases A e B, tem-se:

$$\begin{array}{cc} R^3 & R^2 \\ A = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\} & B = \{(2,1),(5,3)\} \end{array}$$

$$(1,1,1) \rightarrow (2,2) = -4(2,1) + 2(5,3)$$

$$(0,1,1) \rightarrow (0,-1) = 5(2,1) - 2(5,3)$$

$$(0,0,1) \rightarrow (1,-2) = 13(2,1) - 5(5,3)$$

$$(3,-7,6) \rightarrow (31,-10)$$

Esses vetores estão na base canônica

$$T(3,-7,6) = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 5 & 13 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix}}_{[T]_B^A} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz $[T]_B^A$ são as coordenadas das imagens da base A em relação a base B.

Exercício proposto

Seja $T: R^3 \rightarrow M_2$ definida por $T(a,b,c) = \begin{bmatrix} b & 2a+2b+2c \\ 0 & 2c \end{bmatrix}$. Sejam $\alpha = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ base para R^3 e $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ uma base para M_2.

a) Determine $[T]_{\beta}^{\alpha}$

b) Se $v = (2, 3, -1)$, determine $[T(v)]_{\beta}$