Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Integrais Impróprias

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de 02 de setembro de 2024.

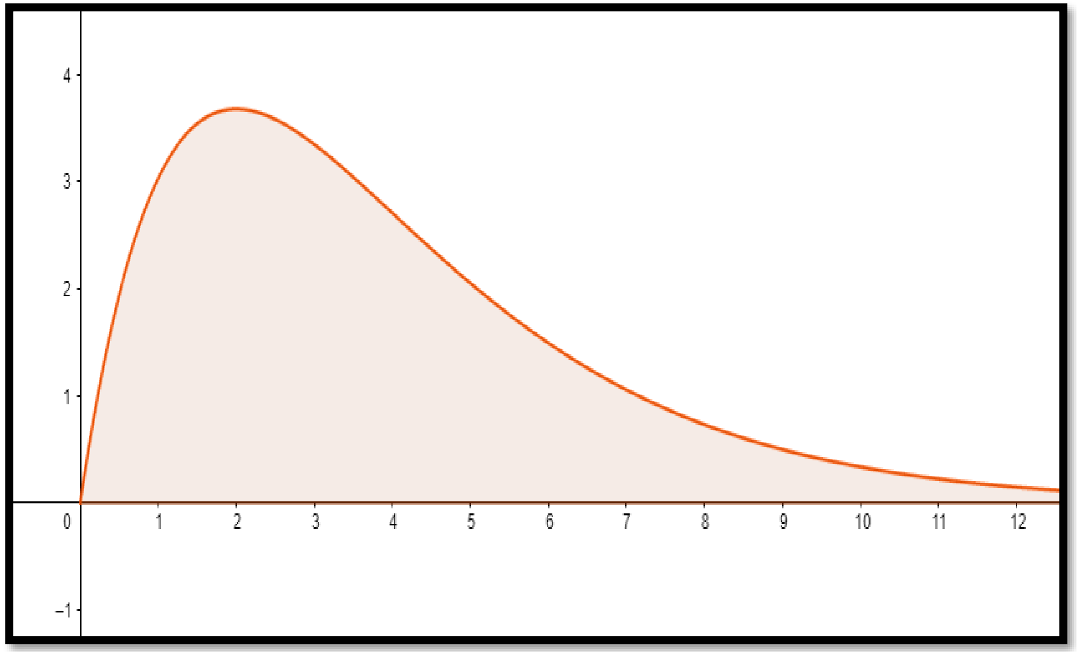
UDESC

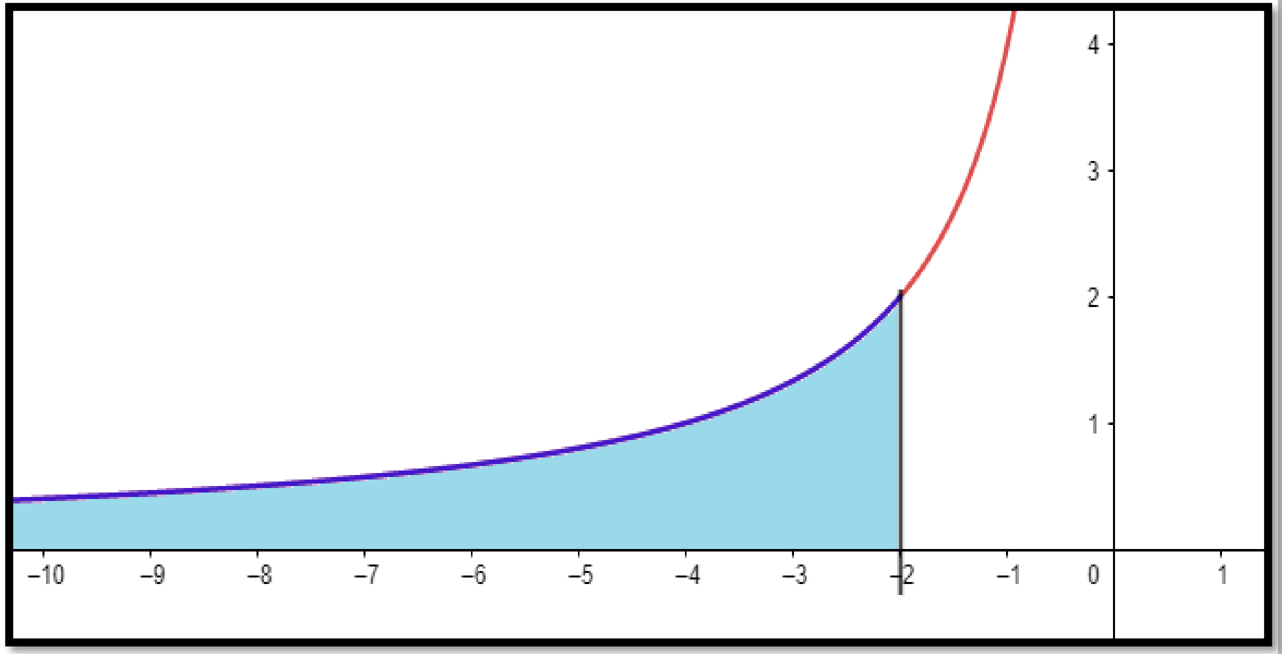
Integrais Impróprias

O que são?

Integrais impróprias são integrais definidas que estão relacionadas a uma região ilimitada do plano xy, devido à presença de assíntotas horizontais ou verticais no gráfico da função.

No caso de assíntotas horizontais, pelo menos um dos limitantes de integração corresponde ao infinito ou ao menos infinito:



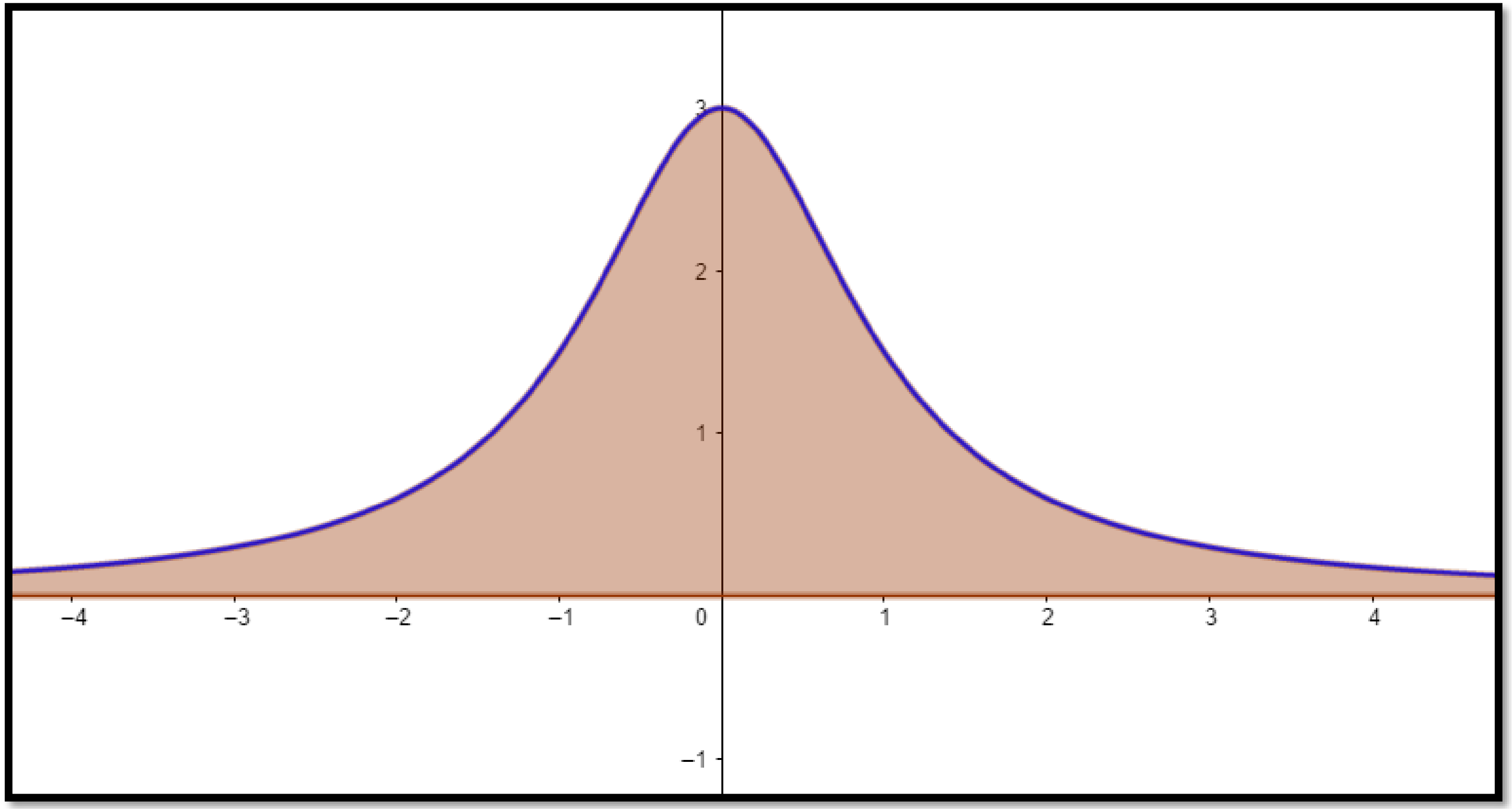


$a) \int_0^{+\infty} 5xe^{-x/2}\, dx$

$b) \int_{-\infty}^{-2} \frac{-4}{x}\, dx$

Integrais Impróprias

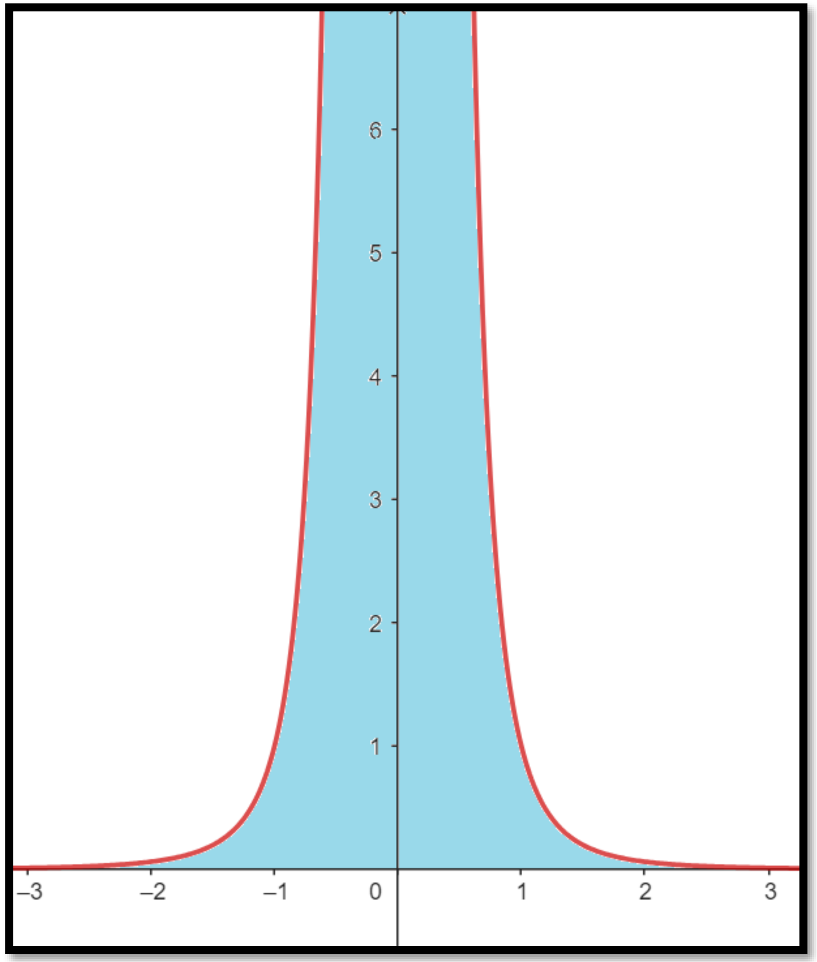
É possível que os dois limitantes correspondam a $-\infty$ e a $+\infty$, respectivamente:



$$c)\ \ I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{1+x^2}\, dx$$

Integrais de funções descontínuas

No caso de assíntotas verticais, a função integrando é descontínua em pelo menos um ponto pertencente ao intervalo de integração:



$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4}\, dx$$

Integral de Função Descontínua

Definição: Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, exceto em $c \in [a, b]$, ponto em que há uma assíntota vertical. Definimos a integral imprópria de f como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

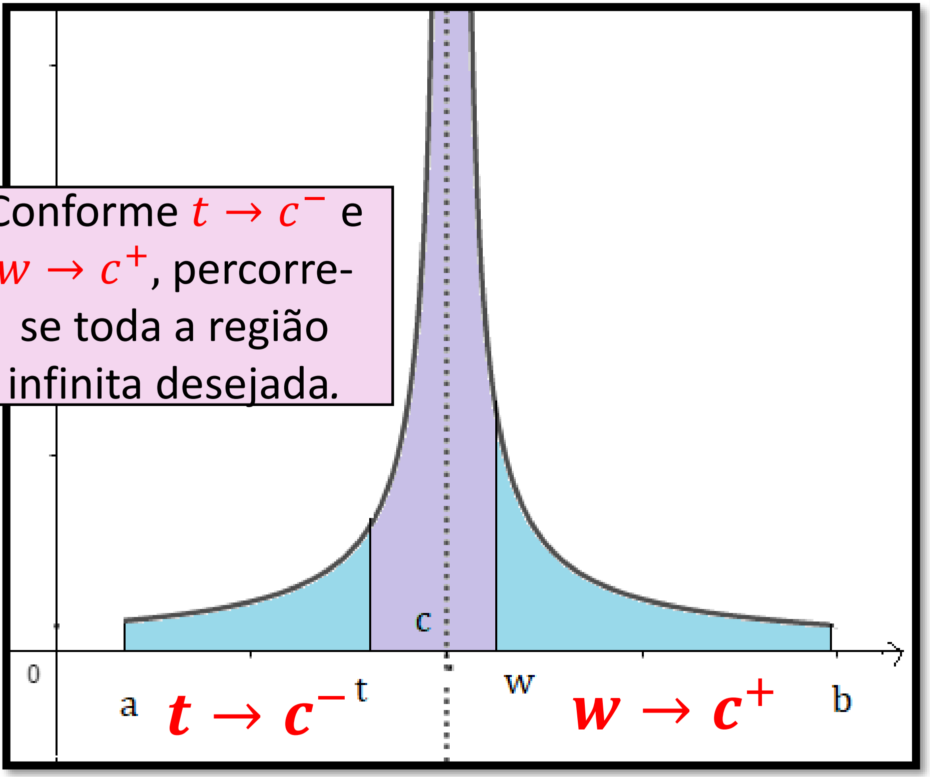
$$= \lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)\,dx + \lim_{w\to c^+} \int_w^b f(x)\,dx\,.$$

desde que ambos os limites existam.

Se existirem, dizemos que a integral imprópria é convergente. Caso contrário, dizemos que a integral Imprópria é divergente.

Como f não é contínua em $[a, b]$, não é possível aplicar o TFC. Por isso, a integral é separada em dois intervalos de integração, usando o ponto de descontinuidade como extremos.

Conforme $t \to c^-$ e $w \to c^+$, percorre-se toda a região infinita desejada.



O uso de limites laterais garante que f passa a ser contínua em cada um dos novos subintervalos (pois sempre teremos $t < c$ e $w > c$).

Com isso, o TFC pode ser aplicado nessas parcelas!

Exercícios

Exercício 1: Determine se as seguintes integrais convergem ou divergem:

$$a)\ I = \int_{-5}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{2x+4}}\, dx$$

$$b)\ I = \int_{0}^{1} \frac{1}{x \cdot \ln(x)}\, dx$$

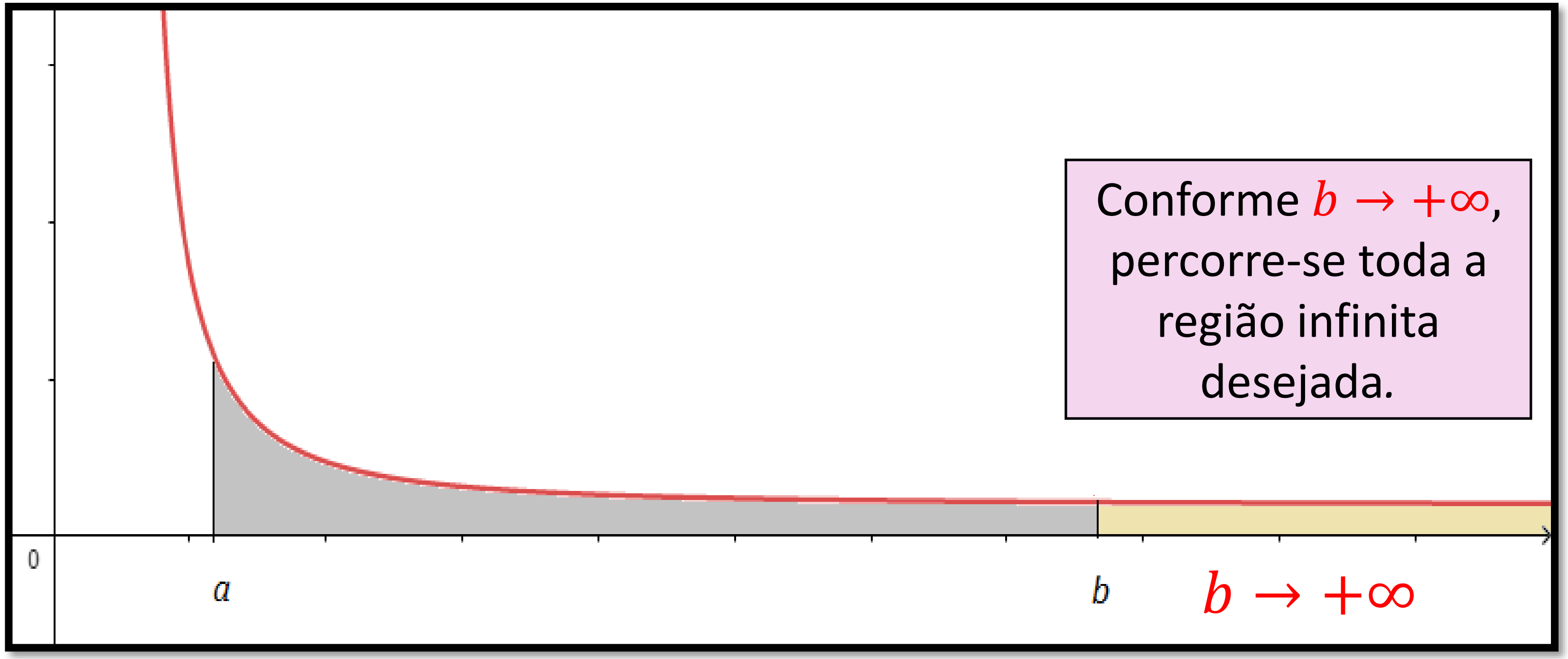
Definição

- Definição 1: Seja $f:[a,+\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua, para todo $x \in [a,+\infty)$. Definimos

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

desde que o limite exista. Se o limite existir, dizemos que a integral converge.

Caso contrário, dizemos que ela diverge.



OBS: Note que, caso a integral convirja, a região ilimitada admite área finita!!!!

Definição

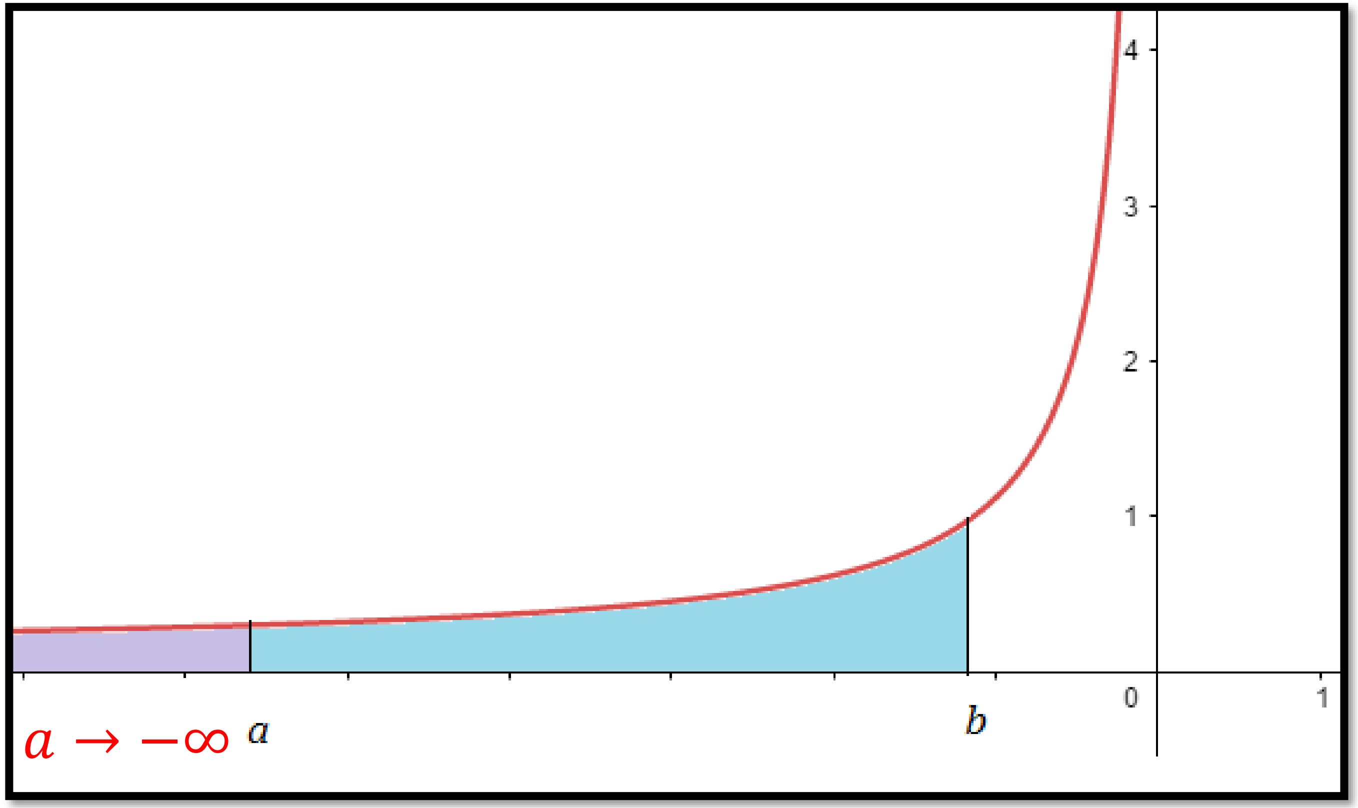
Definição 2: Seja $f: (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, para todo $x \in (-\infty, b]$. Definimos

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x) dx.$$

desde que o limite exista.

Se o limite existir, dizemos que a integral converge. Caso contrário, dizemos que ela diverge.

Conforme $a \to -\infty$, percorre-se toda a região infinita desejada.



Definição

Definição 3: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Definimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx =$$
$$= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{c}^{b} f(x)dx.$$

para qualquer $c \in \mathbb{R}$.

Se ambos os limites existirem, dizemos que a integral é convergente.

Caso contrário, ela é divergente.

Conforme $a \to -\infty$ e $b \to +\infty$, percorre-se toda a região infinita desejada.

OBS: A interpretação geométrica para essa situação é uma junção dos dois casos anteriores, considerando simultaneamente as assíntotas horizontais à esquerda e à direita.

O valor de c pode ser escolhido de forma conveniente (para os cálculos) ou então considerado genericamente, pois ele não pode interferir no resultado da integral.

Exercícios

Exercício 2: Determine se as seguintes integrais impróprias convergem ou divergem:

$$a)\ I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$b)\ I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$$

$$c)\ I = \int_{-\infty}^{1} xe^{3x}\,dx$$

$$d)\ I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4x^2}\,dx$$

Exemplo 1: Resolva as integrais impróprias a seguir e determine se elas são convergentes ou divergentes:

$$a)\ I = \int_0^{+\infty} 5xe^{-x/2}\, dx$$

$$u = 5x \qquad dv = e^{-x/2}dx$$

$$du = 5dx \qquad v = -2e^{-x/2}$$

Solução: Aplicando a definição 1 e resolvendo a integral usando Partes:

$$I = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b 5xe^{-x/2}\, dx = \lim_{b\to+\infty} 5x\left(-2e^{-x/2}\right)\Big|_0^b - \int_0^b -2e^{-x/2}.5dx$$

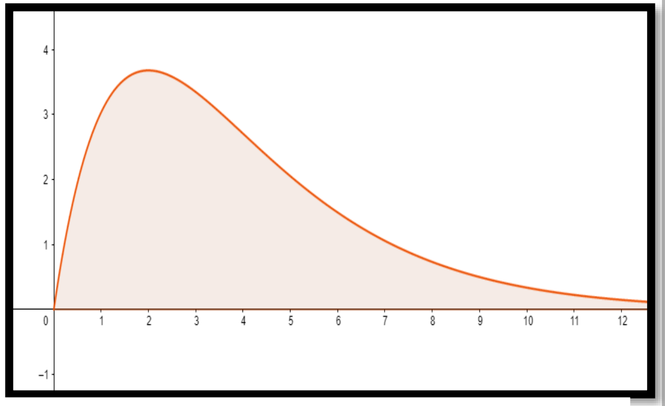
$$= \lim_{b\to+\infty} -10xe^{-x/2}\Big|_0^b + 10\left(-2e^{-x/2}\right)\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} -10b\, e^{\frac{-b}{2}} - (-10.0.e^0) - 20e^{\frac{-b}{2}} - (-20e^0)$$

$$= \lim_{b\to+\infty} -10b\, e^{\frac{-b}{2}} - 20e^{\frac{-b}{2}} + 20 = \lim_{b\to+\infty} \frac{-10b}{e^{\frac{b}{2}}} - 20 \lim_{b\to+\infty} e^{\frac{-b}{2}} + \lim_{b\to+\infty} 20$$

Por L'Hoppital:

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{-10}{2e^{\frac{b}{2}}} - 20.0 + 20 = 0 - 0 + 20 = 20.$$



Portanto, área da região ilimitada mostrada na figura é finita e igual a 20.

Portanto, a integral é convergente. Podemos dizer que ela converge para 20.

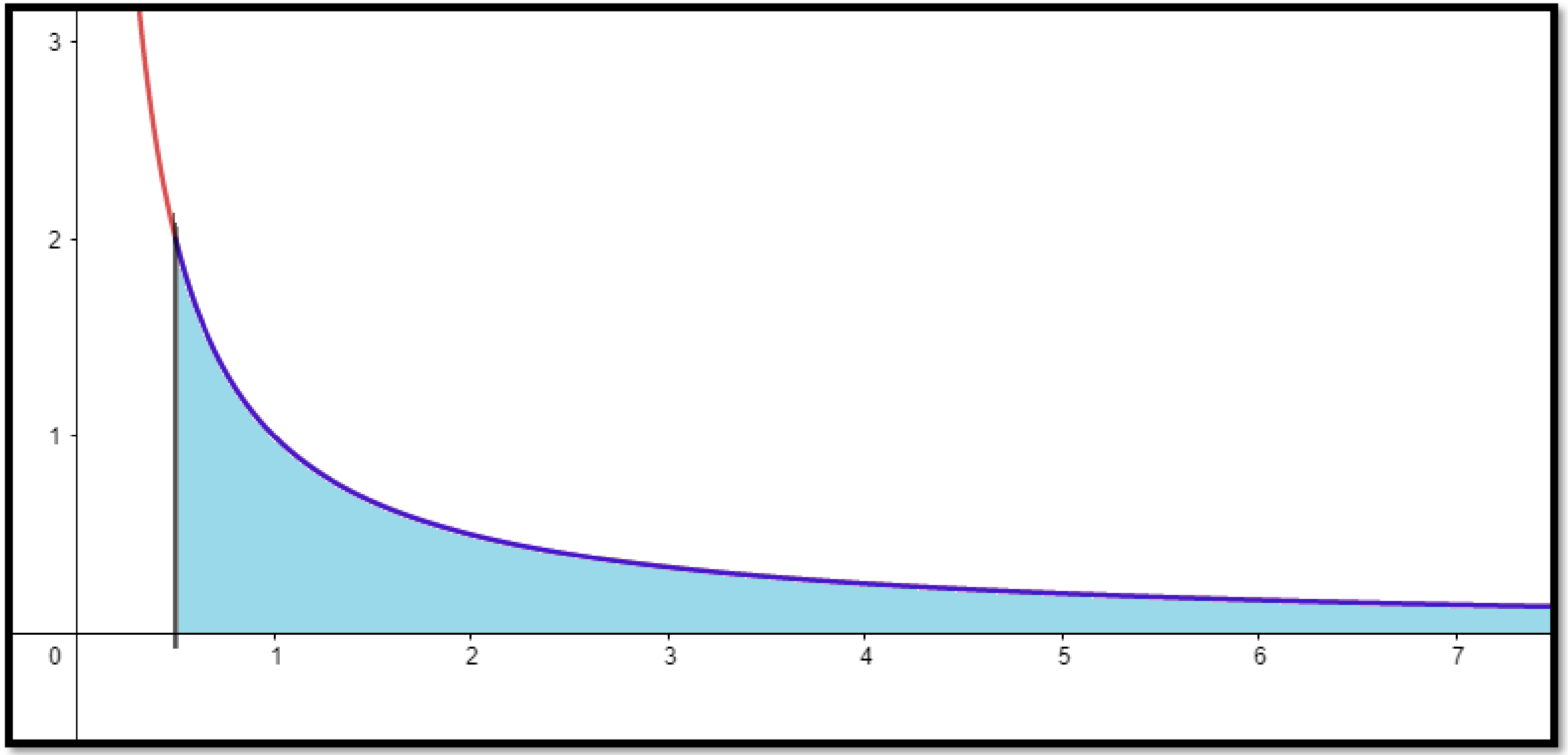
$$b)\ I=\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\frac{1}{x}dx$$

Solução: Aplicando a definição e resolvendo a integral, pelo TFC, obtemos:

$$I=\lim_{b\to+\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{b}\frac{1}{x}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\ln(|x|)\Big|_{\frac{1}{2}}^{b}=\lim_{b\to+\infty}\ln(|b|)-\ln\left(\frac{1}{2}\right)=+\infty-\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=+\infty.$$

Portanto, a integral é divergente.

Significa que a área da região ilimitada mostrada na figura abaixo é infinita!



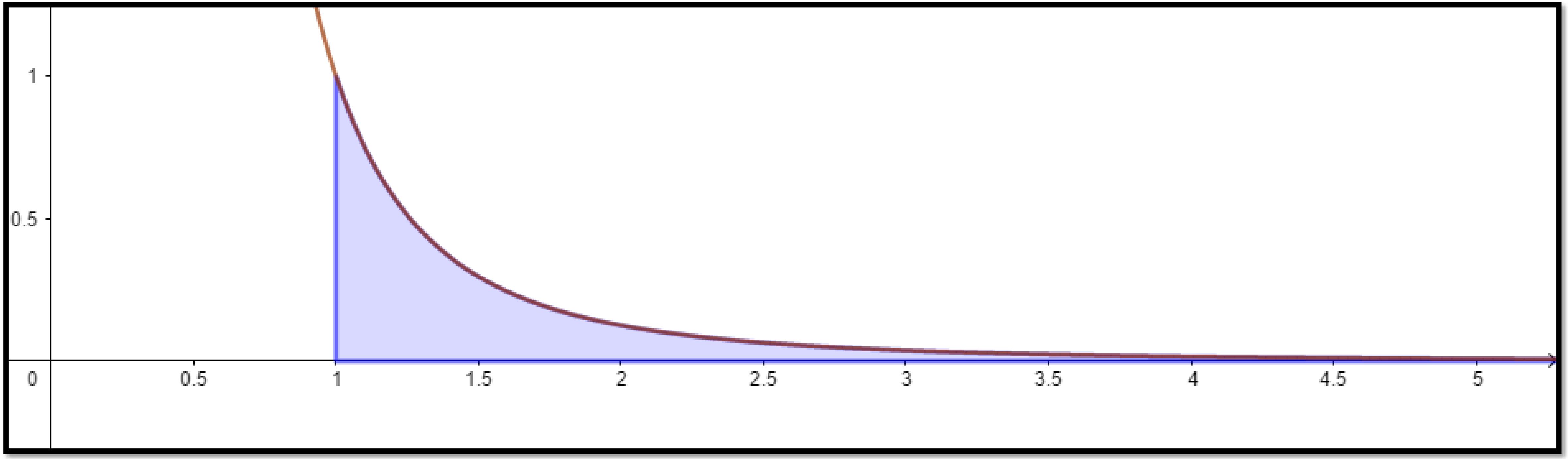
$c)\ I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx$

Solução: Aplicando a definição e resolvendo a integral, obtemos:

$$I = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^4}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-4}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{-1}{3x^3}\right|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{3b^3} - \frac{-1}{3}$$

$$= -0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Portanto, a integral é convergente e a área da região infinita abaixo é finita e igual a $\frac{1}{3}$.



$c)\ I = \int_{-\infty}^{7} e^{5x}\, dx$

O limite é obtido pela análise gráfica de e^{5x}.

Solução: Aplicando a definição e resolvendo a integral, obtemos:

$$I = \lim_{a\to-\infty} \int_a^7 e^{5x}\, dx = \lim_{a\to-\infty} \left.\frac{e^{5x}}{5}\right|_a^7 = \lim_{a\to-\infty} \frac{e^{35}}{5} - \frac{e^{5a}}{5} = \frac{e^{35}}{5} - 0 = \frac{e^{35}}{5}.$$

Portanto, a integral é convergente.

$d)\ I = \int_{-\infty}^{-3} \frac{-1}{x\ln(-x)}\, dx$

$$x = a, \qquad u = \ln(-a)$$
$$x = -3 \qquad u = \ln(3)$$

Solução: Pela definição e usando a substituição $u = \ln(-x)$ temos $du = \frac{-1}{-x}dx = \frac{1}{x}dx$

$$I = \lim_{a\to-\infty} \int_a^{-3} \frac{-1}{x\ln(-x)}\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{\ln(-a)}^{\ln(3)} \frac{-1}{u}\, du$$

$$= \lim_{a\to-\infty} -\ln(|u|)\Big|_{\ln(-a)}^{\ln(3)} = \lim_{a\to-\infty} -\ln(|\ln(3)|) + \ln(|\ln(-a)|)$$

$$= -\ln(\ln(3)) + \ln(|\ln(+\infty)|) = -\ln(\ln(3)) + \infty.$$

$$= +\infty.$$

O limite é obtido pela análise gráfica de $\ln(x)$.

Portanto, a integral é divergente.

$$e)\ I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{1+x^2}\, dx$$

Solução: Aplicando a definição anterior, com $c \in \mathbb{R}$ genérico, obtemos

$$I = \int_{-\infty}^{c} \frac{3}{1+x^2}\, dx + \int_{c}^{+\infty} \frac{3}{1+x^2}\, dx = \lim_{a\to-\infty} 3\int_{a}^{c} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \lim_{b\to+\infty} 3\int_{c}^{b} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Resolvendo a integral pelo TFC (pois a função é contínua e tabelada) obtemos:

$$I = \lim_{a\to-\infty} 3\,\mathrm{arctg}(x)\Big|_a^c + \lim_{b\to+\infty} 3\,\mathrm{arctg}(x)\Big|_c^b$$

$$= \lim_{a\to-\infty} [3\,\mathrm{arctg(c)} - 3\,\mathrm{arctg(a)}] + \lim_{b\to+\infty} [3\,\mathrm{arctg(b)} - 3\,\mathrm{arctg(c)}]$$

$$= \left[3\,\mathrm{arctg}(c) - 3.\frac{-\pi}{2}\right] + \left[3.\frac{\pi}{2} - 3\,\mathrm{arctg}(c)\right]$$

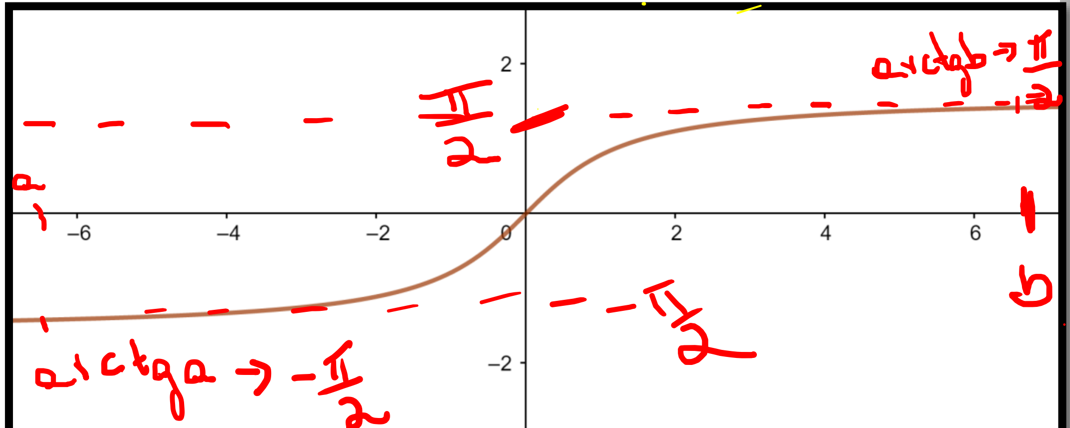
$$= 3\,\mathrm{arctg}(c) + \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} - 3\,\mathrm{arctg}(c)$$

$$= 3\pi.$$

Portanto, a integral é convergente!

Os limites são obtidos pela análise gráfica de $arctg(x)$:

Gráfico da função $f(x) = \mathrm{arctg}(x)$.



$f)\ I = \int_{-4}^{1} \frac{1}{\sqrt{12+3x}}\,dx$

Solução: A função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{12+3x}}$ é contínua se e só se $12 + 3x > 0$, ou seja, se $x > -4$. Portanto, f não é contínua em $x = -4$, que pertence ao intervalo de integração. Assim, não podemos utilizar diretamente o TFC. Precisamos usar a definição anterior. No entanto, como o ponto de descontinuidade corresponde ao limitante inferior do intervalo, basta usar apenas um limite lateral, com $t \to -4^{+}$. Dessa forma, obtemos:

$$I = \int_{-4}^{1} \frac{1}{\sqrt{12+3x}}\,dx = \lim_{t\to -4^{+}} \int_{t}^{1} \frac{1}{\sqrt{12+3x}}.$$

No novo intervalo, a função passa a ser contínua e podemos, agora, usar o TFC. Usando a substituição $u = 12 + 3x$ temos $du = 3dx$, ou seja $dx = 1/3du$ e assim:

$$I = \lim_{t\to -4^{+}} \int_{12+3t}^{15} \frac{1}{\sqrt{u}}.\frac{1}{3}\,du = \lim_{t\to -4^{+}} \frac{1}{3}\int_{12+3t}^{15} u^{-1/2}\,du = \lim_{t\to -4^{+}} \frac{1}{3}\frac{u^{1/2}}{1/2}\Bigg|_{12+3t}^{15}$$

$$= \lim_{t\to -4^{+}} \frac{2}{3}\sqrt{u}\,\Bigg|_{12+3t}^{15} = \lim_{t\to -4^{+}} \frac{2}{3}\sqrt{15} - \frac{2}{3}\sqrt{12+3t} = \frac{2}{3}\sqrt{15} - 0 = \frac{2}{3}\sqrt{15}.$$

Portanto, a integral é convergente.

Exemplo com duas descontinuidades

$g)\ I = \int_0^1 \frac{1}{x\ln(x)}dx$

Solução: A função $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ é contínua somente se $x \neq 0,\ x > 0,\ x \neq 1$ (pois $\ln(1) = 0$).

Assim, f admite dois pontos de descontinuidade, que correspondem aos limitantes do intervalo de integração. Por isso, precisamos separar a integral em duas, nas quais poderemos aplicar o TFC:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x\ln(x)}dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{x\ln(x)}dx + \int_{1/2}^1 \frac{1}{x\ln(x)}dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^{1/2} \frac{1}{x\ln(x)}dx + \lim_{w\to 1^-}\int_{1/2}^{w} \frac{1}{x\ln(x)}dx$$

Usando a substituição $u = \ln(x)$, temos $du = \frac{1}{x}dx$, e mudando os limitantes das integrais, temos:

$$I = \lim_{t\to 0^+}\int_{\ln(t)}^{\ln(\frac{1}{2})} \frac{1}{u}du + \lim_{w\to 1^-}\int_{\ln(\frac{1}{2})}^{\ln(w)} \frac{1}{u}du = \lim_{t\to 0^+} \ln(|u|)\Big|_{\ln(t)}^{\ln(\frac{1}{2})} + \lim_{w\to 1^-} \ln(|u|)\Big|_{\ln(\frac{1}{2})}^{\ln(w)}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \ln(|\ln(1/2)| - \ln(|\ln(t)|) + \lim_{w\to 1^-} \ln(|\ln(w)|) - \ln(|\ln(1/2)|)$$

$$= \ln(|\ln(1/2)|) - (\ln|-\infty|) + \ln(|\ln(1)|) - \ln(|\ln(1/2)|) = -\ln(+\infty) + \ln(0) = -\infty - \infty = -\infty$$

Portanto, a integral imprópria diverge. Note que o ponto em que separamos a integral em duas não interferiu no resultado final da integral, devido ao cancelamento dos termos $\ln(|\ln(1/2)|)$.