Álgebra Linear

Imagem de Transformações Lineares
Transformações injetoras e sobrejetoras

Professores: Marnei, Graciela e Katiani

UDESC

Imagem de uma Transformação Linear

Definição:

Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. Definimos o conjunto imagem de T como

$$Im(T) = \{\, w \in V \,;\; w = T(v) \text{ para algum } v \in V \}.$$

Observações:

i) A imagem de $T: V \to W$ é um subconjunto do contradomínio W, ou seja

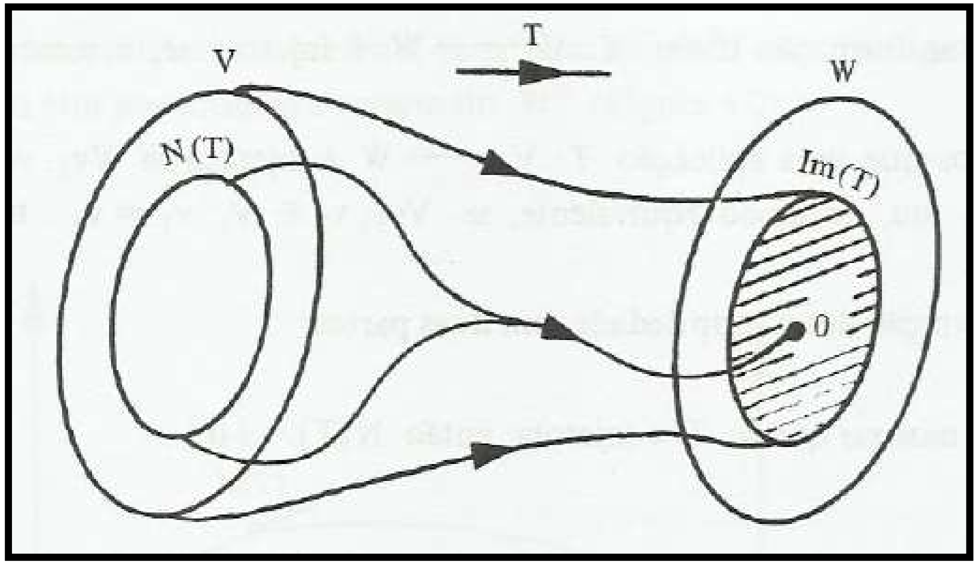
$$Im(T) \subset W.$$

ii) Como $\vec{0} = T(v)$ para $v \in N(T)$ temos que

$$\vec{0} \in Im(T).$$

iii) Com isso, obtemos que

$$Im(T) \neq \phi.$$



Exemplo

1) Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$. Determine o núcleo e a imagem e os interprete geometricamente.

2) Qual a imagem e o núcleo da transformação identidade $I: V \to V$ tal que $I(v) = v$?

3) Qual a imagem e o núcleo da transformação nula $T: V \to W$ tal que T$(v) = 0$?

4) Considere $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (3x - 4y, -2x + y, x + y)$.

a) Verifique se $w_1 = (-6, -1, 5)$ e $w_2 = (-1, -1, 1)$ pertencem à $Im(T)$.

b) Determine o N(T) e a $Im(T)$.

Teorema:

Se $T: V \to W$ é uma transformação linear então $Im(T)$ é um subespaço vetorial de W.

Justificativa:

OBS.: Como a imagem de uma transformação linear T é um subespaço vetorial, podemos obter uma base e a dimensão para $Im(T)$.

Exemplo: 5) Determine uma base e a dimensão para a imagem dos exemplos anteriores:

a) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + 2y - 3z,\ 4x - 5y - 11z)$.

Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem

Teorema:

Se $T: V \rightarrow W$ é uma transformação linear então

$$\dim\big(N(T)\big) + \dim\big(Im(T)\big) = \dim(V).$$

Base e dimensão para a Imagem

b) $T: M(2,2) \to P_2$ dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b-c+d) + (2a-b+3c)x + (5a+2b+3d)x^2$$

c) $T: P_2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(p(x)) = (5p(0),\ p(1),\ p(0)+2p(1))$

Transformações lineares injetoras, sobrejetoras e isomorfismos

Definição 1: Uma transformação linear $T: V \to W$ é injetora se, para quaisquer vetores $u, v \in V$, tais que $u \neq v$, tem-se que $T(u) \neq T(v)$.

Definição 2: Uma transformação linear $T: V \to W$ é injetora se, para quaisquer vetores $u, v \in V$, $T(u) = T(v)$ implica que $u = v$.

Exemplo: (Uma transformação que é linear mas não é injetora)
$T: P_2 \to P_2$ tal que $T\big(P(x)\big) = p'(x)$

Teorema:

> Uma transformação linear T: $V \to W$ é injetora se, e somente se, N(T) = $\{\vec{0}\}$.

Justificativa:

Exemplo: A transformação linear $T: P_2 \to P_3$ tal que $T\big(P(x)\big) = xp(x)$ é injetora?

Teorema:

Uma transformação linear T: $V \to W$ é sobrejetora se, e somente se, Im(T) = W, ou seja, se dimIm(T) =dim(W)

Exemplo:

1. Uma transformação linear $T: P_2 \to \mathbb{R}^4$ pode ser injetora? E sobrejetora?
2. Uma transformação linear $T: \mathbb{R}^4 \to P_2$ pode ser injetora? E sobrejetora?
3. Uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$ pode ser injetora? E sobrejetora?
4. A partir da análise dos exemplos acima, complete as afirmações a seguir:

i) Uma transformação linear T: $V \to W$ tal que dim(V)$\leq \dim(W)$ pode ser ________________ (injetora/sobrejetora), mas nunca será_________________________ (injetora/sobrejetora).

ii) Uma transformação linear T: $V \to W$ tal que dim(V)$\geq \dim(W)$ pode ser ________________ (injetora/sobrejetora), mas nunca será_________________________ (injetora/sobrejetora).

Teorema:

Seja T: $V \rightarrow W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita, tais que dim(V)=dim(W). Então T é injetora se e somente se é sobrejetora.

Justificativa:

Definição: Uma transformação linear bijetora (injetora + sobrejetora) é chamada de isomorfismo. Dois espaços vetoriais que possuem isomorfismo entre eles serão ditos isomorfos, o que em grego, significa que possuem a mesma forma.

Os isomorfismos desempenham um papel importante na Álgebra Linear. Por exemplo, $\mathbb{R}^3$ e P_2 são espaços vetoriais isomorfos, pois a função T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow P_2$ dada por $T(a, b, c) = ax^2 + bx + c$ é um isomorfismo.

Exemplo: Os espaços vetoriais abaixo são isomorfos entre si:

a. $\mathbb{R}^4$= *espaço de dimensão 4*

b. $M(4{,}1) = espaço\ das\ matrizes\ 4 \times 1$

c. $M(2{,}2) = espaço\ das\ matrizes\ 2 \times 2$

d. P_3 = *espaço de todos os polinômios de grau menor ou igual a 3.*

e. $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, 0); x_i \text{ é } um\ nº\ real\}\ (subespaço\ de\ \mathbb{R}^5)$

Este exemplo nos diz que elementos nesses espaço se comportam da mesma maneira que um vetor arbitrário $\mathrm{v} = (\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d})$.

Exercícios:

1. Encontre uma transformação linear $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ cujo núcleo é gerado por (1,2,3,4) e (0,1,1,1).
   Sem fazer cálculos, T é injetora? E sobrejetora?

2. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear que projeta u *em v=(2,-1,1).* T é um isomorfismo?

3. Seja $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(v) = Av$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Encontre a dimensão do núcleo e da imagem.

b) T é injetora?

c) T é sobrejetora?

d) Determine Posto(A) e nulidade (A). Qual a relação com a dimN(T) e dim Im(T)?