REVISÃO:

Técnica da Decomposição em Frações Parciais

Considerando a função $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, em que grau de p $<$ grau de q, temos das situações a serem consideradas:

1º CASO: Para cada fator $(\boldsymbol{ax+b})^{\boldsymbol{k}}$ de $q(x)$, ou seja, para cada raiz real de q com **multiplicidade** $\boldsymbol{k}$, existem k parcelas associados a este termo e são da forma:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k},$$

$a \neq 0$ e $k \in \mathbb{N}^*$.

2º CASO: Para cada fator quadrático irredutível da forma $\left(\boldsymbol{ax^2+bx+c}\right)^{\boldsymbol{k}}$ de $q(x)$, ou seja, para cada par de raízes imaginárias de q com **multiplicidade** $\boldsymbol{k}$, existem k parcelas associados a este termo e são da forma:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{A_3x+B_3}{(ax^2+bx+c)^3} + \cdots + \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k},$$

$a \neq 0$ e $k \in \mathbb{N}^*$.

Exemplo 1. Sem determinar os coeficientes, proponha uma decomposição em frações parciais para a função:

1. $f(x) = \dfrac{x+2}{(x^3-8)^2(x^2-4)^2}$

Numerador p: grau 1

Denominador q: grau 10

grau de p < grau de q

possível decompor em frações parciais

Reescrevendo o denominador:

✓ $(x^2-4)^2 = \big((x-2)(x+2)\big)^2 = (x+2)^2(x-2)^2$

✓ $x^3 - 8$

2	1	0	0	-8
	1	2	4	0

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$$

Exemplo 1. Sem determinar os coeficientes, proponha uma decomposição em frações parciais para a função:

$$1.\ f(x) = \frac{x+2}{(x^3-8)^2(x^2-4)^2}$$

$$f(x) = \frac{x+2}{(x-2)^2(x^2+2x+4)^2(x+2)^2(x-2)^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^4(x^2+2x+4)^2(x+2)}$$

$x = 2$ é uma raiz real com multiplicidade 4

$x = -2$ é uma raiz real com multiplicidade 1

Fator quadrático irredutível com multiplicidade 2

$$f(x) = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3} + \frac{E}{(x-2)^4} + \frac{A_1x+B_1}{(x^2+2x+4)} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+2x+4)^2}$$

$$2.\ f(x) = \frac{x^4 - 2x}{x^2 - x - 2}$$

Numerador p: grau 4

Denominador q: grau 2

grau de p > grau de q

Não é possível decompor em frações parciais sem antes reescrever.

$$2.\ f(x)=\frac{x^4-2x}{x^2-x-2}$$

Dividindo os polinômios:

$$\begin{array}{rl|l} & x^4-2x & x^2-x-2 \\ \cline{3-3} - & x^4-x^3-2x^2 & x^2+x+3 \\ \cline{2-2} & x^3+2x^2-2x & \\ - & x^3-x^2-2x & \\ \cline{2-2} & 3x^2 & \\ - & 3x^2-3x-6 & \\ \cline{2-2} & 3x+6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} p(x) & q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{Q(x)q(x)+R(x)}{q(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{q(x)}$$

$$f(x)=\frac{x^4-2x}{x^2-x-2}=x^2+x+3+\boxed{\frac{3x+6}{x^2-x-2}}$$

grau do numerador < grau do denominador

$$g(x) = \frac{3x+6}{x^2 - x - 2}$$

$$\begin{array}{r|rrr} -1 & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$g(x) = \frac{3x+6}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$x = -1$ é uma raiz real com multiplicidade 1

$x = 2$ é uma raiz real com multiplicidade 1

Exemplo 2.

$$1.\; I = \int \frac{dx}{x^3 - 8} = \int \frac{1}{x^3 - 8}\, dx$$

Lembre que:

2	1	0	0	-8
	1	2	4	0

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

Usando frações parciais para reescrever o integrando:

$$\frac{1}{x^3 - 8} = \frac{1}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 4}$$

$$\frac{1}{x^3 - 8} = \frac{A(x^2 + 2x + 4) + (Bx + C)(x - 2)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}$$

$$\frac{1}{x^3 - 8} = \frac{Ax^2 + 2Ax + 4A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}$$

$$1 = Ax^2 + 2Ax + 4A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C$$

$$1 = (A + B)x^2 + (2A - 2B + C)x + 4A - 2C$$

Por comparação, segue que:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A - 2B + C = 0 \\ 4A - 2C = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{12}, B = -\frac{1}{12}, C = -\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{x^3-8}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx-C}{x^2+2x+4}=\frac{\frac{1}{12}}{x+2}+\frac{-\frac{1}{12}x-\frac{1}{3}}{x^2+2x+4}$$

Dessa forma, temos que:

$$I=\int\frac{dx}{x^3-8}=\int\left(\frac{\frac{1}{12}}{x+2}+\frac{-\frac{1}{12}x-\frac{1}{3}}{x^2+2x+4}\right)dx$$

$$I=\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x+2}-\frac{1}{12}\int\frac{x+4}{x^2+2x+4}dx$$

$u=x+2$

Completar quadrados

$du=dx$

$$I=\frac{1}{12}\int\frac{du}{u}-\frac{1}{12}\int\frac{x+4}{x^2+2x+4}dx$$

$$\boxed{I=\frac{1}{12}\ln|x+2|+c_1-\frac{1}{12}I_1}$$

Completando quadrados, temos que: $x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3$

$$I_1 = \int \frac{x+4}{x^2+2x+4}\,dx = \int \frac{x+4}{(x+1)^2+3}\,dx$$

Definindo $u = x + 1 \Longrightarrow du = dx$

$$I_1 = \int \frac{u-1+4}{u^2+3}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+3}\,du + 3\int \frac{du}{u^2+3}$$

$$m = u^2 + 3$$
$$dm = 2u\,du$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{dm}{m} + 3\int \frac{du}{u^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\ln|u^2+3| + 3\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right) + k$$

$$\boxed{I_1 = \frac{1}{2}\ln|(x+1)^2+3| + \sqrt{3}arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + k}$$

Substituindo I_1 em I, temos que:

$$I = \frac{1}{12}\ln|x+2| + c_1 - \frac{1}{12}I_1$$

$$I = \frac{1}{12}\ln|x+2| + c_1 - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\ln|(x+1)^2+3| + \sqrt{3}\,arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + k\right)$$

$$\boxed{I = \frac{1}{12}\ln|x+2| - \frac{1}{24}\ln|x^2+2x+4| - \frac{\sqrt{3}}{12}arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + c}$$

2. $I = \int \frac{2-\ln(x)}{x\, ln^2(x)\,(25\, ln^2(x)+9)^2}\, dx$

Definindo $u = \ln(x) \Longrightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$$I = \int \frac{2-\ln(x)}{ln^2(x)\,(25\, ln^2(x)+9)^2}\, \frac{1}{x} dx = \int \frac{2-u}{u^2(25\,u^2+9)^2}\; du$$

Usando frações parciais para reescrever o integrando, temos que:

$$\frac{2-u}{u^2(25\,u^2+9)^2} = \frac{2-u}{(u-0)^2(25\,u^2+9)^2} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{Du+E}{25\,u^2+9} + \frac{Fu+G}{(25\,u^2+9)^2}$$

$$\frac{2-u}{u^2(25\,u^2+9)^2} = \frac{Au(25\,u^2+9)^2 + B(25\,u^2+9)^2 + (Du+E)u^2(25\,u^2+9) + (Fu+G)u^2}{u^2(25\,u^2+9)^2}$$

$$2-u = A(625\,u^5 + 450u^3 + 81u) + B(625\,u^4 + 450u^2 + 81) + (Du+E)(25\,u^4 + 9u^2) + (Fu+G)u^2$$

$$2-u = 625A\,u^5 + 450Au^3 + 81Au + 625Bu^4 + 450Bu^2 + 81B + 25\,Du^5 + 9Du^3 + 25\,Eu^4 + 9Eu^2 + Fu^3 + Gu^2$$

$$2-u=625A\,u^5+450Au^3+81Au+625Bu^4+450Bu^2+81B+25\,Du^5+9Du^3+25\,Eu^4+9Eu^2+Fu^3+Gu^2$$

Por comparação, temos que:

$$\begin{cases} 625A+25D=0 \\ 625B+25E=0 \\ 450A+9D+F=0 \\ 450B+9E+G=0 \\ 81A=-1 \\ 81B=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} A=-\dfrac{1}{81} & E=-\dfrac{50}{81} \\ B=\dfrac{2}{81} & F=\dfrac{225}{81} \\ D=\dfrac{25}{81} & G=-\dfrac{450}{81} \end{array}}$$

$$\frac{2-u}{u^2(25\,u^2+9)^2}=\frac{-\frac{1}{81}}{u}+\frac{\frac{2}{81}}{u^2}+\frac{\frac{25}{81}u-\frac{50}{81}}{25\,u^2+9}+\frac{\frac{225}{81}u-\frac{450}{81}}{(25\,u^2+9)^2}$$

$$I=\int\frac{2-u}{u^2(25\,u^2+9)^2}du=-\frac{1}{81}\int\frac{du}{u}+\frac{2}{81}\int\frac{du}{u^2}+\frac{25}{81}\int\frac{u}{25\,u^2+9}du-\frac{50}{81}\int\frac{du}{25\,u^2+9}+\frac{225}{81}\int\frac{u}{(25\,u^2+9)^2}du-\frac{450}{81}\int\frac{du}{(25\,u^2+9)^2}$$

$$I = -\frac{1}{81}\int\frac{du}{u} + \frac{2}{81}\int u^{-2}du + \frac{25}{81}\int\frac{u}{25u^2+9}du - \frac{50}{81.25}\int\frac{du}{u^2+\frac{9}{25}} + \frac{225}{81}\int\frac{u}{(25u^2+9)^2}du - \frac{450}{81.625}\int\frac{du}{\left(u^2+\frac{9}{25}\right)^2}$$

$$I = -\frac{1}{81}\ln|u| + \frac{2}{81}\frac{u^{-1}}{-1} + c_1 + \frac{25}{81}\int\frac{u}{25\,u^2+9}du - \frac{2}{81}\frac{1}{\frac{3}{5}}arctg\left(\frac{u}{\frac{3}{5}}\right) + c_2 + \frac{25}{9}\int\frac{u}{(25\,u^2+9)^2}du + \frac{2}{9}\int\frac{du}{\left(u^2+\frac{9}{25}\right)^2}$$

$$I = -\frac{1}{81}\ln|u| - \frac{2}{81u} + c_1 + \frac{25}{81.50}\int\frac{50u}{25\,u^2+9}du - \frac{10}{243}arctg\left(\frac{5u}{3}\right) + c_2 + \frac{25}{9.50}\int\frac{50u}{(25\,u^2+9)^2}du + \frac{2}{9}\int\frac{du}{\left(u^2+\frac{9}{25}\right)^2}$$

$$m = 25\,u^2+9 \qquad\qquad m = 25\,u^2+9$$

$$dm = 50u\,du$$

$$I = -\frac{1}{81}\ln|u| - \frac{2}{81u} + c_1 + \frac{1}{162}\int\frac{dm}{m} - \frac{10}{243}arctg\left(\frac{5u}{3}\right) + c_2 + \frac{1}{18}\int\frac{dm}{m^2} + \frac{2}{9}\boxed{\int\frac{du}{\left(u^2+\frac{9}{25}\right)^2}}$$

$$I_1$$

$$I = -\frac{1}{81}\ln|u| - \frac{2}{81u} + \frac{1}{162}\ln|m| - \frac{10}{243}arctg\left(\frac{5u}{3}\right) + \frac{1}{18}\frac{m^{-1}}{-1} + c_3 + \frac{2}{9}I_1$$

$$I=-\frac{1}{81}\ln|u|-\frac{2}{81u}+\frac{1}{162}\ln|25\,u^2+9|-\frac{10}{243}arctg\left(\frac{5u}{3}\right)-\frac{1}{18(25\,u^2+9)}+c_3+\frac{2}{9}I_1$$

Resolvendo I_1 por substituição trigonométrica, temos que: $u=\frac{3}{5}tg(\theta)\Longrightarrow du=\frac{3}{5}sec^2(\theta)\,d\theta$

$$I_1=\int\frac{du}{\left(u^2+\frac{9}{25}\right)^2}=\int\frac{\frac{3}{5}sec^2(\theta)d\theta}{\left(\frac{9}{25}tg^2(\theta)+\frac{9}{25}\right)^2}=\frac{\frac{3}{5}}{\left(\frac{9}{25}\right)^2}\int\frac{sec^2(\theta)d\theta}{(\,tg^2(\theta)+1)^2}=\frac{125}{8}\int\frac{sec^2(\theta)d\theta}{(sec^2(\theta))^2}=\frac{125}{8}\int\frac{d\theta}{sec^2(\theta)}$$

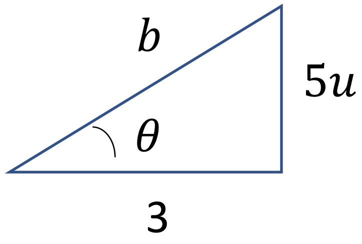
$$I_1=\frac{125}{8}\int cos^2(\theta)\;d\theta=\frac{125}{8}\int\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos(2\theta)\;d\theta=\frac{125}{16}\int d\theta\;+\frac{125}{16}\int cos(2\theta)d\theta$$

$$I_1=\frac{125}{16}\theta+\frac{125}{32}sen(2\theta)+c_4$$

$$I_1=\frac{125}{16}\theta+\frac{125}{32}2\,sen(\theta)\,cos(\theta)+c_4$$

Lembre que: $u=\frac{3}{5}tg(\theta)\Longrightarrow \mathrm{tg}(\theta)=\frac{5u}{3}\Longrightarrow\theta=arctg\left(\frac{5u}{3}\right)$

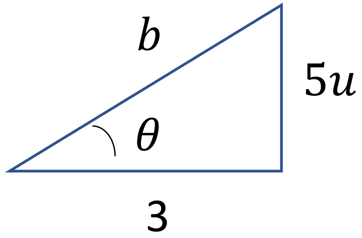
Do triângulo retângulo, temos que: $\operatorname{tg}(\theta) = \dfrac{5u}{3}$



Por Pitágoras: $9 + 25u^2 = b^2$

$$\Longrightarrow b = \sqrt{25u^2 + 9}$$

Do triângulo retângulo, temos que: $\quad \operatorname{tg}(\theta) = \dfrac{5u}{3}$



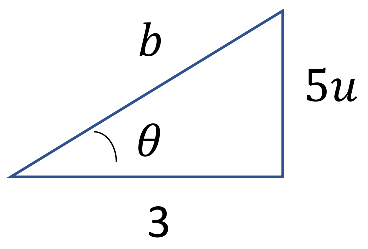
Por Pitágoras: $\quad 9 + 25u^2 = b^2$

$$\Rightarrow b = \sqrt{25u^2 + 9}$$

$$\Rightarrow sen(\theta) = \frac{5u}{\sqrt{25u^2 + 9}}$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{25u^2 + 9}}$$

Do triângulo retângulo, temos que: $\quad \mathrm{tg}(\theta) = \dfrac{5u}{3}$



Por Pitágoras: $9 + 25u^2 = b^2$

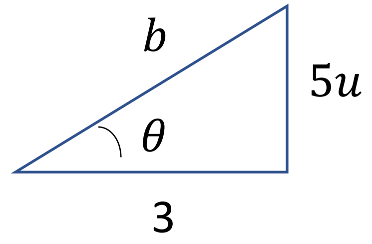
$$\Longrightarrow b = \sqrt{25u^2 + 9}$$

$$\Longrightarrow sen(\theta) = \frac{5u}{\sqrt{25u^2+9}}$$

$$\Longrightarrow \cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{25u^2+9}}$$

$$I_1 = \frac{125}{16} arctg\left(\frac{5u}{3}\right) + \frac{125}{16} \frac{5u}{\sqrt{25u^2+9}} \frac{3}{\sqrt{25u^2+9}} + c_4$$

Do triângulo retângulo, temos que: $\quad \operatorname{tg}(\theta) = \dfrac{5u}{3}$



Por Pitágoras: $9 + 25u^2 = b^2$

$$\Rightarrow b = \sqrt{25u^2 + 9}$$

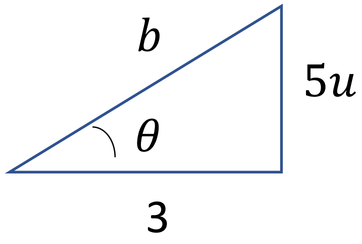
$$\Rightarrow sen(\theta) = \frac{5u}{\sqrt{25u^2 + 9}}$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{25u^2 + 9}}$$

$$I_1 = \frac{125}{16} arctg\left(\frac{5u}{3}\right) + \frac{125}{16} \frac{5u}{\sqrt{25u^2 + 9}} \frac{3}{\sqrt{25u^2 + 9}} + c_4$$

$$\boxed{I_1 = \frac{125}{16} arctg\left(\frac{5u}{3}\right) + \frac{625}{16} \frac{15u}{25u^2 + 9} + c_4}$$

Do triângulo retângulo, temos que: $\quad tg(\theta) = \dfrac{5u}{3}$



$$\Rightarrow sen(\theta) = \frac{5u}{\sqrt{25u^2 + 9}}$$

Por Pitágoras: $\quad 9 + 25u^2 = b^2$

$$\Rightarrow b = \sqrt{25u^2 + 9}$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{25u^2 + 9}}$$

$$I_1 = \frac{125}{16} arctg\left(\frac{5u}{3}\right) + \frac{125}{16} \frac{5u}{\sqrt{25u^2 + 9}} \frac{3}{\sqrt{25u^2 + 9}} + c_4$$

$$\boxed{I_1 = \frac{125}{16} arctg\left(\frac{5u}{3}\right) + \frac{625}{16} \frac{15u}{25u^2 + 9} + c_4}$$

Substituindo este resultado em I, temos que:

$$I = -\frac{1}{81}\ln|u| - \frac{2}{81u} + \frac{1}{162}\ln|25\,u^2 + 9| - \frac{10}{243} arctg\left(\frac{5u}{3}\right) - \frac{1}{18(25\,u^2 + 9)} + \frac{2}{9}\left(\frac{125}{16} arctg\left(\frac{5u}{3}\right) + \frac{625}{16} \frac{15u}{25u^2 + 9}\right) + k$$

Lembre ainda que: $u = \ln(x)$