1. Considere a função f cujo gráfico está ilustrado na Figura 1.

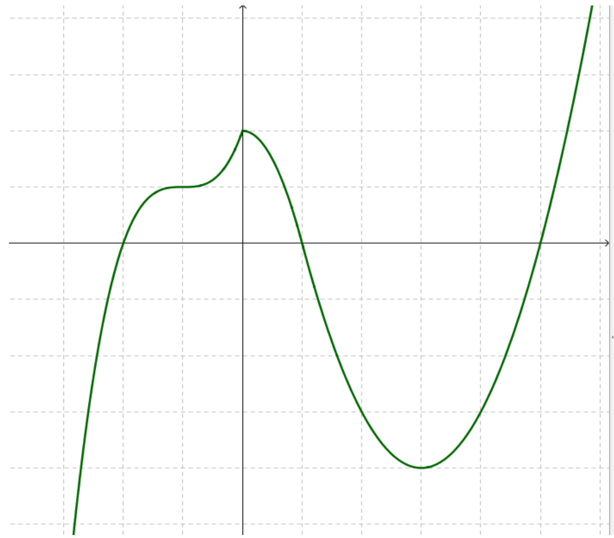


Figura 1

a. Você acredita que f tem um valor máximo? E valor mínimo? Caso afirmativo, em que ponto(s)? Justifique sua resposta.

Definição 1: Uma função f tem um *máximo relativo* em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que

$$f(c) \geq f(x), \forall x \in I \cap Df.$$

Definição 2: Uma função f tem um *mínimo relativo* em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que

$$f(c) \leq f(x), \forall x \in I \cap Df.$$

Ao *maior* e ao *menor* valor da função num intervalo denominamos *máximo absoluto* e *mínimo absoluto*, respectivamente.

1. Considere a função f cujo gráfico está ilustrado na Figura 1.

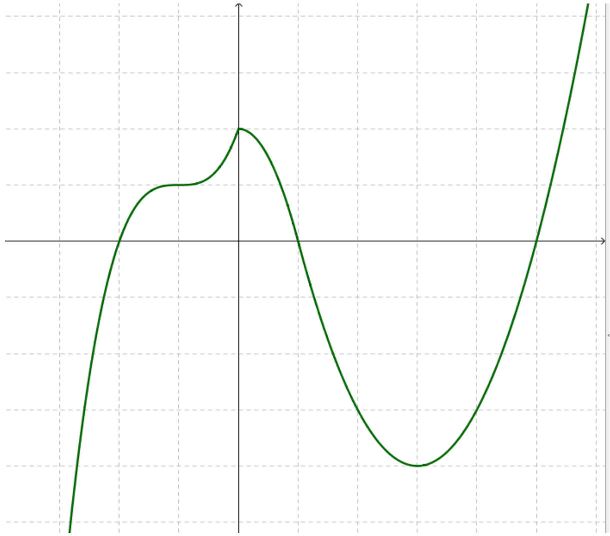


Figura 1

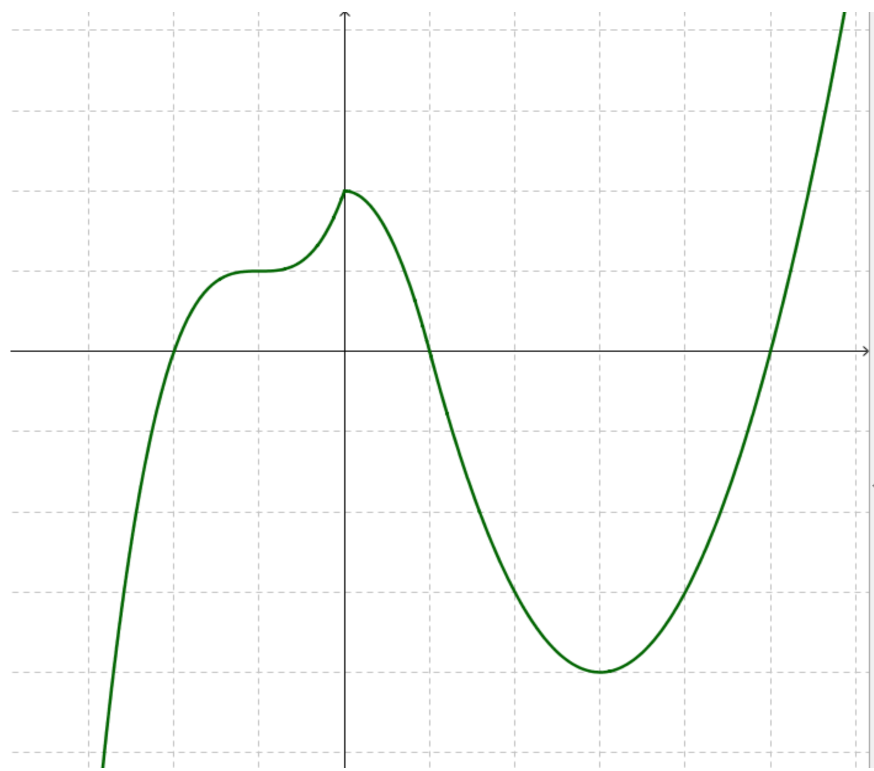
a. Você acredita que f tem um valor máximo? E valor mínimo? Caso afirmativo, em que ponto(s)? Justifique sua resposta.

✓ f tem um ponto de **máximo local** em 0;

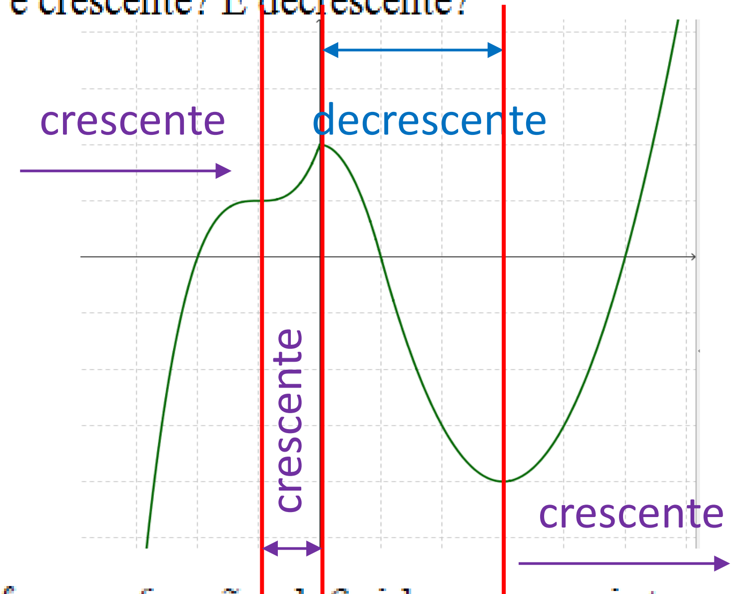
✓ f tem um ponto de **mínimo local** em 3;

✓ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \implies f$ não tem um ponto de **máximo/mínimo absoluto.**

Teorema de Weierstrass: Se f é uma função contínua, definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Então f assume seu máximo e mínimo absoluto em $[a, b]$.



b. Em que intervalo(s) f é crescente? E decrescente?

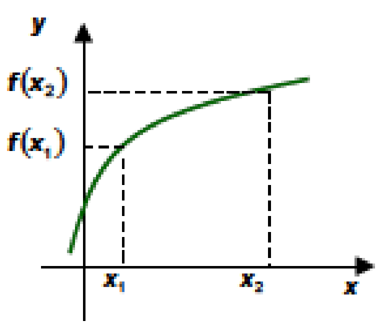


Definição 3: Seja f uma função definida em um intervalo I e sejam $x_1, x_2 \in I$.

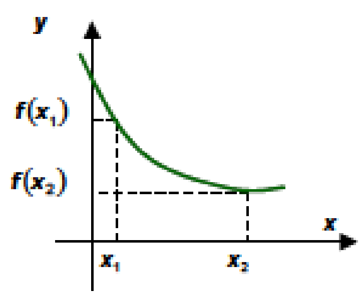
(i) f é *crescente* em I se $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1 < x_2$;

(ii) f é *decrescente* em I se $f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1 < x_2$;

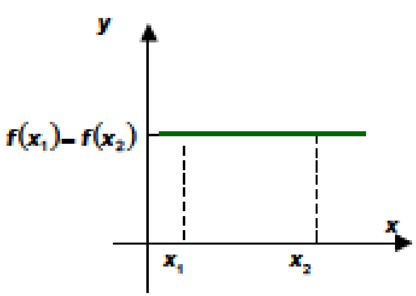
(iii) f é *constante* em I se $f(x_1) = f(x_2)$ para todos os pontos x_1 e x_2.



f crescente

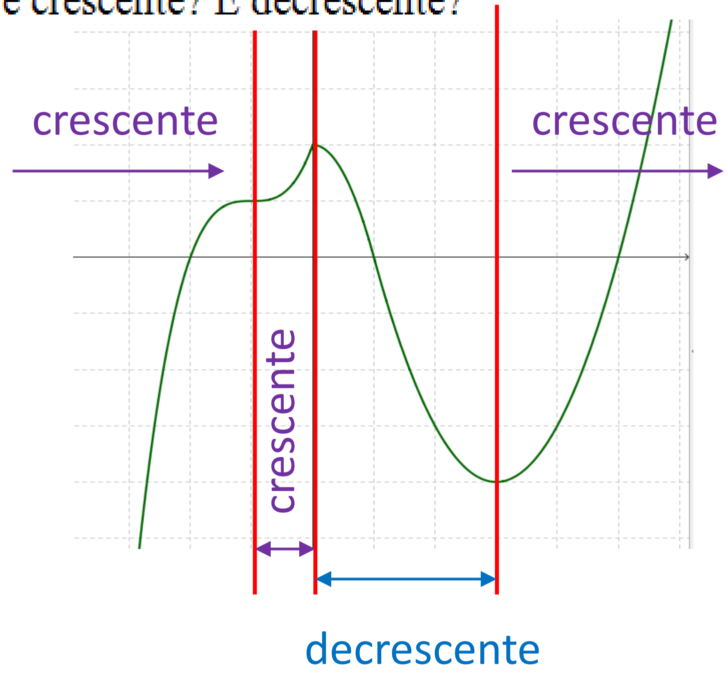


f decrescente



f constante

b. Em que intervalo(s) *f* é crescente? E decrescente?



✓ f é uma função **crescente** $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$;

✓ f é uma função **decrescente** $\forall x \in (0,3)$;

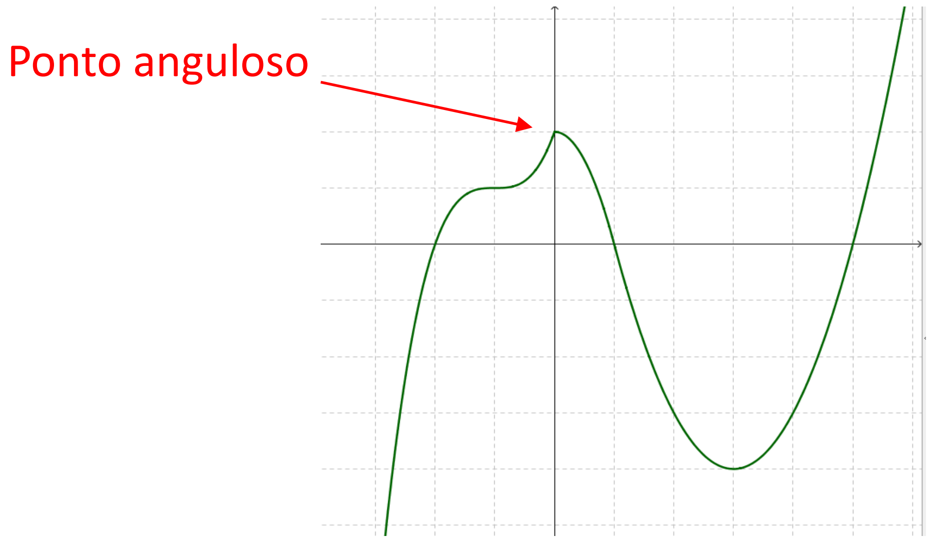
c. A função f é contínua em todo seu domínio? Por quê?

- ✓ Domínio: $Df = \mathbb{R}$

- ✓ Graficamente, observamos que f é contínua porquê **não apresenta salto, buraco e assíntota vertical.**

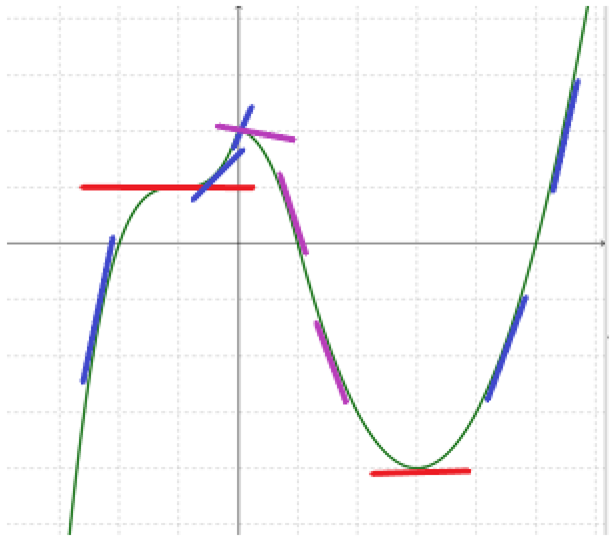
- ✓ Analiticamente, $\lim_{x \to c} f(x) = f(c), \forall c \in Df \Longrightarrow f$ é uma função contínua em todo o seu domínio.

d. A função f é diferenciável em todo seu domínio? Por quê?



✓ Graficamente, identificamos que o gráfico da função f tem um **ponto angulo** em $x = 0$, o que caracteriza um ponto em que f **não é derivável** em 0.

e. Na Figura 1 represente segmentos de retas tangentes ao longo de todo o domínio de *f*. A seguir, responda, em que intervalos as retas tangentes tem coeficiente angular positivo? E negativo? E nulo?



- ✓ Coeficiente angular positivo: $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (-1,0) \cup (3, +\infty)$
- ✓ Coeficiente angular negativo: $\forall x \in (0,3)$
- ✓ Coeficiente angular nulo em $x = -1$ e em $x = 3$.

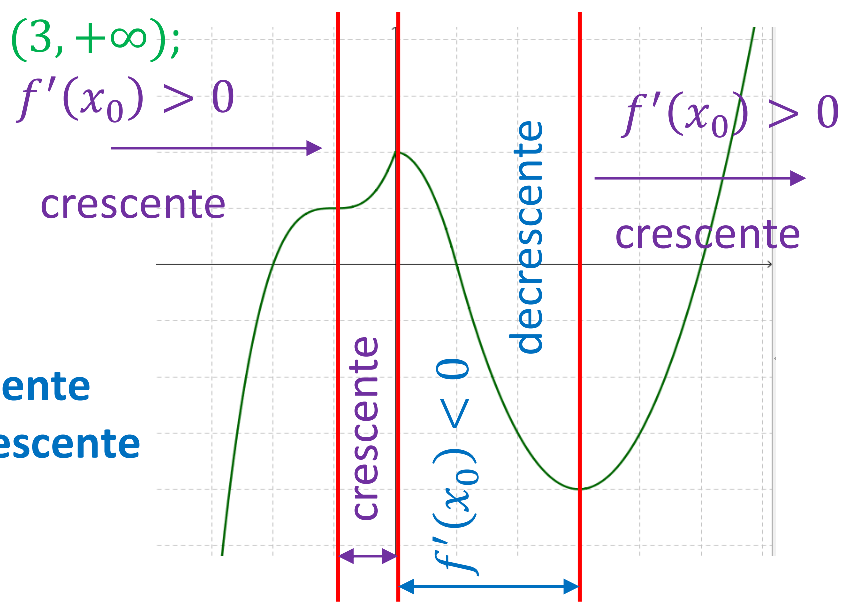
f. Da interpretação geométrica de derivada aplicada em um ponto, sabemos que ela pode representar o coeficiente angular da reta tangente. Assim sendo, compare as suas respostas dos itens “e” e “b” para conjecturar alguma relação entre o (de)crescimento de uma função e o sinal da primeira derivada?

Item e:

- ✓ Coeficiente angular positivo: $\forall x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (3,+\infty) \Longrightarrow f'(x_0) > 0$
- ✓ Coeficiente angular negativo: $\forall x \in (0,3) \Longrightarrow f'(x_0) < 0$
- ✓ Coeficiente angular nulo em $x = -1$ e em $x = 3 \Longrightarrow f'(x_0) = 0$.

Item b:

- ✓ f é uma função **crescente** $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$;
- ✓ f é uma função **decrescente** $\forall x \in (0,3)$;

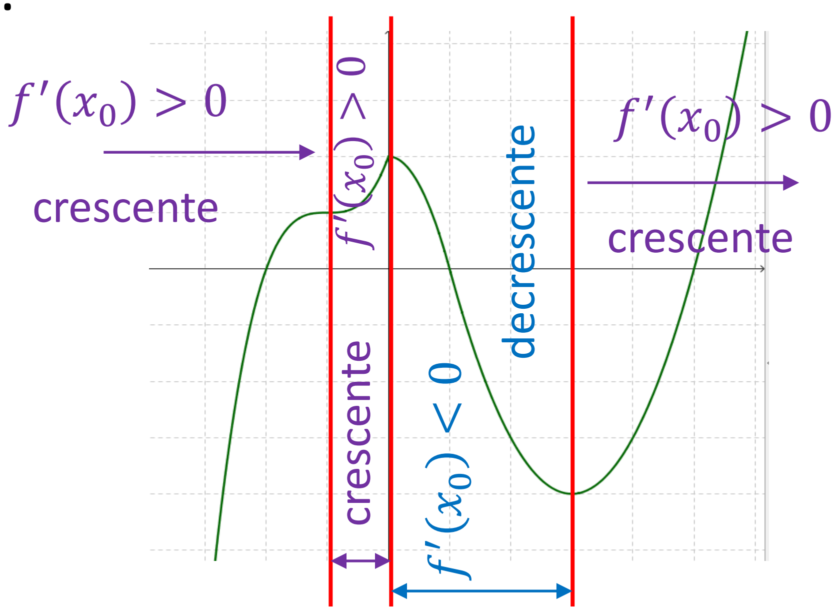


<u>Conjectura:</u>

$f'(x_0) > 0 \Longrightarrow f$ é uma função **crescente**

$f'(x_0) < 0 \Longrightarrow f$ é uma função **decrescente**

FORMALIZANDO:



Relação entre (de)crescimento da função e sinal de sua primeira derivada:

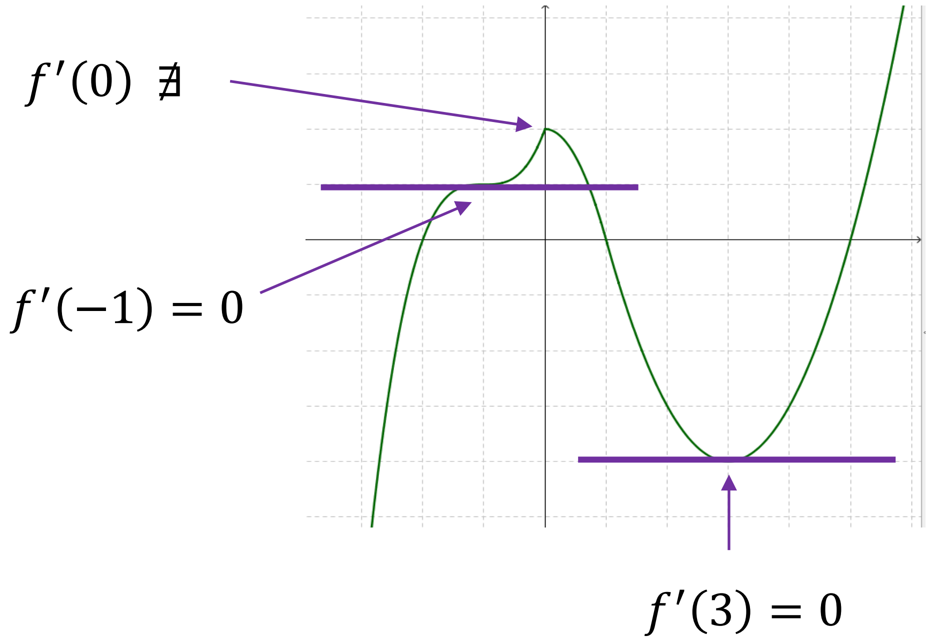
Teorema 1: Seja f uma função contínua sobre o intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b).

(i) Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$;

(ii) Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$;

(iii) Se $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, então f é constante em $[a, b]$.

FORMALIZANDO:



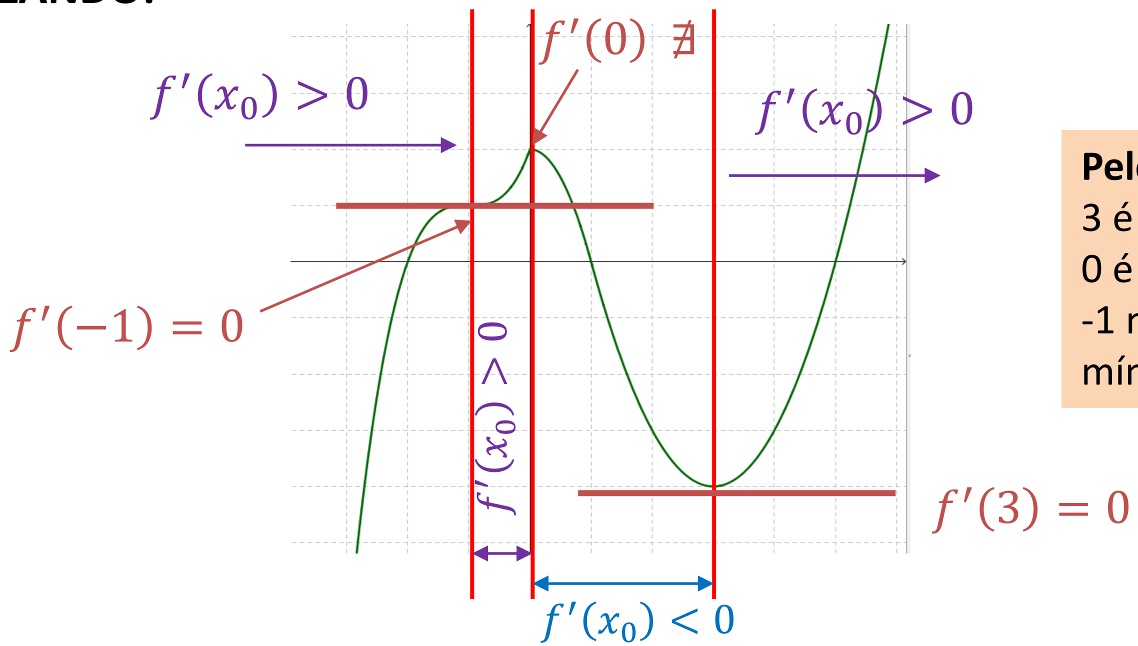
Pontos críticos: $c \in Df$ tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)\ \nexists$

➡ -1, 0 e 3 são pontos críticos de f

Os **Pontos críticos** são os candidatos a pontos de máximo e/ou mínimos locais (relativos) e/ou globais (absolutos).

Os Pontos Extremos são os pontos de máximo e mínimos.

FORMALIZANDO:



Pelo teste da 1ª Derivada:
3 é mínimo local;
0 é máximo local;
-1 não é máximo nem mínimo local.

Troca do sinal da função primeira derivada:

Teste da primeira derivada

Seja $y = f(x)$ uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ que possui derivada em todo o ponto do intervalo (a, b), exceto possivelmente num ponto c.

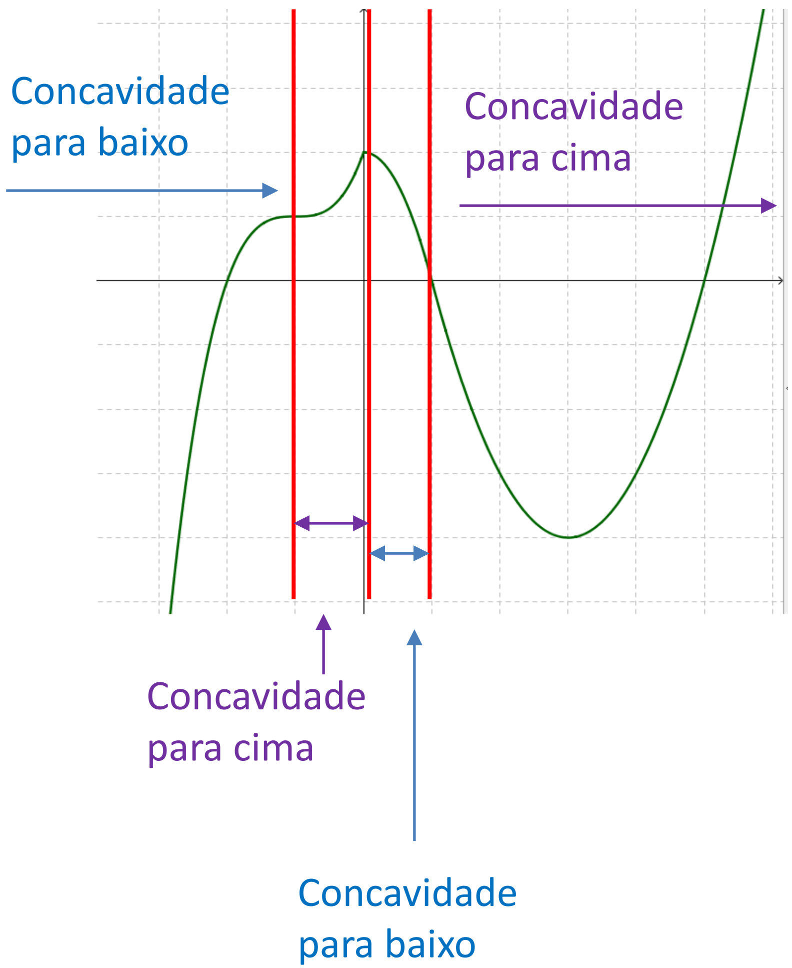
i. Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem máximo relativo em c;

ii. Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem mínimo relativo em c;

iii. Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f não tem ponto nem de máximo nem de mínimo relativo em c;

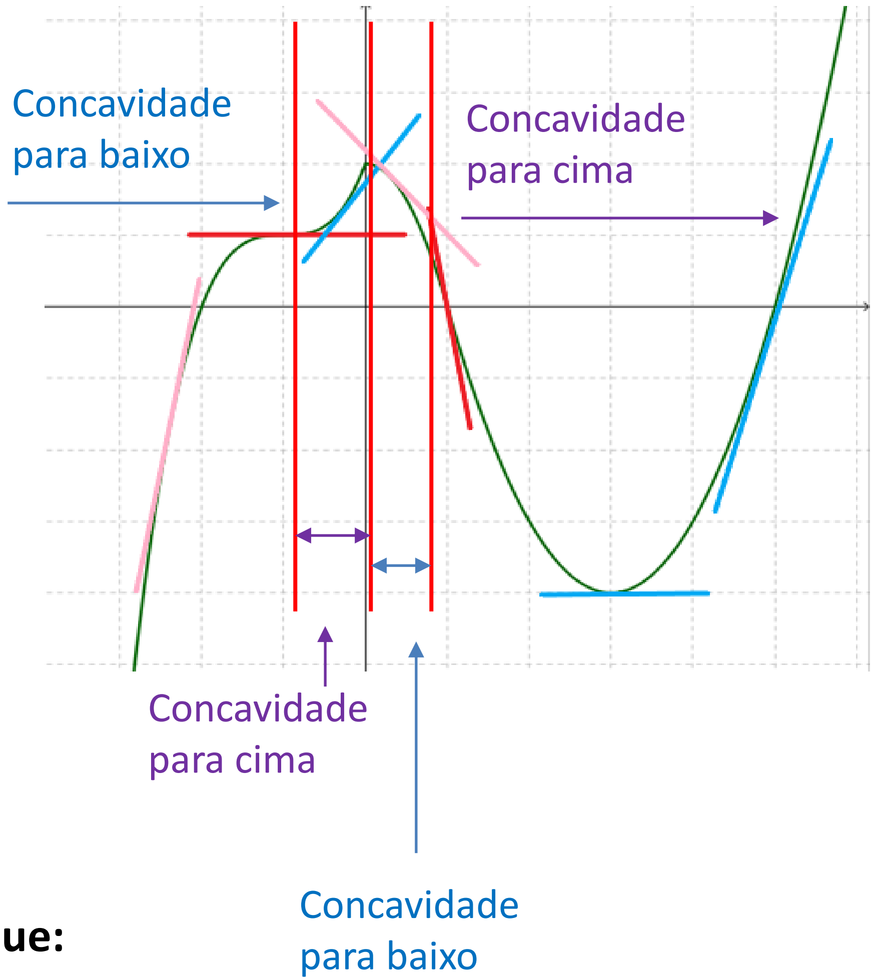
iv. Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f não tem ponto nem de máximo nem de mínimo relativo em c;

g. Em que intervalo(s) o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo? E para cima?



- ✓ O gráfico de f tem concavidade **voltada para baixo** $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (0,1)$;
- ✓ O gráfico de f tem concavidade **voltada para cima** $\forall x \in (-1,0) \cup (1, +\infty)$;

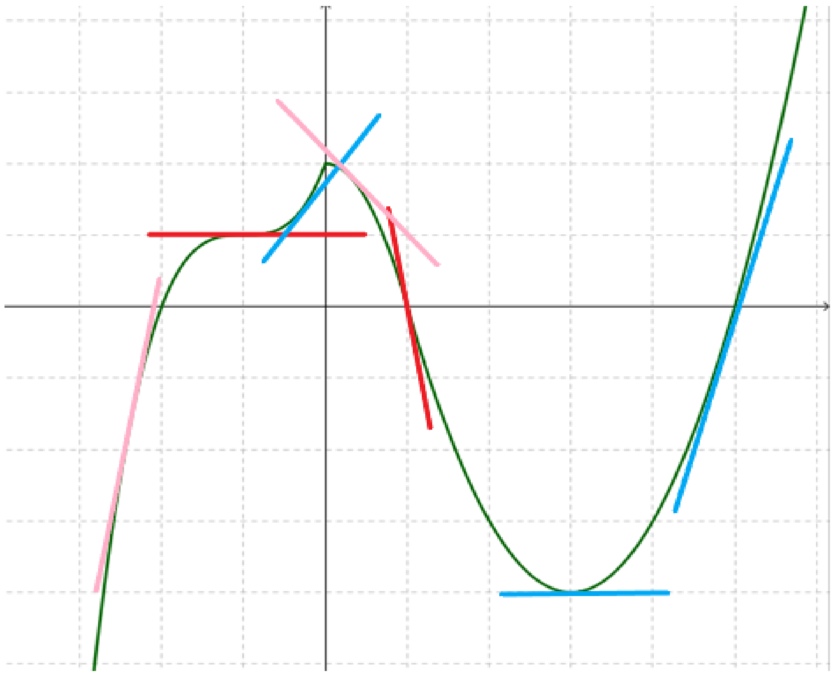
g. Em que intervalo(s) o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo? E para cima?



Observe ainda que:

- ✓ A <u>reta tangente</u> está situada <u>**acima do gráfico**</u> de f nos intervalos em que a concavidade **voltada para baixo;**
- ✓ A <u>reta tangente</u> está situada <u>**abaixo do gráfico**</u> de f nos intervalos em que a concavidade **voltada para baixo;**

g. Em que intervalo(s) o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo? E para cima?



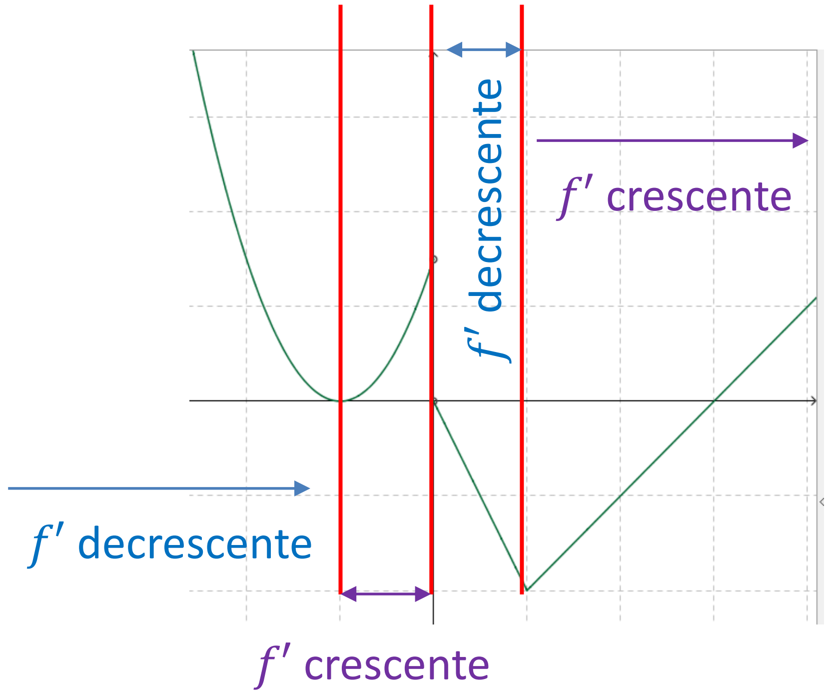
Definição 5: Um ponto $P\left(c, f\left(c\right)\right)$ do gráfico de uma função contínua f é chamado um *ponto de inflexão*, se existe um intervalo (a, b) contendo c, tal que uma das situações ocorra:

i. f tem concavidade voltada para cima em (a, c) e para baixo em (c, b);

ii. f tem concavidade voltada para baixo em (a, c) e para cima em (c, b).

Teorema: Seja $f\left(x\right)$ uma função diferenciável sobre (a, b) onde $c \in (a, b)$, se $P\left(c, f\left(c\right)\right)$ é um ponto de inflexão do gráfico de $f\left(x\right)$ e se existe $f''\left(c\right)$, então $f''\left(c\right) = 0$.

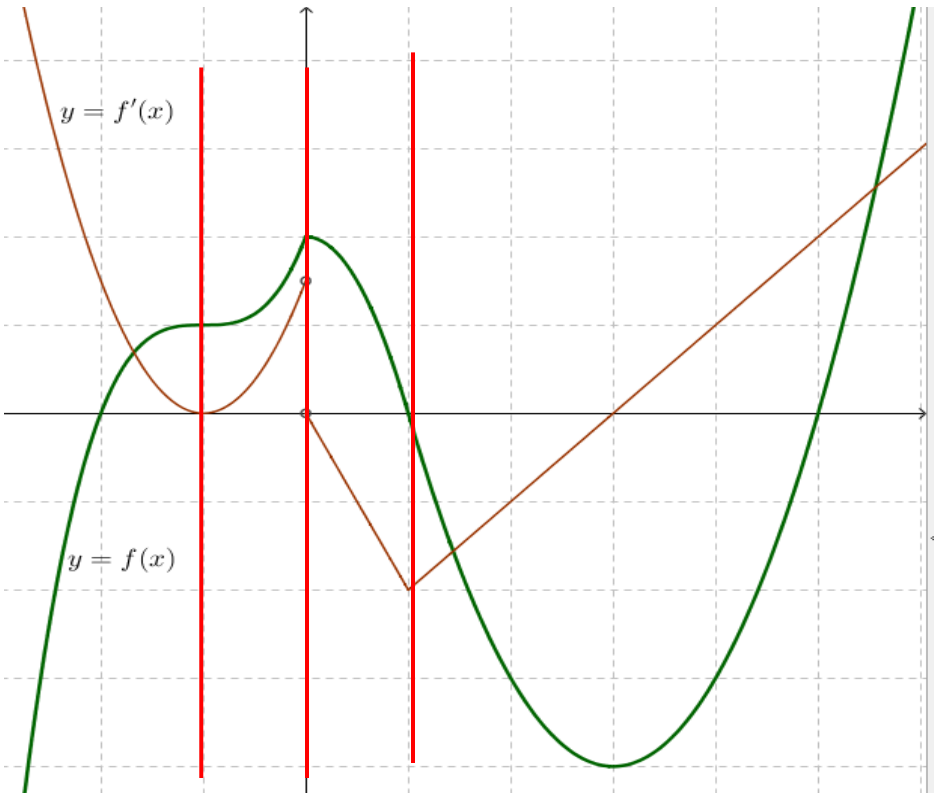
h. Na Figura 2 encontra-se o gráfico da primeira derivada de f. Use-o para identificar em que intervalos a função f' é (de)crescente?



✓ f' é uma função **decrescente** $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (0,1)$;

✓ f' é uma função **crescente** $\forall x \in (-1,0) \cup (1, +\infty)$;

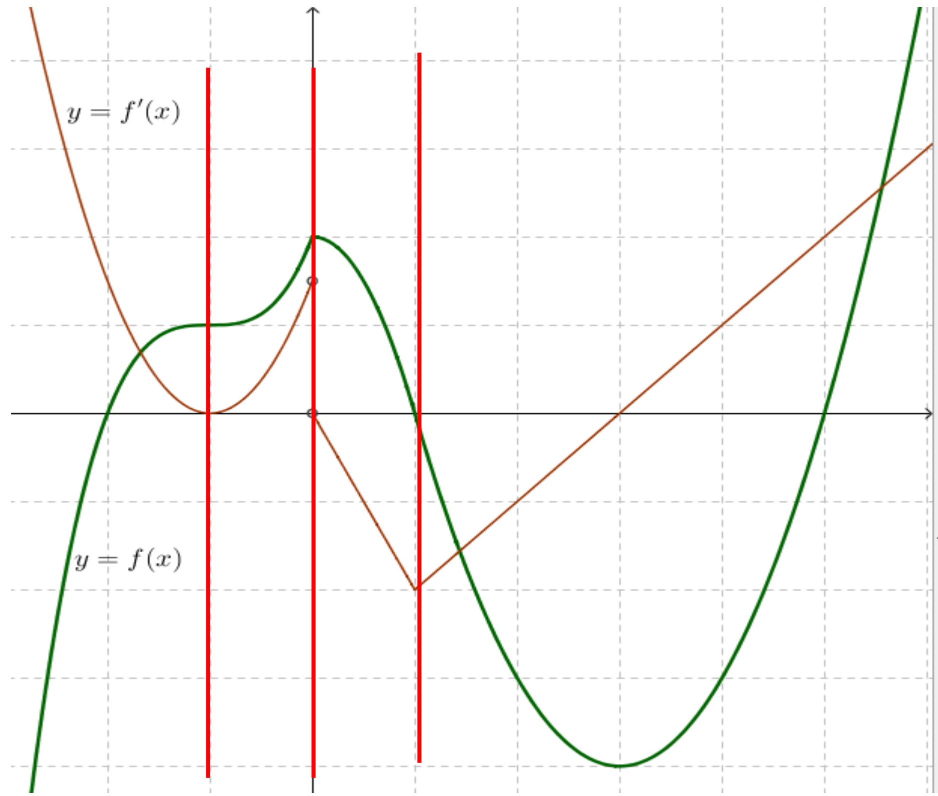
i. A Figura 3 apresenta os gráfico de f e f' sobrepostos. Use os itens "g" e "h" para conjecturar alguma possível relação existente entre a concavidade do gráfico de uma função e o (de)crescimento da primeira derivada de f.



Conjectura:

- ✓ f tem concavidade **voltada para baixo** $\Longrightarrow$ f' é uma função **decrescente;**
- ✓ f tem concavidade **voltada para cima** $\Longrightarrow$ f' é uma função **crescente.**

i. A Figura 3 apresenta os gráfico de f e f' sobrepostos. Use os itens "g" e "h" para conjecturar alguma possível relação existente entre a concavidade do gráfico de uma função e o (de)crescimento da primeira derivada de f.



Definição 4: Se f for diferenciável num intervalo I então:

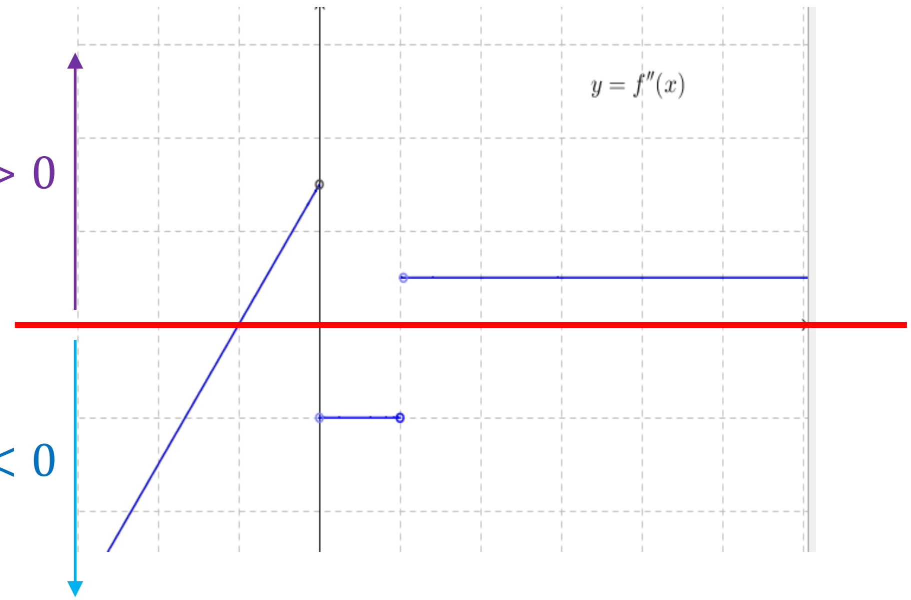
i. f tem *concavidade para cima* se f' for crescente em I;

ii. f é *concavidade para baixo* se f' for decrescente em I;

j. A Figura 4 apresenta o gráfico da segunda derivada de f. Em que intervalos f'' é positiva? E negativa? E nula?

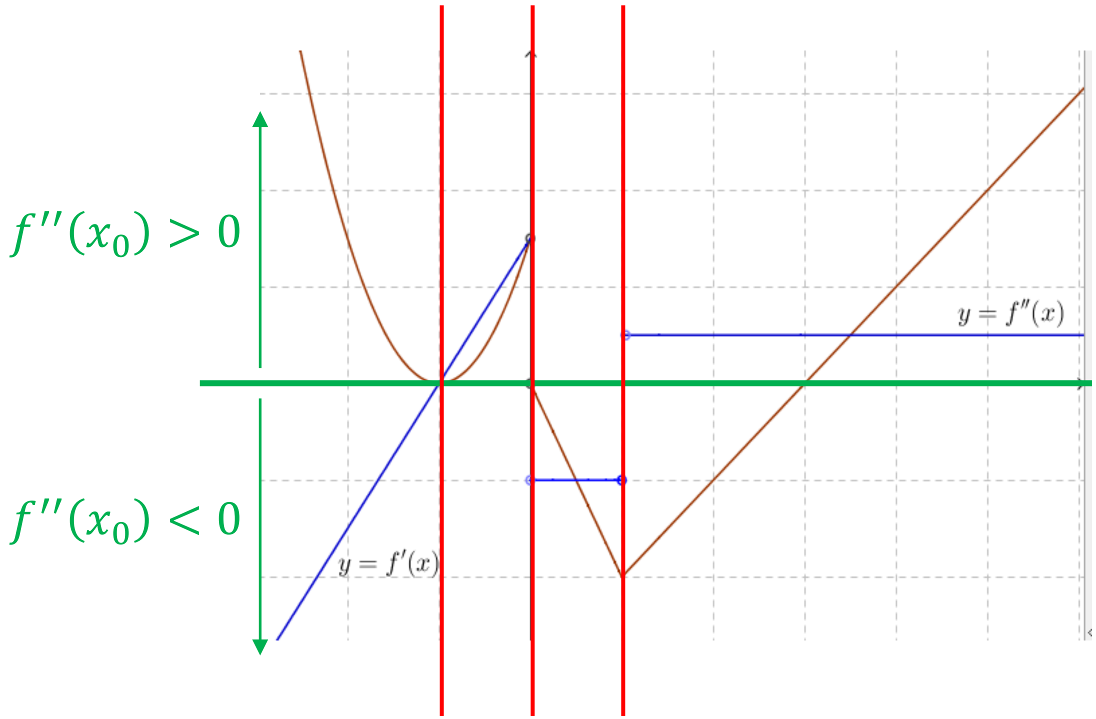
$f''(x_0) > 0$

$f''(x_0) < 0$



- ✓ f'' é **positiva** $\forall x \in (-1,0) \cup (1,+\infty)$;
- ✓ f'' é **negativa** $\forall x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$;
- ✓ f'' é **nula** em $x = -1$.

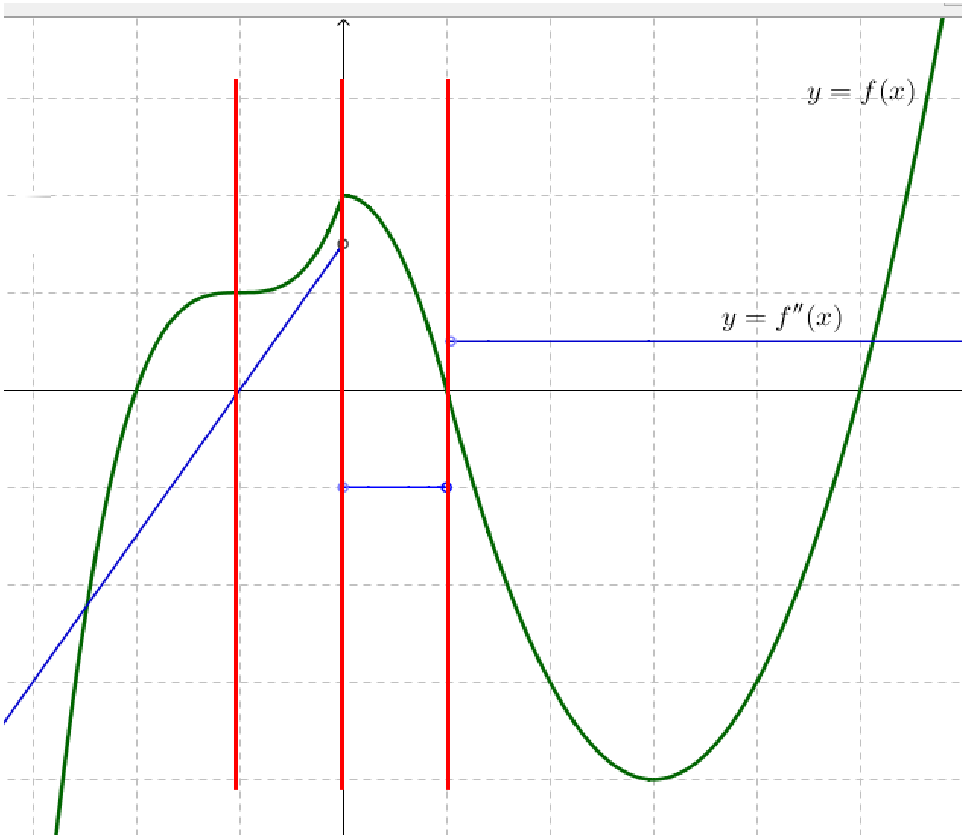
k. A Figura 5 apresenta os gráficos de *f'* e *f''* sobrepostos. Use os itens "h" e "j" para conjecturar alguma possível relação existente entre (de)crescimento de *f'* com o sinal de *f''*.



Conjectura:

- ✓ f' é uma função **decrescente** $\Longrightarrow$ f'' é **negativa**
- ✓ f' é uma função **crescente** $\Longrightarrow$ f'' é **positiva**

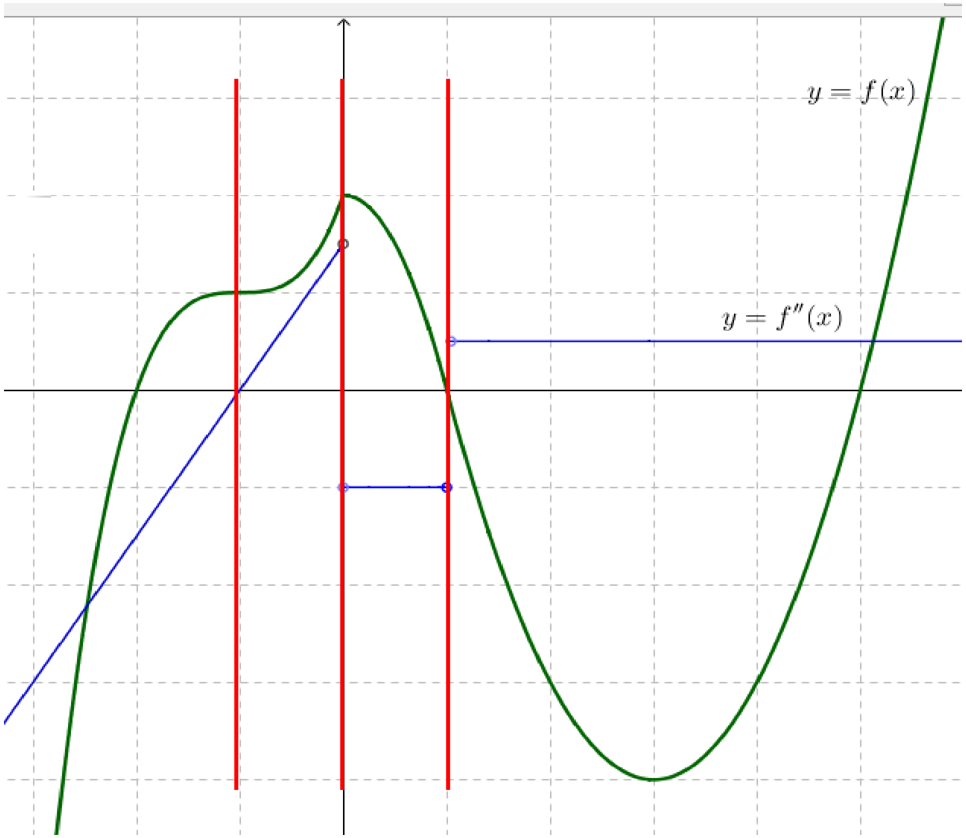
1. A Figura 6 apresenta os gráficos de f e f'' sobrepostos. Use os itens "g" e "j" para conjecturar a relação entre a concavidade do gráfico de f e o sinal de f''.



Conjectura:

- ✓ f'' é **positiva** $\Longrightarrow$ o gráfico de $\boldsymbol{f}$ tem concavidade voltada para cima.
- ✓ f'' é **negativa** $\Longrightarrow$ o gráfico de $\boldsymbol{f}$ tem concavidade voltada para baixo.

1. A Figura 6 apresenta os gráficos de *f* e *f"* sobrepostos. Use os itens "g" e "j" para conjecturar a relação entre a concavidade do gráfico de *f* e o sinal de *f"*.

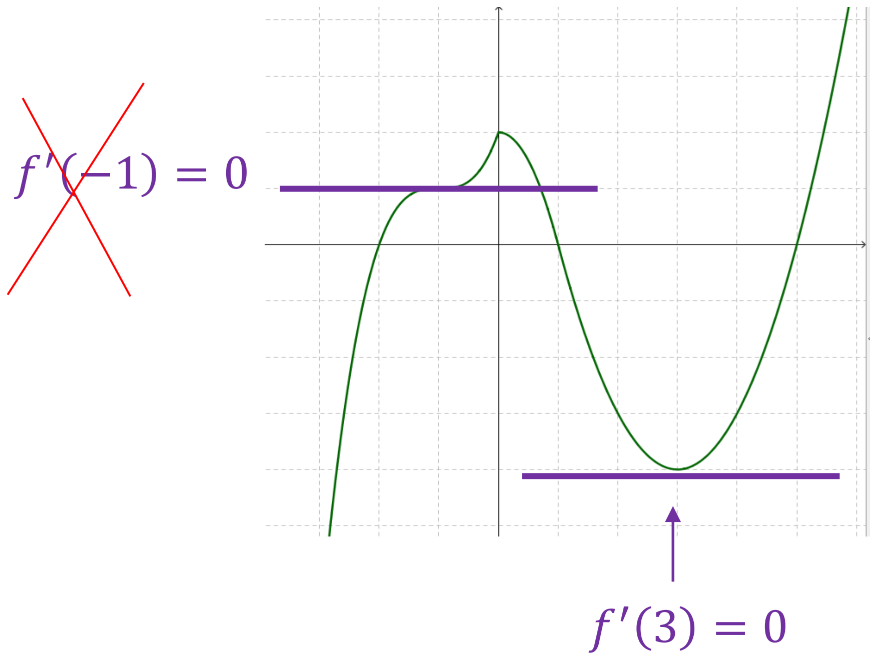


Teorema : Seja f uma função duas vezes diferenciável em um intervalo aberto $I = (a, b)$. Se:

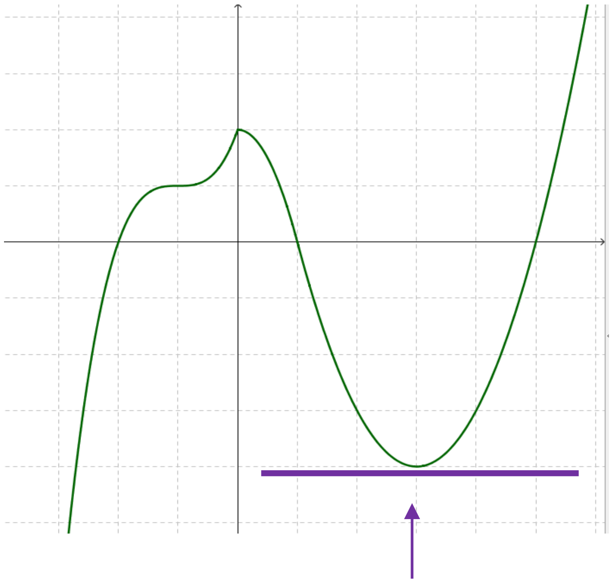
i. $f''(x_0) > 0$ quando $x_0 \in I$ então, o gráfico de f tem concavidade para cima sobre I;

ii. $f''(x_0) < 0$ quando $x_0 \in I$ então, o gráfico de f tem concavidade para baixo sobre I.

E no ponto em que é um ponto crítico da forma $f'(c) = 0$ que é um ponto de máximo ou mínimo relativo, o que você pode falar a respeito do sinal da segunda derivada neste ponto, ou seja, qual o sinal de $f''(c)$? Por quê?



E no ponto em que é um ponto crítico da forma $f'(c) = 0$ que é um ponto de máximo ou mínimo relativo, o que você pode falar a respeito do sinal da segunda derivada neste ponto, ou seja, qual o sinal de $f''(c)$? Por quê?

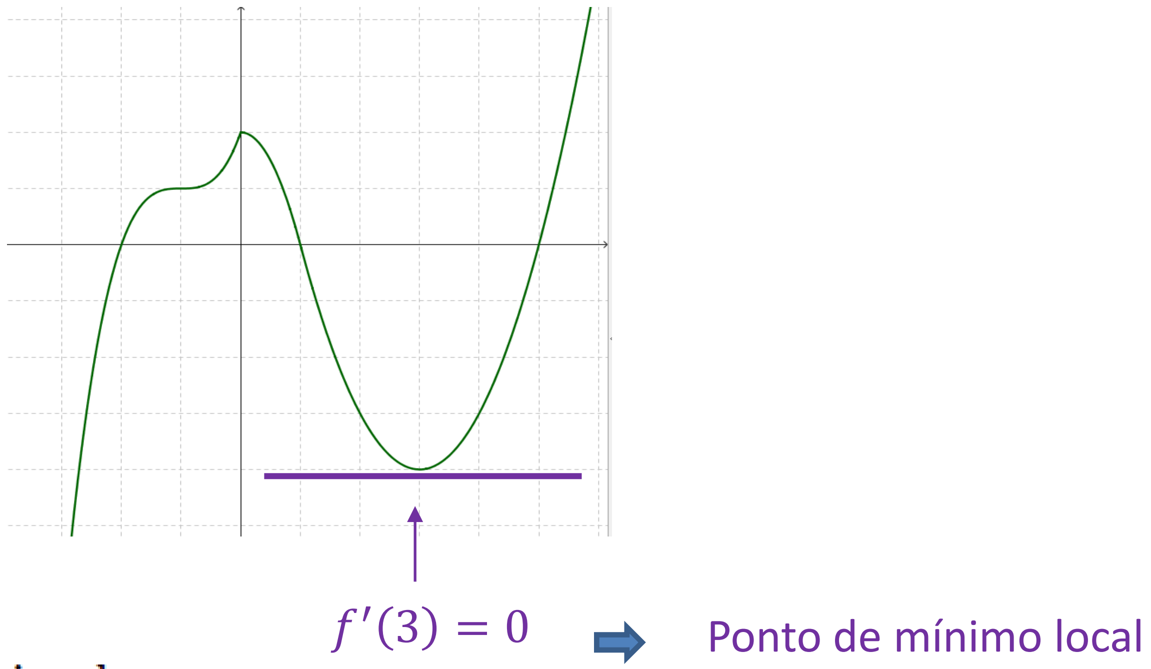


$f'(3) = 0$ ⇨ Ponto de mínimo local

Teste da segunda derivada

Sejam f uma função derivável num intervalo aberto (a, b) e c um ponto crítico de f neste intervalo tal que $f'(c) = 0$, para $c \in (a, b)$. Se f admite a derivada f'' em (a, b) e se

E no ponto em que é um ponto crítico da forma $f'(c) = 0$ que é um ponto de máximo ou mínimo relativo, o que você pode falar a respeito do sinal da segunda derivada neste ponto, ou seja, qual o sinal de $f''(c)$? Por quê?



Teste da segunda derivada

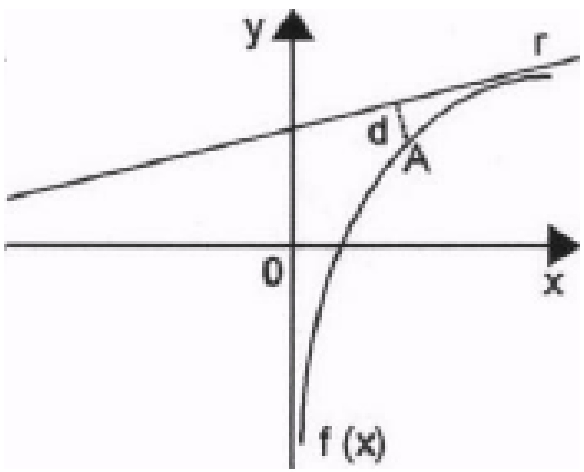
Sejam f uma função derivável num intervalo aberto (a, b) e c um ponto crítico de f neste intervalo tal que $f'(c) = 0$, para $c \in (a, b)$. Se f admite a derivada f'' em (a, b) e se

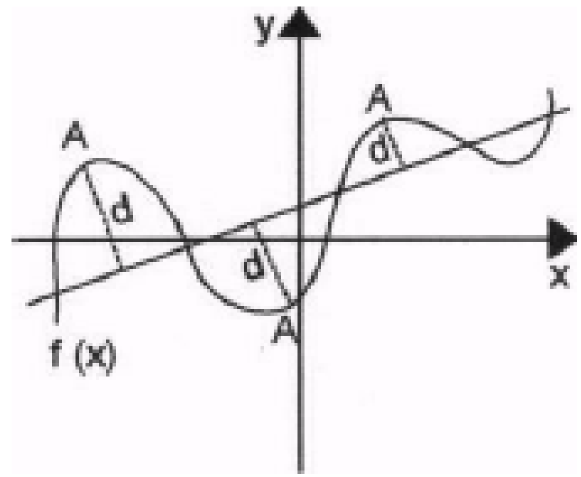
i. $f''(c) < 0$, então f tem um valor máximo relativo em c;

ii. $f''(c) > 0$, então f tem um valor mínimo relativo em c;

Assíntotas do gráfico de uma função

Definição : Seja $y = f(x)$ uma função, $A(x, f(x))$ um ponto do gráfico de $f(x)$ e r uma reta, quando a distância d entre a reta e o ponto A tende a zero enquanto o ponto A tende ao infinito, esta reta r é dita *assíntota da curva*.





Assíntotas Verticais

A reta $x = a$ é uma *assíntota vertical* do gráfico de $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

i. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$;

ii. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$;

iii. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$;

iv. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

Assíntota Oblíquas

A curva $f(x)$ tem uma *assíntota oblíqua*, cuja equação é da forma

$$y = kx + b,$$

onde os valores dos coeficientes k e b, se existirem os limites:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad b = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - kx\right).$$

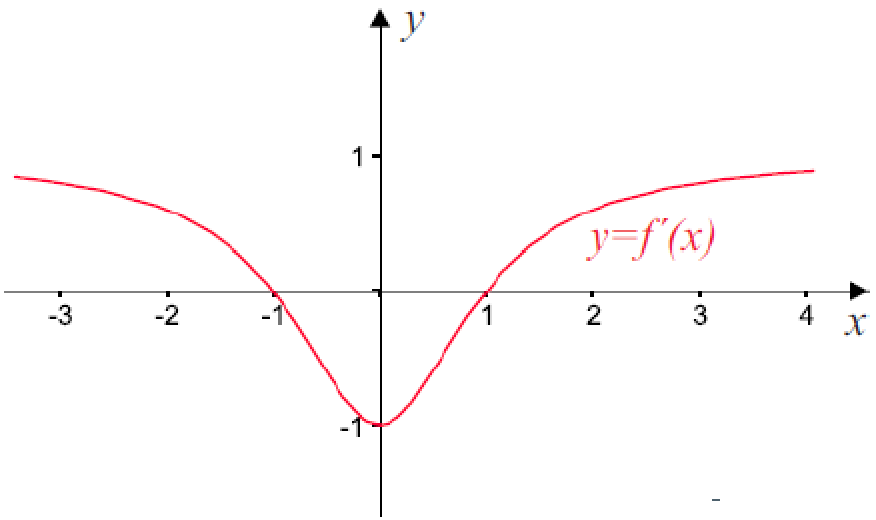
Observações:

i. Se um dos limites acima não existir, então a curva não tem assíntota oblíqua.

ii. Se $k = 0$ e b existir, então a equação da assíntota será $y = b$ e é chamada de *assíntota horizontal*.

Exemplo:

Esboce o gráfico de uma função $f(x)$, contínua para todo $x \in \mathbb{R}$, sabendo que f tem três raízes reais, que $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=-3$, $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=3$ e que o gráfico da primeira derivada de f está representado na figura a seguir.



Dados:

f possui 3 raízes $\Longrightarrow f(x_i)=0, i=1,2,3$

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-3 \to b_1 \\ \lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)=3 \to b_2 \end{cases} \qquad k=1$$

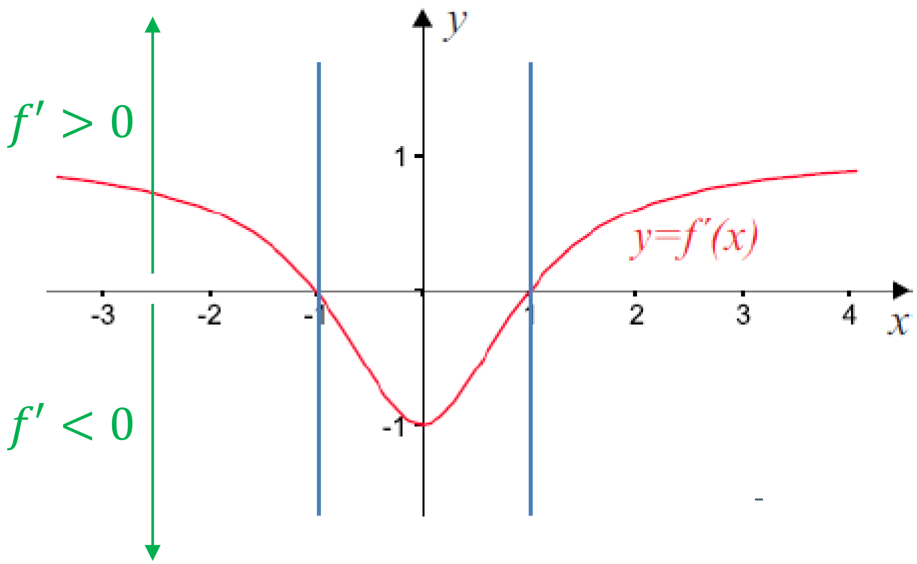
Comparando esses limites com $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b$, temos que:

A reta:

$$\begin{cases} y=x-3 \Longrightarrow \text{é assíntota oblíqua para } x\to+\infty \\ y=x+3 \Longrightarrow \text{é assíntota oblíqua para } x\to-\infty \end{cases}$$

Exemplo:

Esboce o gráfico de uma função $f(x)$, contínua para todo $x \in \mathbb{R}$, sabendo que f tem três raízes reais, que $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x] = -3$, $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x] = 3$ e que o gráfico da primeira derivada de f está representado na figura a seguir.

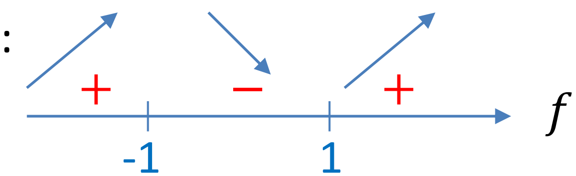


Extraindo os dados do gráfico de f':

Pontos críticos:

$$\begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ -1 e 1 são pontos críticos

Sinais de f':



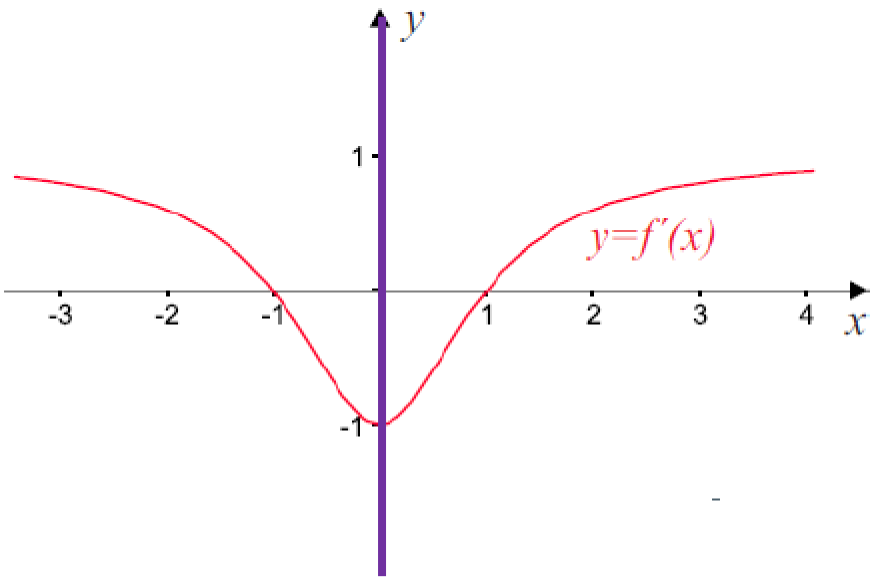
✓ $f'(x_0) > 0$, $\forall x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \Longrightarrow f$ é crescente $\forall x \in (-\infty,-1)] \cup [1,+\infty)$

✓ $f'(x_0) < 0$, $\forall x \in (-1,1) \Longrightarrow f$ é decrescente $\forall x \in [-1,1]$

Pelo teste da 1ª derivada: $\begin{cases} \text{-1 é um máximo local} \\ \text{1 é um mínimo local} \end{cases}$

Exemplo:

Esboce o gráfico de uma função $f(x)$, contínua para todo $x \in \mathbb{R}$, sabendo que f tem três raízes reais, que $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = -3$, $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x] = 3$ e que o gráfico da primeira derivada de f está representado na figura a seguir.



Pontos de inflexão:

c tal que há mudança de concavidade.

⇓

sinal de f''

- ✓ f' decrescente $\Longrightarrow f''$ é negativa
- ✓ f' crescente $\Longrightarrow f''$ é positiva

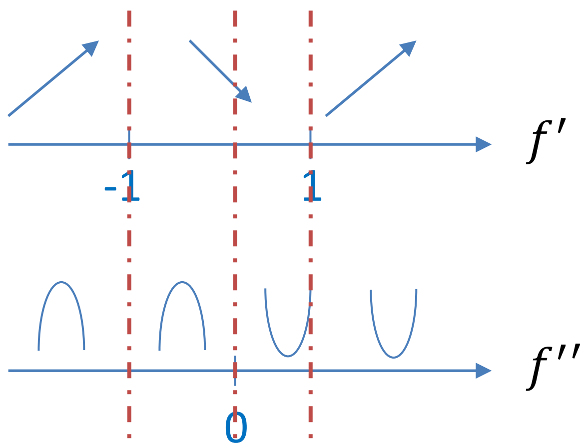
- ✓ f' decresce $\forall x \in (-\infty, 0) \Longrightarrow f''(x) < 0, \; \forall x \in (-\infty, 0)$
- ✓ f' cresce $\forall x \in (0,+\infty) \Longrightarrow f''(x) > 0$, $\forall x \in (-\infty,0)$

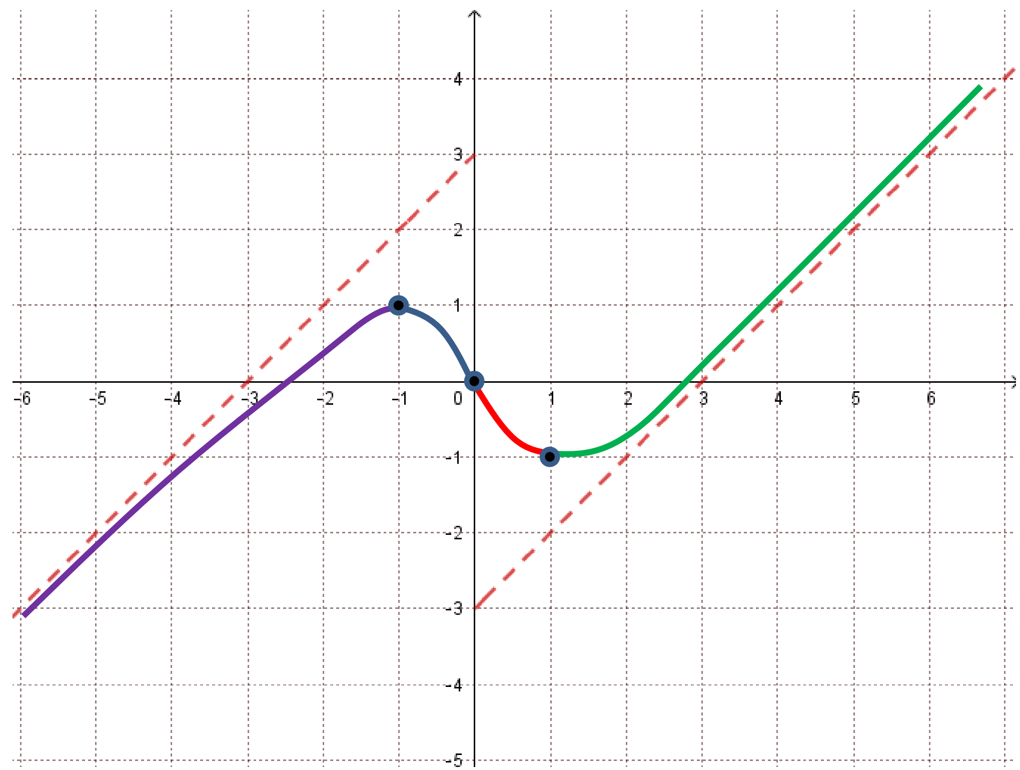
- ✓ $c = 0$ é um ponto de inflexão.

Exemplo:

Esboce o gráfico de uma função $f(x)$, contínua para todo $x \in \mathbb{R}$, sabendo que f tem três raízes reais, que $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = -3$, $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x] = 3$ e que o gráfico da primeira derivada de f está representado na figura a seguir.

Esboço do gráfico:





Assíntotas:

$$\begin{cases} y = x - 3, \text{ p/ } x \to +\infty \\ y = x + 3, \text{ p/ } x \to -\infty \end{cases}$$