Sistemas Lineares

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{Matriz dos coeficientes}}^{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{matriz das incógnitas}}^{X} = \overset{B}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}} \quad \boxed{AX = B}$$

Matriz dos termos independentes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & | & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix} \Bigg\} \text{ Matriz Ampliada}$$

Soluções:

Sistema Linear → **Possível**: Quando admites solução → **Determinado**: admite uma única solução; → **Indeterminado**: admite infinitas soluções

Sistema Linear → **Impossível**: Quando não admite solução

Matriz Escalonada por Linhas: uma matriz $m \times n$ tem as propriedades abaixo

a) toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.

b) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1. Chamamos este número de pivô.

c) Para duas linhas sucessivas (diferentes de zero), o 1 pivô na linha mais acima está mais a esquerda do que o 1 pivô na linha inferior.

Método de escalonamento

- **Operações elementares entre linhas:**
  1. Trocar a posição de duas linhas. ($L_r \leftrightarrow L_s$)
  2. Multiplicar uma linha por um escalar diferente de zero. ($L_r = KL_s$), $K \in \mathbb{R}^*$
  3. Somar uma linha da matriz por um múltiplo escalar de outra linha. ($L_r = L_r - KL_s$).

Posto e Nulidade: Dada uma matriz de ordem $m \times n$:

- **Posto** da matriz, $P(A)$ é definido pelo número de linhas não nulas da matriz reduzida de A à forma escalonada por linhas.
- **Nulidade** da matriz, $nul(A)$ é definida pela diferença entre o número de colunas e o seu posto.

$$nul(A) = n - P(A).$$

Caracterização de um Sistema linear do tipo $AX=B$

Seja o sistema de m equações e n incógnitas

a) **Possível**: $P(A) = P(A|B)$

→ **Determinado**: $P(A) = n$

→ **Indeterminado**: $P(A) < n$

b) **Impossível**: $P(A) < P(A|B)$

c) variáveis livres $= nul(A) = n - P(A)$

Sistema Homogêneo: tem a forma $AX = 0$, sempre possui a solução trivial.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \cdots a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \cdots a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Inversa de uma Matriz: uma matriz $A_{n \times n}$ é invertível se $A \cdot A^{-1} = I$.

Teorema: Se $A_{n \times n}$ admite inversa então, então sua inversa é única.

Inversa Através do escalonamento: $[A|I] \to [I|A^{-1}]$

Propriedades da Inversa:

1. A é inversível se $\det A \neq 0$. A não não é invertível se $\det A = 0$.
2. Se A é inversível, sua inversa A^{-1} também é inversível e a inversa de A^{-1} é A, ou seja $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. Se A e B são matrizes invertíveis e de mesma ordem o produto AB é o produto $B^{-1}A^{-1}$, ou seja $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
4. Se uma matriz A é invertível, sua transposta A^T também é invertível. A matriz inversa A^T é $(A^T)^{-1}$, ou seja $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
5. Se A é invertível, então KA ($K \in \mathbb{R}^*$) também é invertível e a inversa de KA é $\frac{1}{K} A^{-1}$, ou seja, $(KA)^{-1} = \frac{1}{K} A^{-1}$.
6. Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tal que $\det(A) \neq 0$, então $A^{-1} \Rightarrow \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
7. Se A é inversível $(A^K)^{-1} = A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^{-1} \ldots A^{-1} = (A^{-1})^K$.

Método da Triangulação para Determinante

Operações Elementares

1. $L_i \Leftrightarrow L_j$ $\quad \det(A) = -\det(A')$
2. $L_i = KL_i$ $\quad \det(A) = \frac{1}{K} \det(A')$
3. $L_i = L_i + KL_j$ $\quad \det(A) = \det(A')$

Propriedade dos Determinantes: Seja A matriz quadrada $n \times n$ com $n \geq 2$:

1. $\det(K \cdot A) = K^n \cdot \det(A)$
2. $\det(A^T) = \det(A)$
3. Se B uma matriz quadrada de mesma ordem que A, então $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
5. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
6. Se A possui alguma linha (ou coluna) inteiramente nula, então $\det(A) = 0$
7. Se A possui duas linhas (ou duas colunas) idênticas, então $\det(A) = 0$
8. Se A possuir duas linhas (ou colunas) múltiplas entre si, então $\det(A) = 0$.