Autovalores e Autovetores

Definição 1: Se $T: V \to V$ um operador linear. Um vetor $v \in V$, $v \neq 0$ é dito um autovetor de T se existe um número real λ tal que:

$$T(v) = \lambda v$$

O número λ é denominado autovalor de T associado ao vetor v.

Determinação dos Autovalores:

- Se $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$.
- Queremos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tq exista $(x,y) \neq (0,0)$ com $T(x,y) = \lambda(x,y)$
- $(x,y) \neq (0,0)$
  - $ax+by = \lambda x = (a-\lambda)x + by = 0$
  - $cx+dy = \lambda y = cx + (d-\lambda) = 0$

$$\det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Determinação dos Autovetores

- Os autovetores de T associados a λ são as soluções não nulas do Sistema linear homogêneo acima.

Propriedades

- **Teorema:** Seja λ um autovalor do operado $T: V \to V$. O conjunto $S_\lambda = \{v \in V;\ T(v) = \lambda v\}$. S_λ é um subespaço vetorial de V denominado autoespaço associado a λ.

Diagonalização:

Def: O nº de vezes que um autovalor λ se repete é chamado que mutiplicidade Algebrica (MA) de λ.

A dimensão do autoespaço S_λ associado a λ é chamado de multiplicidade Geometrica (MG) de λ.

- Para cada λ tem-se que $MA \geq MG$

Def 2: Um operador linear $T: V \to V$ é diagonalizável se existir uma base β de autovalores para V.

Def 3: Um operador $T: V \to V$ diagonalizável se para cada autovalor λ, for válida que $MA = MG$.

Def 4: Seja $T: V \to V$ um operador diagonalizável e β uma base p/ V formada pelos autovetores de T então:

I) $[T]_\beta^\beta$ é uma matriz diagonal.

II) existe uma matriz P tq $[T]_\beta^\beta = P^{-1}[T]_\alpha^\alpha P$ onde

* α é a base canônica de V
* P é chamada de matriz diagonalizadora e é definida por $[I]_\alpha^\beta$ → matriz mudança de base de β para α

Ex: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tq $T(x,y) = (2x-12y, x-5y)$

$v = (4y, y) \to \lambda_1 = -1 \to \beta_1 = \{(4,1)\}$

$v = (3y, y) \to \lambda_2 = -2 \to \beta_2 = \{(3,1)\}$

$\beta_1 \cup \beta_2 = \{(4,1),(3,1)\}$ é base p/ $\mathbb{R}^2$ //

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = [T]_\alpha^\alpha \to [T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

- Se $T: V \to V$ é um operador diagonalizável, então existe um P inversível tq $P^{-1}[T]P = D$ onde $D = [T]_\beta^\beta$ (Base de autovalores de V) e $P = [I]_\alpha^\beta$ (base canônica de V)

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

Propriedade: Se $\lambda = 0$ é autovalor de um operador linear $T: V \to V$, então T não e injetora.