Álgebra Linear

Transformações Lineares

Professores Graciela, Katiani e Marnei

UDESC

Introdução

Uma *função vetorial* é um tipo especial de função, em que tanto o domínio como o contradomínio são espaços vetoriais.

Notação: Se T é uma função do espaço vetorial V no espaço vetorial W, denotamos

$$T: V \to W$$

Observação:

- Como T é uma função, cada vetor $v \in V$ admite um único vetor imagem $w = T(v) \in W$.

- Nem toda função vetorial será uma transformação linear. Somente as funções vetoriais que satisfazerem certas condições, relacionadas às operações de soma e multiplicação por escalar, serão denominadas "Transformações Lineares" entre os espaços V e W.

Exemplo

1) A função $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que associa cada vetor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ao vetor $(xy, z+1) \in \mathbb{R}^2$, denotada simplesmente por

$$T(x, y, z) = (x.y, z+1),$$

é tal que, para

$$v = (-2,1,3) \quad \text{temos} \quad T(v) = T(-2,1,3) = (-2,4)$$

para

$$u = (3,-1,4) \quad \text{temos} \quad T(u) = T(3,-1,4) = (-3,5)$$

E para

$$\text{temos} \quad T(u+v) = T(1,0,7) = (0,8)$$

enquanto que

$$T(u) + T(v) = (2,4) + (-3,5) = (-1,9)$$

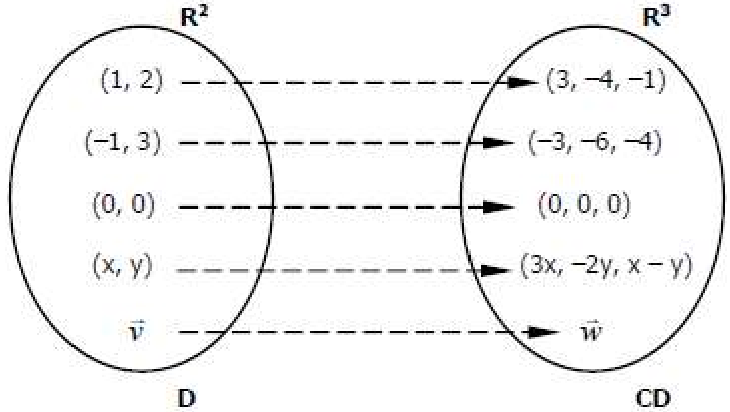
E podemos ver que

$$T(u+v) \neq T(u) + T(v)$$

Dizemos que T não preserva a soma de vetores!

Exemplo

2) A função $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (3x, -2y, x - y)$ é tal que



$$Para\ \vec{v}_1 = (1,2) \Rightarrow T(\vec{v}_1) = T(1,2) = (3,-4,-1)$$

$$Para\ \vec{v}_2 = (-1,3) \Rightarrow T(\vec{v}_2) = T(-1,3) = (-3,-6,-4)$$

$$Para\ \vec{v}_1 = (1,2), \vec{v}_2 = (-1,3)\ e\ \ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (1,2) + (-1,3) = (0,5),\ temos:$$

$$\left.\begin{aligned} &T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = T(0,5) = (0,-10,-5) \\ &T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2) = T(1,2) + T(-1,3) = (0,-10,-5) \end{aligned}\right\} T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2)$$

$$\left.\begin{aligned} &T(4\vec{v}_1) = T(4,8) = (12,-16,-4) \\ &4T(\vec{v}_1) = 4T(1,2) = 4(3,-4,-1) = (12,-16,-4) \end{aligned}\right\} T(4\vec{v}_1) = 4T(\vec{v}_1)$$

E tal função T tem chances de preservar tanto a soma de vetores quanto a multiplicação de vetores por um escalar!

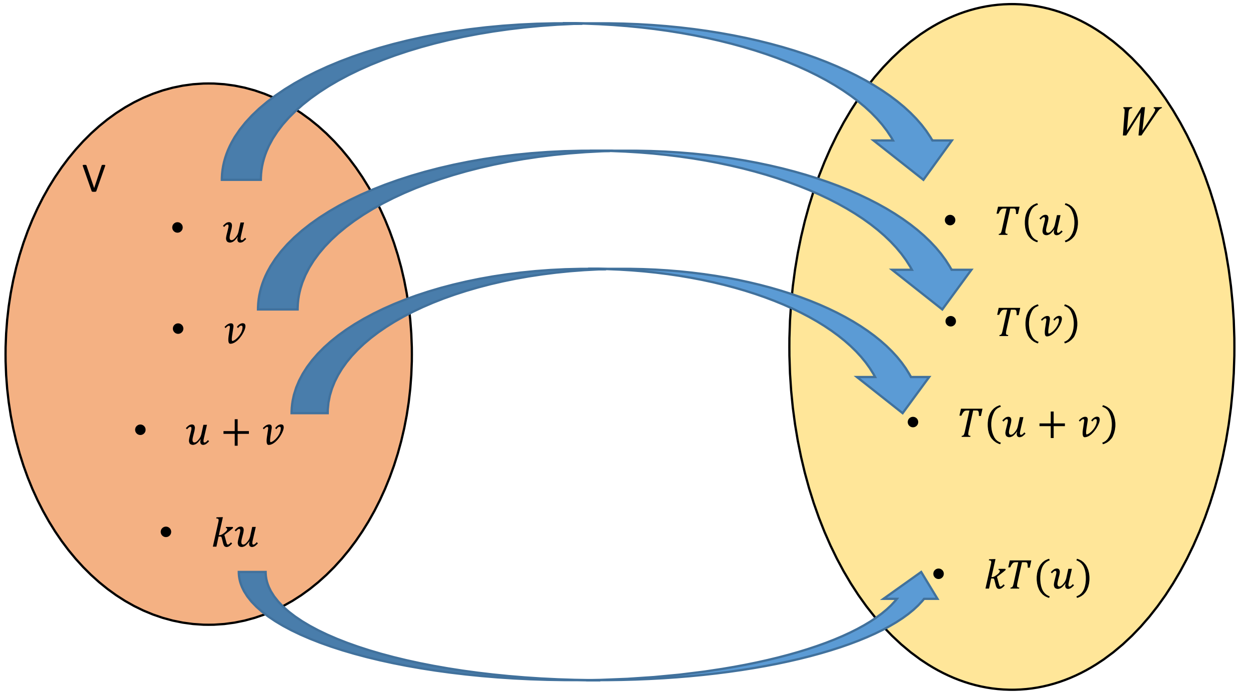
Definição

Sejam V e W dois espaços vetoriais.

Uma função vetorial $T: V \rightarrow W$ é chamada de uma transformação linear entre V e W se e somente se T preservar a soma e a multiplicação por escalar, isto é, se e somente se:

i) Para todos $u, v \in V$ tivermos que $T(u+v) = T(u) + T(v)$;

ii) Para todo $k \in \mathbb{R}$ e para todo $u \in V$ tivermos que $T(ku) = kT(u)$.



Exemplos

1) A função $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x.y, z + 1)$ não é uma transformação linear, pois ela sequer preservou a soma dos vetores exemplificados anteriormente.

2) Vimos que a função $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (3x, -2y, x - y)$ tinha chances de ser uma transformação linear entre $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, pois preservou a soma e a multiplicação por escalar dos vetores exemplificados anteriormente. Para verificar se de fato isso é verdade, vamos analisar as condições da definição para vetores genéricos:

Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Temos que

$$
\begin{aligned}
T(u+v) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= (3(x_1 + x_2), -2(y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)) \\
&= (3x_1 + 3x_2, -2y_1 - 2y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2) \\
&= (3x_1 . -2y_1, x_1 - y_1) + (3x_2, -2y_2, x_2 - y_2) \\
&= T(u) + T(v)
\end{aligned}
$$

Exemplos

Portanto, T preserva a soma de quaisquer vetores.

E para a multiplicação por escalar, temos que

$$T(ku) = T(kx_1, ky_1) = (3kx_1, -2ky_1, kx_1 + ky_1)$$
$$= k(3x_1, -2y_1, x_1 + y_1) = kT(u)$$

Portanto, podemos concluir que $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (3x, -2y, x - y)$ é de fato, uma transformação linear.

3) Seja a função $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x^2, 3y)$. Verifique se T é uma transformação linear.

Sejam $u = (x_1, y_1)$ ve $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Temos que

$$\mathrm{T}(\mathrm{u} + \mathrm{v}) = ((\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2)^2, 3(\mathrm{y}_1 + \mathrm{y}_2)) = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, 3y_1 + 3y_2)$$

E por outro lado

$$\mathrm{T}(\mathrm{u}) + T(\mathrm{v}) = (x_1^2, 3y_1) + (x_2^2, 3y_2) = (x_1^2 + x_2^2, 3y_1 + 3y_2)$$

Portanto

$$\mathrm{T}(\mathrm{u} + \mathrm{v}) \neq \mathrm{T}(\mathrm{u}) + \mathrm{T}(\mathrm{v})$$

T não é linear, pois não preserva a soma

Mais exemplos

4) Verifique se $T: M(2,2) \to \mathbb{R}^3$ dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + b - c, 2c + 3d, -a)$ é uma transformação linear

5) Verifique se $T: M(2,2) \to M(2,2)$ dada por $T(A) = 2A + 3A^T$ é uma transformação linear

Exemplos

6) Verifique se $T: P_2 \to M(2,2)$dada por $T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} a - b + 2c & 3b - c \\ 4a + 3c & 0 \end{bmatrix}$é uma transformação linear

7) Verifique se $T: \mathbb{R}^3 \to P_1$ dada por $T(a, b, c) = (a + d) + bcx$ é uma transformação linear.

Propriedades de Transformações Lineares

- Propriedade 1: Se $T: V \to W$ é uma transformação linear então a imagem do vetor nulo de V é o vetor nulo de W, isto é, $T(\vec{0}) = \vec{0}$.

Justificativa: Se $T: V \to W$ é uma transformação linear, temos que $T(ku) = kT(u)$ é válido para todo $k \in \mathbb{R}$ e todo $u \in V$. Tomando $k = 0$, obtemos que

$$T(0u) = 0.T(u) \quad \text{ou seja} \quad T(\vec{0}) = \vec{0}.$$

OBS: Essa propriedade é particularmente útil na seguinte forma:

Se $T: V \to W$ *é tal que* $T(\vec{0}) \neq \vec{0}$ então T *não é uma transformação linear.*

No exemplo 1, como $T(x, y, z) = (x.y, z + 1)$ é tal que

$$T(\vec{0}) = T(0,0,0) = (0,1) \neq (0,0) = \vec{0}$$

temos que T *não é uma transformação linear.*

Atenção: A recíproca da propriedade não é verdadeira, ou seja, $T(\vec{0}) = \vec{0}$, não garante que T é uma transformação linear. Veja no exemplo 3 que $T(x, y) = (x^2, 3y)$ satisfaz $T(0,0) = (0,0)$ e mesmo assim, T não é linear!

Propriedades de Transformações Lineares

- **Propriedade 2:** Se $T: V \to W$ é uma transformação linear então para todos $u, v, w \in V$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$ têm-se que

$$T(au + bv + cw) = aT(u) + bT(v) + cT(w)$$

ou seja, a imagem de uma combinação linear de vetores em V é a combinação linear das imagens desses vetores em W, com exatamente os mesmos coeficientes.

Justificativa: Se $T: V \to W$ é uma transformação linear, temos que T preserva a soma e a multiplicação por escalar, portanto temos que

$$T(au + bv + cw) = T(au) + T(bv) + T(cw) = aT(u) + bT(v) + cT(w)$$

para todos $u, v, w \in V$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$

Propriedades de Transformações Lineares

- Propriedade 3: Uma transformação linear $T: V \to W$ fica unicamente determinada conhecendo-se as imagens dos vetores de uma base de V.

Justificativa: Se $T: V \to W$ é uma transformação linear e $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de V, temos que para qualquer $v \in V$ existem $a_i \in \mathbb{R}$ tal que

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

Assim, pela linearidade de T, temos que

$$T(v) = T(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \cdots + a_nT(v_n)$$

e com isso, se conhecermos as imagens dos vetores da base, dadas por $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$ conseguimos determinar unicamente a imagem de qualquer vetor $v \in V$.

Exemplo:

1) Uma transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é tal que $T(\vec{v}_1)=(1,-2)$, $T(\vec{v}_2)=(3,1)$ e $T(\vec{v}_3)=(0,2)$, onde $\boldsymbol{v}_1$ = (0,1,0), $\boldsymbol{v}_2$ = (1,0,1) e $\boldsymbol{v}_3$ = (1,1,0) formam uma base $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Determine a lei de formação de *T.*

Solução: Como $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, para qualquer $u=(x,y,z)$ temos que

$$(x,y,z)=a\cdot\vec{v}_1+b\cdot\vec{v}_2+c\cdot\vec{v}_3$$

$$(x,y,z)=a\cdot(0,1,0)+b\cdot(1,0,1)+c\cdot(1,1,0)$$

$$(x,y,z)=(0,a,0)+(b,0,b)+(c,c,0)$$

$$\begin{cases} b+c=x \\ a+c=y \\ b=z \end{cases} \to \quad a=-x+y+z,\quad b=z,\quad c=x-z$$

Exemplo:

Assim, obtemos que

$$(x,y,z) = (-x+y+z)\cdot(0,1,0) + (z)\cdot(1,0,1) + (x-z)\cdot(1,1,0)$$

Aplicando a transformação ***T*** *nos vetores:*

$$T(x,y,z) = (-x+y+z)\cdot T(0,1,0) + (z)\cdot T(1,0,1) + (x-z)\cdot T(1,1,0)$$

$$T(x,y,z) = (-x+y+z)\cdot(1,-2) + (z)\cdot(3,1) + (x-z)\cdot(0,2)$$

$$T(x,y,z) = (-x+y+z, 2x-2y-2z) + (3z,z) + (0,2x-2z)$$

Finalmente:

$$\boxed{T(x,y,z) = (-x+y+4z,\ 4x-2y-3z)}$$

Exemplo:

2) Uma transformação linear $T: P_2 \to M(2,2)$ é tal que

$$T(1+x) = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}; \quad T(-1-x^2) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } T(x+x^2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Qual é a lei de formação de *T?*

Solução:

Note que $\alpha = \{1+x, -1-x^2, x+x^2\}$ é um conjunto linearmente independente (verifique isso como exercício) e como temos três vetores em α e $\dim(P_2) = 3$, obtemos que α é uma base de P_2.

Portanto, conhecemos a imagem dos vetores de uma base e podemos utilizar a Propriedade 3.

Seja $p(x) = a + bx + cx^2 \in P_2$. Como α é base de P_2, sabemos que $p(x)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores de α . Assim, existem $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} p(x) = a + bx + cx^2 &= a_1(1+x) + a_2(-1-x^2) + a_3(x+x^2) \\ &= (a_1 - a_2) + (a_1 + a_3)x + (-a_2 + a_3)x^2 \end{aligned}$$

Exemplo:

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = a \\ a_1 + a_3 = b \\ -a_2 + a_3 = c \end{cases} \quad \text{obtemos} \quad a_1 = \frac{a+b-c}{2}, \quad a_2 = \frac{-a+b-c}{2}, \quad a_3 = \frac{-a+b+c}{2}$$

Assim, obtemos que

$$a + bx + cx^2 = \frac{a+b-c}{2}(1+x) + \frac{-a+b-c}{2}(-1-x^2) + \frac{-a+b+c}{2}(x+x^2)$$

E aplicando a transformação linear em ambos os lados e usando a linearidade de T temos

$$T(a + bx + cx^2) = \frac{a+b-c}{2}T(1+x) + \frac{-a+b-c}{2}T(-1-x^2) + \frac{-a+b+c}{2}T(x+x^2)$$

e substituindo as imagens dadas no enunciado da questão, obtemos

$$T(a + bx + cx^2) = \frac{a+b-c}{2}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \frac{-a+b-c}{2}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \frac{-a+b+c}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Exemplo:

Portanto, a lei de T é dada por

$$T(a+bx+cx^2) =$$

$$= \begin{bmatrix} 4a+4b-4c & -a-b+c \\ \dfrac{3a+3b-3c}{2} & 3a+3b-3c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2a+2b-2c & -3a+3b-3c \\ a-b+c & \dfrac{-3a+3b-3c}{2} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -a+b+c & 0 \\ 0 & a-b-c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+7b-5c & -4a+2b-2c \\ \frac{5a+b-c}{2} & \frac{5a+7b-11c}{2} \end{bmatrix}.,$$