Propriedades de Limites

Se $\lim f(x)$ e $\lim g(x)$ existirem, então:

1. $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$;

2. $\lim [k.f(x)] = k. \lim f(x)$;

3. $\lim [f(x).g(x)] = \lim f(x) . \lim g(x)$;

4. $\lim \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$, se $\lim g(x) \neq 0$;

5. $\lim [f(x)]^n = (\lim f(x))^n$, com $n \in \mathbb{R}$;

6. $\lim (\log_a f(x)) = \log_a (\lim f(x))$, se $\lim f(x) > 0$;

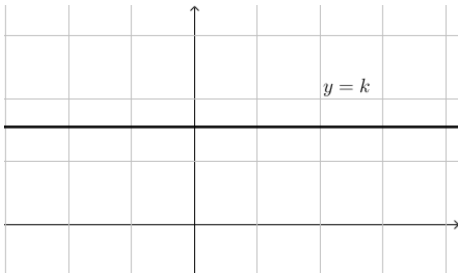
7. $\lim [g(x)]^{f(x)} = (\lim g(x))^{(\lim f(x))}$;

8. Se $\lim f(x) = 0$ e $g(x) \leq k$, com $k \in \mathbb{R}$, então $\lim [f(x).g(x)] = 0$.

Cálculo de Limites

Limites Básicos:

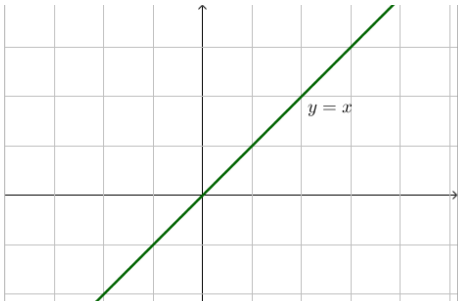
1. Função Constante



$$\lim_{x \to a} k = k$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} k = k$$

2. Função Identidade

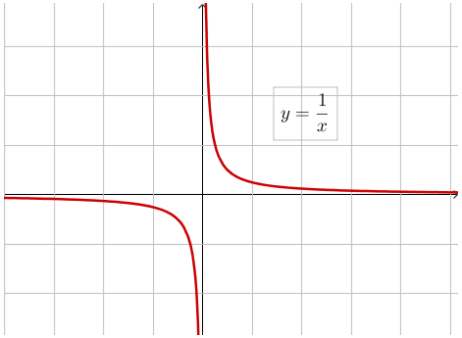


$$\lim_{x \to a} x = a$$

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

3. Função Racional (caso particular)



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Exemplo: Calcule o limite $\mathrm{L} = \lim\limits_{x \to -2} \left(\frac{5x^3-2x^2-3}{7-x^4}\right)$.

$$L = \lim_{x \to -2} \left(\frac{5x^3 - 2x^2 - 3}{7 - x^4}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to -2} (5x^3 - 2x^2 - 3)}{\lim\limits_{x \to -2} (7 - x^4)}$$

$$L = \frac{\lim\limits_{x \to -2} (5x^3) - \lim\limits_{x \to -2} (2x^2) - \lim\limits_{x \to -2} (3)}{\lim\limits_{x \to -2} (7) - \lim\limits_{x \to -2} (x^4)}$$

$$L = \frac{5 \lim\limits_{x \to -2} (x^3) - 2 \lim\limits_{x \to -2} (x^2) - 3}{7 - \lim\limits_{x \to -2} (x^4)}$$

$$L = \frac{5\left(\lim\limits_{x \to -2} x\right)^3 - 2\left(\lim\limits_{x \to -2} x\right)^2 - 3}{7 - \left(\lim\limits_{x \to -2} x\right)^4}$$

$$L = \frac{5(-2)^3 - 2(-2)^2 - 3}{7 - (-2)^4}$$

$$L = \frac{-40 - 8 - 3}{7 - 16}$$

$$\boxed{L = \frac{-51}{-9} = \frac{17}{3}}$$

2. Prove que todo polinômio de grau n é uma função contínua.

Seja f um polinômio de grau n definido por:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

com $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$, com $i = 0,1,2, \dots, n$ $a_n \neq 0$

Queremos mostrar que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Temos que:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (a_n x^n) + \lim_{x \to c} (a_{n-1} x^{n-1}) + \cdots + \lim_{x \to c} (a_1 x) + \lim_{x \to c} a_0$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = a_n \lim_{x \to c} (x^n) + a_{n-1} \lim_{x \to c} (x^{n-1}) + \cdots + a_1 \lim_{x \to c} (x) + a_0$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = a_n \left(\lim_{x \to c} x \right)^n + a_{n-1} \left(\lim_{x \to c} x \right)^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0$$

$$\boxed{\lim_{x \to c} f(x) = f(c)}$$

Exemplos:

1. Calcule o limite

a) $L = \lim_{x \to -2} \left(\frac{5x^3 - 2x^2 - 3}{7 - x^4} \right)$

b) $L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos(3x)$

c) $L = \lim_{x \to 2} \sqrt[3]{\frac{x}{x^2 - 1}}$

d) $L = \lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right)$

2. Sabendo que f é uma função contínua e que $\lim_{x \to -1} (xf(x) - 2x^2) = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2}{x - 2}$, determine, se existir, o limite $\lim_{x \to 2} \frac{f(x-3)}{x^3 + 2}$.

3. Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{3 - x}, se\ x \leq 3 \\ (x-5)^2 - 1, se\ x > 3 \end{cases}$. Analise se f é contínua nos reais. Se descontínua em algum ponto, classifique a descontinuidade.

4. Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{3 - x},\ se\ x \leq 3 \\ (x-5)^2 + a,\ se\ x > 3 \end{cases}$. Se possível, determine o valor da constante a para que a função f seja contínua em $x = 3$.

5. Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} b - \sqrt{3 - x},\ se\ x < 3 \\ 21,\quad se\ x = 3 \\ (x-5)^2 + a,\ se\ x > 3 \end{cases}$. Se possível, determine o valor da constante a para que a função f seja contínua em $x = 3$.

5. Estude a continuidade da função $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + x - 2}$.