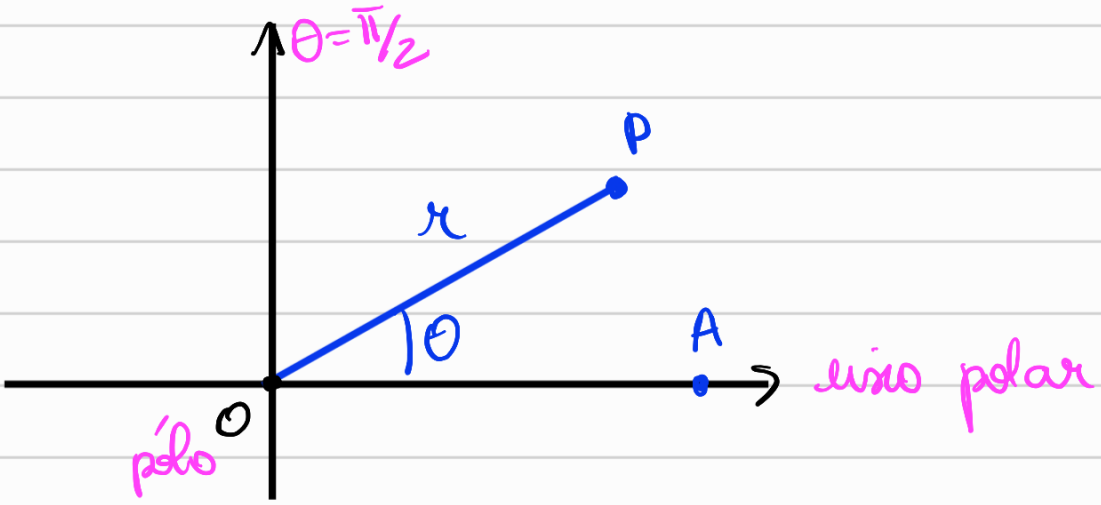
Coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$.

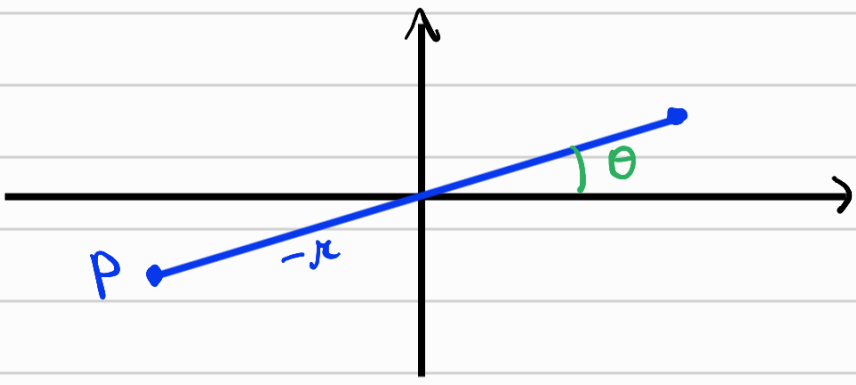
Vamos localizar um ponto P em $\mathbb{R}^2$ usando o par ordenado (r, θ):



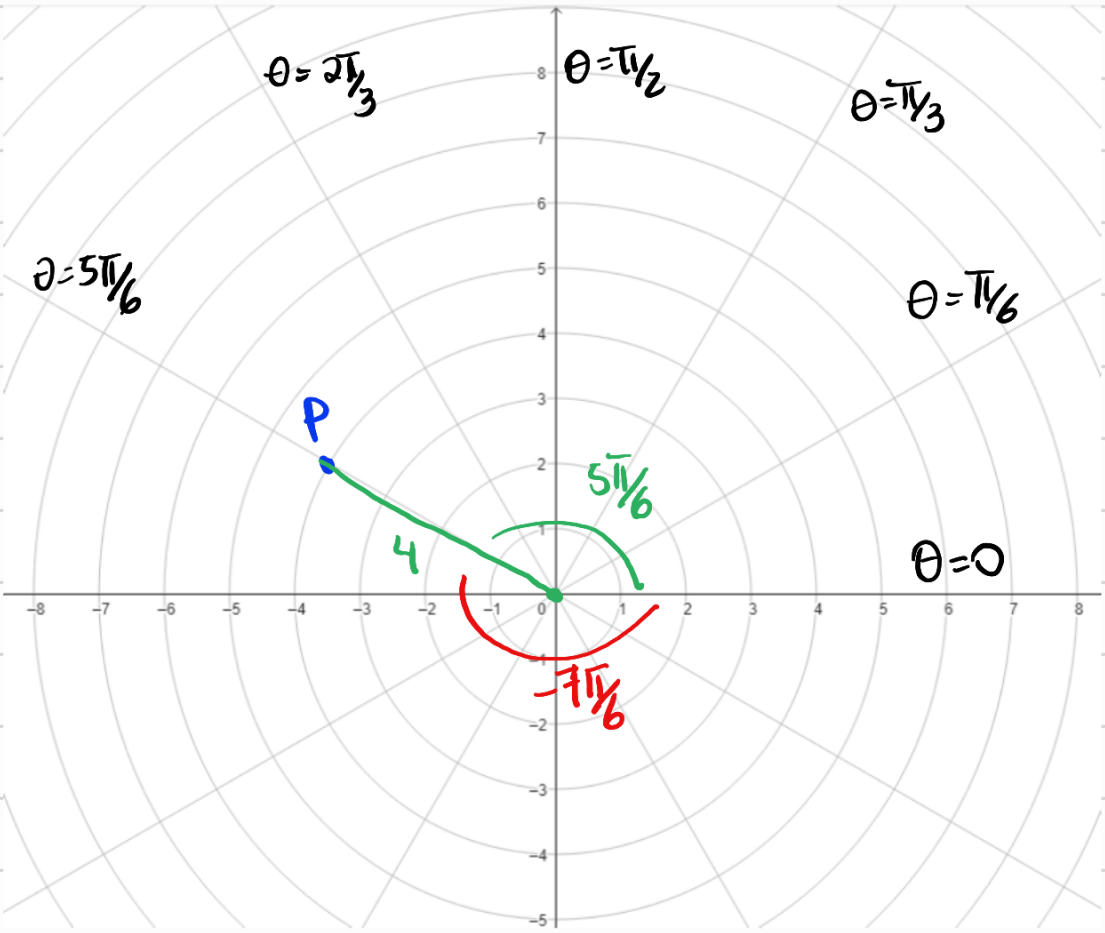
- $|r|$ determina a distância de P até a origem.

- se o ângulo θ é medido no sentido anti-horário, usamos $\theta > 0$.
- se o ângulo θ é medido no sentido horário, usamos $\theta < 0$.

- o par $(0, \theta)$ representa a origem para qualquer θ.
- se $r < 0$, o ponto P é marcado fazendo



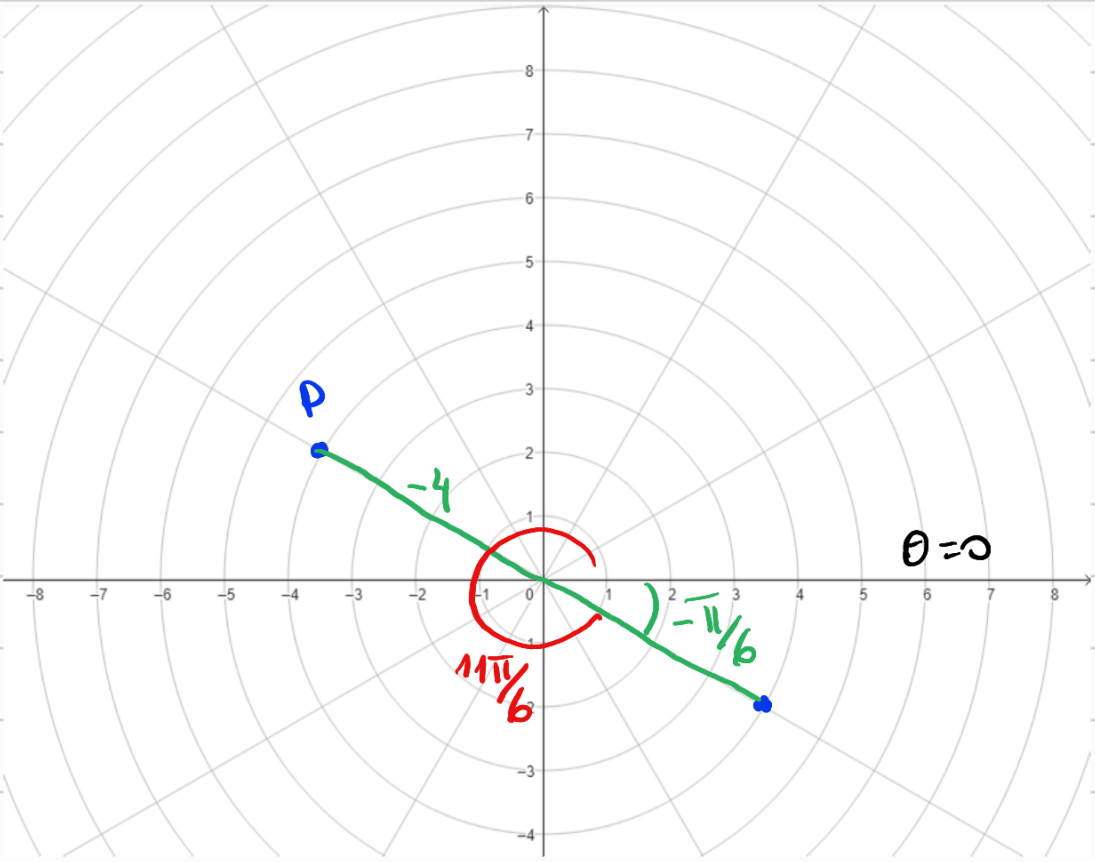
Por exemplo, o ponto $P\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ pode ser representado de 4 maneiras distintas com $0 \leq \theta < 2\pi$.



$P\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$

ou

$P\left(4, -\frac{7\pi}{6}\right)$



$P\left(-4, -\frac{\pi}{6}\right)$

ou

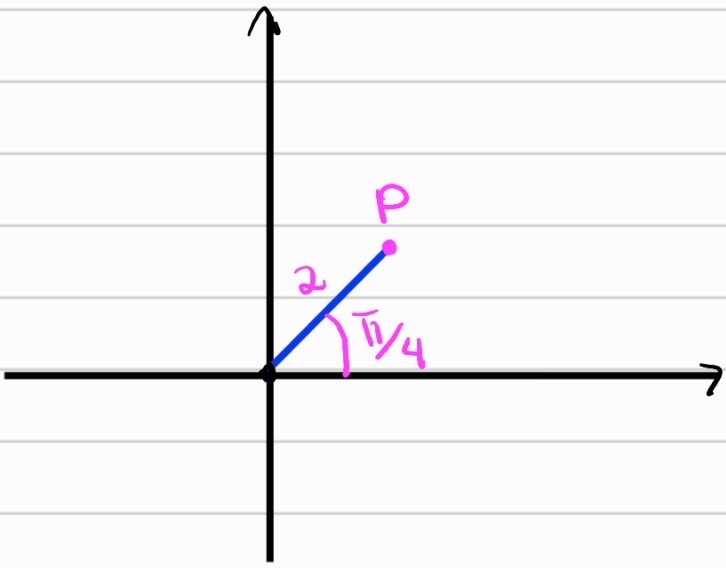
$P\left(-4, \frac{11\pi}{6}\right)$

Exemplos:

(a) $P_1(2, \pi/4)$

$r = 2$

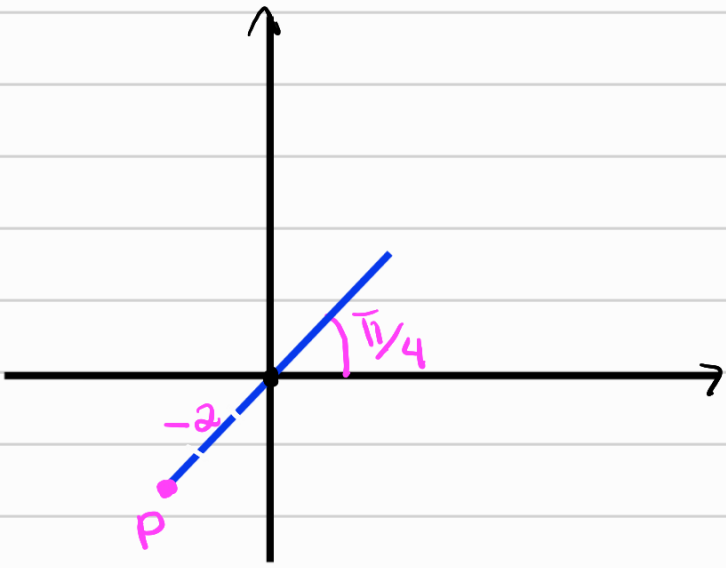
$\theta = \frac{\pi}{4}$



(b) $P_2(-2, \pi/4)$

$r = -2$

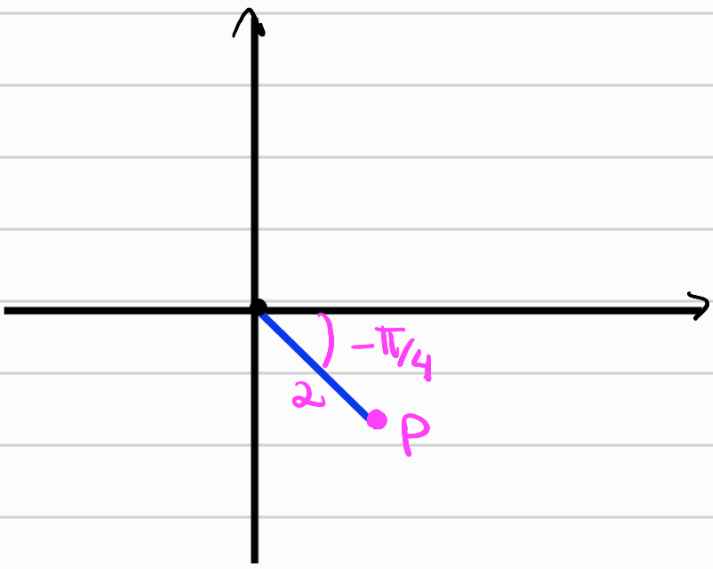
$\theta = \frac{\pi}{4}$



(c) $P_3(2, -\pi/4)$

$r = 2$

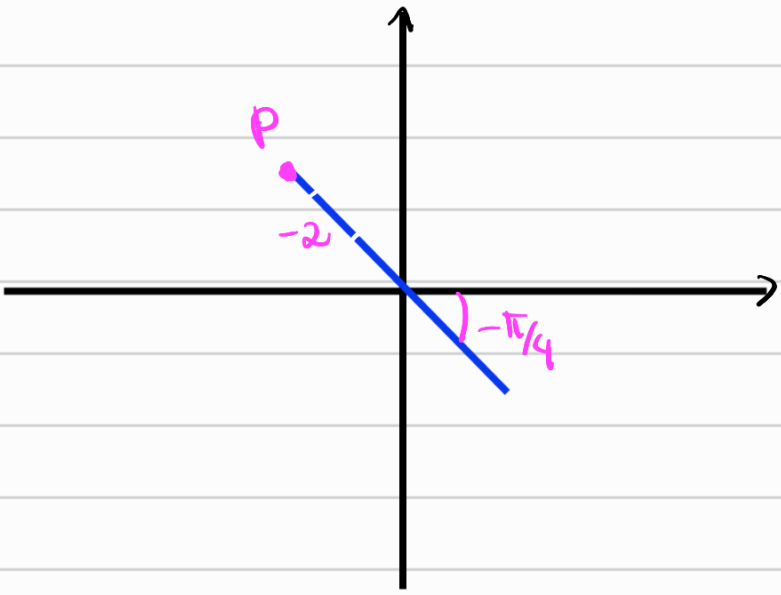
$\theta = -\frac{\pi}{4}$



(d) $P_4\left(-2, -\pi/4\right)$

$r = -2$

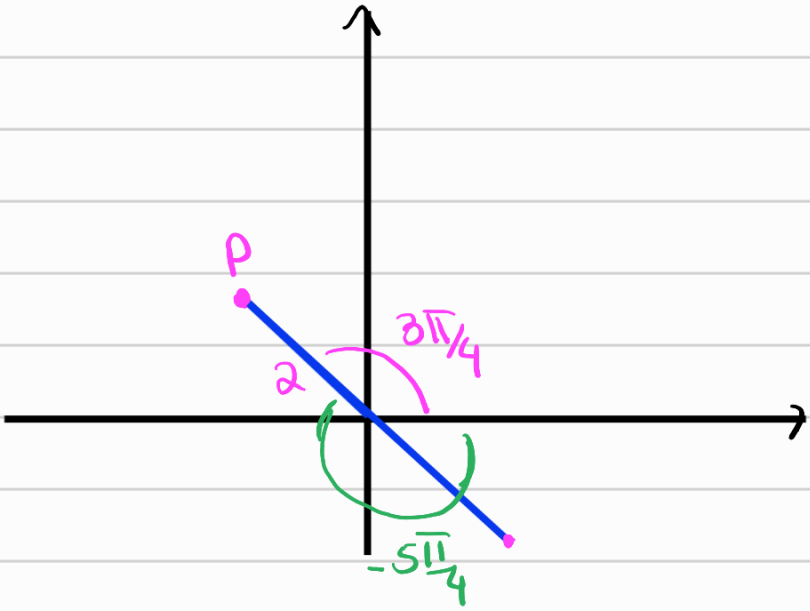
$\theta = -\pi/4$



Note que P_4 também pode ser representado por $r = 2$ e

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4},$$

ou seja,



Mas também por $\left(2, -\frac{5\pi}{4}\right)$

ou ainda $\left(-2, \frac{7\pi}{4}\right)$.

Exercício 1: Represente os pontos a seguir no gráfico:

(a) A $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$

(b) B $\left(-1, \frac{2\pi}{3}\right)$

(c) C $(6, \pi)$

(d) D $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$.

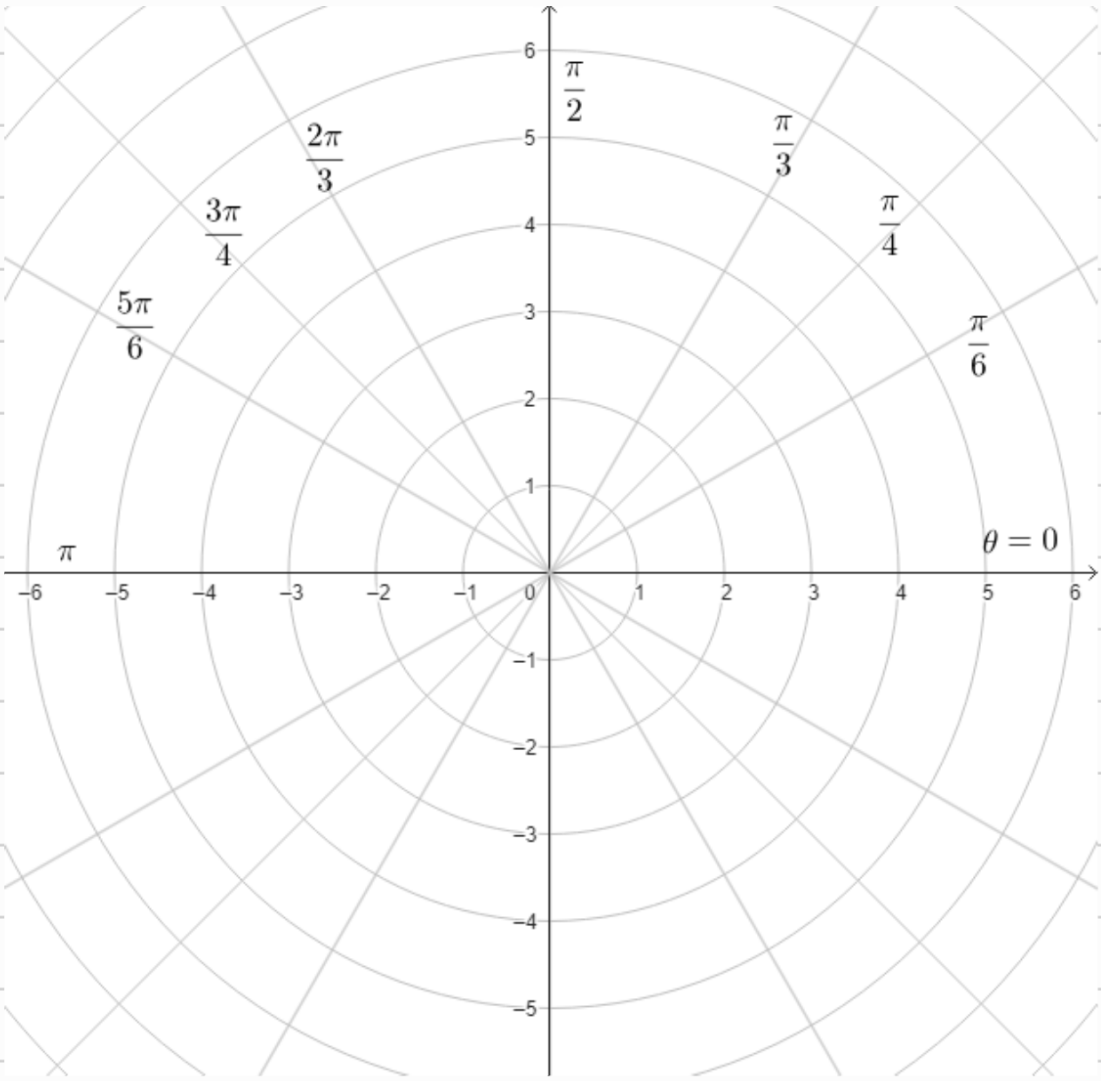
(e) E $\left(3, \frac{25\pi}{6}\right)$

(f) F $\left(-4, \frac{\pi}{2}\right)$

OBS

(b) $\theta = \frac{25\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 4\pi + \frac{\pi}{6}$

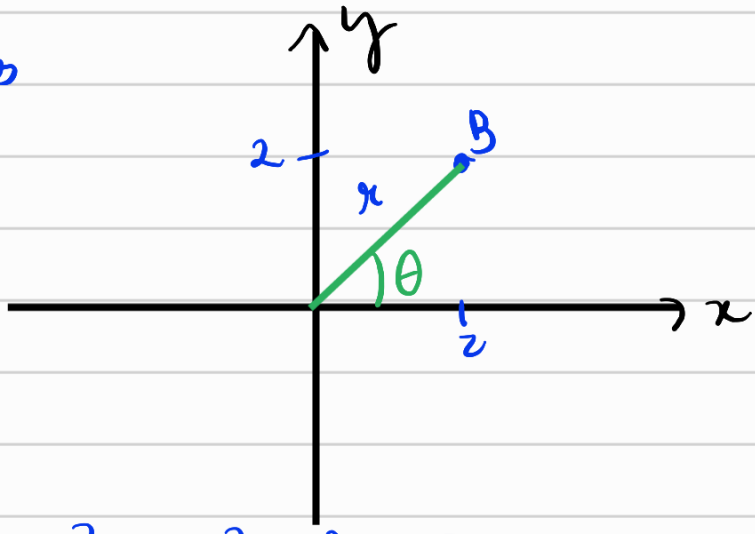
Assim, o ângulo θ dá duas voltas inteiras e para em $\frac{\pi}{6}$.



$\boxed{\text{Exercício 2:}}$ Encontre uma representação em polares para os pontos

(a) $A(\sqrt{3}, -1)$
(b) $B(2,2)$
(c) $C(3,0)$
(d) $D(-2, -\sqrt{3})$

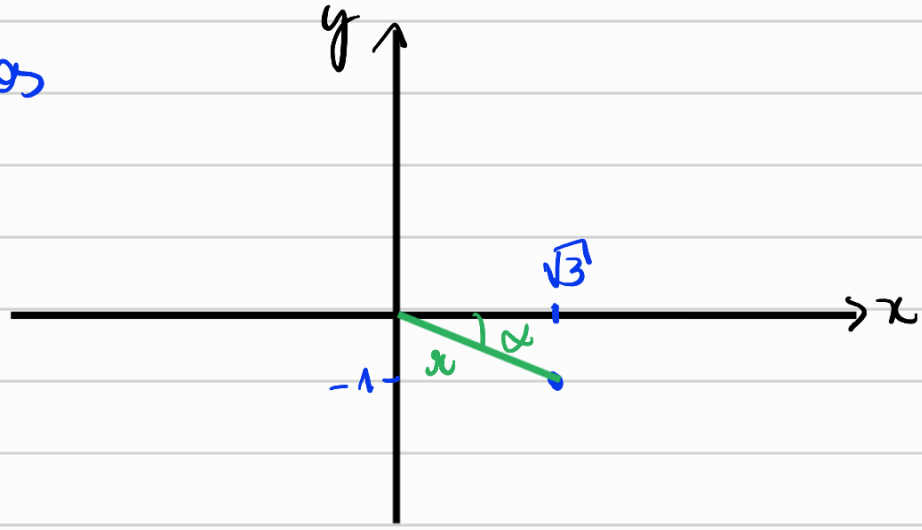
(b) Temos



Note que $r^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow r = \sqrt{8}$
e $\theta = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow B(\sqrt{8}, \pi/4)$ em polares.

(a) Temos



$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \pi/6$

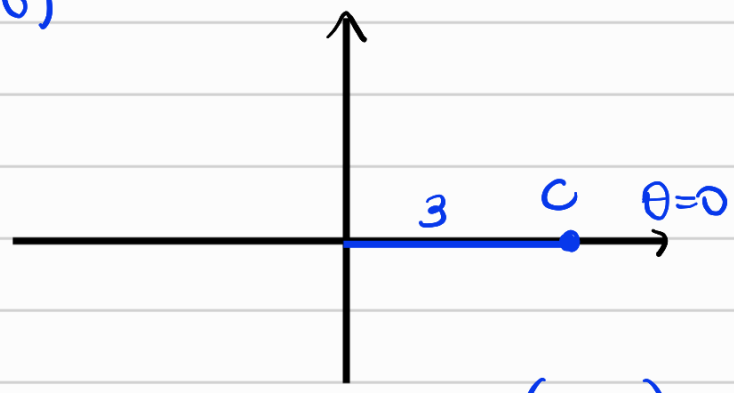
Logo,

$$r^2 = (\sqrt{3})^2 + (-1)^2 = 3+1 = 4$$

$$\Rightarrow r = 2$$

$$\Rightarrow A\left(2, \pi/6\right)$$

(c) $C(3,0)$



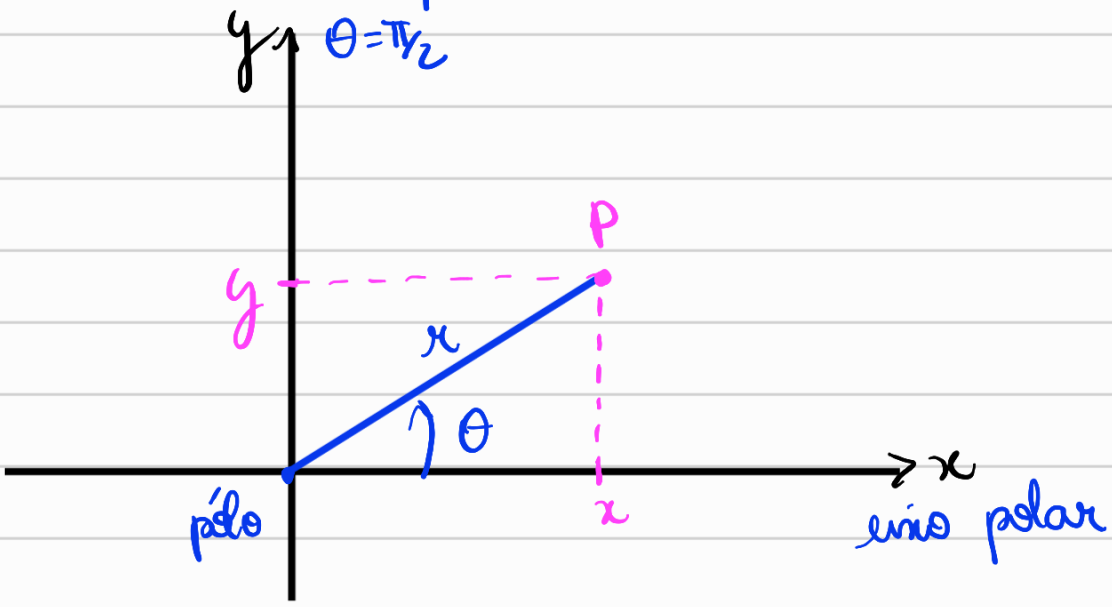
Em polares, temos $C(3,0)$ ou $C(-3,\pi)$

(d) $D(-2,-\sqrt{3})$

Relação entre o sistema de coordenadas polares e o sistema cartesiano

Suponha que P esteja no 1º quadrante:

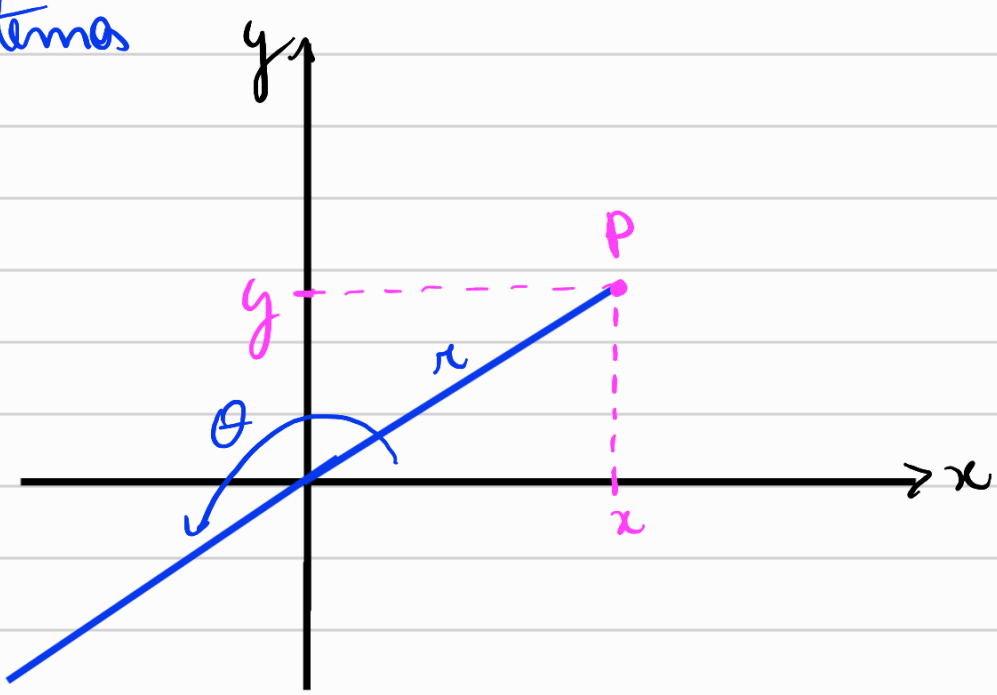
No caso em que $r > 0$, temos



$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \text{e} \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = r\cos\theta} \quad \text{e} \quad \boxed{y = r\sin\theta}.$$

Se $r < 0$, temos



Nesse caso, temos

$$\cos(\theta-\pi) = \frac{x}{-r} \Rightarrow -\cos\theta = \frac{x}{-r} \Rightarrow x = r\cos\theta$$

e

$$\sin(\theta-\pi) = \frac{y}{-r} \Rightarrow -\sin\theta = \frac{y}{-r} \Rightarrow x = r\cos\theta.$$

De forma análoga, podemos mostrar que essa relação é válida em todos os quatro quadrantes.

Portanto, a conversão do sistema de coordenadas polares para o cartesiano é feita usando

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}}$$

Outras relações:

$$\begin{aligned} x^2 &= r^2\cos^2\theta \\ y^2 &= r^2\sin^2\theta \end{aligned} \Rightarrow \boxed{x^2+y^2 = r^2}$$

$$\Rightarrow r = \pm\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$$

Equações de curvas em coordenadas polares

As equações são descritas da forma

$$F(r,\theta)=0$$

ou, na forma explícita, $r=f(\theta)$.

Exemplo 1: Transforme as eq dadas de coordenadas cartesianas para polares:

(a) $x^2+y^2=9$

(b) $(x-2)^2+y^2=2$

(c) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

(d) $y=2x+1$.

(a) Lembrando que $x^2+y^2=r^2$, temos

$$r^2=9 \Rightarrow r=\pm 3$$

com θ livre.

Logo, podemos utilizar a eq $\boxed{r=3.}$

(b) Usando $x=r\cos\theta$ e $y=r\sin\theta$, temos

$$x^2-4x+4+y^2=2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-4x+2=0$$

$$\Rightarrow \boxed{r^2-4r\cos\theta+2=0}$$

(c) Temos $\cancel{r}\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}\cancel{r}\cos\theta$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

Logo, a eq da reta é $\boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$, com r livre.

(d) Temos $r\sin\theta = 2r\cos\theta + 1$

$$\Rightarrow r(\sin\theta - 2\cos\theta) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{1}{\sin\theta - 2\cos\theta}}$$

Exemplo 2: Transforme as curvas dadas de coordenadas polares para cartesianas.

(a) $r = 2\sin\theta$

(b) $r = 3$

(c) $r = \dfrac{1}{2\cos\theta - 3\sin\theta}$

(d) $r = 3\cos\theta$ (análogo a (a))

b) $r^2 = 9$
$\Rightarrow x^2 + y^2 = 9$

(a) Multiplicando por r, temos

$$r^2 = 2r\sin\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 2y$$
$$\Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$$

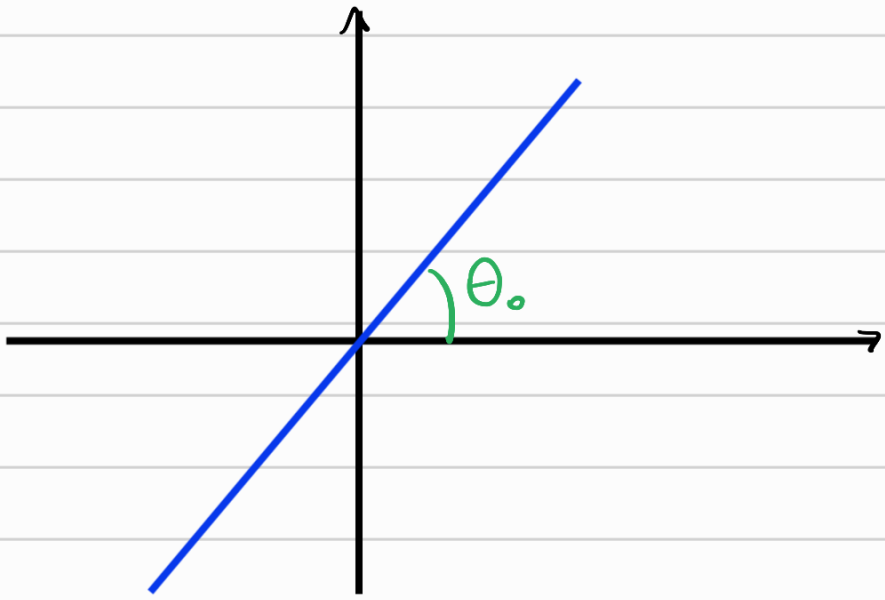
(c) $1 = 2r\cos\theta - 3r\sin\theta \Rightarrow 1 = 2x - 3y$

$$\Rightarrow y = \frac{2x-1}{3}$$

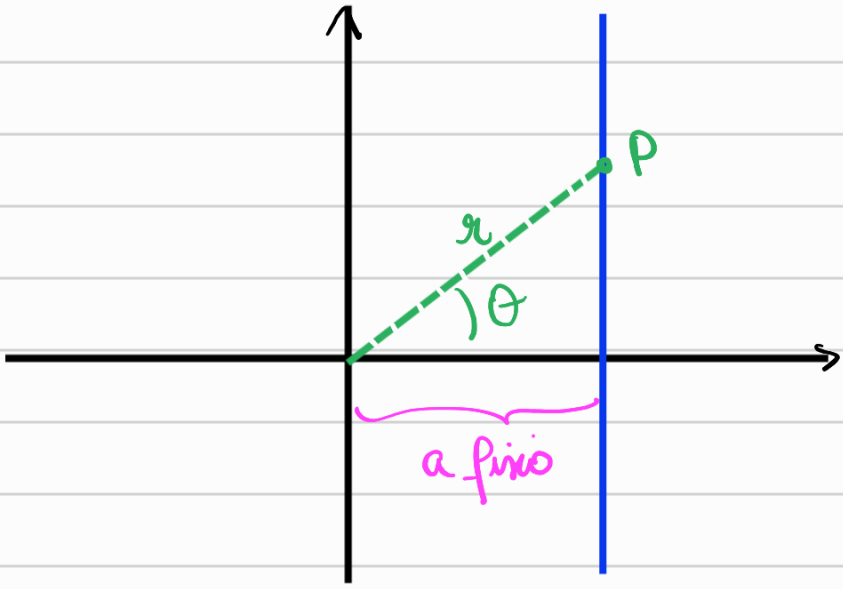
Equações de retas

- Em uma reta qualquer passando pela origem, temos um ângulo fixo e o valor de r varia livremente. Logo, a equação de uma reta é escrita como

$$\boxed{\theta = \theta_0} \quad \text{ou} \quad \theta = \theta_0 + n\pi$$



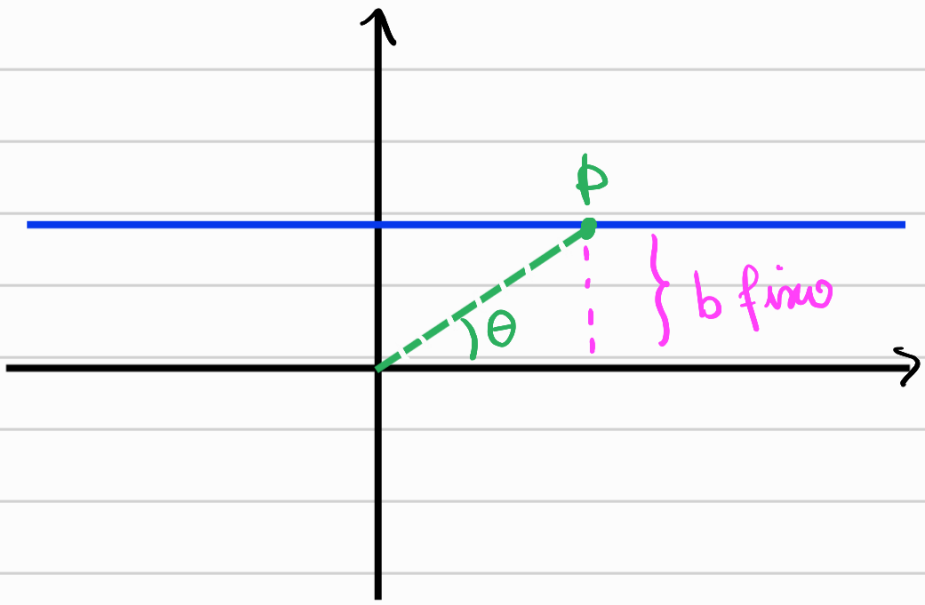
- Quando a reta é vertical, temos



$\Rightarrow$ $a = r\cos\theta$ é um valor fixo e a altura $r\sin\theta$ varia livremente. Logo, descrevemos essa reta pela equação

$$\boxed{r\cos\theta = a}$$

- Quando a reta é horizontal, temos



$\Rightarrow$ $b = r\sin\theta$ é um valor fixo e $r\cos\theta$ varia livremente. Logo, descrevemos essa reta pela equação

$$\boxed{r\sin\theta = b}.$$

Circunferências

- Considere uma circunferência de raio $c>0$ centrada na origem. Logo, ela tem equação

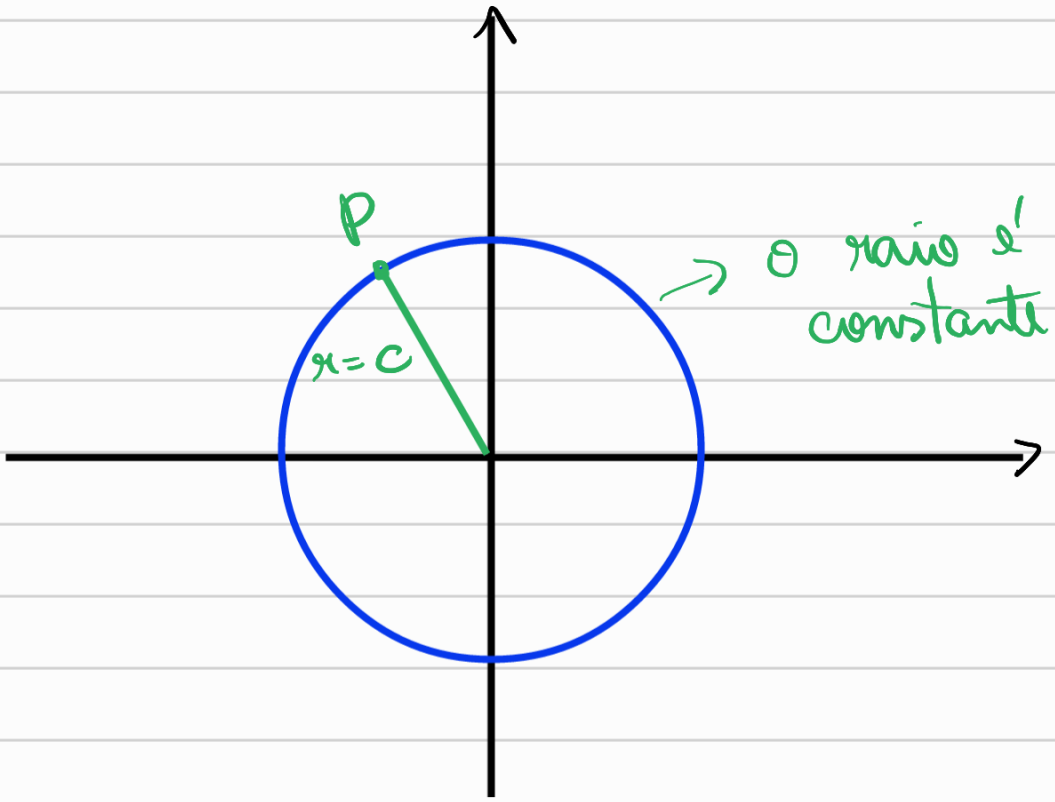
$$x^2+y^2=c^2.$$

Em polares, temos $r^2=c^2$

$$\Rightarrow r=\pm c,$$

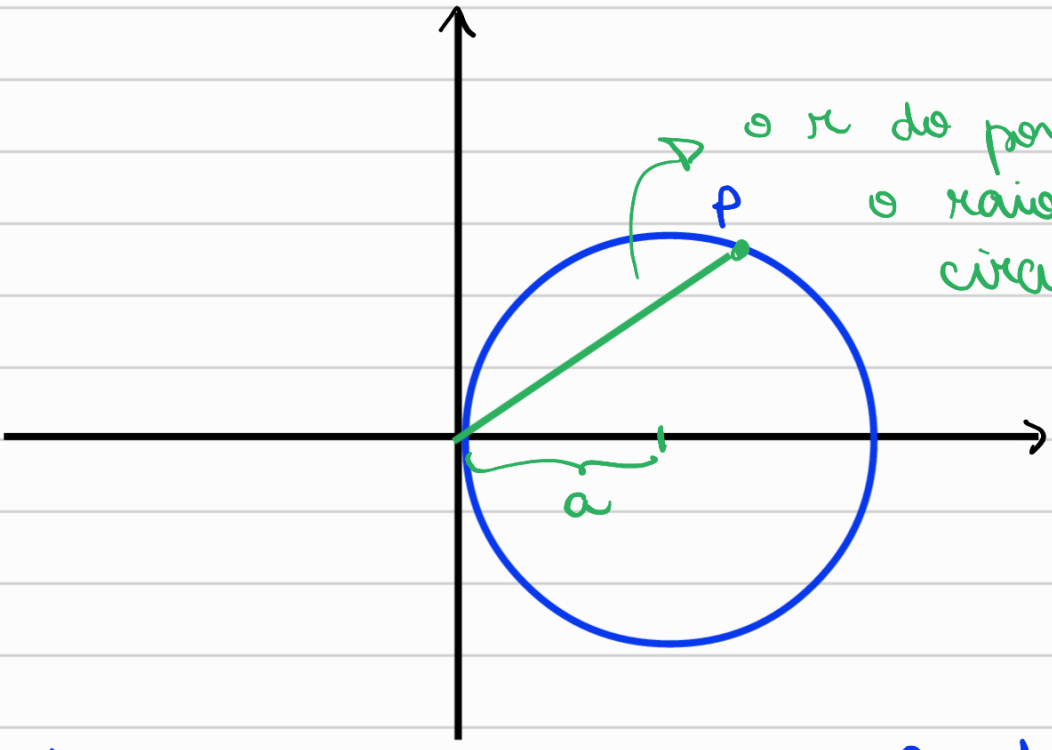
com θ livre.

É padrão usar a equação $\boxed{r=c}$ para representar a circunferência.



- Considere uma circunferência de raio $a>0$ centrada em $C(a,0)$, ou seja, com equação

$$(x-a)^2+y^2=a^2$$



o r do ponto não é o raio da circunferência.

Usando $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, temos

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 - 2ax + \cancel{a^2} + y^2 = \cancel{a^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

$$\Rightarrow r^2 = 2a\, r\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{r = 2a\cos\theta}$$

Analogamente, se a circunferência é centrada em $C(-a,0)$, sua eq em coordenadas polares é

$$\boxed{r = -2a\cos\theta}$$

- Circunferência de raio $b > 0$ e centrada em $C(0, b)$:

$$\boxed{r = 2b \operatorname{sen}\theta}.$$

- Circunferência de raio $b > 0$ e centrada em $C(0, -b)$

$$\boxed{r = -2b \operatorname{sen}\theta}.$$

Gráficos de equações em coordenadas polares

O gráfico de $F(r,\theta)=0$ é formado por todos os pontos cujas coordenadas polares satisfazem a equação.

Forma explícita: $r=f(\theta)$.

Procedimentos para o esboço do gráfico:

(i) Calcular os pontos de máximo e/ou mínimos;

(ii) Encontrar os valores de θ para os quais a curva passa pelo pólo;

(iii) verificar simetrias:

- se a equação não se altera trocando r por $-r$, então existe simetria com relação ao pólo.

- se a equação não se altera trocando θ por $-\theta$, existe simetria com relação ao eixo polar. (eixo x)

- se a equação não se altera trocando θ por $\pi-\theta$, então existe simetria com relação ao eixo $\theta=\pi/2$. (eixo y)

Exemplo: Esboce a curva $r = 2(1-\cos\theta)$.

(i) • r atinge seu máximo quando $\cos\theta = -1$:

$$\theta = \pi \Rightarrow r = 2(1-(-1)) = 4$$

• r atinge seu mínimo quando $\cos\theta = 1$:

$$\theta = 0 \Rightarrow r = 2(1-1) = 0.$$

Ponto de máximo: $(4, \pi)$.
Ponto de mínimo: $(0, 0)$.

(ii) O gráfico passa pelo pólo quando $r=0$, ou seja, quando $\theta = 0$.

(iii) Simetria: como $\cos\theta = \cos(-\theta)$, temos uma simetria com relação ao eixo polar. Logo, basta analisar o que ocorre quando $0 \leq \theta \leq \pi$.

Alguns pontos da curva:

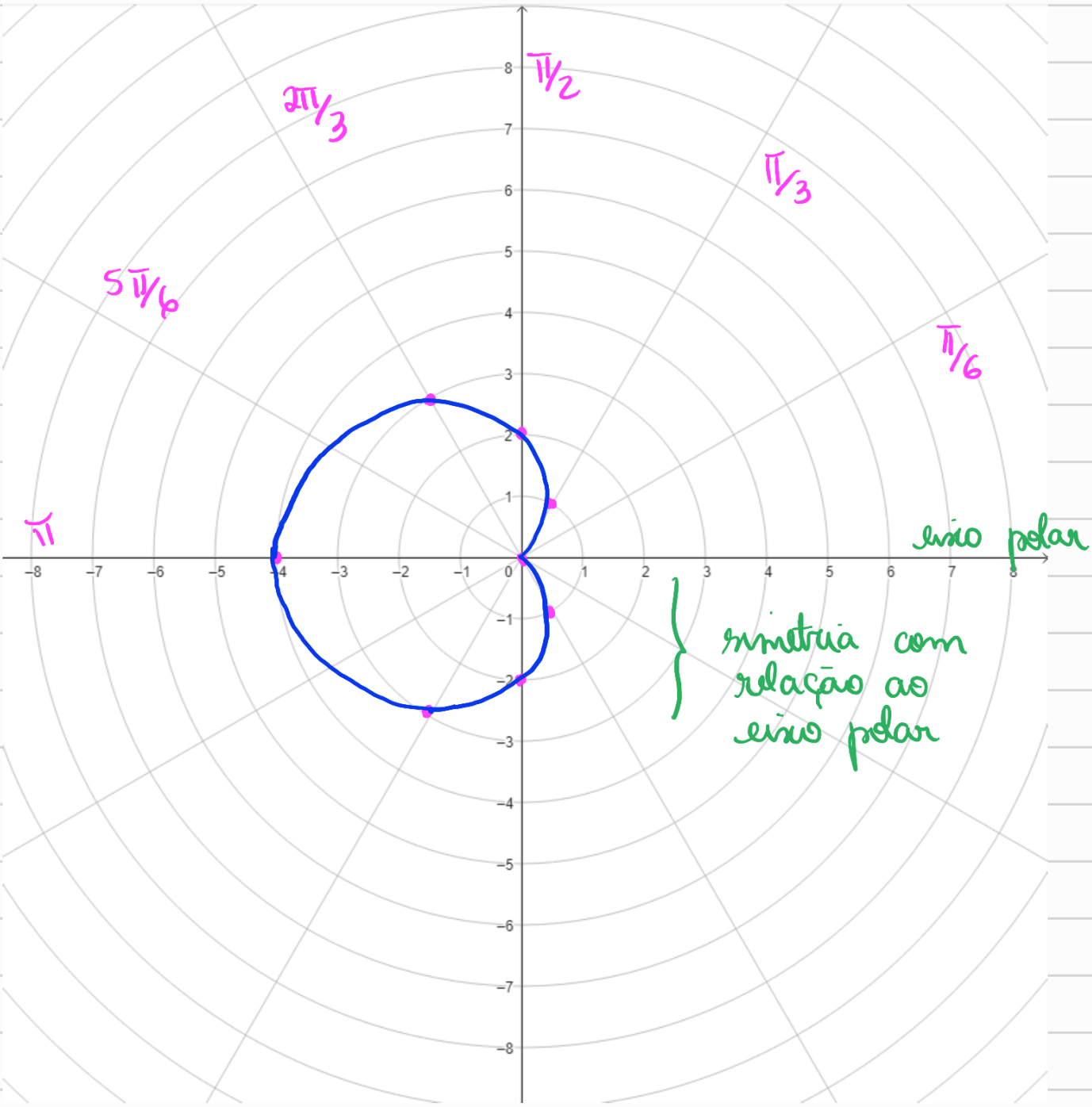
• $\theta = \pi/3 \Rightarrow r = 2(1 - 1/2) = 1$

• $\theta = \pi/2 \Rightarrow r = 2(1-0) = 2$

• $\theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow r = 2(1-(-1/2)) = 3$

Logo, temos os pontos

$(0,0)$, $(1, \pi/3)$, $(2, \pi/2)$, $(3, 2\pi/3)$, $(4, \pi)$.



Exemplo: Esboce a curva $r = 2\cos 2\theta$.

- Vamos começar pela simetria, pois assim podemos encurtar a análise:

Observe que $2\cos 2\theta = 2\cos(2(-\theta))$.
Logo, o gráfico é simétrico com relação ao eixo polar (eixo x).

Agora,
$$2\cos(2(\theta-\pi)) = 2\cos(2\theta - 2\pi) = 2\cos(2\theta),$$
pois o período do cosseno é 2π.
Logo, o gráfico também é simétrico com relação ao eixo y.

Assim, basta verificarmos o que ocorre com o gráfico p/ $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

- Pontos de máximo e/ou mínimo.

r é máximo quando $\cos 2\theta = 1$, ou seja, quando $2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$.
$\Rightarrow r = 2 \Rightarrow \boxed{(2, 0)}$.

r é mínimo quando $\cos 2\theta = -1$:
$\Rightarrow 2\theta = \pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = -2$.

$$\Rightarrow \boxed{\left(-2, \frac{\pi}{2}\right)}$$

- Por fim, $r=0$ quando

$$2\cos 2\theta = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = \pi/2$$

$$\Rightarrow \theta = \pi/4.$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(0, \pi/4\right)}$$

Outros pontos:

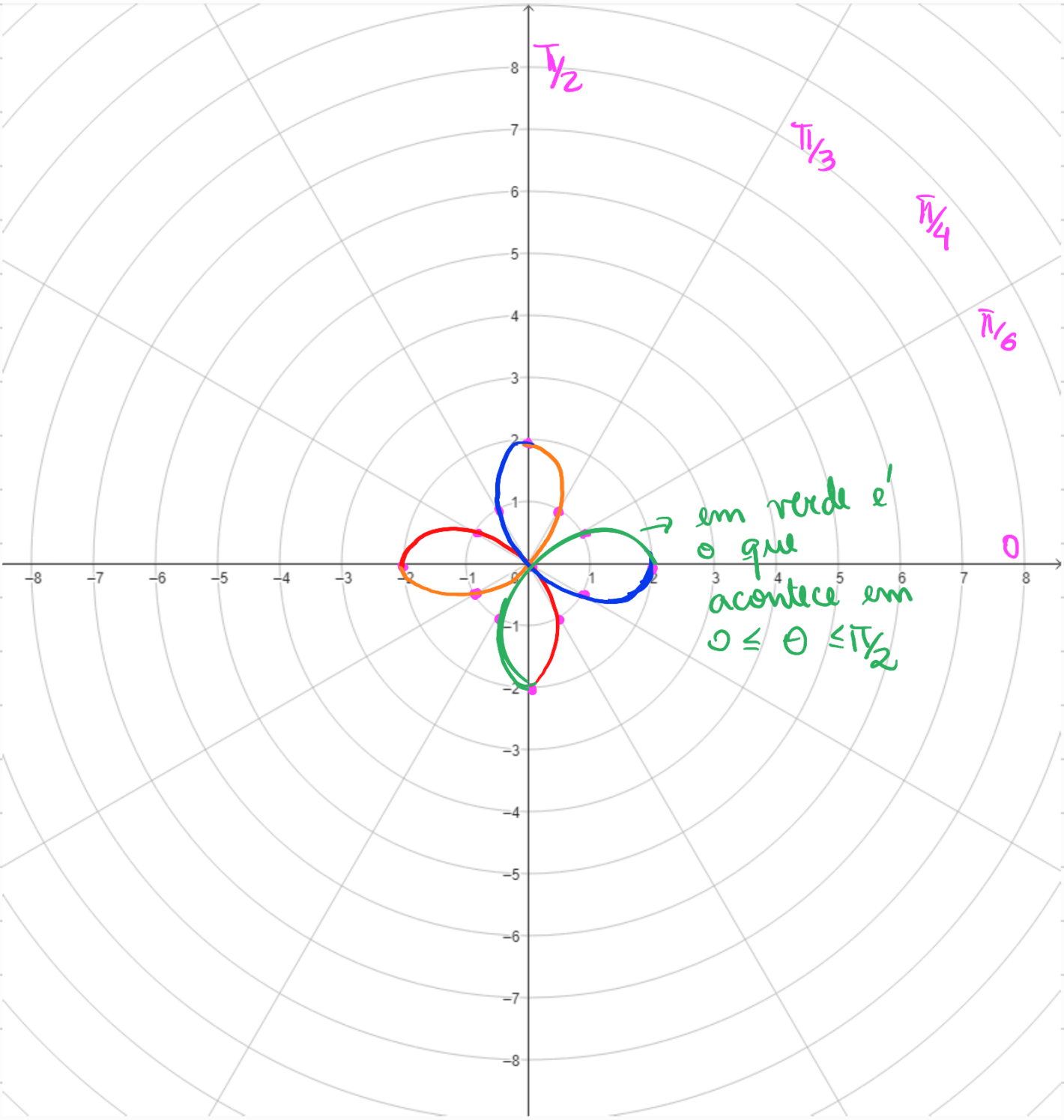
$$\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow r = 2\cos\frac{2\pi}{6} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow r = 2\cos\underbrace{\frac{2\pi}{3}}_{120^\circ} = -2\cdot\frac{1}{2} = -1$$

$\Rightarrow$ temos os pontos

$$(2,0),\ \left(1, \frac{\pi}{6}\right),\ \left(0, \pi/4\right),\ \left(-1, \frac{\pi}{3}\right),\ \left(-2, \frac{\pi}{2}\right)$$

Então,


π/2
π/3
π/4
π/6
0
em verde é o que acontece em 0 ≤ θ ≤ π/2

Outras curvas famosas em coordenadas polares (ver ppt)