Exemplos:

1. Use a definição de derivada para encontrar a primeira derivada das funções indicadas.

a) $f(x) = k,$ sendo que $k \in \mathbb{R}$.

Pela definição de derivadas, temos que:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k - k}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} 0$$

$$\boxed{f'(x) = 0}$$

Conclusão:
A derivada de uma função constante é nula.

a.1) $f(x) = \sqrt{2}$

a.2) $f(x) = \mathrm{e}$

b) $y = f(x) = k\ v(x)$, em que k é uma constante real e v uma função diferenciável.

Pela definição de derivada, temos que:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k\ v(x + \Delta x) - k\ v(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k\big(v(x + \Delta x) - \ v(x)\big)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = k \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x) - \ v(x)}{\Delta x}$$

$$\boxed{f'(x) = k\ v'(x)}$$

e. 1) $y = 2x$

e. 2) $y = 3x^5$

e. 3) $y = \frac{4}{x^2}$

c) $y = f(x) = x^n, n \epsilon \mathbb{N}^*$

Binômio de Newton:

$$(\mathrm{a} + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \tfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \tfrac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \tfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + \tfrac{n(n-1)}{2}x^2(\Delta x)^{n-2} + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \tfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + \tfrac{n(n-1)}{2}x^2(\Delta x)^{n-2} + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\left(nx^{n-1} + \tfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + \tfrac{n(n-1)}{2}x^2(\Delta x)^{n-3} + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\right)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(nx^{n-1} + \tfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + \tfrac{n(n-1)}{2}x^2(\Delta x)^{n-3} + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\right)$$

$$\boxed{f'(x) = nx^{n-1}}$$

Esta regra é chamada de **regra da potência** e é valida para qualquer n real. Mas, a demonstração ainda não temos argumentos suficientes para demonstrar

d) $y = f(x) = u(x) \pm v(x)$, em que u e v são funções diferenciáveis.

Pela definição de derivada, temos que:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Considerando $y = f(x) = u(x) + v(x)$, temos que:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - \big(u(x) + v(x)\big)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - u(x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right)$$

$$\boxed{y' = u'(x) + v'(x)}$$

d.1) $y = f(x) = x^{100}$

d.3) $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$

d.2) $y = f(x) = \sqrt{x}$

d.4) $y = f(x) = \frac{1}{x}$

c) $y = a^{bx}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$

Pela definição de derivada, temos que:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{b(x+\Delta x)} - a^{bx}}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{bx} a^{b\Delta x} - a^{bx}}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{bx}\left(a^{b\Delta x} - 1\right)}{\Delta x}$$

$$y' = a^{bx} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{b\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$y' = a^{bx} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(a^{b}\right)^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$y' = a^{bx} \ln(a^{b}) \Rightarrow \boxed{y' = b\, a^{bx} \ln(a)}$$

Caso particular:

Se $a = e$, então $y = e^{bx}$ $\Rightarrow$ $\boxed{y' = b\, e^{bx}}$

c.1) $y = 3^{6x}$

c.1) $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{6x}$

c.3) $y = senh(ax)$

Reescrevendo a função, temos que:

$$y = senh(ax) = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} = \frac{e^{ax}}{2} - \frac{e^{-ax}}{2} = \frac{1}{2}e^{ax} - \frac{1}{2}e^{-ax}$$

Usando as regras de derivação, temos que:

$$y' = (senh(ax))' = \left(\frac{1}{2}e^{ax}\right)' - \left(\frac{1}{2}e^{-ax}\right)'$$

$$y' = \frac{1}{2}(e^{ax})' - \frac{1}{2}(e^{-ax})'$$

$$y' = \frac{1}{2}ae^{ax} - \frac{1}{2}(-a)e^{-ax}$$

$$y' = \frac{1}{2}ae^{ax} + \frac{1}{2}(a)e^{-ax}$$

$$y' = a\left(\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y' = a\,cosh(ax)}$$

De forma análoga, prova-se que se

$$y = cosh(ax)$$

Então:

$$\boxed{y' = a\,senh(ax)}$$

c.4) $y = \cosh(3x) - 4senh(2x)$

c.5) $y = e^{4x}\,\mathrm{senh}(5x)$

d) $y = sen(ax)$

Pela definição de derivada, temos que:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\big(a(x + \Delta x)\big) - sen(ax)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen(ax)cos(a\Delta x) + sen(a\Delta x)cos(ax) - sen(ax)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{sen(ax)cos(a\Delta x) - sen(ax)}{\Delta x} + \frac{sen(a\Delta x)cos(ax)}{\Delta x} \right)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen(ax)cos(a\Delta x) - sen(ax)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen(a\Delta x)cos(ax)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-sen(ax)\big(1 - cos(a\Delta x)\big)}{\Delta x} + cos(ax) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen(a\Delta x)}{\Delta x}$$

$$y' = -sen(ax) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - cos(a\Delta x)}{\Delta x} + $$
$$+ cos(ax).\, a \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen(a\Delta x)}{a\Delta x}$$

$$y' = -a\, sen(ax) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - cos(a\Delta x)}{a\Delta x} + a\, cos(ax)$$

$$y' = -a\, sen(ax).0 + a\, cos(ax)$$

$$\boxed{y' = a\, cos(ax)}$$

Analogamente, prova-se que:

Se $y = cos(ax)$ $\Rightarrow$ $\boxed{y' = -a\, sen(ax)}$

$$\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = e$$

d) $y = log_a(bx)$

Pela definição de derivada, temos que:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{log_a\big(b(x+\Delta x)\big) - log_a(bx)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{log_a\left(\frac{b(x+\Delta x)}{bx}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{log_a\left(\frac{bx+b\Delta x}{bx}\right)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\Delta x}log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right)$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\left(log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$y' = log_a\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right)$$

Definindo: $\frac{1}{u} = \frac{\Delta x}{x} \Longrightarrow \frac{1}{\Delta x} = \frac{u}{x} \Longrightarrow u = \frac{x}{\Delta x}$

$$y' = log_a\left(\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{\frac{u}{x}}\right)$$

$$y' = log_a\left(\lim_{u\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right)^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$y' = log_a\left(\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = e$$

d) $y = log_a(bx)$

Pela definição de derivada, temos que:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{log_a\big(b(x+\Delta x)\big) - log_a(bx)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{log_a\left(\frac{b(x+\Delta x)}{bx}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{log_a\left(\frac{bx+b\Delta x}{bx}\right)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\Delta x}log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right)$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\left(log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$y' = log_a\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right)$$

Definindo: $\dfrac{1}{u} = \dfrac{\Delta x}{x} \Rightarrow \dfrac{1}{\Delta x} = \dfrac{u}{x} \Rightarrow u = \dfrac{x}{\Delta x}$

$$y' = log_a\left(\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{\frac{u}{x}}\right)$$

$$y' = log_a\left(\lim_{u\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right)^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$y' = log_a\left(\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$y' = log_a(e)^{\frac{1}{x}}$$

$$\boxed{\Rightarrow y' = \frac{1}{x}log_a(e)}$$

Caso particular:

Se $a = e$, temos que: $y = f(x) = log_e(bx) = \ln(x)$ $\Rightarrow$ $\boxed{y' = \frac{1}{x}}$

Continuando com as regras de derivação...

b) $y = f(x) = u(x)v(x)$, em que $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são funções diferenciáveis.

Pela definição de derivada, temos que:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x + \Delta x) + u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x + \Delta x)}{\Delta x} + \frac{u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \right)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{v(x + \Delta x)\big(u(x + \Delta x) - u(x)\big)}{\Delta x} + \frac{u(x)\big(v(x + \Delta x) - v(x)\big)}{\Delta x} \right)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x)\big(u(x + \Delta x) - u(x)\big)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)\big(v(x + \Delta x) - v(x)\big)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x)\big(u(x+\Delta x) - u(x)\big)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)\big(v(x+\Delta x) - v(x)\big)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}}_{u'(x)} + u(x) \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}}_{v'(x)}$$

$$y' = v(x)u'(x) + u(x)v'(x)$$

Regra do Produto

Se $y = u(x)v(x)$ $\Rightarrow$ $y' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$

b.1) $y = e^{4x} senh(5x) = u.v$

Considerando:

$$\begin{cases} u = e^{4x} \\ v = senh(5x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 4e^{4x} \\ v' = 5cosh(5x) \end{cases}$$

Pela regra do produto, temos que:

$$y' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$$

$$y' = e^{4x}\, 5cosh(5x) + 4e^{4x} senh(5x)$$

$$\boxed{y' = e^{4x}(5cosh(5x) + 4senh(5x))}$$

b.2) $y = x^2 ln(5x)$

Considerando:

$$\begin{cases} u = x^2 \\ v = ln(5x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 2x \\ v' = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Pela regra do produto, temos que:

$$y' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x)$$

$$y' = x^2 \frac{1}{x} + 2x\, ln(5x)$$

$$y' = x + 2x\, ln(5x)$$

$$\boxed{y' = x(1 + 2\ln(5x))}$$

c) $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, em que $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são funções diferenciáveis.

Pela definição de derivada, temos que:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)} \right) \right)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x\, v(x)v(x+\Delta x)}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x)}{\Delta x\, v(x)v(x+\Delta x)} + \frac{u(x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x\, v(x)v(x+\Delta x)} \right)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)\big(u(x+\Delta x) - u(x)\big)}{\Delta x\, v(x)v(x+\Delta x)} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-u(x)(v(x+\Delta x) - v(x))}{\Delta x\, v(x)v(x+\Delta x)}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{v(x)}{v(x)v(x+\Delta x)} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{-u(x)}{v(x)v(x+\Delta x)} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{v(x+\Delta x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-u(x)}{v(x)v(x+\Delta x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \frac{1}{v(x)} \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}}_{u'(x)} - \frac{u(x)}{v(x)v(x)} \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}}_{v'(x)}$$

$$y' = \frac{1}{v(x)} u'(x) - \frac{u(x)}{\left(v(x)\right)^2} v'(x)$$

$$\boxed{y' = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}}$$ ➡ **Regra do Quociente**

c.1) $y = \frac{x^7+3x^4+1}{2x+5} = \frac{u}{v}$

Considerando:

$$\begin{cases} u = x^7 + 3x^4 + 1 \\ v = 2x + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 7x^6 + 12x^3 \\ v' = 2 \end{cases}$$

Pela regra do quociente, temos que:

$$y' = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

$$y' = \frac{(2x+5)(7x^6+12x^3) - (x^7+3x^4+1)\,2}{(2x+5)^2}$$

$$y' = \frac{14x^7 + 24x^4 + 35x^6 + 60x^3 - 2x^7 - 6x^4 - 2}{(2x+5)^2} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{12x^7 + 35x^6 + 18x^4 + 60x^3 - 2}{(2x+5)^2}}$$

Exemplo 1. Verifique se a função:

a) $y = e^{-3x}\cos(2x)$ é solução da equação diferencial $y'' + 6y' + 10y = 0$.

Pela regra do produto, temos que: $y = u.v \Longrightarrow y' = u.v' + u'.v$

$$y' = e^{-3x}.(\cos(2x))' + (e^{-3x})'.\cos(2x)$$

$$y' = e^{-3x}.(-2\,sen(2x)) + (-3e^{-3x}).\cos(2x)$$

$$\boxed{y' = e^{-3x}(-2\,\mathrm{sen}(2x) - 3\cos(2x))}$$

Pela regra do produto, temos que:

$$y'' = e^{-3x}.(-2\,\mathrm{sen}(2x) - 3\cos(2x))' + (e^{-3x})'.(-2\,\mathrm{sen}(2x) - 3\cos(2x))$$

$$y'' = e^{-3x}.(-2\,(2)\cos(2x) - 3(-2)\mathrm{sen}(2x)) + (-3e^{-3x}).(-2\,\mathrm{sen}(2x) - 3\cos(2x))$$

$$y'' = e^{-3x}.(-4\cos(2x) + 6\,\mathrm{sen}(2x) + 6sen(2x) + 9\cos(2x))$$

$$\boxed{y'' = e^{-3x}.\big(5\cos(2x) + 12\,\mathrm{sen}(2x)\big)}$$

Substituindo estes resultados no lado esquerdo da equação diferencial, temos que:

$$y'' + 6y' + 10y = e^{-3x}\big(5\cos(2x) + 12\,\mathrm{sen}(2x)\big) + 6e^{-3x}(-2\,\mathrm{sen}(2x) - 3\cos(2x)) + 10e^{-3x}\cos(2x)$$

$$= e^{-3x}(5\cos(2x) + 12\,\mathrm{sen}(2x) - 12\,\mathrm{sen}(2x) - 18\cos(2x) + 10\cos(2x))$$

$$= e^{-3x}\big(-3\cos(2x)\big) \neq 0$$

Conclusão: A função $y = e^{-3x}\cos(2x)$ não é solução da equação diferencial.

b) $y = \frac{\ln(x)}{x}$ é solução da equação diferencial $x^2y'' + 3xy' + y = 0$.

Pela regra do quociente, temos que: $y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v.u' - u.v'}{v^2}$

$$y' = \frac{x.(\ln(x))' - (\ln(x)).(x)'}{x^2}$$

$$y' = \frac{x.\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln(x)).1}{x^2} \Longrightarrow \boxed{y' = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}}$$

Pela regra do quociente, temos que: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{v.u' - u.v'}{v^2}$

$$y'' = \frac{x^2.(1-\ln(x))' - (1-\ln(x)).(x^2)'}{(x^2)^2}$$

$$y'' = \frac{x^2.\left(-\frac{1}{x}\right) - (1-\ln(x)).2x}{x^4} = \frac{-x-2x+2x\ln(x)}{x^4} = \frac{x(-3+2\ln(x))}{x^4} \Longrightarrow \boxed{y'' = \frac{-3+2\ln(x)}{x^3}}$$

Substituindo estes resultados no lado esquerdo da equação diferencial, temos que:

$$x^2y'' + 3xy' + y = x^2\left(\frac{-3+2\ln(x)}{x^3}\right) + 3x\left(\frac{1-\ln(x)}{x^2}\right) + \frac{\ln(x)}{x}$$

$$= \frac{-3+2\ln(x)}{x} + \frac{3-3\ln(x)}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$$

$$= \frac{-3+2\ln(x)+3-3\ln(x)+\ln(x)}{x} = 0$$

Conclusão: A função $y = \dfrac{\ln(x)}{x}$ é solução da equação diferencial.

Exemplo 2. Obtenha a derivada de primeira ordem das funções dadas a seguir.

a) $y = \frac{x^4+2x^2-1}{x^3} = \frac{u}{v}$

Primeiro método: Regra do quociente. $y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v.u' - u.v'}{v^2}$

$$y' = \frac{x^3.(x^4+2x^2-1)' - (x^4+2x^2-1).(x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{x^3.(4x^3+4x) - (x^4+2x^2-1).3x^2}{x^6}$$

$$y' = \frac{4x^6+4x^4-3x^6-6x^4+3x^2}{x^6} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{x^6-2x^4+3x^2}{x^6}} \qquad y' = \frac{x^6}{x^6} - \frac{2x^4}{x^6} + \frac{3x^2}{x^6} \Rightarrow \boxed{y' = 1 - \frac{2x^4}{x^6} + \frac{3x^2}{x^6}}$$

Segundo método: Reescrevendo a função como uma soma de funções.

$$y = \frac{x^4+2x^2-1}{x^3} = \frac{x^4}{x^3} + \frac{2x^2}{x^3} - \frac{1}{x^3} = x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} = x + 2x^{-1} - x^{-3} \Rightarrow y' = 1 - 2x^{-2} + 3x^{-4} \Rightarrow \boxed{y' = 1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4}}$$

Terceiro método: Reescrevendo a função como um produto. $y = u.v \Longrightarrow y' = u.v' + u'.v$

$$y = (x^4+2x^2-1)x^{-3} \Rightarrow y' = (x^4+2x^2-1)(x^{-3})' + (x^4+2x^2-1)'(x^{-3})$$

$$y' = (x^4+2x^2-1)(-3x^{-4}) + (4x^3+4x)(x^{-3})$$

$$y' = -3 - 6x^{-2} + 3x^{-4} + 4 + 4x^{-2}$$

$$y' = 1 - 2x^{-2} + 3x^{-4}$$

$$\boxed{y' = 1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4}}$$

b) $y = \mathrm{tg}(ax)$

Usando a definição de função tangente para reescrever a função, temos que:

$$y = \mathrm{tg}(ax) = \frac{sen(ax)}{\cos(ax)}$$

Pela regra do quociente, temos que: $y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v.u' - u.v'}{v^2}$

$$y' = \left(\frac{sen(ax)}{\cos(ax)}\right)' = \frac{(\cos(ax)).(sen(ax))' - (sen(ax))(\cos(ax))'}{(\cos(ax))^2}$$

$$y' = \frac{\cos(ax).\mathrm{a}\cos(ax) - sen(ax)(-a)sen(ax)}{(\cos(ax))^2}$$

$$y' = \frac{\mathrm{a}\cos^2(ax) + \mathrm{a}\,\mathrm{sen}^2(ax)}{\cos^2(ax)}$$

$$y' = \frac{a\left(\cos^2(ax) + \mathrm{sen}^2(ax)\right)}{\cos^2(ax)}$$

$$y' = a\frac{1}{\cos^2(ax)} = a\left(\frac{1}{cos(ax)}\right)^2 \Rightarrow \boxed{y' = a\ sec^2(ax)}$$

De forma análoga, prova-se que se

$$y = \mathrm{cotg}(ax) = \frac{cos(ax)}{\mathrm{sen}(ax)}$$

Então:

$$\boxed{y' = -a\ cossec^2(ax)}$$

b.1) $y = 3\,\mathrm{tg}(4x)\,\mathrm{cotg}(3x)$

c) $y = \sec(ax)$

Usando a definição de função secante para reescrever a função, temos que:

$$y = \sec(ax) = \frac{1}{\cos(ax)}$$

Pela regra do quociente, temos que: $y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v.u' - u.v'}{v^2}$

$$y' = \left(\frac{1}{\cos(ax)}\right)' = \frac{(\cos(ax)).(1)' - 1.(\cos(ax))'}{(\cos(ax))^2}$$

$$y' = \frac{(\cos(ax)).0 - (-a)\text{sen}(ax)}{(\cos(ax))^2}$$

$$y' = \frac{a\ \ sen(ax)}{(\cos(ax))^2}$$

$$y' = \frac{a\ \ sen(ax)}{\cos(ax)\cos(ax)}$$

$$y' = a\ \frac{1}{\cos(ax)}.\frac{sen(ax)}{\cos(ax)} \Rightarrow \boxed{y' = a\sec(ax)\,\text{tg}(ax)}$$

De forma análoga, prova-se que se

$$y = cossec(ax) = \frac{1}{\text{sen}(ax)}$$

Então:

$$\boxed{y' = -a\,\text{cossec}(ax)\,\text{cotg}(ax)}$$

c.1) $y = \sec(3x) + \text{cossec}(3x)$

Regras de Derivação

1) $y = k \Longrightarrow y' = 0$

2) $y = x^n \Longrightarrow y' = nx^{n-1}$

3) $y = u \pm v \Longrightarrow y' = u' \pm v'$

4) $y = kv \Longrightarrow y' = k\ v'$

5) $y = a^{bx} \Longrightarrow y' = b\ a^{bx}\ln(a)$

6) $y = e^{bx} \Longrightarrow y' = b\ e^{bx}$

7) $y = senh(ax) \Longrightarrow y' = a\ cosh(ax)$

8) $y = cosh(ax) \Longrightarrow y' = a\ senh(ax)$

9) $y = sen(ax) \Longrightarrow y' = a\ cos(ax)$

10) $y = cos(ax) \Longrightarrow y' = -a\ sen(ax)$

11) $y = u.v \Longrightarrow y' = u.v' + u'.v$

12) $y = \frac{u}{v} \Longrightarrow y' = \frac{v.u' - u.v')}{v^2}$

13) $y = log_a(bx) \Longrightarrow y' = \frac{1}{x} log_a(e)$

14) $y = ln(bx) \Longrightarrow y' = \frac{1}{x}$

15) $y = \mathrm{tg}(ax) \Longrightarrow y' = a\ sec^2(ax)$

16) $y = \mathrm{cotg}(ax) \Longrightarrow y' = -a\ cossec^2(ax)$

17) $y = sec(ax) \Longrightarrow y' = a\ sec(ax)\mathrm{tg}(ax)$

18) $y = cossec(ax) \Longrightarrow y' = -a\ cossec(ax)\mathrm{cotg}(ax)$

Exemplo.

1. Encontre a derivada n-ésima derivada das funções dadas a seguir.

$a)\ y = x^5$

Primeira derivada: $y' = 5x^4$

Segunda derivada: $y'' = 5.4x^3 = 20x^3$

Terceira derivada: $y''' = 20.3x^2 = 60x^2$

Quarta derivada: $y^{(4)} = 60.2x = 120x$

Quinta derivada: $y^{(5)} = 120$

Sexta derivada: $y^{(6)} = 0$

$\vdots$

n-ésima derivada: $y^{(n)} = 0$, para todo $n \geq 6$.

b) $y = log_3(7x)$

Primeira derivada: $y' = \frac{1}{x} log_3(e)$

Segunda derivada: $y'' = log_3(e) \left(\frac{1}{x}\right)' = log_3(e)\,(x^{-1})' = -x^{-2} log_3(e)$

Terceira derivada: $y''' = -\,log_3(e)\,(x^{-2})' = -\,log_3(e)\,(-x^{-3}) = log_3(e)\,(x^{-3})$

Quarta derivada: $y^{(4)} = log_3(e)\,(x^{-3})' = -\,log_3(e)\,(x^{-4})$

Quinta derivada: $y^{(5)} = -\,log_3(e)\,(x^{-4})' = log_3(e)\,(x^{-5})$

Sexta derivada: $y^{(6)} = log_3(e)\,(x^{-5})' = -\,log_3(e)\,(x^{-6})$

$\vdots$

n-ésima derivada: $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}}{x^n} log_3(e)$, para todo natural

Regras de Derivação

1) $y = k \Longrightarrow y' = 0$

2) $y = x^n \Longrightarrow y' = nx^{n-1}$

3) $y = u \pm v \Longrightarrow y' = nx^{n-1}$

4) $y = kv \Longrightarrow y' = k\ v'$

5) $y = a^{bx} \Longrightarrow y' = b\ a^{bx}\ln(a)$

6) $y = e^{bx} \Longrightarrow y' = b\ e^{bx}$

7) $y = senh(ax) \Longrightarrow y' = a\ cosh(ax)$

8) $y = cosh(ax) \Longrightarrow y' = a\ senh(ax)$

9) $y = sen(ax) \Longrightarrow y' = acos(ax)$

10) $y = cos(ax) \Longrightarrow y' = -a\ cos(ax)$

11) $y = log_a(bx)) \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{x} log_a(e)$

12) $y = \ln(bx) \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{x}$