MDI0002 – Matemática Discreta
Videoaula 15
Operações Binárias e Álgebras Simples

Karina Girardi Roggia
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

2024

Operação Binária

- operação == relação funcional

$$f : A \to B$$

- operação **binária**: domínio é o produto cartesiano de dois conjuntos (dois *operandos*)

$$\oplus : A \times B \to C$$

- operação **interna**: operandos e resultados são elementos de um mesmo conjunto

$$\otimes : A \times A \to A$$

- operação **fechada**: função *total* (garantia de obter resultado)

Definição

Sejam A, B, C conjuntos quaisquer. Então tem-se que:

1. uma OPERAÇÃO BINÁRIA é uma função parcial do tipo $\oplus : A \times B \to C$;
2. uma OPERAÇÃO INTERNA ao conjunto A é uma operação cujos operandos e contra-domínio são definidos em A. Em particular, uma OPERAÇÃO BINÁRIA INTERNA sobre A é uma função parcial do tipo $\otimes : A^2 \to A$;
3. uma OPERAÇÃO FECHADA é uma função total.

Exemplos

- Divisão nos reais. $div : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma operação binária interna.
$$div(x, y) = \frac{x}{y}$$
- Quadrado nos naturais. $quad : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma operação interna e fechada.
$$quad(n) = n^2$$
- Elemento. Seja $\mathbf{1} = \{*\}$ um conjunto unitário. $zero : \mathbf{1} \to \mathbb{N}$ é uma operação fechada.
$$zero(*) = 0$$
- União. Seja A um conjunto qualquer. $\cup : 2^A \times 2^A \to 2^A$, a união de dois subconjuntos de A, é operação binária interna e fechada.

Seja $\oplus : A^2 \to A$ uma **operação binária interna**. Então $\oplus$ satisfaz a propriedade:

I. Comutativa, quando

$$\forall a, b \in A(a \oplus b = b \oplus a)$$

II. Associativa, quando

$$\forall a, b, c \in A(a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c)$$

III. Elemento Neutro, quando

$$\exists e \in A \forall a \in A(a \oplus e = a = e \oplus a)$$

IV. Elemento Absorvente, quando

$$\exists z \in A \forall a \in A(a \oplus z = z = z \oplus a)$$

V. Elemento Inverso quando possui elemento neutro e e

$$\forall a \in A \exists \overline{a} \in A(a \oplus \overline{a} = e = \overline{a} \oplus a)$$

Atenção!

O Elemento Neutro (ou o Absorvente) deve ser à esquerda **e** à direita!

Exemplo: a divisão nos reais não nulos não possui elemento neutro à esquerda.

Porém, o 1 é elemento neutro à direita, uma vez que $\frac{x}{1} = x$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplos

- $\cup : 2^A \times 2^A \to 2^A$, sendo A conjunto qualquer, é comutativa, associativa e com elemento neutro (conjunto $\varnothing$)
- Adição.
  - Em $\mathbb{N}$: comutativa, associativa e com elemento neutro 0.
  - Em $\mathbb{Z}$: comutativa, associativa, com elemento neutro 0 e com elemento inverso ($\overline{n} = -n$).
- Multiplicação.
  - Em $\mathbb{N}$: comutativa, associativa e com elemento neutro 1.
  - Em $\mathbb{R} - \{0\}$: comutativa, associativa, com elemento neutro 1 e elemento inverso ($\overline{x} = \frac{1}{x}$).

Álgebra Interna $\langle A, \oplus \rangle$ com **uma** operação.

- A: conjunto suporte.
- $\oplus : A^2 \rightarrow A$ operação binária interna.

Tipos de Álgebras

Tipo de Álgebra	Propriedades
Grupoide	Fechada
Semi-grupo	Fechada, Associativa
Monoide	Fechada, Associativa, Elemento Neutro
Grupo	Fechada, Associativa, Elemento Neutro, Elemento Inverso

- Se a operação for *comutativa* tem-se uma Álgebra abeliana (grupóide abeliano, monóide abeliano,...).
- Usualmente, na notação de monoide e de grupo, o elemento neutro também é destacado: $\langle A, \oplus, e \rangle$.

Exemplos

- Monoides abelianos: $\langle 2^A, \cup, \varnothing\rangle$, $\langle 2^A, \cap, A\rangle$, $\langle \mathbb{N}, +, 0\rangle$, $\langle \mathbb{N}, *, 1\rangle$, $\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$, $\langle \mathbb{Z}, *, 1\rangle$, $\langle \mathbb{R}, +, 0\rangle$, $\langle \mathbb{R}, *, 1\rangle$
- Grupos abelianos: $\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$, $\langle \mathbb{R}, +, 0\rangle$, $\langle \mathbb{R} - \{0\}, *, 1\rangle$

- Álgebra não grupoide: $\langle \mathbb{N}, - \rangle$, $\langle \mathbb{R}, /$, $\langle 2^A, \times \rangle$ (para $A \neq \varnothing$)
- Álgebra não semi-grupo: $\langle \mathbb{Z}, - \rangle$, $\langle \mathbb{R} - \{0\}, / \rangle$
- Álgebra não monoide: $\langle \varnothing, \varnothing \rangle$
- Álgebra não grupo: $\langle \ltimes, + \rangle$, $\langle \mathbb{R}, * \rangle$, $\langle 2^A, \cup \rangle$, $\langle 2^A, \cap \rangle$ (para $A \neq \varnothing$).

Unicidade do Elemento Neutro

Teorema

Seja $\langle A, \oplus, e \rangle$ *um monóide. Então* $e \in A$ *é o único elemento neutro do monóide.*

Prova por redução ao absurdo.

Teorema

Seja $\langle A, \oplus, e \rangle$ um grupo. Então a propriedade do cancelamento é satisfeita. Ou seja, simultaneamente:

1. *Cancelamento à direita*

$$\forall a, x, y \in A\, (x \oplus a = y \oplus a \to x = y)$$

2. *Cancelamento à esquerda*

$$\forall a, x, y \in A\, (a \oplus x = a \oplus y \to x = y)$$

Prova

Cancelamento à direita.
Supondo $x \oplus a = y \oplus a$.
$x = x \oplus e = x \oplus (a \oplus \overline{a}) = (x \oplus a) \oplus \overline{a} = (y \oplus a) \oplus \overline{a} = y \oplus (a \oplus \overline{a}) = y \oplus e = y$.
A prova do cancelamento à esquerda é análoga.