UDESC
UNIVERSIDADE
DO ESTADO DE
SANTA CATARINA

GAN: Geometria Analítica

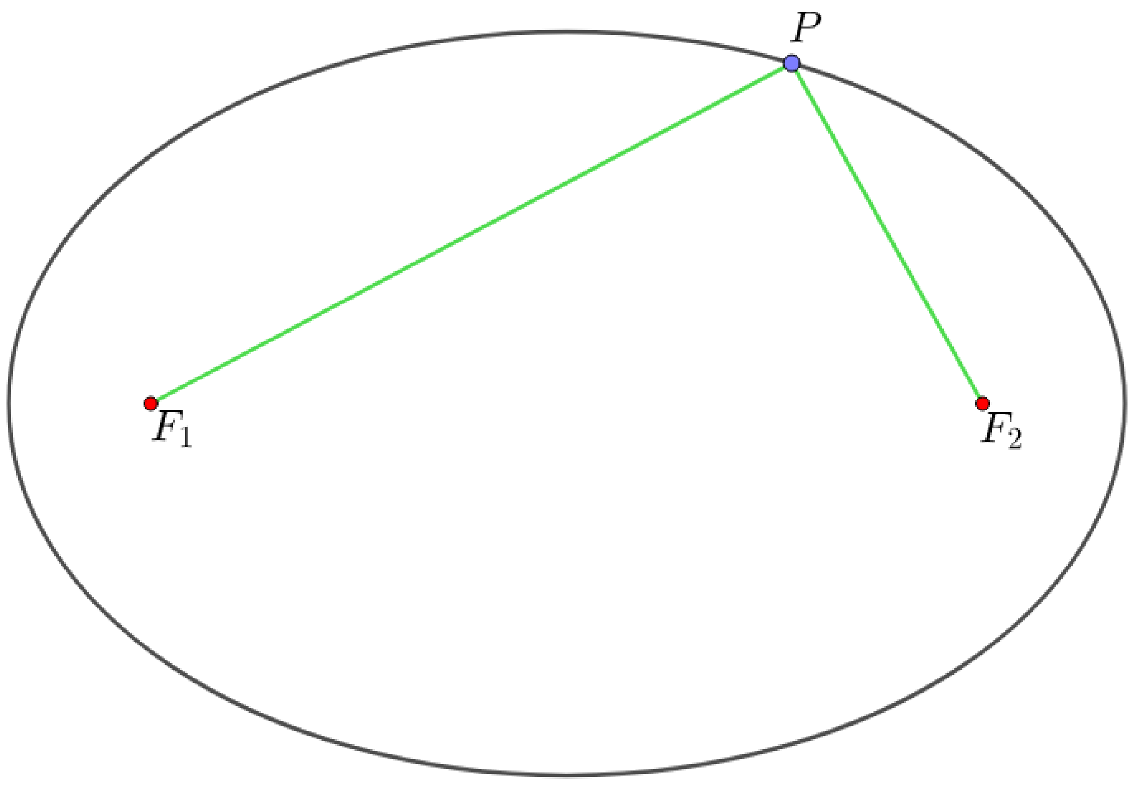
Cônicas - Elipse

Prof.: Francielle Kuerten Boeing

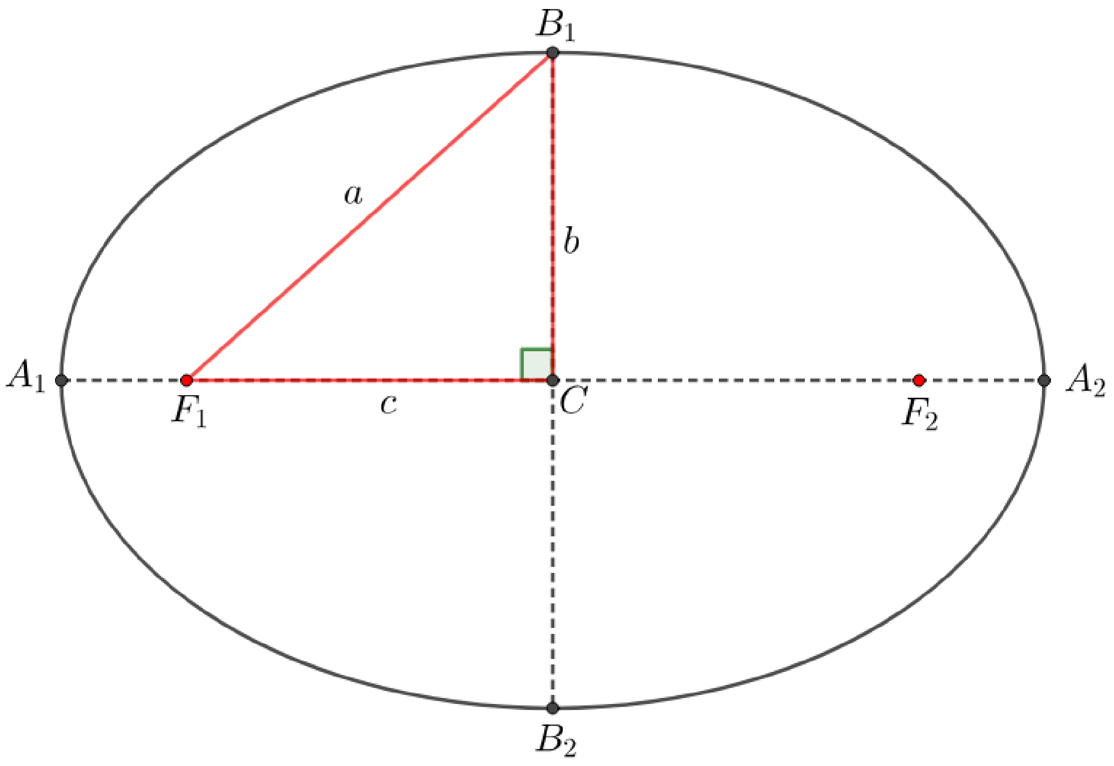
Elipse

Definição: Sejam F_1 e F_2 dois pontos distintos, $2c$ a distância entre eles e a um número real tal que $a > c$. Chamamos de elipse ao lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ tais que

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$



Elipse



Elementos:

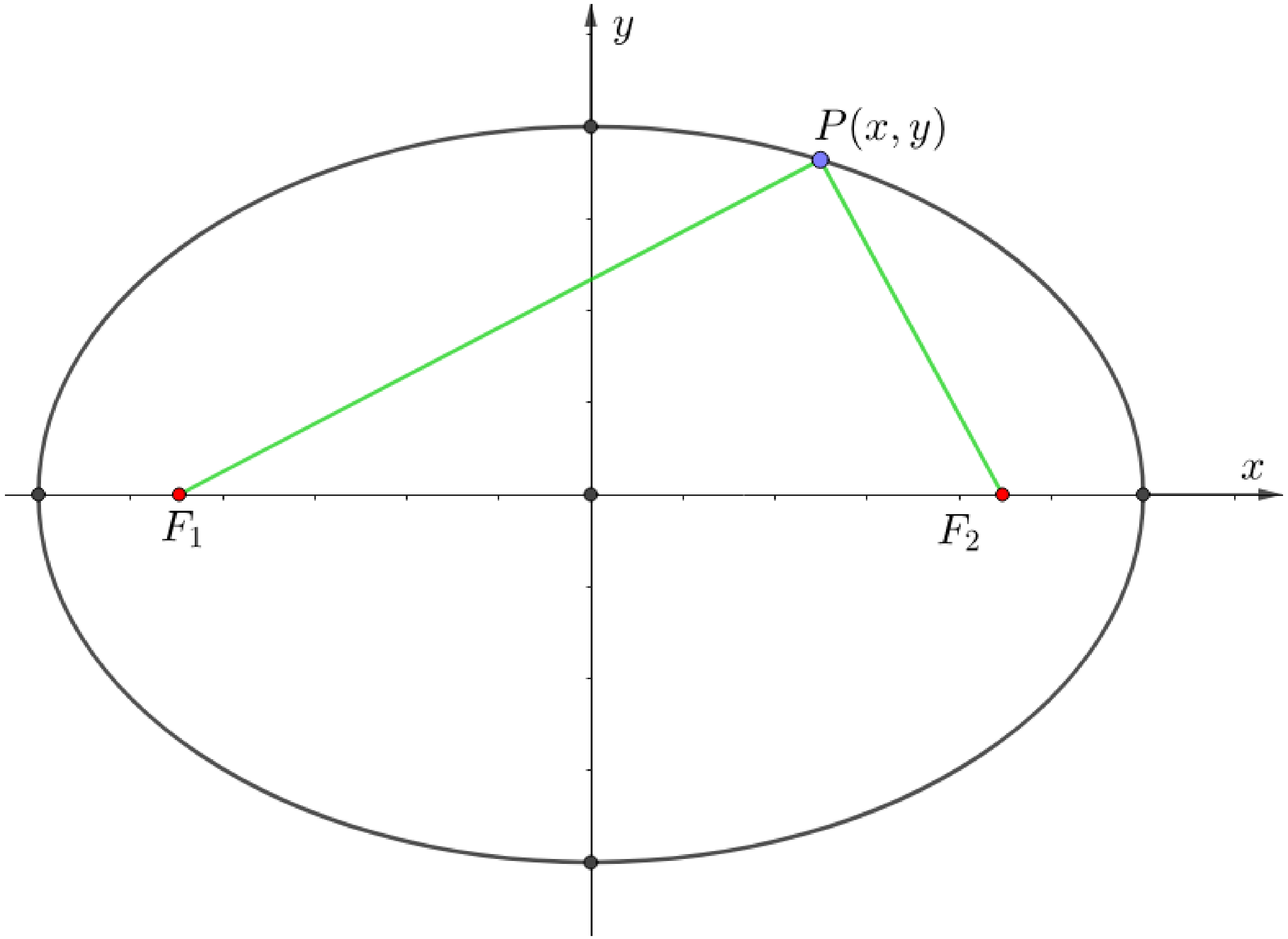
- F_1, F_2: Focos;
- F_1F_2: Segmento focal;
- Ponto médio de F_1F_2: Centro C;
- Distância focal: $2c$;
- Eixo maior: A_1A_2 com comprimento $2a$;
- Eixo menor: B_1B_2 com comprimento $2b$;
- Vértices: A_1, A_2, B_1 e B_2;
- Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$.

Observe que temos

$$a^2 = b^2 + c^2$$

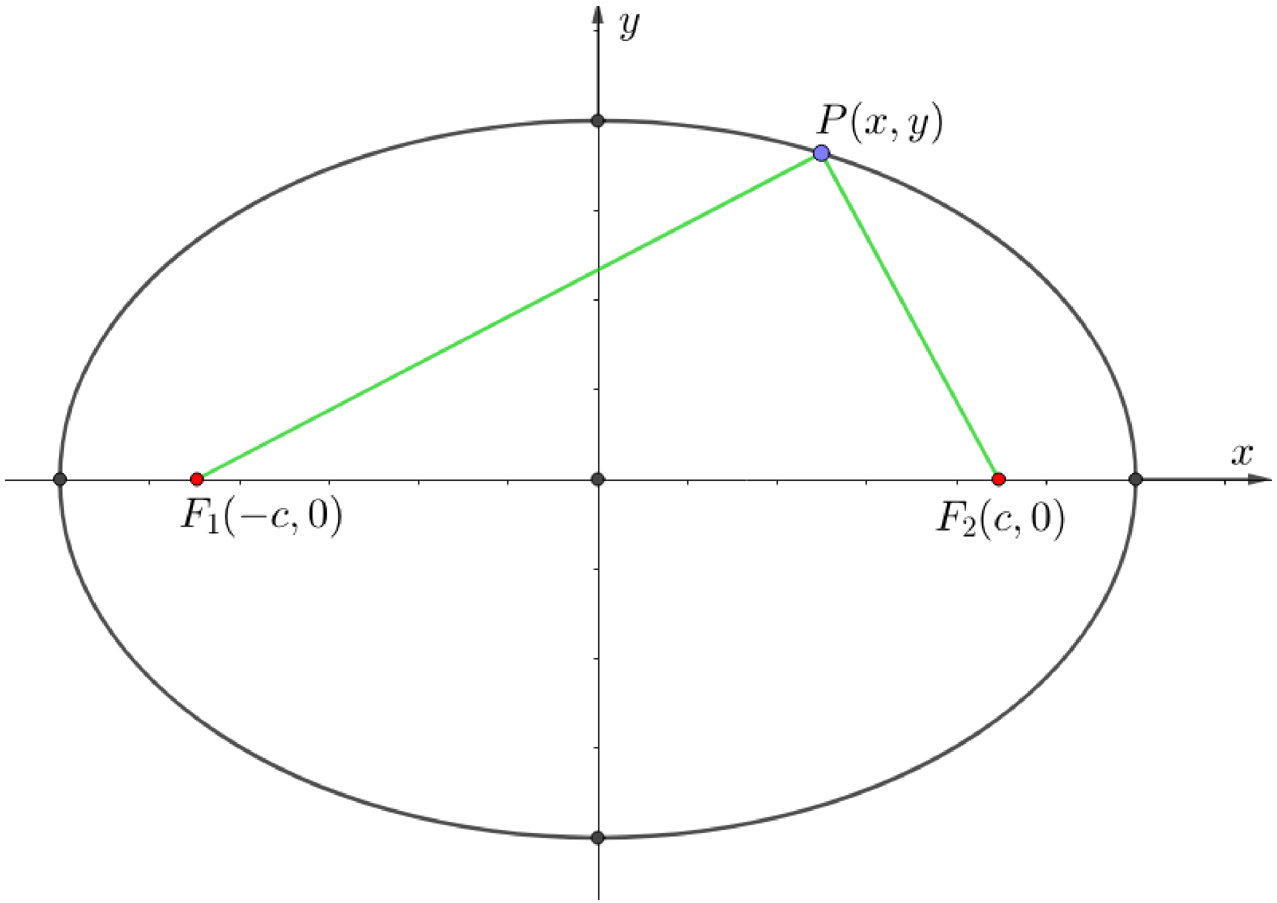
Equação da Elipse: Centro em C(0,0)

Caso 1: Eixo maior sobre o eixo x (focos sobre o eixo x)



Equação da Elipse: Centro em C(0,0)

Caso 1: Eixo maior sobre o eixo x (focos sobre o eixo x)

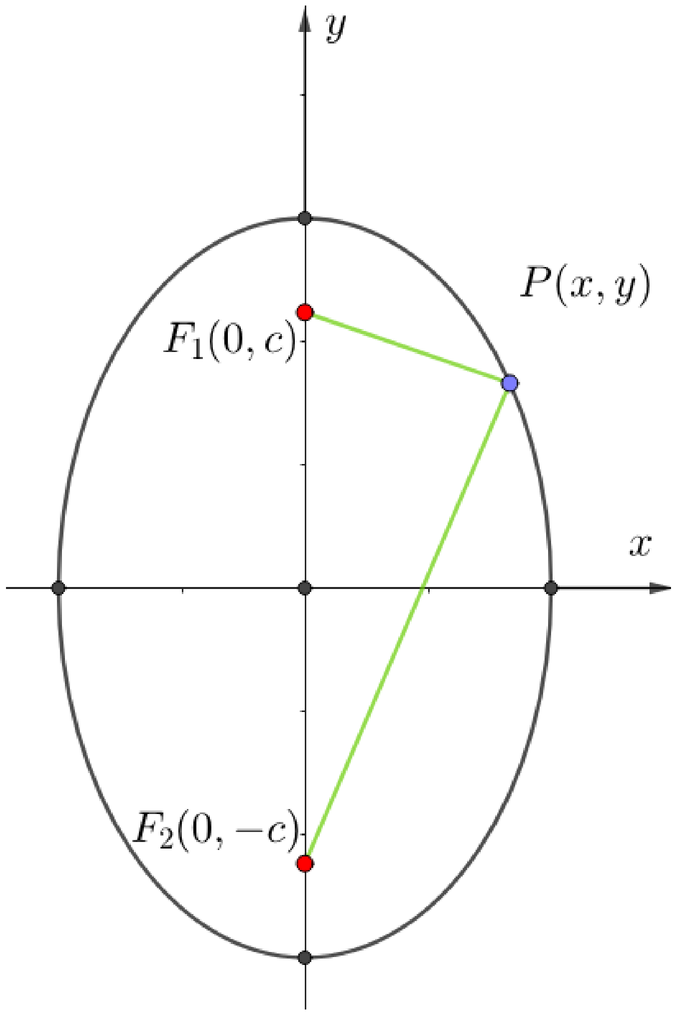


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(equação reduzida)

Equação da Elipse: Centro em C(0,0)

Caso 2: Eixo maior sobre o eixo y (focos sobre o eixo y)



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

(equação reduzida)

Elipse

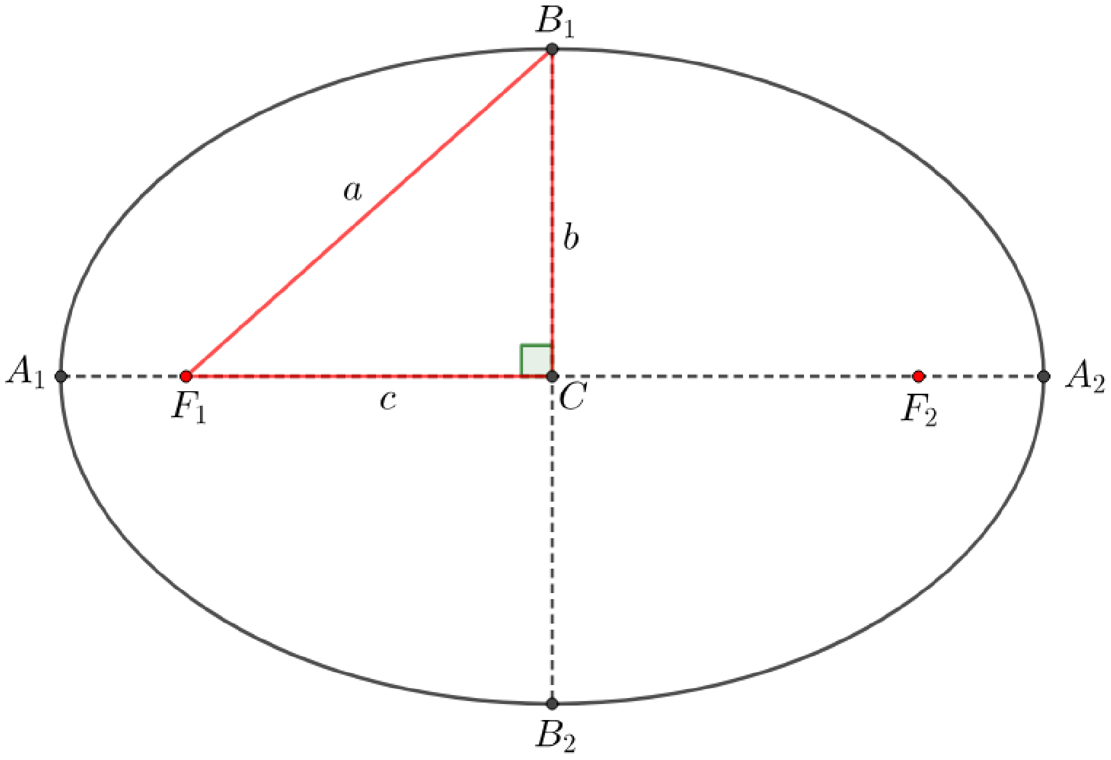
OBS: No caso em que $c = 0$, obtemos

$$a^2 = b^2 + 0^2$$
$$\Rightarrow a = b.$$

Então temos uma circunferência e os dois focos coincidem com o centro. Assim, uma circunferência pode ser descrita pela equação

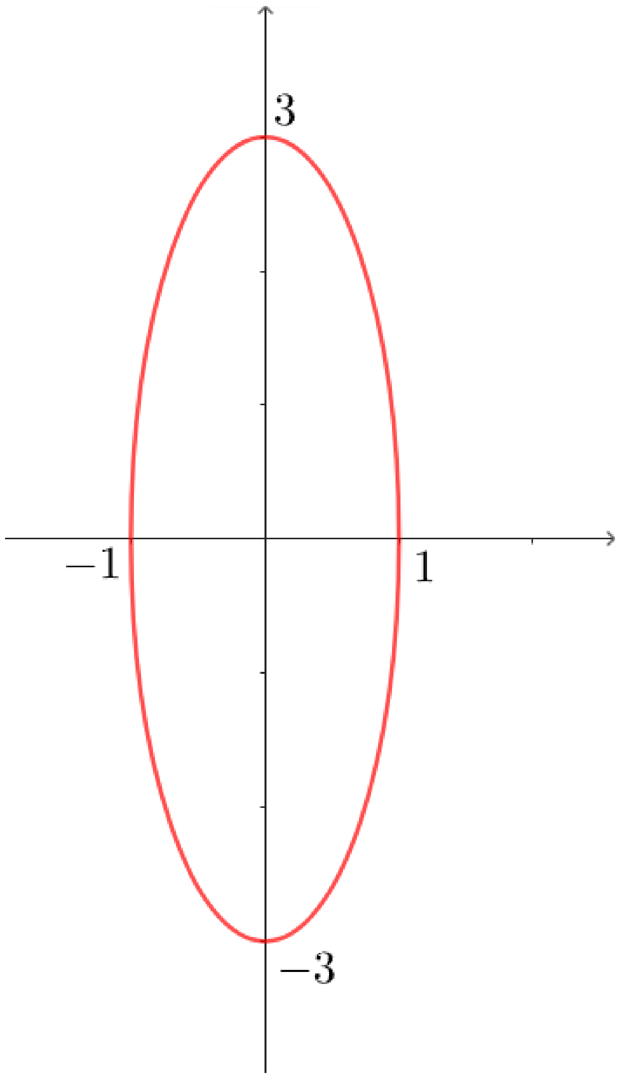
$$x^2 + y^2 = a^2,$$

onde a é o raio da circunferência.



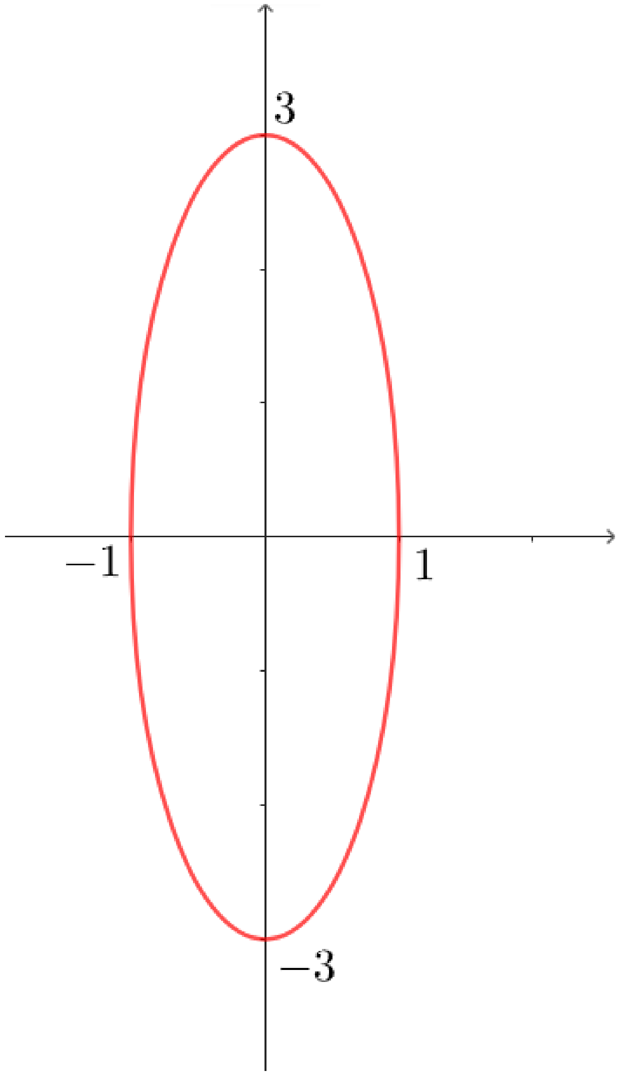
Equação da Elipse: Centro em C(0,0)

Ex.1: A equação da elipse abaixo é



Equação da Elipse: Centro em C(0,0)

Ex.1: A equação da elipse abaixo é



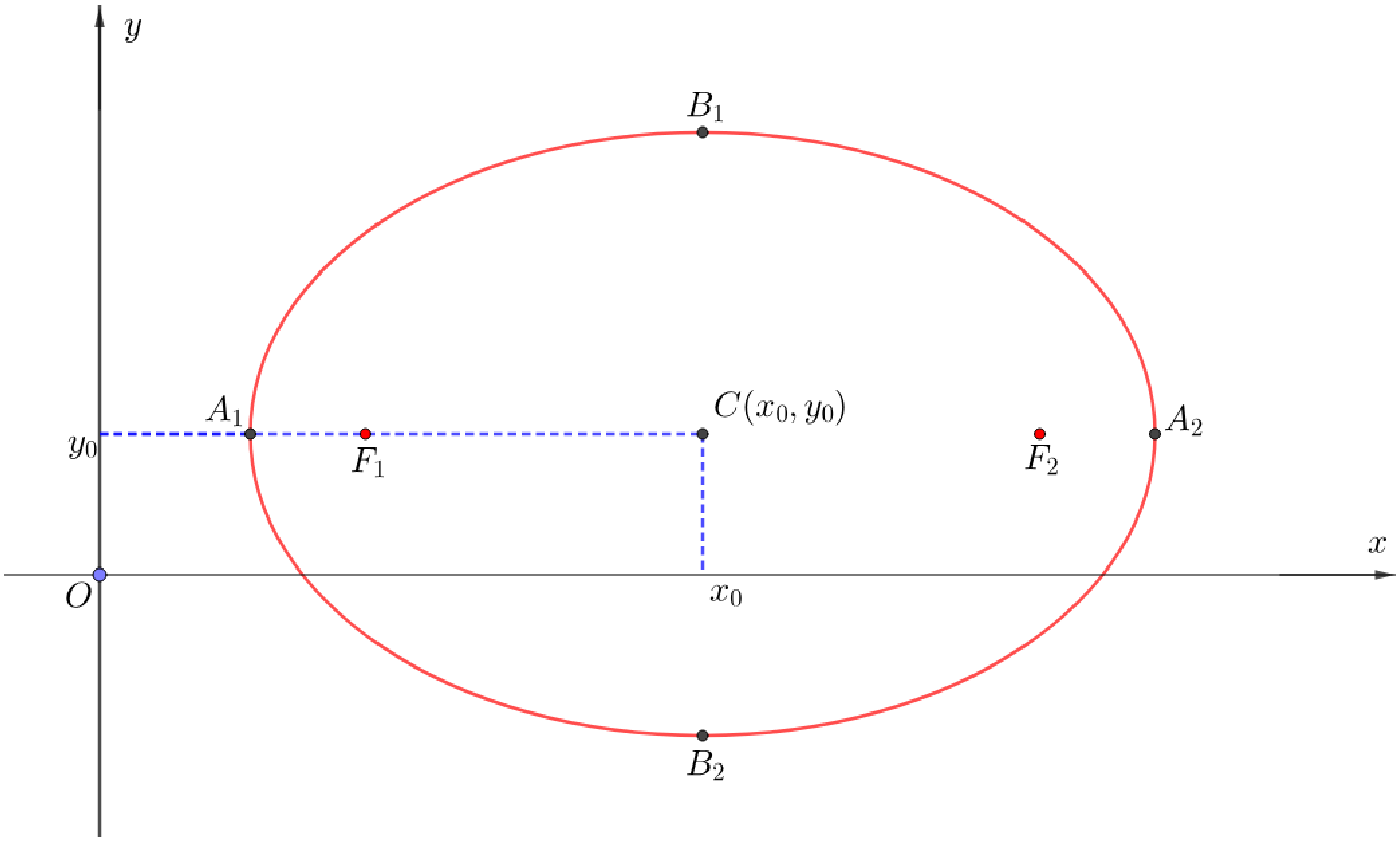
$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

Equação da Elipse: Centro em C(0,0)

Ex.2: Determine a equação da elipse com focos $F_1(-3,0)$ e $F_2(3,0)$, e $a = 5$ e represente-a geometricamente.

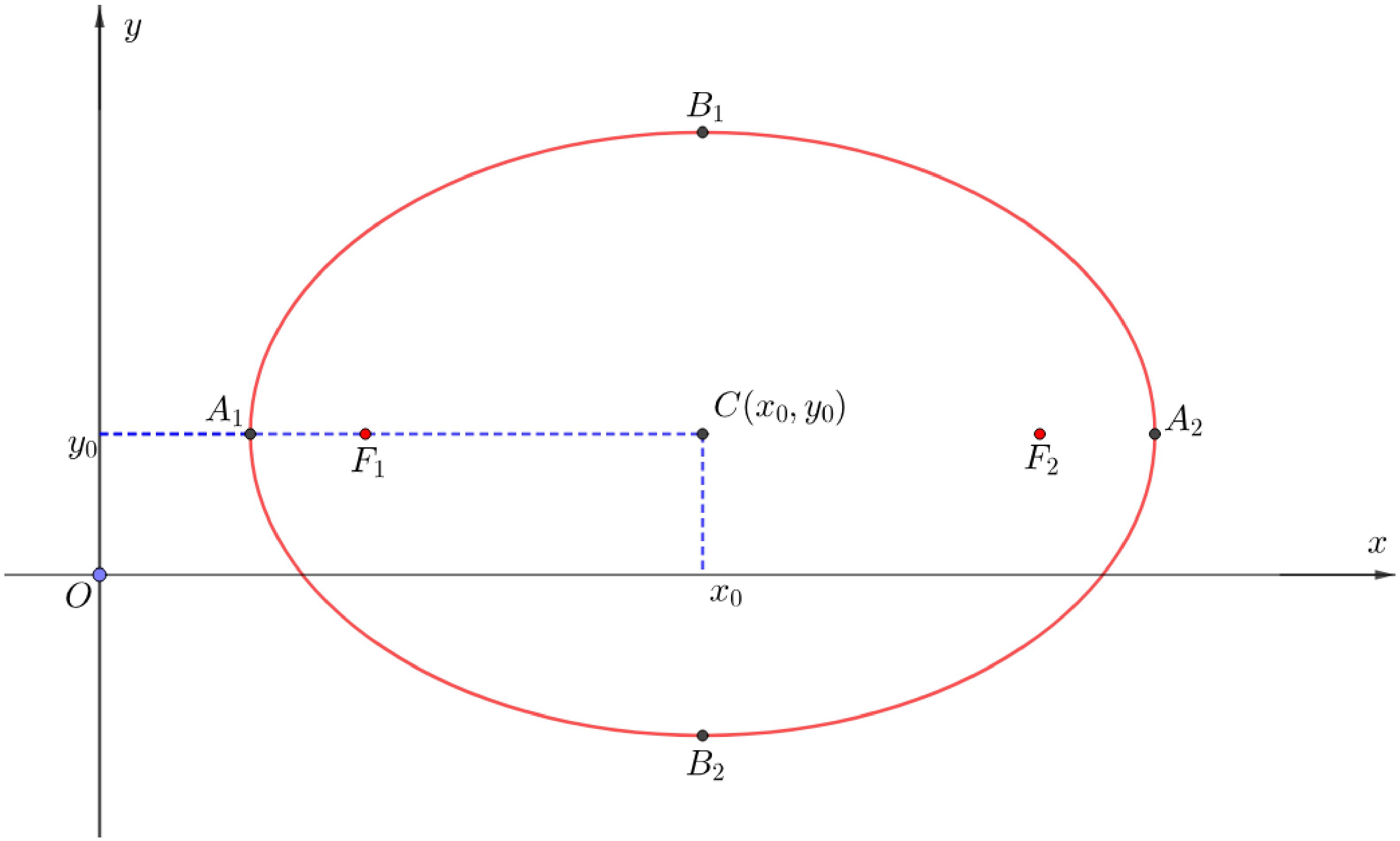
Equação da Elipse: Centro em $C(x_0, y_0)$

Caso 1: O eixo focal F_1F_2 é paralelo ao eixo x



Equação da Elipse: Centro em $C(x_0, y_0)$

Caso 1: O eixo focal F_1F_2 é paralelo ao eixo x

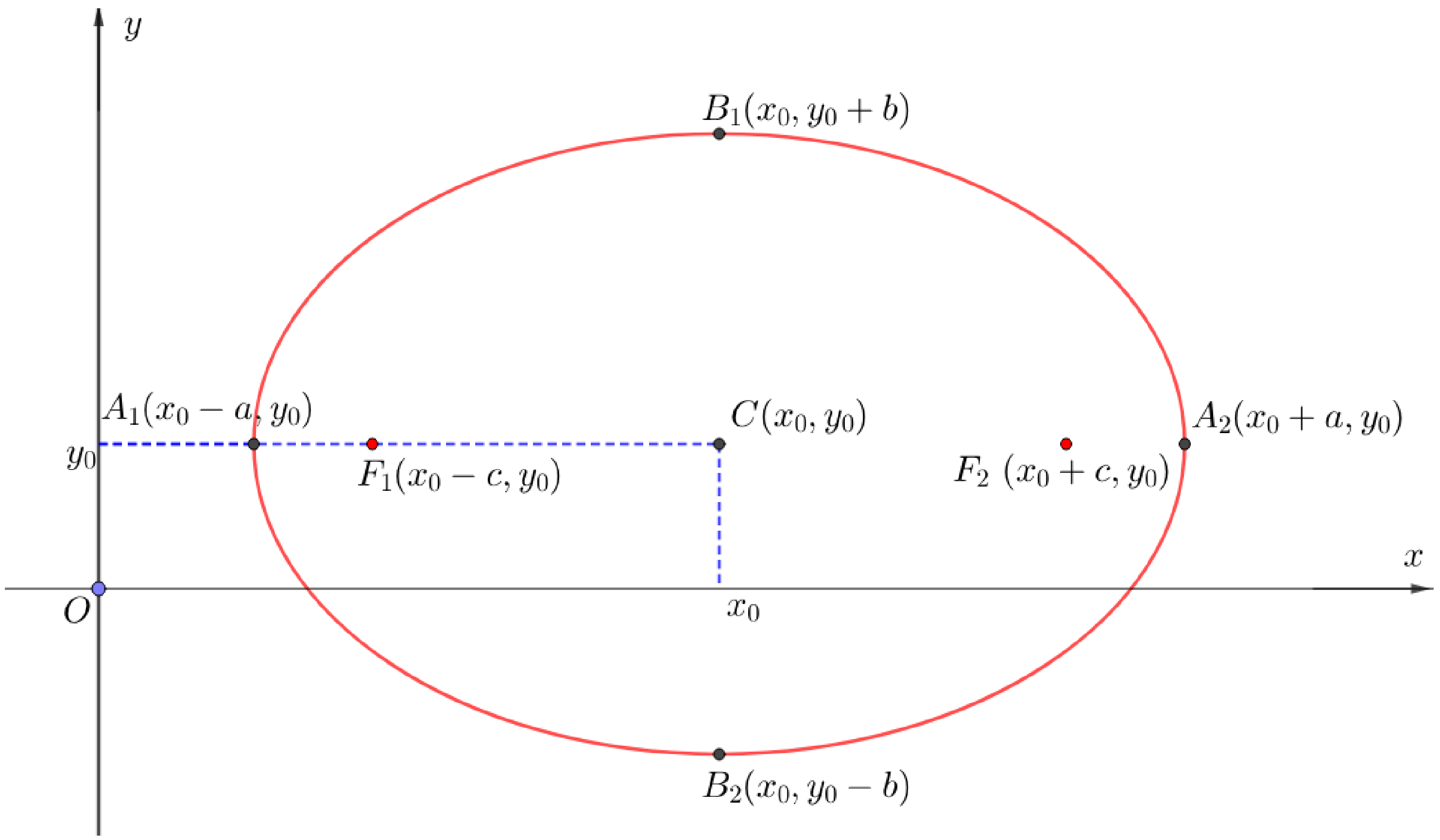


Usando translação de eixos, obtemos

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$$

Equação da Elipse: Centro em $C(x_0, y_0)$

Caso 1: O eixo focal F_1F_2 é paralelo ao eixo x

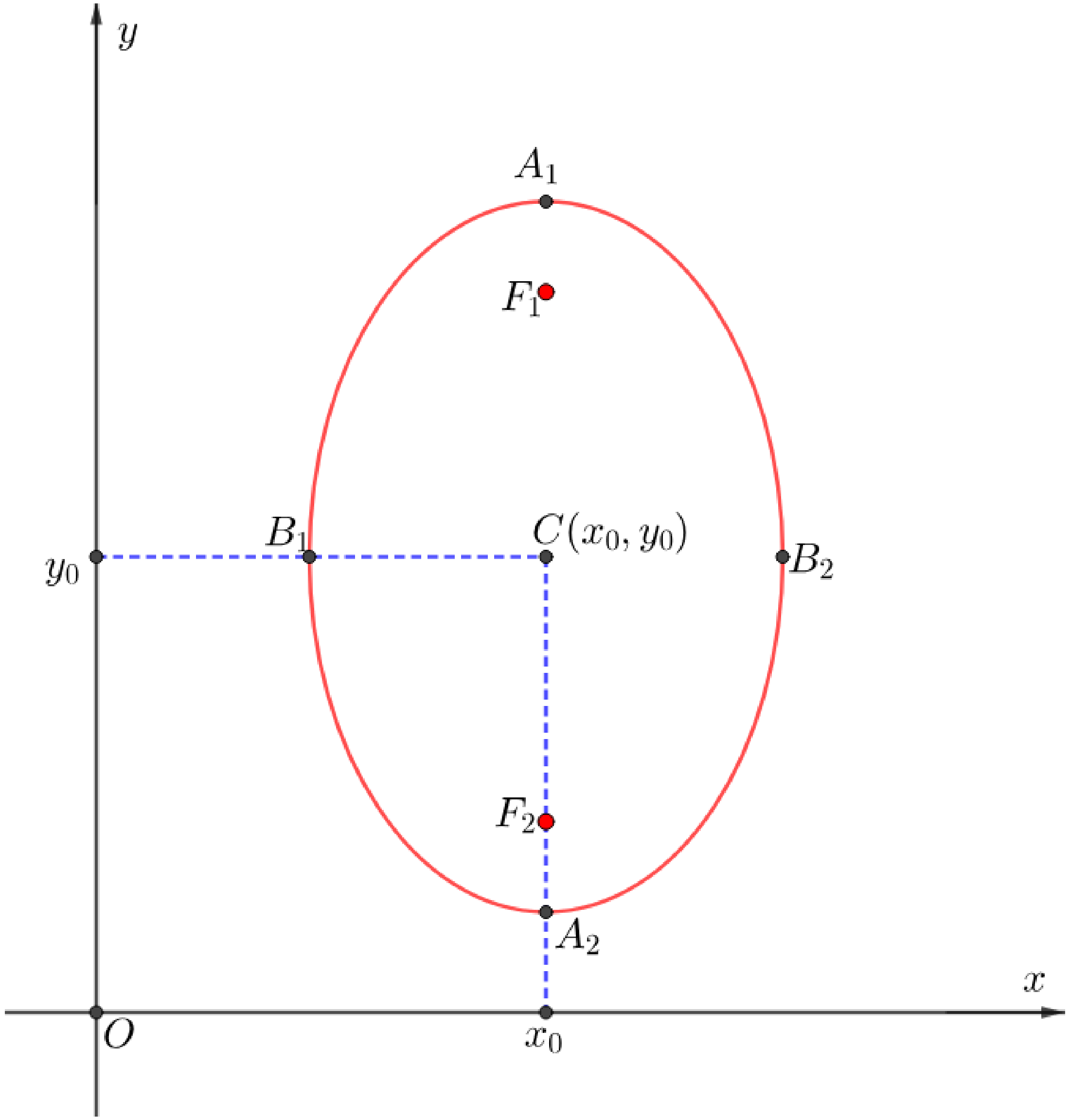


Usando translação de eixos, obtemos

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} = 1$$

Equação da Elipse: Centro em $C(x_0, y_0)$

Caso 2: O eixo focal F_1F_2 é paralelo ao eixo y

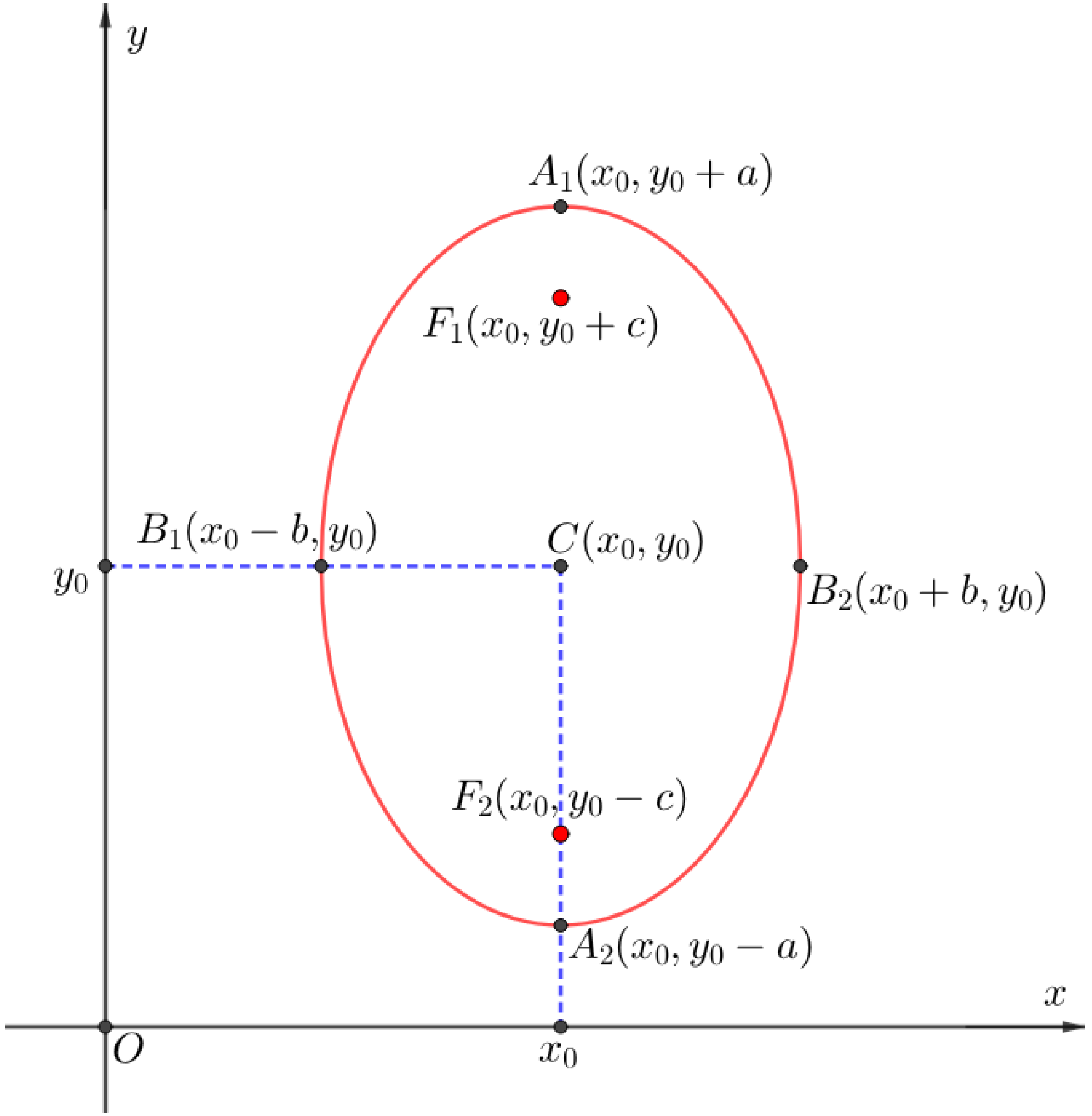


Novamente usando translação de eixos, obtemos

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_o)^2}{a^2} = 1$$

Equação da Elipse: Centro em $C(x_0, y_0)$

Caso 2: O eixo focal F_1F_2 é paralelo ao eixo y



Novamente usando translação de eixos, obtemos

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_o)^2}{a^2} = 1$$

Equação da Elipse: Centro em $C(x_0, y_0)$

Ex.3 : Determine a equação da elipse com focos $F_1(-2,3)$ e $F_2(6{,}3)$ e cujo eixo maior mede 12 $u.c$.
Represente-a geometricamente e determine seus elementos.

Ex.4 : Determine a equação que é satisfeita pelos pontos cuja soma das distâncias aos pontos $F_1(-2,4)$ e $F_2(-2,-1)$ é igual a 15 u.c. Represente-a geometricamente e determine seus elementos.

Equação da Elipse: Centro em $C(x_0, y_0)$

Ex.5 : Determine o centro, os vértices, os focos e a excentricidade da elipse de equação

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0.$$

Ex. 6: Determine o centro, os vértices, os focos e a excentricidade da elipse de equação

$$9x^2 + 16y^2 + 72x - 96y + 144 = 0.$$