

# LMA0001 – Lógica Matemática

## Aula 09

### Substituições

Karina Girardi Roggia  
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação  
Centro de Ciências Tecnológicas  
Universidade do Estado de Santa Catarina

2020



# Substituições em Fórmulas

Dada uma fórmula, podemos substituir as ocorrências de uma proposição por qualquer outra fórmula.

$$A[p \mapsto B]$$

Indica a substituição de todas as ocorrências de  $p$  pela fórmula  $B$  em  $A$ .



Seja

$$A = p \rightarrow (p \wedge q)$$

Então

$$A[p \mapsto (r \vee s)] = (r \vee s) \rightarrow ((r \vee s) \wedge q)$$



A substituição da proposição  $p$  na fórmula  $A$  pela fórmula  $B$ , denotada  $A[p \mapsto B]$  é definida por casos como a seguir:

- $p[p \mapsto B] = B$
- $q[p \mapsto B] = q$ , para  $q \neq p$
- $(\neg A)[p \mapsto B] = \neg(A[p \mapsto B])$
- $(A_1 \circ A_2)[p \mapsto B] = A_1[p \mapsto B] \circ A_2[p \mapsto B]$ ,  
para  $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ .



Uma fórmula  $B$  que é resultado da substituição de um ou mais proposições da fórmula  $A$  é chamada de **instância** de  $A$ .



- ① Aplique a definição de substituição para os seguintes casos:
  - a  $p \vee q \rightarrow r \wedge \neg p [p \mapsto \neg q \vee r]$
  - b  $\neg(p \rightarrow q \vee r) \rightarrow q \wedge \neg(r \vee \neg p) [p \mapsto \neg p \rightarrow \neg r]$
- ② Mostre que a lógica proposicional possui a propriedade da substituição uniforme. Ou seja, mostre que, se  $\models A$  então para qualquer instância  $B$  de  $A$  tem-se  $\models B$



# Substituição de subfórmulas equivalentes

Em uma fórmula  $A$ , se uma subfórmula  $F_A$  for substituída por  $G_A$  tal que  $F_A \equiv G_A$  então a fórmula resultante é equivalente a  $A$ .

