Aula 11/03

Sistemas Lineares...(continuação)

Sistema sem solução = sistema impossível (SI)

1. Resolva o sistema linear $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$

Solução utilizando o Método de Gauss

(Algorithmo) Transformar a matriz aumentada do sistema em uma matriz aumentada na forma escalonada:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right) \times(-2) \underset{L_2-2\cdot L_1 \to L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right) \times(-5) \underset{L_3-5\cdot L_1 \to L_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -14 & -15 \end{array}\right) \times(-2) \underset{L_3-2\cdot L_2 \to L_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2\cdot x_3 + 3\cdot x_4 = 4 \\ x_2 + 7\cdot x_3 - 7\cdot x_4 = -5 \\ \boxed{0 = -5} \end{cases}$$

- Note que P(A)=2 e P[A|B]=3.
- P(A)<P[A|B] caracteriza um sistema impossível

Sistema possível e indeterminado (SPI)= sistema com infinitas soluções

2. Resolva o sistema linear $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 11x_4 = 12 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{array}\right) \times(-2) \underset{L_2-2\cdot L_1 \to L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{array}\right) \times(-5) \underset{L_3-5\cdot L_1 \to L_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \times(-2) \underset{L_3-2\cdot L_2 \to L_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2\cdot x_2 - 2\cdot x_3 + 3\cdot x_4 = 2 \\ x_3 - 2\cdot x_4 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Solução:

$x_1 = 4 - 2x_2 + x_4$

$x_2 = x_2$

$x_3 = 1 + 2x_4$

$x_4 = x_4$

Matricialmente $\Leftrightarrow$

$$X = \begin{bmatrix} 4 - 2x_2 + x_4 \\ x_2 \\ 1 + 2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

- Note que P(A)=P[A|B]=2< n onde n=4 é o número de variáveis do sistema
- Nul(A)=n – P(A)= 4 – 2 = 2 variáveis livres na solução

Sistema possível e determinado (SPD)= sistema com única solução

3. Resolva o sistema linear $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_3 + 8x_3 - 10x_4 = -2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -5 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & -10 & -2 \end{array}\right) \times(-2) \overset{?}{\underset{L_2-2\cdot L_1\to L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 12 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & -10 & -2 \end{array}\right) \times(-1) \overset{?}{\underset{L_3-1\cdot L_1\to L_3}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 12 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & 8 & -10 & -2 \end{array}\right) \times(-3)$$

$$\equiv \overset{?}{\underset{L_4-3\cdot L_1\to L_4}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 12 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & -8 \end{array}\right) \overset{?}{\underset{L_3\leftrightarrow L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 12 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & -8 \end{array}\right) \times(1) \overset{?}{\underset{L_4-(-1)\cdot L_2\to L_4}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -10 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2\cdot x_2 + 3\cdot x_3 - 5\cdot x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 + 5\cdot x_4 = -2 \\ -5\cdot x_3 + 12\cdot x_4 = 1 \\ 10\cdot x_4 = -10 \end{cases} \quad (1) \quad \Longleftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} \frac{-32}{5} \\ \frac{28}{5} \\ \frac{-13}{5} \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Note que P(A)=P[A|B]=4 = n onde n=4 é o número de variáveis do sistema
- Nul(A)=n – P(A)= 4 – 4 = 0 variáveis livres na solução

Determine todos os valores de $k \in \mathbb{R}$ para que o sistema $\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$

a) Tenha única solução
b) Não tenha solução
c) Tenha mais de uma solução

Determine a solução do sistema quando essa existir.