Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

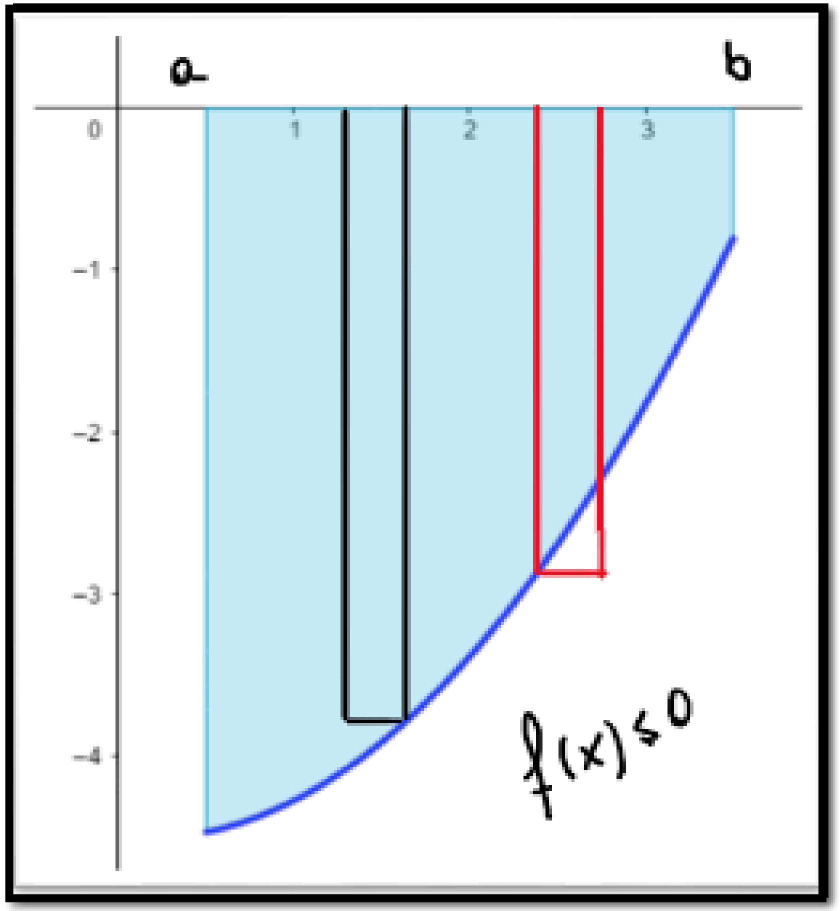
Somas de Riemann de função negativa

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 de 19 de agosto de 2024.

Somas de Riemann de função negativa

O que ocorre com as Somas Superior e Inferior caso $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua e negativa?



Veja que a região estará situada abaixo do eixo x:

Nesse caso, as Somas Superior e Inferior (e consequentemente a integral definida) de f devem resultar em valores negativos.

A expressão para a base dos retângulos e para os pontos da partição devem ser mantidas.

Precisamos identificar o que ocorre com as "alturas" dos retângulos (circunscritos e/ou inscritos).

Para obter a Soma Superior devemos usar os pontos de máximo (locais) de f, por isso precisamos usar retângulos inscritos (em preto na figura).

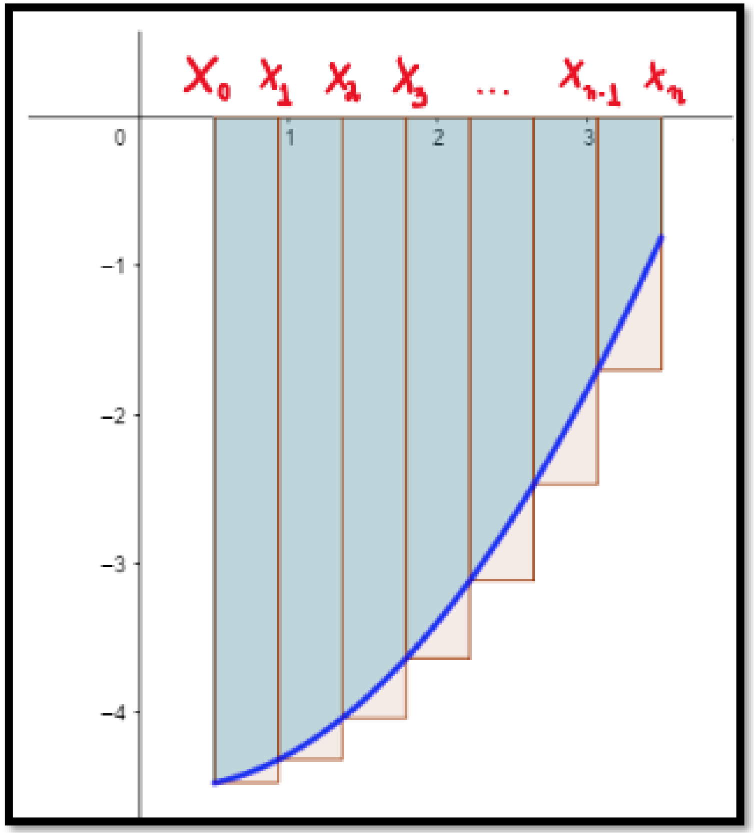
Para obter a Soma Inferior, devemos usar os pontos de mínimo (locais) de f, por isso precisamos usar agora retângulos circunscritos (em vermelho na figura).

Se f for negativa e crescente

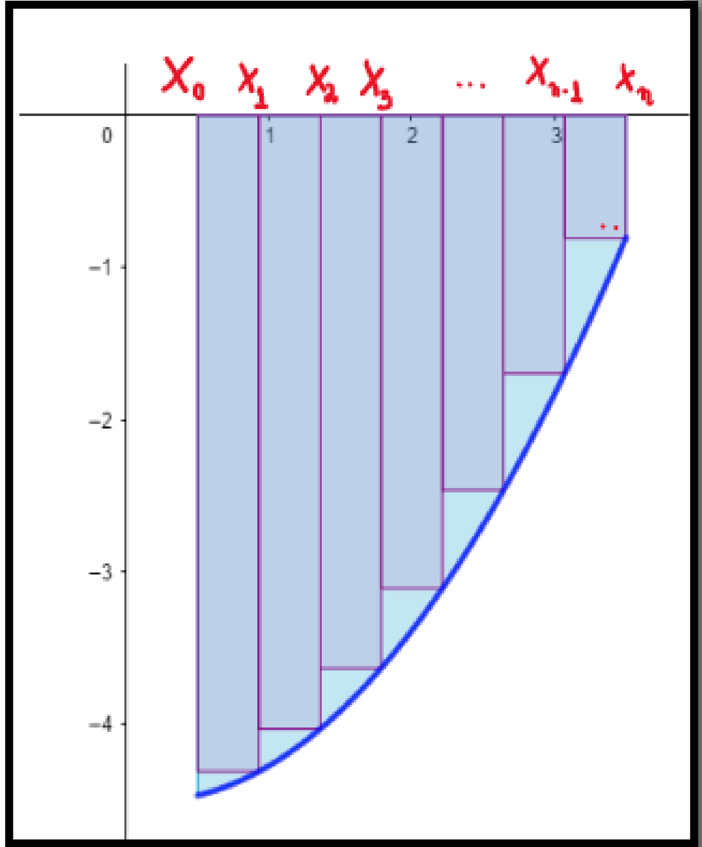
- Se f for negativa e crescente:

Os pontos de máximo, que agora estão associados a retângulos inscritos, ocorrem à direita de cada subintervalo da partição. Com isso, a Soma Superior de f é:

$$\overline{S}(f_{cresc}^{-}) = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x.$$



Compare essas expressões com as Somas Superior e Inferior de uma função positiva. Que mudanças ocorreram? Quais relações podem ser identificadas?



Os pontos de mínimo, que agora estão associados a retângulos circunscritos, ocorrem à esquerda de cada subintervalo da partição. Com isso, a Soma Inferior de f é:

$$\underline{S}(f_{cresc}^{-}) = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x.$$

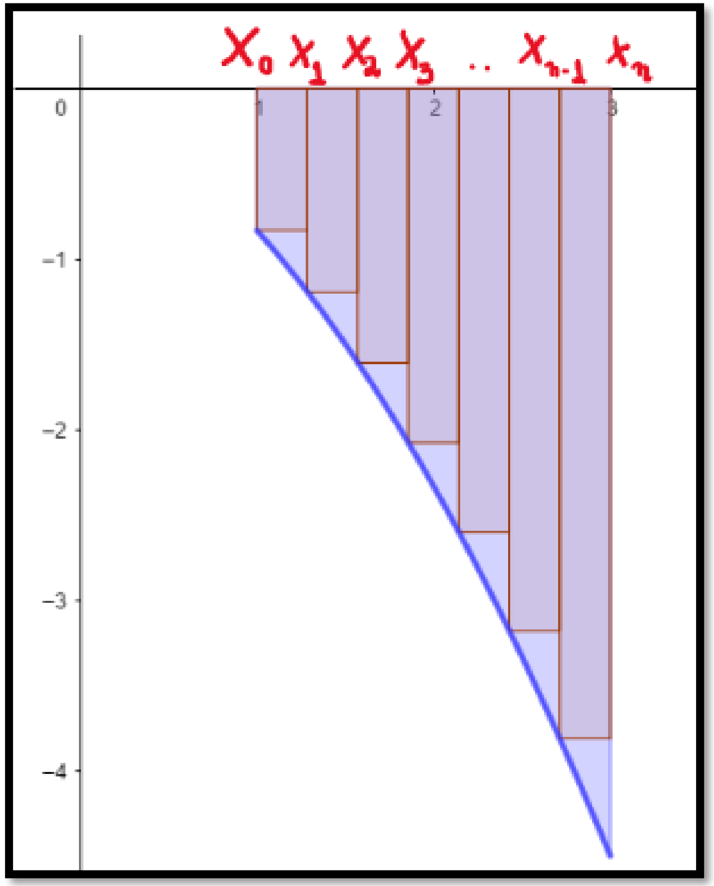
Se f for negativa e decrescente

- Se f for negativa e decrescente:

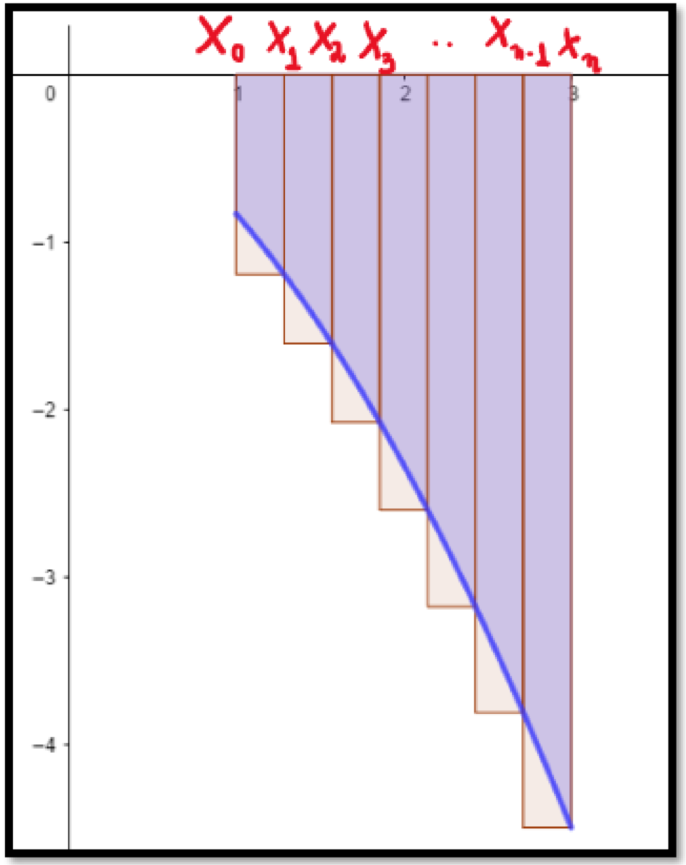
Os pontos de máximo, associados agora a retângulos inscritos, ocorrem à esquerda de cada subintervalo da partição.

Assim, a Soma Superior de f é:

$$\overline{S}\,(f^{-}_{decresc}) = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x.$$



Novamente, compare essas expressões com as Somas Superior e Inferior de uma função positiva. Que mudanças ocorreram? Quais relações podem ser identificadas?



Os pontos de mínimo, associados agora a retângulos circunscritos, ocorrem à direita de cada subintervalo.

A Soma Inferior de f é:

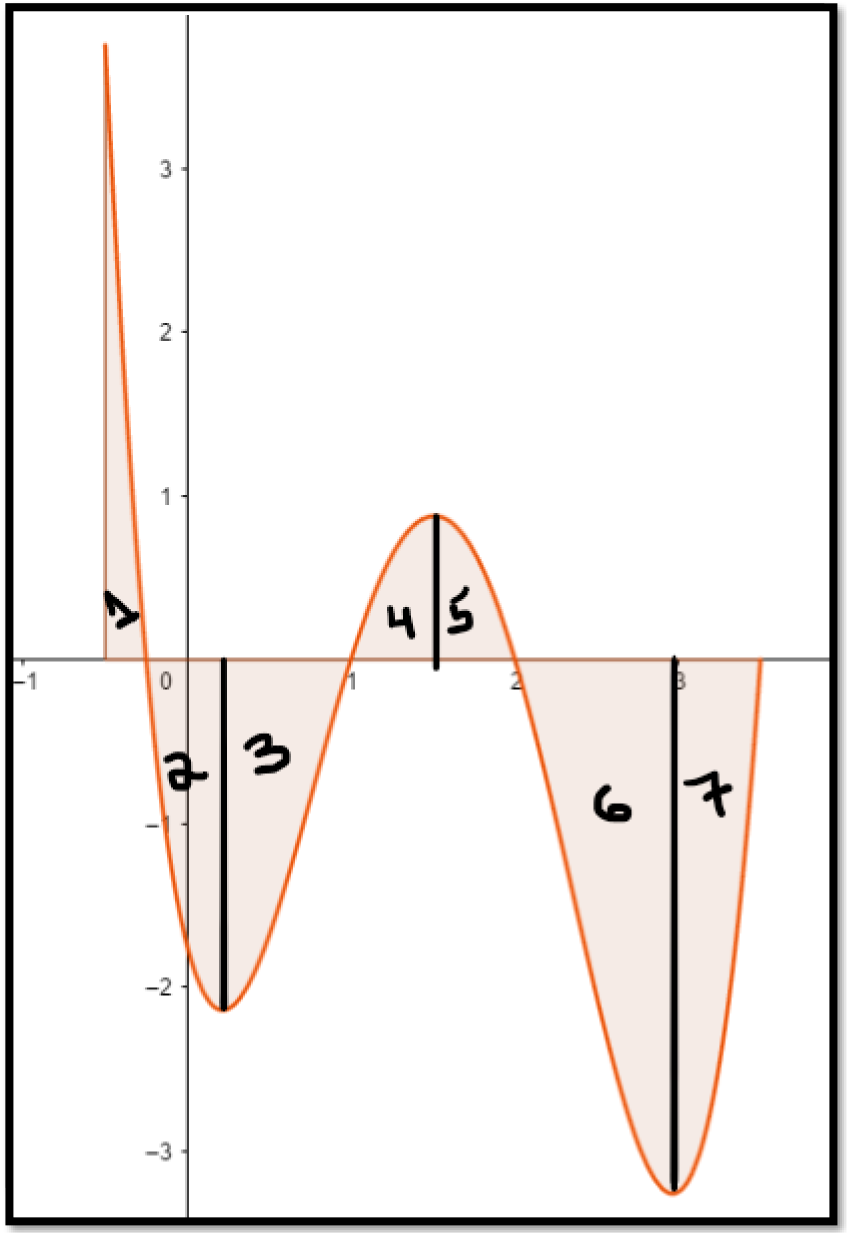
$$\underline{S}\,(f^{-}_{decresc}) = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x.$$

Caso Geral: função com mudança de sinal e de crescimento

E o que ocorre no caso geral, ou seja, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua qualquer, com variações em seu sinal e no seu crescimento?

Para calcular a Somas Superior e/ou Inferior, basta separar em tantos casos quanto for necessário, conforme as variações de sinal e de crescimento/decrescimento exigir:

Exemplo: No caso da função exibida ao lado, precisaríamos separar a região em 7 parcelas (intervalos de integração):



Parte 1: f positiva e decrescente;

Parte 2: f negativa e decrescente;

Parte 3: f negativa e crescente;

Parte 4: f positiva e crescente;

Parte 5: f positiva e decrescente;

Parte 6: f negativa e decrescente;

Parte 7: f negativa e crescente.

Exercícios

Exercício 1: Determine a Soma Inferior de $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$ para $x \in [-2, -1]$.

Em seguida, utilize a expressão obtida para determinar, por definição, o valor de

$$I = \int_{-2}^{-1} (3x^2 + 6x - 2)dx\,.$$

Exercício 2: Determine a Soma Inferior de $f(x) = -x^3 + 3x - 4$ para $x \in [0, 1]$.

Em seguida, utilize a expressão obtida para determinar, por definição, o valor de

$$I = \int_{0}^{1} (-x^3 + 3x - 4)dx\,.$$

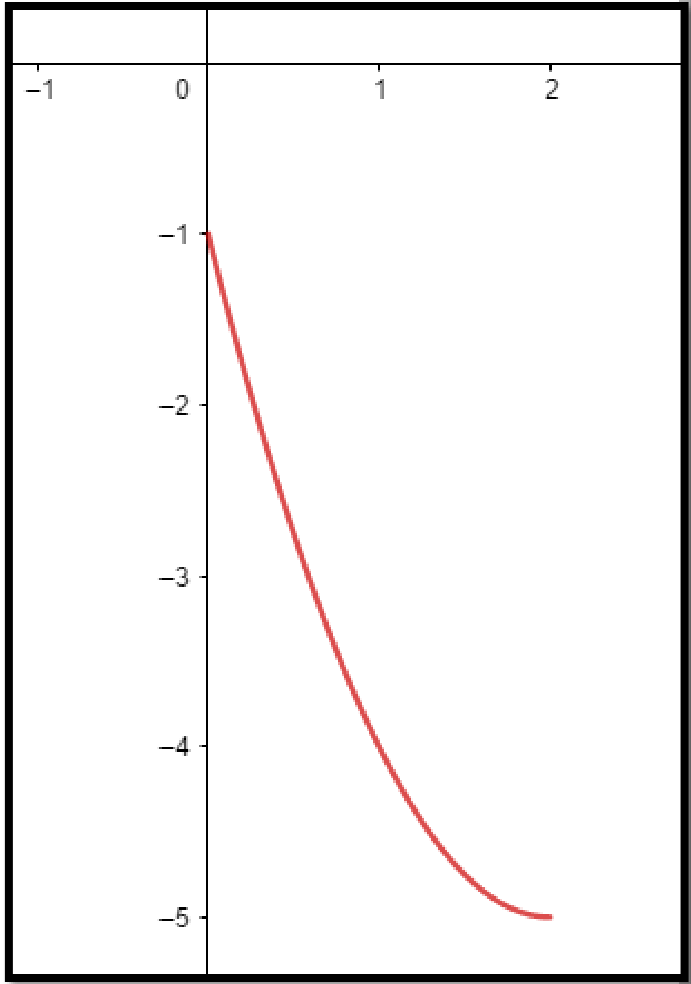
Solução: os dois exercícios foram inteiramente resolvidos durante a aula.

Exemplo Resolvido

Exemplo 1: Determine a Soma Superior e a Soma Inferior de $f(x) = x^2 - 4x - 1$ para $x \in [0,2]$. Em seguida, utilize as expressões obtidas para determinar o valor de

$$I = \int_0^2 (x^2 - 4x - 1)dx\,.$$

Solução: A representação gráfica de f, no intervalo de $x \in [0,2]$ é:



Analisando o gráfico, vemos que f é contínua, negativa e decrescente em todo o intervalo $[0,2]$.

Definimos a base de cada um dos n retângulos por

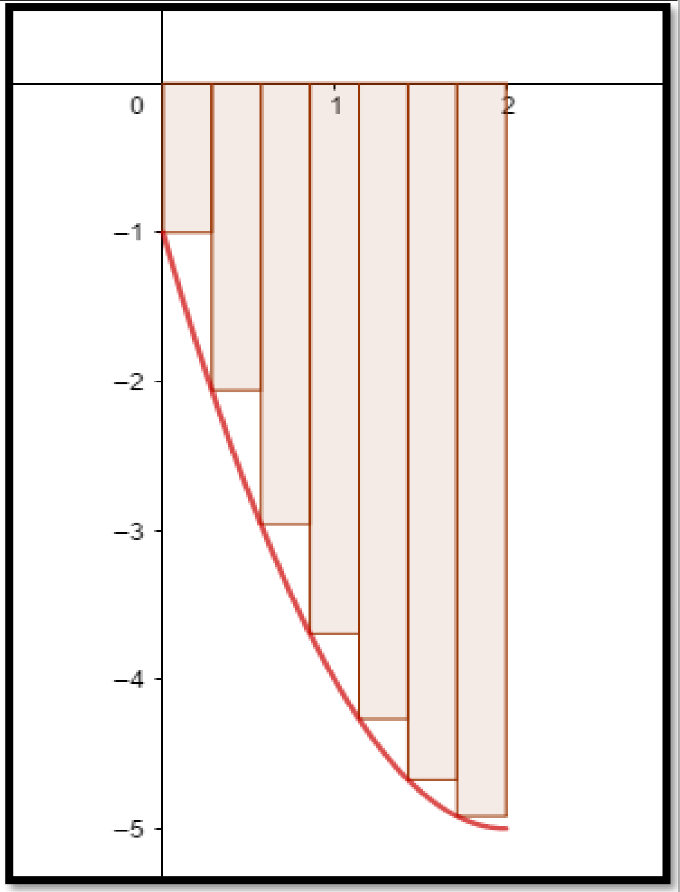
$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

Tomamos os pontos auxiliares (partição) dados por:

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = 0 + \Delta x = \Delta x,$$
$$x_2 = 0 + 2\Delta x = 2\Delta x, \qquad x_3 = 0 + 3\Delta x = 3\Delta x,$$
$$\ldots \qquad x_n = 0 + n\Delta x = n\Delta x.$$

Exemplo Resolvido

Para a Soma Superior, como f é negativa, os pontos de máximo estão situados à esquerda de cada subintervalo da partição e dão origem a retângulos inscritos.



Assim, a Soma Superior de f é dada por

$$\overline{S}(f) = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$

$$= [f(0) + f(\Delta x) + f(2\Delta x) + \cdots + f((n-1)\Delta x)].\Delta x$$

Substituindo $f(x) = x^2 - 4x - 1$:

$$= [(0^2 - 4.0 - 1) + \left((\Delta x)^2 - 4.(\Delta x) - 1\right) + \left((2\Delta x)^2 - 4.(2\Delta x) - 1\right) + \cdots +$$
$$+ \left(\left((n-1)\Delta x\right)^2 - 4\left((n-1)\Delta x\right) - 1\right)].\Delta x$$

$$= [-n + (\Delta x)^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2) - 4\Delta x.(1 + 2 + \cdots + (n-1))].\Delta x$$

Exemplo Resolvido

$$= \left[-n + (\Delta x)^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2) - 4\Delta x. \big(1 + 2 + \cdots + (n-1)\big)\right]. \Delta x$$

$$= \left[-n + (\Delta x)^2 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - 4\Delta x. \frac{(n-1)n}{2}\right]. \Delta x$$

$$= \left[-n + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - 4. \frac{2}{n}. \frac{(n-1).n}{2}\right]. \frac{2}{n}$$

$$= \left[-n + \frac{4}{n^2}. \frac{n(2n^2 - 3n + 1)}{6} - 4.(n-1)\right]. \frac{2}{n}$$

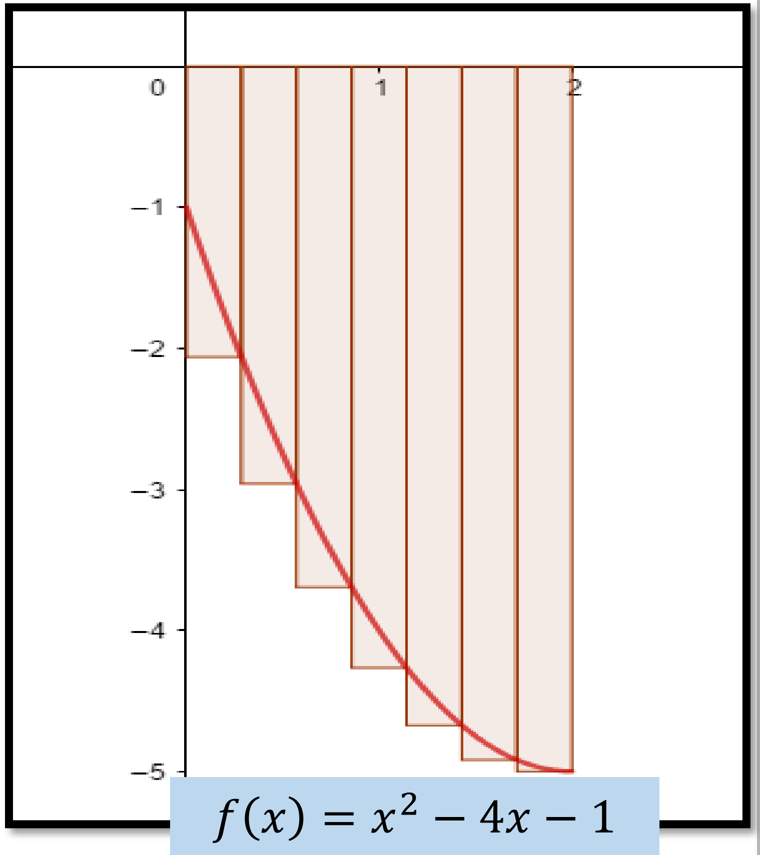
$$= \left[-n + \frac{2}{n}. \frac{(2n^2 - 3n + 1)}{3} - 4n + 4\right]. \frac{2}{n} \quad = \left[-n + \frac{4}{3}n - 2 + \frac{2}{3n} - 4n + 4\right]. \frac{2}{n}$$

$$= \left[-\frac{11}{3}n + 2 + \frac{2}{3n}\right]. \frac{2}{n} \quad = -\frac{22}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}.$$

Exemplo Resolvido

Portanto:

$$\overline{S}(f) = -\frac{22}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}.$$



Para obter a Soma Inferior, basta utilizar os pontos de mínimo de f, que por ser negativa e decrescente, ocorrem no extremo à direita de cada subintervalo da partição. Logo

$$\underline{S}(f) = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

$$= [f(\Delta x) + f(2\Delta x) + f(3\Delta x) \ldots + f(n\Delta x)].\Delta x$$

$$= [((\Delta x)^2 - 4\Delta x - 1) + ((2\Delta x)^2 - 4.2\Delta x - 1) + ((3\Delta x)^2 - 4.3\Delta x - 1) + \cdots +$$

$$+ ((n\Delta x)^2 - 4n\Delta x - 1)].\Delta x$$

$$= [((\Delta x)^2 - 4\Delta x - 1) + ((2\Delta x)^2 - 4.2\Delta x - 1) + ((3\Delta x)^2 - 4.3\Delta x - 1) + \cdots +$$

$$+ ((n\Delta x)^2 - 4n\Delta x - 1)].\Delta x$$

Exemplo Resolvido

$$= [-n + (\Delta x)^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - 4\Delta x.(1 + 2 + \cdots + n)].\Delta x$$

$$= \left[-n + (\Delta x)^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\Delta x.\frac{n(n+1)}{2}\right].\Delta x$$

$$= \left[-n + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{n(2n^2+3n+1)}{6} - 4.\frac{2}{n}.\frac{n(n+1)}{2}\right].\frac{2}{n}$$

$$= \left[-n + \frac{4}{n^2}.\frac{n(2n^2+3n+1)}{6} - 4.(n+1)\right].\frac{2}{n}$$

$$= \left[-n + \frac{2}{n}.\frac{(2n^2+3n+1)}{3} - 4n - 4\right].\frac{2}{n} \qquad = \left[-n + \frac{4}{3}n + 2 + \frac{2}{3n} - 4n - 4\right].\frac{2}{n}$$

$$= \left[-\frac{11}{3}n - 2 + \frac{2}{3n}\right].\frac{2}{n} \qquad = -\frac{22}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}.$$

Exemplo Resolvido

Agora, resta calcular o valor da integral definida. Usando a expressão para a Soma Inferior, obtemos que

$$I = \int_0^2 (x^2 - 4x - 1)dx = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{22}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

$$= -\frac{22}{3} - 0 + 0 = -\frac{22}{3}.$$

Note que a integral realmente resultou em um valor negativo.

Tal valor não pode corresponder à área da região situada entre o gráfico de f e o eixo x.

Isso ocorreu devido ao fato de f ser negativa no intervalo de integração.

Veja que tal fato faz com que o eixo x corresponde ao "topo" da região, enquanto o gráfico de f é uma espécie de "base" d

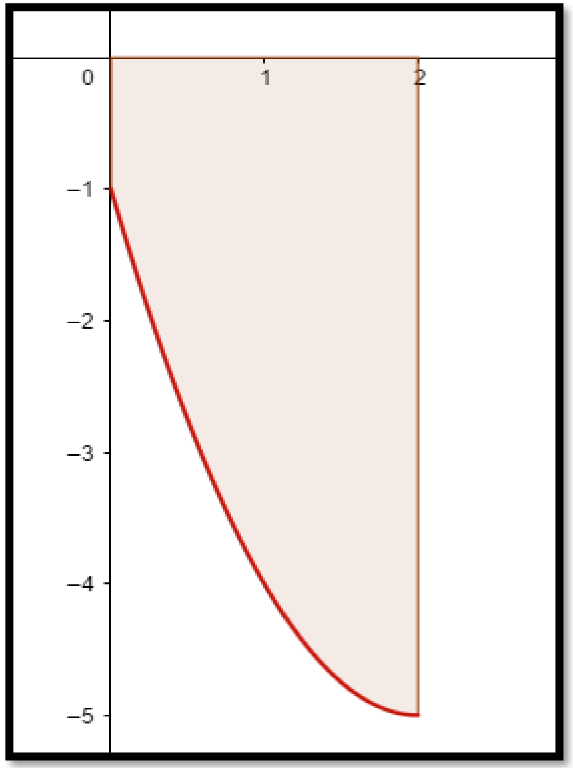
Ou seja, ocorreu uma "inversão" entre a posição do gráfico e do eixo, em relação ao caso em que f é positiva.

Para obter a área da região destacada na figura, basta aplicar o módulo do valor obtido com a integral.

Exemplo Resolvido

Como tal valor é negativo, para obter seu módulo basta alterar seu sinal.

Assim, a área da região situada entre o eixo x e o gráfico de f é dada por



$$\acute{a}rea\ (R) = -\int_0^2 (x^2 - 4x - 1)dx$$

$$= -\left(-\frac{22}{3}\right) = \frac{22}{3}\ unid.\ \acute{a}rea.$$

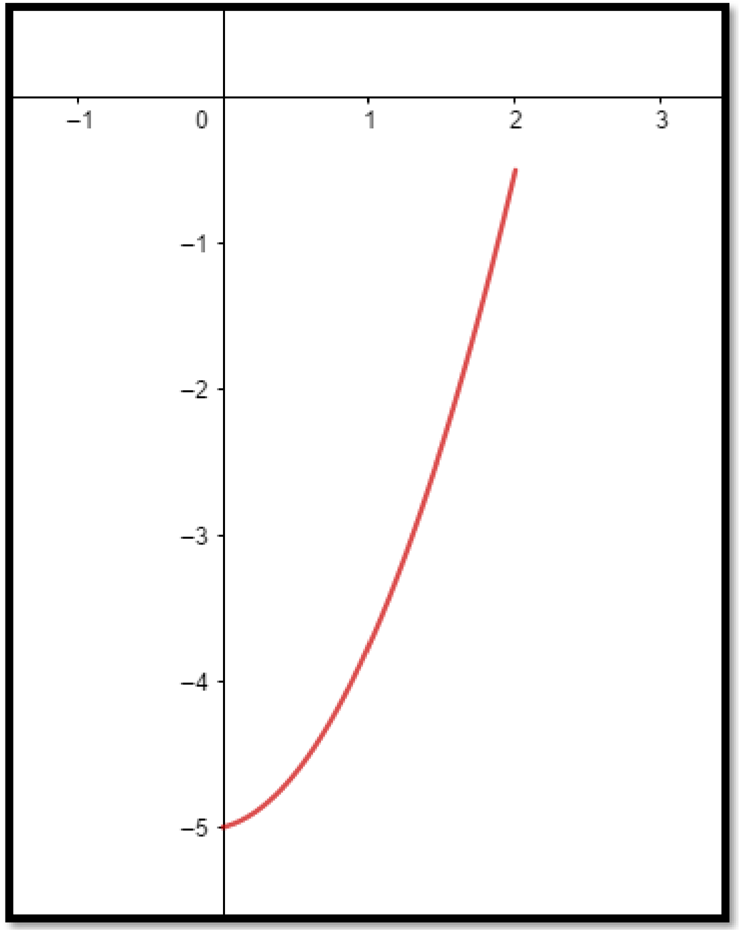
Exercício 1: Determine a Soma Superior e a Soma Inferior de $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}x - 3$ para $x \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$. Em seguida, utilize uma das expressões obtidas para determinar o valor de

$$I = \int_0^{\frac{3}{2}} \left(x^2 + \frac{1}{4}x - 3\right) dx\,.$$

Exemplo Resolvido

Exemplo 2: Determine a Soma Superior e a Soma Inferior de $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}x - 5$ para $x \in [0,2]$. Em seguida, utilize uma das expressões obtidas para determinar o valor de

$$I = \int_0^2 \left(x^2 + \frac{1}{4}x - 5 \right) dx .$$



Solução: A representação gráfica de f, para $x \in [-1,2]$ é:

Analisando o gráfico, vemos que f é contínua, negativa e crescente em todo o intervalo $[0,2]$.

Definimos a base de cada um dos n retângulos por

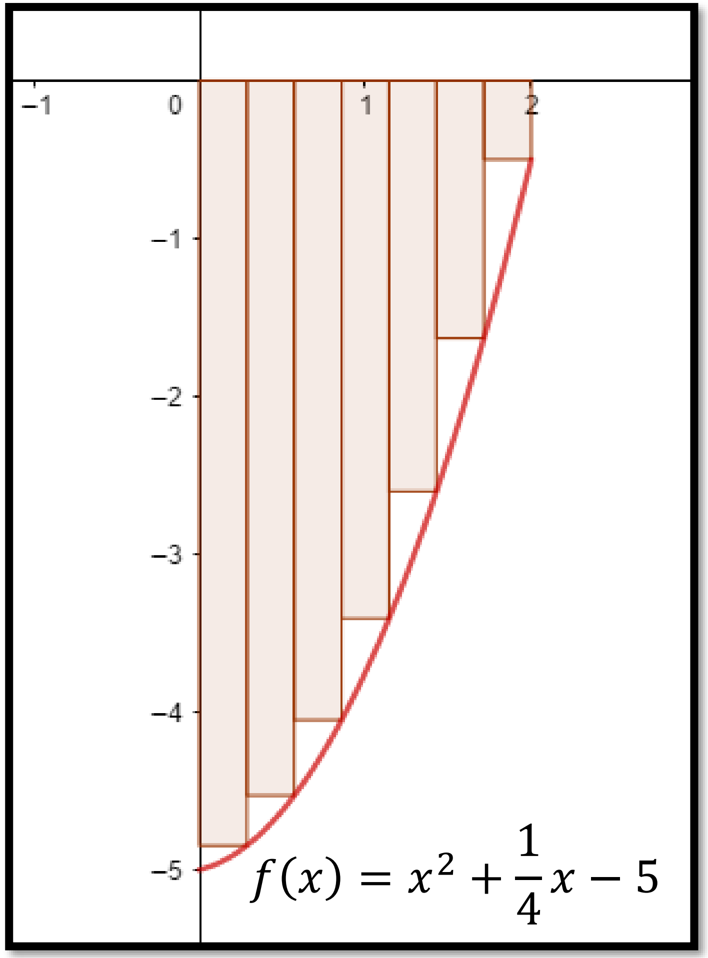
$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}.$$

Tomamos os pontos auxiliares (partição) dados por:

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = 0 + \Delta x = \Delta x, \qquad x_2 = 0 + 2\Delta x = 2\Delta x,$$
$$x_3 = 0 + 3\Delta x = 3\Delta x, \qquad \dots \qquad x_n = 0 + n\Delta x = n\Delta x.$$

Exemplo Resolvido

Para a Soma Superior, como f é negativa, os pontos de máximo estão situados à direita de cada subintervalo da partição e dão origem a retângulos inscritos.



Assim, a Soma Superior de f é dada por

$$\overline{S}(f) = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

$$= [f(\Delta x) + f(2\Delta x) + f(3\Delta x) + \cdots + f(3\Delta x)].\Delta x$$

$$= \left[\left((\Delta x)^2 + \tfrac{1}{4}\Delta x - 5\right) + \left((2\Delta x)^2 + \tfrac{1}{4}.(2\Delta x) - 5\right)\left((3\Delta x)^2 + \tfrac{1}{4}.(3\Delta x) - 5\right) + \right.$$

$$\left. \ldots + \left((n\Delta x)^2 + \tfrac{1}{4}(n\Delta x) - 5\right)\right].\Delta x$$

Exemplo Resolvido

$$= \left[\left((\Delta x)^2 + \frac{1}{4}\Delta x - 5\right) + \left((2\Delta x)^2 + \frac{1}{4}.(2\Delta x) - 5\right) + \left((3\Delta x)^2 + \frac{1}{4}.(3\Delta x) - 5\right) + \cdots \right.$$
$$\left. + \left((n\Delta x)^2 + \frac{1}{4}(n\Delta x) - 5\right)\right].\Delta x$$

$$= \left[(\Delta x)^2(1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + \frac{1}{4}\Delta x.(1 + 2 + 3 + \cdots + n) - 5n\right].\Delta x$$

$$= \left[\left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{4}.\frac{2}{n}.\frac{n(n+1)}{2} - 5n\right].\frac{2}{n}$$

$$= \left[\frac{4}{n^2}.\frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} + \frac{1}{4}.(n+1) - 5n\right].\frac{2}{n}$$

$$= \left[\frac{2}{n}.\frac{(2n^2 + 3n + 1)}{3} + \frac{1}{4}n + \frac{1}{4} - 5n\right].\frac{2}{n} \quad = \left[\frac{4}{3}n + 2 + \frac{2}{3n} + \frac{1}{4}n + \frac{1}{4} - 5n\right].\frac{2}{n}$$

$$= \left[-\frac{41}{12}n + \frac{9}{4} + \frac{2}{3n}\right].\frac{2}{n} \qquad = -\frac{41}{6} + \frac{9}{2n} + \frac{4}{3n^2}.$$

Exemplo Resolvido

Portanto

$$\overline{S}(f) = -\frac{41}{6} + \frac{9}{2n} + \frac{4}{3n^2}.$$

A Soma Inferior pode ser obtida de forma análoga, utilizando os pontos de mínimo de f, que por ser negativa e crescente, ocorrem no extremo à esquerda de cada subintervalo da partição.

Tal cálculo é deixado como exercício!

Vamos utilizar a Soma Superior para calcular o valor da integral desejada:

$$I = \int_0^2 \left(x^2 + \frac{1}{4}x - 5\right) dx = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{41}{6} + \frac{9}{2n} + \frac{4}{3n^2}$$

$$= -\frac{41}{6} - 0 + 0 = -\frac{41}{6}.$$

Note que o valor negativo para a integral corresponde ao fato da região estar situada abaixo do eixo x, pois f é negativa no intervalo de integração.