Igualdade e operações com vetores

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $K \in \mathbb{R}$:

(I) $\vec{u} = \vec{v} \iff x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$

(II) $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$K\vec{u} = (Kx_1, Kx_2, Kx_3)$

$\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$

Vetor definido por dois pontos

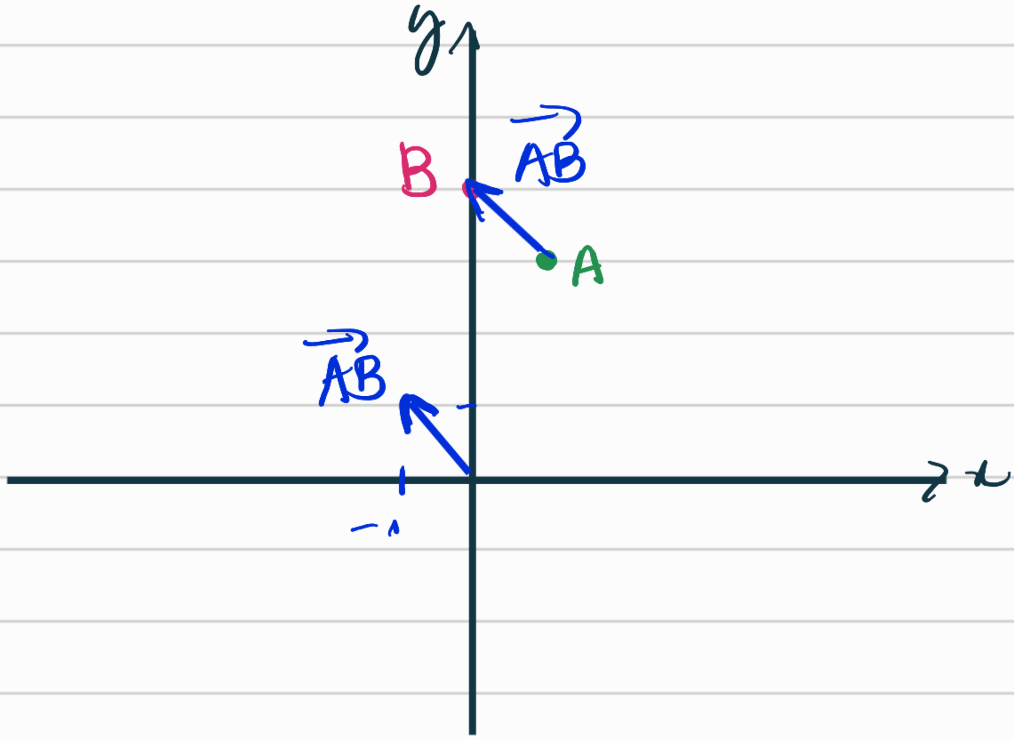
Se $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ são dois pontos no espaço, então

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Façamos um exemplo em $\mathbb{R}^2$, para um melhor entendimento: sejam $A(1,3)$ e $B(0,4)$. Então, o vetor $\vec{AB}$ é dado por

$$\vec{AB} = (0-1, 4-3) = (-1, 1)$$

No gráfico, temos



Condição de Paralelismo de dois vetores

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são colineares (ou paralelos) se existe $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{u} = K\vec{v}, \text{ ou seja,}$$

$$(x_1, y_1, z_1) = K(x_2, y_2, z_2)$$

$$\Leftrightarrow (x_1, y_1, z_1) = (Kx_2, Ky_2, Kz_2)$$

$$\Leftrightarrow x_1 = Kx_2, \quad y_1 = Ky_2 \quad e \quad z_1 = Kz_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = K, \quad \frac{y_1}{y_2} = K \quad e \quad \frac{z_1}{z_2} = K$$

Logo, podemos dizer que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos se

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = K},$$

para algum $K \in \mathbb{R}$, ou seja, quando suas coordenadas são proporcionais.

$\boxed{\text{Exemplo}}$: Os vetores $\vec{u} = (3, 1, -5)$ e $\vec{v} = (-6, -2, 10)$ são paralelos, pois

$$\frac{3}{-6} = \frac{1}{-2} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

Assim, $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{v}$ ou $\vec{v} = -2\vec{u}$

$\boxed{\text{Exercícios}}$ 1 Determine a e b de modo que sejam colineares os pontos $A(3, 1, -2)$, $B(1, 5, 1)$ e $C(a, b, 7)$!

Resolução: Precisamos que os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ sejam paralelos. Então, temos

$$\vec{AB} = B - A = (1-3, 5-1, 1-(-2)) = (-2, 4, 3)$$
$$\vec{AC} = C - A = (a-3, b-1, 7+2)$$

Para que $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ sejam paralelos, devemos ter

$$\frac{-2}{a-3} = \frac{4}{b-1} = \frac{3^{\div 3}}{9_{\div 3}} = \frac{1}{3}$$

- $\frac{-2}{a-3} = \frac{1}{3} \iff a-3 = -6 \iff \boxed{a = -3}$
- $\frac{4}{b-1} = \frac{1}{3} \iff b-1 = 12 \iff \boxed{b = 13}$

2. Dados os pontos $P(1,2,4)$, $Q(2,3,2)$ e $R(2,1,-1)$, determinar as coordenadas de um ponto S tal que P, Q, R e S sejam os vértices de um paralelogramo.

Resolução:

Precisamos encontrar S tal que $\vec{PS} = \vec{QR}$ e $\vec{RS} = \vec{QP}$.

Considere S o ponto com coordenadas (a, b, c). Então,

$$\vec{PS} = \vec{QR} \Leftrightarrow (a-1, b-2, c-4) = (2-2, 1-3, -1-2)$$
$$\Leftrightarrow (a-1, b-2, c-4) = (0, -2, -3)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a = 1}, \quad \boxed{b = 0} \quad e \quad \boxed{c = 1}$$

Com isso, temos $S(1,0,1)$. Observe que

$$\vec{RS} = (1-2, 0-1, 1-(-1)) = (-1,-1,2)$$
$$\vec{QP} = (1-2, 2-3, 4-2) = (-1,-1,2)$$