Séries de Taylor: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$

Séries de Maclaurin: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n$ ; $c_n = \frac{f^n(a)}{n!}$

$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ; $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\qquad e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Funções reais de várias variáveis reais: Seja $D$ um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) \in D$. Uma função real de n-variáveis reais é uma correspondência $f$ que a cada n-upla coordenadora $\in D$ associa um único número $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$.

Limite de funções de duas ou três variáveis reais

Propriedade dos limites

(I) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \pm \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$

(II) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} c\, f(x,y) = c \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \quad \forall c \in \mathbb{R}$

(III) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) \cdot g(x,y)] = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \cdot \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$

(IV) Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) \neq 0$ então $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)}$

Continuidade: $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua se e somente se:

(I) $f$ está definida em $(x_0, y_0)$ ou seja, existe $f(x_0,y_0)$

(II) existe o $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

(III) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

Derivadas Parciais

Definição: Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função variável de duas variáveis reais. Definimos a derivada parcial de $f$ em relação a $x$ por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

e a derivada em relação a $y$ por:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ • $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

- $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ ; • $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ • $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Teorema de Schwartz: Se $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, com todas as derivadas parciais até segunda ordem, então: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Teorema 1: Se $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ e os limites

$\lim_{x\to x_0} g(x)$ e $\lim_{y \to y_0} h(y)$ existem, então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{x\to x_0} g(x) \cdot \lim_{y\to y_0} h(y)$$

Teorema 2: Se $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de uma variável real, contínua em $a$, então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(f(x,y)) = g(a) = g\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\right)$$

Teorema 3: Se $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ e $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função limitada em alguma vizinhança de $(x_0, y_0)$ então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\, g(x,y) = 0$$

Limite por caminhos

Regra dos Caminhos: Sejam $c_1$ e $c_2$ caminhos distintos que passam pelo ponto $(x_0, y_0)$ tais que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ c_1}} f(x,y) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ c_2}} f(x,y) = L_2$$

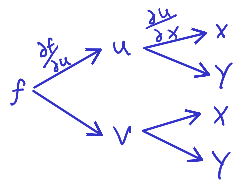
Se $L_1 \neq L_2$ então $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ $\nexists$ ⚠ caminhos ñ comprovam a existência

Regra da Cadeia para funções compostas

Se $f = f(u,v)$ é uma função diferenciável, com $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$ funções diferenciáveis então:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

e




$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

Equação do Plano tangente

Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $P = (x_0, y_0)$

- Vetor normal $\vec{n} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), 1\right)$

- Equação do Plano:

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \cdot x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \cdot y + 1 \cdot z + d = 0$$

basta subs. P na Eq.

## Regras de Derivação: seja $k \in \mathbb{R}$, $u=u(x)$ e $v=v(x)$:

1. $(k)' = 0$
2. $(u^n)' = n u^{n-1} u'$
3. $(kv)' = k v'$
4. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
5. $(u \cdot v)' = u v' + u' \cdot v$
6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{v.u' - u.v'}{v^2}$
7. $(a^u)' = u'.a^u \ln(a)$
8. $(e^u)' = u' e^u$
9. $(\operatorname{sen}(u))' = u' \cos(u)$
10. $(\cos(u))' = -u' \operatorname{sen}(u)$
11. $(\operatorname{tg}(u))' = u' \sec^2(u)$
12. $(\operatorname{cotg}(u))' = -u' \operatorname{cossec}^2(u)$
13. $(\sec(u))' = u' \sec(u).\operatorname{tg}(u)$
14. $(\operatorname{cossec}(u))' = -u' \operatorname{cossec}(u) \operatorname{cotg}(u)$
15. $(\operatorname{senh}(u))' = u' \cosh(u)$
16. $(\cosh(u))' = u' \operatorname{senh}(u)$
17. $(\operatorname{tgh}(u))' = u' \operatorname{sech}^2(u)$
18. $(\operatorname{cotgh}(u))' = -u' \operatorname{cossech}^2(u)$
19. $(\operatorname{sech}(u))' = -u' \operatorname{sech}(u).\operatorname{tgh}(u)$
20. $(\operatorname{cossech}(u))' = -u' \operatorname{cossech}(u).\operatorname{cotg}(u)$
21. $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$
22. $(\log_k u)' = \dfrac{u'}{u} \log_k e$
23. $(\operatorname{arcsen}(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
24. $(\arccos(u))' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
25. $(\operatorname{arctg}(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
26. $(\operatorname{arccotg}(u))' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
27. $(\operatorname{arcsec}(u))' = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$
28. $(\operatorname{arccsc}(u))' = -\dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

## Limites Notáveis

I. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} =$

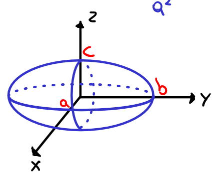
II. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$

III. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

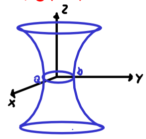
IV. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

## Curvas no $\mathbb{R}^3$

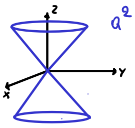
Elipsoide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



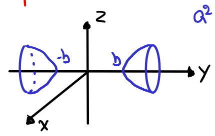
Hiperbolóide 1 folha: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



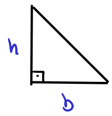
Cone: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z$



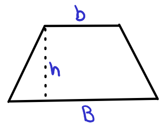
Hiperbole 2 folhas: $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



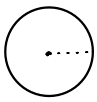
## Fórmulas Geométricas



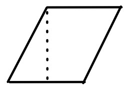
$A = \dfrac{bh}{2}$



$A = \dfrac{(B+b)h}{2}$



$A = \pi r^2$



$A = b.h$

## Curvas em cartesianas

• Elipse: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

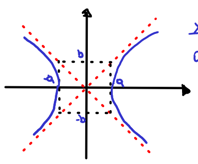
↳ a é o semi-eixo maior (maior denominador)

↳ vertices do semi-eixo maior está em $\pm a$ e do semi-eixo menor em $\pm b$.

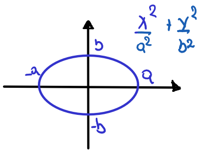
• Hipérbole: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ou $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$

↳ vértices estão em $\pm a$ para hipérbole horizontal e $\pm b$ para uma hipérbole vertical

↳ assintotas são $y = \pm \frac{b}{a} x$ (horizontal) ou $x = \pm \frac{a}{b} y$ (vertical)



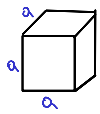
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

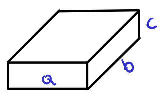
## Relações Úteis

- $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $\operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta$
- $1 + \operatorname{cotg}^2\theta = \operatorname{cossec}^2\theta$
- $\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta \cos\theta$
- $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2\theta$
- $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \operatorname{sen} b \cos a$
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$
- $\cos^2(\theta) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2\theta)$ • $\operatorname{sen}^2(\theta) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2\theta)$



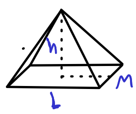
$V = a^3$

$A_t = 6a^2$

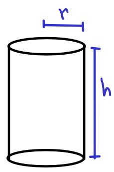


$V = abc$

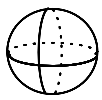
$A_t = 2(ab + ac + bc)$



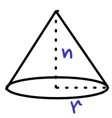
$V = \dfrac{Ab.h}{3}$ ; $Ab = L\,M$



$V = \pi r^2 h$



$V = \dfrac{4\pi r^2}{3}$



$V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$