Álgebra Linear (ALI0001)

Composição de Transformações Lineares
Inversa de Transformação Linear

Professores: Marnei, Graciela e Katiani

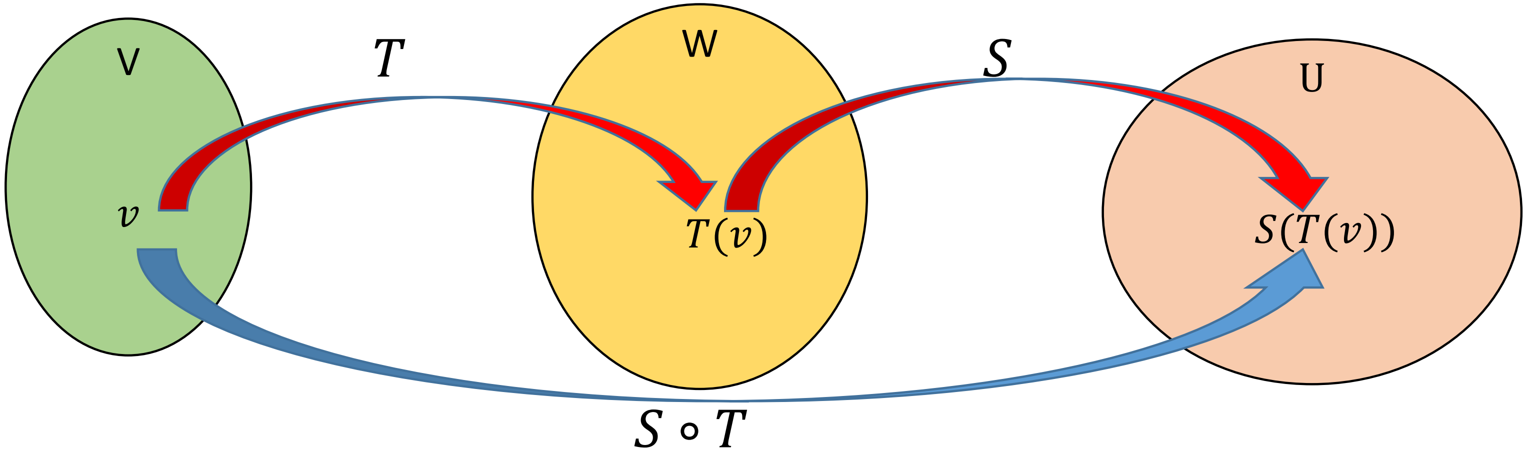
UDESC

Composição de Transformações Lineares

Definição: Sejam $T: V \to W$ e $S: W \to U$ transformações lineares.

A transformação composta entre S e T é definida como $S \circ T: V \to U$ tal que

$$(S \circ T)(v) = S(T(v))$$



Observações:

- Para $S \circ T$ estar definida é necessário que $Domínio(S) = W = Contradomínio(T)$.
- Note que, nesse caso:

$$Domínio(S \circ T) = V = Domínio(T)$$

e

$$Contradomínio(S \circ T) = U = Contradomínio(S)$$

Composição de Transformações Lineares

Cuidado: Em geral, têm-se que

$$S \circ T \neq T \circ S$$

pois $T \circ S$ pode sequer estar definida.

Teorema: Se $T: V \to W$ e $S: W \to U$ são transformações lineares então a composta

$$S \circ T: V \to U$$

também é linear.

Justificativa: Vamos verificar que a composta $S \circ T$ preserva a soma e a multiplicação por escalar. De fato, se $v_1, v_2 \in V$ e $k \in \mathbb{R}$ então

$$(S \circ T)(v_1 + v_2) = S(T(v_1 + v_2)) = S\big(T(v_1) + T(v_2)\big)$$

$$= S\big(T(v_1)) + S(T(v_2)\big) = (S \circ T)(v_1) + (S \circ T)(v_2)$$

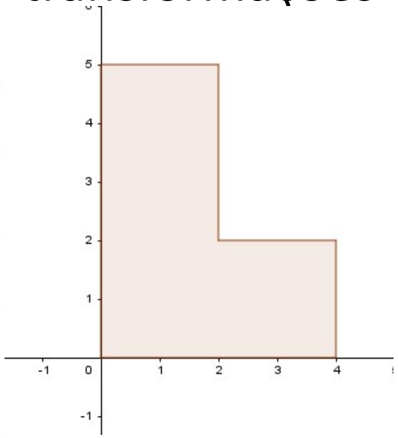
e

$$(S \circ T)(kv_1) = S(T(kv_1)) = S\big(kT(v_1)\big) = kS\big(T(v_1)\big) = k(S \circ T)(v_1)$$

como desejado.

Exemplo

Exemplo 1) Considere $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (\mathrm{x}+\mathrm{y},\mathrm{y})$ e S: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $S(x,y) = (y,x)$. Obtenha $S \circ T$ e $T \circ S$. Verifique o efeito de cada uma das transformações otidas sobre a figura abaixo.



Exemplo 2. Considere $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y) = (x+3y,\ 2x-y, 3x-4y)$ e $S:\mathbb{R}^3 \to P_2$ dada por $S(a,b,c) = (a+b+c) + (2a-b+3c)x + (-a+3b-2c)$. Determine, se possível:

a) A transformação $S \circ T$

b) A transformação $T \circ S$

c) As matrizes canônicas de $S \circ T$, de T e de S. Qual a relação entre elas?

Teorema: Matriz Canônica de uma Composição

Teorema: Se $T: V \to W$ e $S: W \to U$ são transformações lineares então a composta $S \circ T: V \to U$ é tal que

$$[S \circ T] = [S] \, . \, [T]$$

- **Observação 1:** Se α, β e γ são respectivamente bases dos espaços vetoriais V, W e U, então o teorema anterior pode ser generalizado para

$$[S \circ T]_{\gamma}^{\alpha} = [S]_{\gamma}^{\beta} \, . \, [T]_{\beta}^{\alpha}$$

- **Observação 2:** Em geral, a multiplicação de matrizes não é comutativa, ou seja,

$$[S] \, . \, [T] \neq [T] \, . \, [S]$$

o que indica que, ainda que ambas as multiplicações estejam definidas, têm-se que

$$S \circ T \neq T \circ S$$

Observação 3: Observe a relação estabelecida pela ordem das matrizes canônicas:

$$[S \circ T]_{\dim(U) \times \dim(V)} = [S]_{\dim(U) \times \dim(W)} \, . \, [T]_{\dim(W) \times \dim(V)}$$

Exemplo

Exemplo 3) Considere as transformações $T: M(2,2) \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b-c, 2b-c+3d, a+c-d)$$

e $S: \mathbb{R}^3 \to M(2,2)$ dada por $S(x,y,z) = \begin{bmatrix} x-2y+3z & 2x-y+z \\ 3x+2z & y+z \end{bmatrix}$.

Determine, se possível:

a) A transformação $S \circ T$

b) A transformação $T \circ S$

Temos que as matrizes canônicas de T e S são dadas por

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Assim, pelo Teorema anterior, temos que

a) $S \circ T: M(2,2) \to M(2,2)$ é tal que

$$[S \circ T] = [S] \,.\, [T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 4 & -9 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 5 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

E então

$$(S \circ T)\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4a - 3b + 4c - 9d & 3a - 4d \\ 5a + 3b - c - 2d & a + 2b + 2d \end{bmatrix}$$

b) $T \circ S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é tal que

$$[T \circ S] = [T].\,[S] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

E então

$$(T \circ S)(x, y, z) = (-3y + 2z, x + y + 3z, 4x - 3y + 4z)$$

Inversa de uma Transformação Linear

Definição: Se $T: V \to W$ é uma transformação linear bijetora, então dizemos que T é invertível e que existe a transformação linear inversa $T^{-1}: W \to V$ tal que

$$(T^{-1} \circ T)(v) = v \quad \text{para todo } v \in V.$$

e

$$(T \circ T^{-1})(w) = w \quad \text{para todo } w \in W.$$

Exemplo:

1) Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (3x - y, 2x + y)$.
   a) Mostre que T é invertível.
   b) Encontre T^{-1}.
   c) Determine as matrizes canônicas de T e de T^{-1}. Qual a relação entre elas?

Inversa de uma Transformação Linear

Observações:

- Se $T: V \to W$ é bijetora então $N(T) = \{\vec{0}\}$ e $Im(T) = W$. Aplicando o Teorema da Dimensão do Núcleo e da Imagem, obtemos que
$$\dim(V) = \dim(W)$$
- Portanto, a matriz canônica de T tem ordem $\dim(W) \times \dim(V) = \dim(W) \times \dim(W)$, ou seja, é uma matriz quadrada.
- Como $(T^{-1} \circ T)(v) = v$ todo $v \in V$ podemos denotar que $T^{-1} \circ T = I$ onde I é a transformação identidade. Da mesma forma, como $(T \circ T^{-1})(w) = w$ todo $w \in W$ denotamos que $T \circ T^{-1} = I$ onde I é a transformação identidade.
- Assim, obtemos que
$$[T^{-1} \circ T] = [I] = [T \circ T^{-1}]$$

E aplicando o teorema anterior:
$$[T^{-1}].[T] = [I] = [T].[T^{-1}]$$

Ou seja
$$[T^{-1}] = [T]^{-1}$$

E a matriz da transformação inversa é a inversa da matriz da transformação.

Inversa de uma Transformação Linear

Teorema: Uma transformação linear $T: V \to W$ é invertível se e somente se $\det([T]) \neq 0$

E, nesse caso, $T^{-1}: W \to V$ é tal que

$$[T^{-1}] = [T]^{-1}$$

- Observação: Se α e β são respectivamente bases dos espaços vetoriais V e W então o teorema anterior pode ser generalizado para

$$[T^{-1}]_{\alpha}^{\beta} = \left([T]_{\beta}^{\alpha}\right)^{-1}$$

Exemplo:

2) Seja $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$ dada por $T(a, b, c) = (a - b + c) + (2a + b + c)x + (a + c)x^2$. Verifique se T é invertível e, em caso afirmativo, encontre T^{-1}.

Inversa de uma Transformação Linear

Exemplo 2) Seja $T: P_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$T(1+x) = (1,-1,0), \quad T(-1+3x) = (0,1,1) \quad \text{e} \quad T(1+x^2) = (1,0,2)$$

Determine a lei de T^{-1}.

Exercícios

Da Lista:

Composição de Transformações: 34, 35, 36, 37, 38, 39

Inversa de Transformação: 13, 14, 15, 16.