# Zeros de Funções Reais

↳ Isolamento da raiz: encontrar um intervalo $[a,b]$ que contenha somente um zero de $f(x)$.

I) Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a,b]$. Se $f(a).f(b)<0$, então existe pelo menos um ponto $x^*$ no intervalo $(a,b)$, tal que $f(x^*)=0$.

II) Em um intervalo $[a,b]$, satisfazendo $f(a).f(b)<0$, a unicidade da raiz de $f(x)$ pode ser verificada pela derivada.

↳ Se $\forall x \in [a,b]$, $f'(x)<0$ ou $f'(x)>0$ → a raiz é única.

III) Seja $p_n(x)$ um polinômio de grau $n$, então $p(x)$ possui, no máximo, $n$ raízes reais.

↳ Refinamento da raiz: O grau de exatidão da aproximação pode ser medida por um critério de parada.

↳ Se $\bar{x}$ for conhecida: $|\bar{x}-x^*|<\varepsilon$

↳ Se $\bar{x}$ não for conhecida: $|f(x^*)|<\varepsilon$ ou $|x_k-x_{k-1}|<\varepsilon$

## Método da Bisseção

$$\boxed{x_0=\frac{a_0+b_0}{2}}$$

I) Dividir o intervalo $I=[a_0,b_0]$ ao meio obtendo os intervalos $[a_0,x_0]$ e $[x_0,b_0]$

II) Calcular $f(x_0)$
$$\begin{cases} \text{Se } f(x_0)=0,\ x_0=x^* \\ \text{Se } f(a_0).f(x_0)<0, \text{ então } I_1=[a_0,x_0]=[a_1,b_1] \\ \text{Se } f(x_0).f(b_0)<0, \text{ então } I_1=[x_0,b_0]=[a_1,b_1] \end{cases}$$

III) Calcular o ponto médio do intervalo $I_1$ e repetir o processo

↳ Estudo da convergência: temos $L_k=\frac{b-a}{2^k}$ e $|x_k-x_{k-1}|<\varepsilon$

↳ $\frac{b-a}{2^k}<\varepsilon$ ↳ ... $k>\frac{\ln(b-a)-\ln\varepsilon}{\ln(2)}$

↳ Tabela de cálculo método da bisseção:

| $i$ | $a$ | $b$ | $\frac{a+b}{2}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $a_0$ | $b_0$ | $\frac{a_0+b_0}{2}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | |

## Método das Cordas/Método da Secante

$f''(x)>0$ → conc. p/ cima
$f''(x)<0$ → conc. p/ baixo

↳ Condições:
$$\begin{cases} f(a).f(b)<0 \\ \text{Existe um único zero no intervalo } [a,b] \\ f''(x) \text{ tem sinal constante no intervalo } [a,b] \end{cases}$$

↳ Aproximação inicial $x_0$ precisa satisfazer $f(x_0).f''(x_0)<0$, a outra extremidade é fixa e denotada por $c$.

↳ Equação de recorrência:
$$\boxed{x_{k+1}=\frac{c\,f(x_k)-x_k.f(c)}{f(x_k)-f(c)}}$$
$$\begin{cases} f''(x)>0,\ f(a)<0,\ f(b)>0 \to x_0=a \text{ e } c=b \\ f''(x)>0,\ f(a)>0,\ f(b)<0 \to x_0=b \text{ e } c=a \\ f''(x)<0,\ f(a)<0,\ f(b)>0 \to x_0=b \text{ e } c=a \\ f''(x)<0,\ f(a)>0,\ f(b)<0 \to x_0=a \text{ e } c=b \end{cases}$$

↳ Algoritmo:

I) Verificar que $f(a)f(b)<0$, que existe um único zero em $[a,b]$, que $f''(x)$ tem sinal constante.

II) Se $f(a).f''(a)>0 \to x_0=a$ e $c=b$ caso contrário $x_0=b$ e $c=a$.

III) Aplicar a equação de recorrência, até o critério de parada ser atingido.

## Método de Newton-Raphson

↳ condições:
$$\begin{cases} f(a)f(b)<0 \\ \text{existe uma única raiz no intervalo } [a,b] \\ f'(x) \text{ é contínua e tem sinal constante no intervalo } [a,b] \\ f''(x) \text{ é contínua e tem sinal constante no intervalo } [a,b] \end{cases}$$

↳ Estimativa inicial $x_0$: $f(x_0)f''(x_0)>0$, se $f(a)<0$, $f(b)>0$ e $f''(x)>0$ então $x_0=b$

↳ Equação de Recorrência:
$$\boxed{x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

↳ Tabela de cálculo método Newton-Raphson:

| $i$ | $x_i$ | $f(x_i)$ | $f'(x_i)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $x_0$ | $f(x_0)$ | $f'(x_0)$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

## Resolução de sistemas não lineares.

↳ Dada uma função não linear $F: D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $F=(f_1,f_2,\dots,f_n)^T$, o objetivo é encontrar as soluções para:

$$F=\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)=0 \\ f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)=0 \\ \vdots \\ f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=0 \end{cases}$$
→ Sistema de equações não lineares

↳ Vamos admitir:

I) $f_i(x)$ possui derivadas contínuas em um conjunto $D\subset\mathbb{R}^n$

II) Existe pelo menos um ponto $x^*\in D$ tal que $F(x^*)=0$

↳ Vetor gradiente: $\nabla f_i(x)=\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1}\ \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_2}\ \dots\ \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_n}\right)^T$

↳ Matriz Jacobiana:
$$J(x)=\begin{bmatrix}\nabla f_1(x)\\ \nabla f_2(x)\\ \vdots\\ \nabla f_n(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

↳ Métodos iterativos:

I) Vetor inicial $x^0=[x_1^0\ x_2^0\ \dots\ x_n^0]^T$

II) Critério de parada $\|F(x^k)\|_\infty<\varepsilon$ e $\|x^{k+1}-x^k\|_\infty<\varepsilon$

↳ Usando Método de Newton:

* $x^{k+1}=x^k+s^k$ → soma vetorial
* onde $s^k=\frac{-F(x^k)}{J(x^k)}$ assim $\underbrace{J(x^k).s^k=-F(x^k)}_{\text{sistema de equações lineares}}$

↳ Algoritmo resolução de sistemas não lineares

↳ Dados: $x^0$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ → $k$ inicia com 0

↳ Passo 1: Calcular $F(x^k)$ e $J(x^k)$

Passo 2: Se $\|F(x^k)\|_\infty<\varepsilon_1$ então $x^*=x^k$, Pare

Passo 3: Resolver o sistema linear $J(x^k).s^k=-F(x^k)$

Passo 4: Atualizar a aproximação: $x^{k+1}=x^k+s^k$

Passo 5: Se $\|x^{k+1}-x^k\|_\infty=\|s^k\|_\infty<\varepsilon_2$, então $x^*=x^{k+1}$, Pare

Passo 6: $k$++, voltar ao passo 1.

Regras de Derivação: seja $K \in \mathbb{R}$, $u = u(x)$ e $v = v(x)$:

1. $(K)' = 0$
2. $(u^n)' = n u^{n-1} u'$
3. $(Kv)' = K v'$
4. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
5. $(u \cdot v)' = u v' + u' \cdot v$
6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$
7. $(a^u)' = u' \cdot a^u \ln(a)$
8. $(e^u)' = u' e^u$
9. $(\text{sen}(u))' = u' \cos(u)$
10. $(\cos(u))' = -u' \text{sen}(u)$
11. $(\text{tg}(u))' = u' \sec^2(u)$
12. $(\text{cotg}(u))' = -u' \text{cossec}^2(u)$
13. $(\sec(u))' = u' \sec(u) \cdot \text{tg}(u)$
14. $(\text{cossec}(u))' = -u' \text{cossec}(u) \text{cotg}(u)$
15. $(\text{senh}(u)) = u' \cosh(u)$
16. $(\cosh(u))' = u' \text{senh}(u)$
17. $(\text{tgh}(u))' = u' \text{sech}^2(u)$
18. $(\text{cotgh}(u))' = -u' \text{cossech}^2(u)$
19. $(\text{sech}(u))' = -u' \text{sech}(u) \cdot \text{tgh}(u)$
20. $(\text{cossech}(u))' = -u' \text{cossech}(u) \cdot \text{cotg}(u)$
21. $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$
22. $(\log_K u)' = \frac{u'}{u} \log_K e$
23. $(\text{arcsen}(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
24. $(\text{arccos}(u))' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
25. $(\text{arctg}(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$
26. $(\text{arccotg}(u))' = -\frac{u'}{1+u^2}$
27. $(\text{arsec}(u))' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$
28. $(\text{arccsc}(u))' = -\frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$