

Logaritmos e Função Logarítmica

1. Use as propriedades de logaritmos para desenvolver o logaritmo $\log_2 \left(\sqrt[3]{\frac{a^4 \cdot \sqrt{a+b}}{b^2 \cdot \sqrt[3]{bc}}} \right)^2$ onde

$$a, b, c > 0.$$

$$\text{R.: } \frac{2}{3} \left[4 \log_2 a + \frac{1}{2} \log_2 (a+b) - \frac{7}{3} \log_2 b - \frac{1}{3} \log_2 c \right]$$

2. Determinar o domínio, a imagem e construir o gráfico de cada função abaixo. Determine a inversa de cada função:

a) $f(x) = \ln(1+x)$ R.: $f^{-1}(x) = e^x - 1$; $D(f) = (-1, +\infty)$; $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

b) $g(x) = e^{2x} - 1$ R.: $f^{-1}(x) = \frac{\ln(x+1)}{2}$; $D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = (-1, +\infty)$

c) $h(x) = \log_3(1-3x)$ R.: $h^{-1}(x) = \frac{1-3^x}{3}$; $D(f) = (-\infty, \frac{1}{3})$; $\text{Im}(h) = \mathbb{R}$

3. Um estudo com um grupo de vestibulandos indica que a função $f(t) = 9e^{\frac{t}{3}} + 1$, com $t > 0$, é a quantidade do conteúdo de Geometria que um aluno consegue relembrar decorridas t semanas após o estudo. A função g , que expressa o tempo t em função da quantidade de conteúdo que o aluno consegue relembrar, é a inversa da função f . Determine g .

$$\text{R.: } g(t) = -3 \ln \left(\frac{t-1}{9} \right)$$

4. Determine o domínio das funções:

a) $f(x) = \sqrt{\log_2 \left(\log_{\frac{1}{2}} x \right)}$ R.: $(0, 1/2]$

b) $f(x) = e^{\sqrt{1-x^2} \ln(x^2-3x+4)}$ R.: $(-1, 1)$

c) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln(1+x^2)}}$ R.: \mathbb{R}^*

d) $h(x) = \frac{\ln(x^2-3x+2)}{\sqrt{e^x-1}}$ R.: $(0, 1) \cup (2, +\infty)$

5. Resolva o sistema $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 1 \\ \log_9 x + \log_3 y = 1 \end{cases}$.

$$\text{R.: } (2, 1)$$

6. Resolva o sistema $\begin{cases} 3^{\log_3(x+y)} = 2^{\log_{\frac{1}{2}}(x-y)} \\ \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

$$\text{R.: } \{(\sqrt{2}, 1); (-\sqrt{2}, -1)\}$$

7. Classifique as funções abaixo como pares, ímpares, ou nenhum dos dois casos:

a) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

b) $g(x) = \ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right)$

c) $h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\text{R.: apenas c) é ímpar, a) e b) nenhum dos casos}$$

8. Determine o valor do produto $(\log_2 3) \cdot (\log_3 4) \cdot (\log_4 5) \cdots (\log_{63} 64)$.

R.: 6

9. Considere a função $f(x) = 1 - 3 \log_{\frac{1}{2}}(1 - 2x)$. Determine a expressão de f^{-1} e a seguir construir num mesmo sistema de eixos os gráficos de f e f^{-1} .

$$\text{R.: } f^{-1}(x) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4-x}{3}}$$

10. Analise se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta:

() A função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 5)$ é decrescente e seu gráfico intercepta o eixo das abscissas no ponto $P(6,0)$.

() A função $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}$ é a inversa da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 5)$.

() A imagem da inversa da função $f(x) = \ln(2x - 1)$ é \mathbb{R} .

() O domínio da função $h(x) = \log_{x-2}(8 - 2^x)$ é $(-\infty, 3)$.

R.: V, F, F, F