Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Limite de funções de duas e três variáveis reais

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 do dia 23 de outubro de 2024.

Limites de funções de duas variáveis reais

- Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais e (x_0, y_0) um ponto não necessariamente pertencente ao domínio D de f.

- O conceito de limite nos permite verificar qual o comportamento que f assume em uma "vizinhança" do ponto (x_0, y_0), o que se torna bastante interessante no caso em que $(x_0, y_0) \notin D$.

- Vamos denotar

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

se pudermos tornar os valores de $f(x, y)$ "suficientemente próximos" de L (tão próximos quanto quisermos) tomando $(x, y) \in D$ "arbitrariamente próximos" (mas não necessariamente iguais) a (x_0, y_0).

Limites de funções de três variáveis reais

- De forma análoga, podemos interpretar o limite de $f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ quando (x, y, z) se aproxima arbitrariamente de um ponto (x_0, y_0, z_0) não necessariamente pertencente ao domínio D de f, denotado por

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = L\,.$$

Notação alternativa:

Alguns autores denotam, respectivamente:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0 \\ z\to z_0}} f(x, y, z) = L\,.$$

Observações: O conceito de limite pode ser formalizado em termos de distâncias em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, conforme a função depender de duas ou três variáveis reais.

Para isso, é preciso utilizar épsilons e deltas, que permitem tornar rigoroso os conceitos de "suficientemente próximo" e "arbitrariamente próximo".

Cálculo de Limites

- Em geral, usamos as mesmas técnicas de CDI-1 para calcular o valor de um limite de funções de duas ou três (ou até mesmo mais) variáveis reais.

- As principais técnicas são: fatoração; racionalização; substituição de variáveis; emprego de limites fundamentais e de propriedades de limites.

- Cuidado para não usar a regra de L'Hôpital (ou L'Hospital) para funções de duas ou mais variáveis, pois a rigor, não sabemos (ainda) derivar tais funções.

Exercício 1) Calcule, se possível, o valor de:

a) $L = \lim\limits_{(x,y)\to(3,-5)} \dfrac{5x+3y}{25x^2-9y^2} e^{2x+y-1}$

b) $L = \lim\limits_{(x,y)\to(-4,1)} \dfrac{x+y+3}{\sqrt{x+4}+\sqrt{-y+1}}$

c) $L = \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{\sin(2x^2+4y^2+z^2)}{8x^2+16y^2+4z^2}$

Propriedades de Limites

Para o limite de funções de duas variáveis reais são válidas propriedade análogas às propriedades de funções de uma única variável estudadas em CDI-1:

- PROPRIEDADES: Sejam $f, g \colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções tais que existam

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y).$$

Então:

i) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \pm \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y).$

ii) Para todo $c \in \mathbb{R}$ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [c \cdot f(x,y)] = c \cdot \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

iii) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) \cdot g(x,y)] = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \cdot \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y).$

iv) Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) \neq 0$ então $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)}.$

OBS: Propriedades análogas são válidas para funções de três ou mais variáveis.

Teoremas sobre Limites

Teorema 1: Se $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ e os limites

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \quad \text{e} \quad \lim_{y \to y_0} h(y)$$

existem, então

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{x \to x_0} g(x) \cdot \lim_{y \to y_0} h(y).$$

Exercício 2) Calcule, se possível, o valor de:

$$a)\ L = \lim_{(x,y) \to (0,\pi)} \frac{\sin(x-y) + \sin(y)}{xy}$$

$$b)\ L = \lim_{(x,y) \to (-3,\,1)} \ln(x^2 + 6xy + 9y^2 + 2x + 6y) - \ln(-7x^2 - 21xy)$$

Teoremas sobre Limites

São válidos os seguintes teoremas, bem semelhantes aos seus análogos de CDI-1:

Teorema 2: Se $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função tal que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$$

e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de uma variável real, contínua em a, então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g\big(f(x,y)\big) = g(a) = g\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\right).$$

Teorema 3: Se $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função tal que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$$

e $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função limitada em alguma vizinhança de (x_0, y_0), exceto possivelmente em (x_0, y_0), então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).g(x,y) = 0.$$

- Tais teoremas podem ser generalizados para $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Exercícios

Exercício 3) Calcule, se possível, o valor de:

a) $L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{7x^2 + 4y^2}$

b) $L = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^9y^5z^7}{x^{10} + 3y^8 + 5z^6}$

c) $L = \lim_{(x,y)\to(3,-5)} \dfrac{(x-3)^6(y+5)^3}{9(x-3)^4 + 7(y+5)^6}$

d) $L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + 5y^2}$

Exemplos resolvidos

Exercício 1) Calcule, se possível, o valor de:

$a)$ $L = \lim_{(x,y)\to(-2,\,3)} \dfrac{3x+2y}{9x^2-4y^2} e^{6x+4y}$

Note que o ponto $(-2,3)$ não pertence ao domínio da função, pois o denominador se anula nesse ponto. Por isso, precisamos "eliminar" tal divisão por zero antes de aplicar a tendência. Como o termo $9x^2 - 4y^2$ consiste em uma diferença de quadrados, ele pode ser fatorado como o produto da soma pela diferença:

$$9x^2 - 4y^2 = (3x)^2 - (2y)^2 = (3x+2y)\cdot(3x-2y).$$

Assim, obtemos que

$$L = \lim_{(x,y)\to(-2,\,3)} \frac{3x+2y}{9x^2-4y^2} e^{6x+4y} = \lim_{(x,y)\to(-2,\,3)} \frac{3x+2y}{(3x+2y)\cdot(3x-2y)} e^{6x+4y}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(-2,\,3)} \frac{1}{3x-2y} e^{6x+4y}$$

$$= \frac{1}{3.(-2)-2.3} e^{6.(-2)+4.3} = \frac{1}{-12} e^{0} = -\frac{1}{12}.$$

Exemplos resolvidos

b) $L = \lim_{(x,y)\to(3,-7)} \frac{x-y-10}{\sqrt{x-3}+\sqrt{y+7}}$

Note que o ponto $(3,-7)$ não pertence ao domínio da função, pois novamente o denominador é anulado nesse ponto. Por isso, não podemos apenas substituir a tendência $x \to 3$ e $y \to -7$. Precisamos "eliminar" tal divisão por zero.

Como há uma soma de raízes no denominador, a experiência de CDI-1 nos diz que devemos racionalizar essa expressão, usando o conjugado do denominador:

$$L = \lim_{(x,y)\to(3,-7)} \frac{x-y-10}{\sqrt{x-3}+\sqrt{y+7}} = \lim_{(x,y)\to(3,-7)} \frac{x-y-10}{\sqrt{x-3}+\sqrt{y+7}} \cdot \frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{y+7}}{\sqrt{x-3}-\sqrt{y+7}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(3,-7)} \frac{(x-y-10).(\sqrt{x-3}-\sqrt{y+7})}{x-3-(y+7)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(3,-7)} \frac{(x-y-10).(\sqrt{x-3}-\sqrt{y+7})}{x-y-10} = \lim_{(x,y)\to(3,-7)} \sqrt{x-3}-\sqrt{y+7}$$

$$= \sqrt{3-3}-\sqrt{-7+7} = 0+0 = 0.$$

Exemplos resolvidos

c) $L = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(4x^2+5y^2)}{12x^2+15y^2}$

O ponto $(0,0)$ não pertence ao domínio da função, pois novamente o denominador é anulado nesse ponto.

Não parece haver uma manipulação algébrica capaz de eliminar tal divisão por zero.

No entanto, podemos efetuar uma substituição de variáveis. Tomando

$$w = 4x^2 + 5y^2$$

temos que

$$12x^2 + 15y^2 = 3(4x^2 + 5y^2) = 3w,$$

e quando $x \to 0$ e $y \to 0$ temos que

$$w \to 4.0^2 + 5.0^2 = 0$$

Logo:

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(4x^2+5y^2)}{12x^2+15y^2} = \lim_{w\to 0} \frac{\sin(w)}{3w} = \frac{1}{3}.\lim_{w\to 0} \frac{\sin(w)}{w} = \frac{1}{3}.1 = \frac{1}{3}.$$

pois recaímos em um limite fundamental de apenas uma variável.

Teoremas sobre Limites

Teorema 3: Se $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é tal que $f(x,y) = g(x).h(y)$ e os limites

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \quad \text{e} \quad \lim_{y \to y_0} h(y)$$

existem, então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{x \to x_0} g(x). \lim_{y \to y_0} h(y).$$

Exemplos:

d) $L = \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{\sin(x-y)+\sin(y)}{xy}$

Note que o ponto $(0,\pi)$ não pertence ao domínio de $f(x,y) = \frac{\sin(x-y)+\sin(y)}{xy}$ pois novamente o denominador se anula nesse ponto.

Por isso, não podemos apenas substituir a tendência $x \to 0$ e $y \to \pi$.

Aqui, vamos usar identidades trigonométricas para o seno de uma diferença e manipular algebricamente a expressão.

Exemplos resolvidos

Usando a expressão do seno de uma diferença e propriedades de limites, temos que

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{\sin(x-y)+\sin(y)}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{\sin(x)\cos(y)-\sin(y)\cos(x)+\sin(y)}{xy}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{\sin(x)\cos(y)+\sin(y)(-\cos(x)+1)}{xy}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{\sin(x)\cos(y)}{xy} + \lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{\sin(\mathrm{y})(-\cos(x)+1)}{yx}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{\sin(x)}{x}.\frac{\cos(y)}{y} + \lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{\sin(y)}{y}.\frac{(-\cos(x)+1)}{x}$$

Agora, podemos aplicar o Teorema 3, pois cada fator foi escrito em termos de uma única variável.

Exemplos resolvidos

Assim

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\cos(y)}{y} + \lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{\sin(y)}{y} \cdot \frac{(-\cos(x)+1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{y\to\pi} \frac{\cos(y)}{y} + \lim_{y\to\pi} \frac{\sin(y)}{y} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))}{x}$$

E por fim, podemos aplicar os limites fundamentais de CDI-1 para obter que

$$L = 1.\frac{\cos(\pi)}{\pi} + \frac{\sin(\pi)}{\pi}\ .0 = \frac{-1}{\pi} + 0 = \frac{-1}{\pi}$$

e) $L = \lim_{(x,y)\to(1,-2)} \ln(4x^2+4xy+y^2+6x+3y) - \ln(2x^2+xy)$

Note que o ponto $(1,-2)$ não pertence ao domínio de f pois ambos os logaritmos se anulam nesse ponto.

Usando propriedades de logaritmo obtemos que

Exemplos resolvidos

$$L = \lim_{(x,y)\to(1,-2)} \ln(4x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 3y) - \ln(2x^2 + xy)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,-2)} \ln\left(\frac{4x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 3y}{2x^2 + xy}\right)$$

Veja que podemos aplicar o Teorema 1, tomando a função de uma variável $g(t) = \ln(t)$ e obter que

$$L = \ln\left(\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{4x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 3y}{2x^2 + xy}\right)$$

E agora, fatorando o numerador (vendo que os três primeiros termos formam um trinômio quadrado perfeito) e o denominador, obtemos que

$$L = \ln\left(\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{(2x+y)^2 + 3(2x+y)}{x(2x+y)}\right) = \ln\left(\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{(2x+y)[2x+y+3]}{x(2x+y)}\right)$$

$$= \ln\left(\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{2x+y+3}{x}\right) = \ln\left(\frac{2.1 + (-2) + 3}{1}\right) = \ln(3).$$

Exemplos resolvidos

Exemplo f) $L = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{2x^2+3y^2}$

Novamente, o ponto $(0,0)$ não pertence ao domínio de $h(x,y) = \frac{xy^3}{2x^2+3y^2}$.

E aqui não temos nenhum poder de manipulação nos termos da função, pois não há nada a ser fatorado nem nenhuma propriedade a ser usada. O que nos resta são os teoremas. Vamos aplicar o Teorema 2. Para isso, escrevemos:

$$h(x,y) = \frac{xy^3}{2x^2+3y^2} = \quad xy.\frac{y^2}{2x^2+3y^2}$$

E conseguimos escrever $h(x,y) = f(x,y).\, g(x,y)$, com $f(x,y) = xy$ tal que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = \; 0.0 = 0$$

E onde $g(x,y) = \frac{y^2}{2x^2+3y^2}$ é uma função limitada, uma vez que para $(x,y) \neq (0,0)$ temos

$$y^2 \leq 3y^2 \;\; \leq 2x^2 + 3y^2 \quad \Rightarrow \qquad |g(x,y)| = \frac{y^2}{2x^2+3y^2} \;\leq \frac{2x^2+3y^2}{2x^2+3y^2} = 1$$

Portanto, pelo Teorema 2, obtemos que $L = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).\, g(x,y) = 0.$

Exemplos resolvidos

Exemplo g) $L = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^5y^7z^9}{x^4+4y^2+8z^4}$

Novamente, o ponto $(0,0,0)$ não pertence ao domínio da função e que não temos nenhum poder de manipulação nos termos da função, pois não há nada a ser fatorado nem nenhuma propriedade a ser usada.

Pelo Teorema 2, escrevemos:

$$h(x,y,z) = \frac{x^5y^7z^9}{x^4+4y^2+8z^4} = xy^7z^9.\frac{x^4}{x^4+4y^2+8z^4}$$

E conseguimos escrever $h(x,y,z) = f(x,y,z).g(x,y,z)$, com $f(x,y,z) = xy^7z^9$ tal que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} xy^7z^9 = 0.0.0 = 0$$

E $g(x,y,z) = \frac{x^4}{x^4+4y^2+8z^4}$ é uma função limitada, uma vez que para $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ temos

$$x^4 \leq x^4+4y^2+8z^4 \quad \Rightarrow \quad |g(x,y,z)| = \frac{x^4}{x^4+4y^2+8z^4} \leq 1$$

Portanto, pelo Teorema 2, obtemos que $L = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z).g(x,y,z) = 0.$

Para refletir:

Exemplo h) $L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{4x^2+7y^2}$

Novamente, o ponto $(0,0)$ não pertence ao domínio de $f(x,y) = \frac{3xy}{4x^2+7y^2}$.

Veja que também não temos nenhum poder de manipulação nos termos de f, pois não há nada a ser fatorado nem nenhuma propriedade a ser usada. Um detalhe interessante é que nem o Teorema 2 pode ser aplicado, pois ainda que escrevêssemos

$$f(x,y) = \frac{3xy}{4x^2+7y^2} = 3x.\frac{y}{4x^2+7y^2}$$

não conseguimos provar que $g(x,y) = \frac{y}{4x^2+7y^2}$ é limitada, pois aqui não é possível garantir que $y \leq 4x^2 + 7y^2$uma vez que, como $y \to 0$, não é verdade que $y \leq y^2$. Para ver isso, use por exemplo $y = \frac{1}{2}$ (que nem está arbitrariamente perto de zero conforme gostaríamos) e encontre que $y = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4} = y^2$ NÃO é verdadeiro).

Portanto, todas as ferramentas que vimos até aqui não podem ser aplicadas nesse exemplo. Por isso, nas próximas aulas, veremos mais conceitos que nos permitam atacar esse tipo de limite.

O conceito que nos interessa será uma generalização da ideia de limites laterais de CDI-1!

Exercícios Propostos

1) Calcule o valor dos seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,1)} \frac{x^2-4xy}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(3x^2+3y^2)}{4x^2+4y^2}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\sqrt{2},1)} \left[\ln(x^2+y^2-2)+\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2y+x^2-2y-2}}\,\right]$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^9y^5}{x^8+y^4}$

2) Se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-2)} \left[\frac{x^2-y^2}{x+y}\cdot f(x,y)+\ln\left(\frac{x^2+2xy+y^2}{x+y}+1\right)\right]=-2$, determine $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-2)} f(x,y)$.