Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Sequências e
Séries Numéricas

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula do dia 18 de setembro de 2024.

UDESC

Sequências Numéricas

De forma intuitiva, uma **sequência numérica** é uma sucessão de **infinitos** números reais, organizados em uma determinada **ordem**.

Podemos denotar uma sequência pela exibição ordenada dos seus termos:

$$\{u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_n \dots\},$$

em que

- $u_n \in \mathbb{R}$ é o termo geral da sequência
- $n \in \mathbb{N}^*$ é o índice da sequência.

Exemplo 1) A sequência

$$\{-15,\ -8,\ -1,\ 6,\ 13,\ 20,\ 27, \dots\}$$

é uma sequência aritmética, pois cada termo é obtido do elemento anterior, somando-o a um número fixado r (chamado de razão).

Para essa sequência, a razão é $r = 7$ e o primeiro termo é $u_1 = -15$.

Com isso, podemos descrever o termo geral dessa sequência por

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + (n-1)r \\ &= -15 + (n-1).7 \\ &= -22 + 7n. \end{aligned}$$

u_n é uma sequência crescente, pois $u_{n+1} > u_n$

Com o termo geral, é possível identificar o elemento que ocupa qualquer posição da sequência, mediante a substituição do índice pela posição desejada. Por exemplo,

$$u_{100} = 678 \qquad u_{500} = 3478. \qquad u_{1.000} = 6978.$$

Sequências Numéricas

Exemplo 2) A sequência

$$\{2, -6, 18, -54, 162, \ldots\}$$

é uma sequência geométrica, pois cada termo é obtido do elemento anterior, multiplicando-o por um número fixado q (também chamado de razão).

Para essa sequência, a razão é

$$q = -3$$

e o primeiro termo é

$$u_1 = 2.$$

Com isso, podemos descrever o termo geral dessa sequência por

$$u_n = u_1 . q^{n-1} = 2 . (-3)^{n-1}.$$

Assim, por exemplo:

$$u_{15} = 2(-3)^{14} = 9565938$$

u_n não é crescente nem decrescente. É uma sequência alternada!

O estudo de sequências numéricas generaliza o conceito de progressões (aritméticas e geométricas).

A principal diferença entre os termos "sequência" e "progressão" diz respeito à quantidade de seus termos.

Uma sequência é formada, necessariamente, por infinitos termos, enquanto uma progressão pode ter somente uma quantidade finita de elementos.

Sequências Numéricas

Uma sequência não precisa ser nem aritmética nem geométrica, conforme mostra o próximo exemplo:

Exemplo 3) A sequência

$$\left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \dots\right\}$$

não é aritmética nem geométrica.

Por inspeção dos termos, é possível identificar que seus elementos consistem na razão

$$u_n = \frac{n+1}{n}.$$

Com isso, é possível identificar que

$$u_{100} = \frac{101}{100},$$

$$u_{1000} = \frac{1001}{1000}$$

u_n é uma sequência decrescente, pois

$$u_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} < \frac{n+1}{n} = u_n$$

Sequências Numéricas Convergentes e Divergentes

Podemos formalizar o conceito de sequência por meio da função que descreve o seu termo geral:

Definição: Uma sequência numérica é descrita por uma função $u\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que

$$u(n) = u_n.$$

Dizemos que uma sequência é convergente se existir $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L$$

Caso contrário, ou seja, se não existir tal L (ou se $L = \pm\infty$), dizemos que a sequência é divergente.

Para os exemplos anteriores, temos que:

1) $u_n = -22 + 7n$ é divergente, pois $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (-22 + 7n) = +\infty$.

2) $u_n = 2.(-3)^{n-1}$ é divergente, pois não existe o limite de u_n, visto que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2.(-3)^{n-1} = \begin{cases} -\infty, & \text{se } n \text{ é par} \\ +\infty, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

3) $u_n = \frac{n+1}{n}$ é convergente, pois

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1.$$

Séries Numéricas

Quando somamos todos os termos de uma sequência numérica, definimos um novo conceito matemático, chamado de **Série Numérica**:

Definição: Uma série numérica é a **soma dos infinitos** termos de uma sequência numérica $u_n: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, denotada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n + \cdots$$

Agora, u_n é considerado o termo geral da série.

Questão: Como obter o valor de uma soma de infinitos termos?

Como a soma é uma operação binária, consideramos as somas parciais S_n, em que o índice n agora indica a quantidade de termos somados:

$$\begin{aligned}
S_1 &= u_1 \\
S_2 &= u_1 + u_2 = S_1 + u_2 \\
S_3 &= (u_1 + u_2) + u_3 = S_2 + u_3 \\
S_4 &= (u_1 + u_2 + u_3) + u_4 = S_3 + u_4 \\
S_5 &= (u_1 + u_2 + u_3 + u_4) + u_5 = S_4 + u_5 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
S_n &= S_{n-1} + u_n
\end{aligned}$$

Note que $\{S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots, S_n, \ldots\}$ forma uma sequência, chamada de Sequência de Somas Parciais da série.

Séries Numéricas Convergentes e Divergentes

Se a sequência de somas parciais for convergente, ou seja, se existir $S \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = S,$$

dizemos que a série converge para S e denotaremos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = S.$$

Caso contrário, ou seja, se a sequência S_n for divergente dizemos que a série é divergente.

Exercício 1: Determine se a série abaixo converge ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+4}{n+7}\right)$$

Note que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+4}{n+7}\right) = \ln\left(\frac{5}{8}\right) + \ln\left(\frac{6}{9}\right) + \ln\left(\frac{7}{10}\right) + \ln\left(\frac{8}{11}\right) + \cdots + \cdots$$

Séries Numéricas Convergentes e Divergentes

Exemplo 4: Determine se a série abaixo converge ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n+3}\right) = \ln\left(\frac{2}{4}\right) + \ln\left(\frac{3}{5}\right) + \ln\left(\frac{4}{6}\right) + \ln\left(\frac{5}{7}\right) + \cdots + \cdots$$

Solução: Antes de efetuarmos as somas parciais, note que pode ser útil reescrever o termo geral da série como

$$u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n+3}\right) = \ln(n+1) - \ln(n+3)\,.$$

Assim, as somas parciais da série são dadas por

$$S_1 = u_1 = \ln(2) - \ln(4)$$

$$S_2 = S_1 + u_2 = \ln(2) - \ln(4) + \ln(3) - \ln(5)$$

$$S_3 = S_2 + u_3 = \ln(2) - \ln(4) + \ln(3) - \ln(5) + \ln(4) - \ln(6) =$$

$$= \ln(2) + \ln(3) - \ln(5) - \ln(6)$$

$$S_4 = S_3 + u_4 = \ln(2) + \ln(3) - \ln(5) - \ln(6) + \ln(5) - \ln(7)$$
$$= \ln(2) + \ln(3) - \ln(6) - \ln(7)$$
$$S_5 = S_4 + u_5 = \ln(2) + \ln(3) - \ln(6) - \ln(7) + \ln(6) - \ln(8)$$
$$= \ln(2) + \ln(3) - \ln(7) - \ln(8)$$
$$\vdots$$

Podemos continuar a somar indefinidamente, mas veja que obtivemos um padrão para a soma, dado por

$$S_n = \ln(2) + \ln(3) - \ln(n+2) - \ln(n+3)\,,$$

onde n representa a quantidade de termos que foram somados. Com isso, obtemos que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(2) + \ln(3) - \ln(n+2) - \ln(n+3)$$
$$= \ln(2) + \ln(3) - \infty - \infty = -\infty.$$

Séries Numéricas Convergentes e Divergentes

Como S_n é uma sequência divergente, temos que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n+3}\right) \qquad \text{é divergente.}$$