

# Postulados e Teoremas da Álgebra de Boole

Yuri Kaszubowski Lopes  
Éverlin Figuera Costa Marques

UDESC

Anotações

---

---

---

---

---

---

---

## Leis e Propriedades

### Associatividade

- O resultado de um OR ou AND entre três variáveis A, B e C não depende da ordem das parcelas
  - $A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$
  - $A.B.C = (A.B).C = A.(B.C)$

### Comutatividade

- O resultado de um OR ou AND entre duas variáveis A e B não depende da ordem das parcelas
  - $A + B = B + A$
  - $A.B = B.A$

Anotações

---

---

---

---

---

---

---

## Leis e Propriedades

### Distributividade

- $A.(B + C) = A.B + A.C$
- $A + (B.C) = (A + B).(A + C)$
- $(A + B).(C + D) = A.C + A.D + B.C + B.D$
- $(A.B) + (C.D) = A.B + C.D = (A + C).(A + D).(B + C).(B + D)$

Anotações

---

---

---

---

---

---

---

## Leis e Propriedades

### Adição lógica

- $A + 0 = A$
- $A + 1 = 1$
- $A + A = A$
- $A + \bar{A} = 1$

### Multiplicação lógica

- $A \cdot 0 = 0$
- $A \cdot 1 = A$
- $A \cdot A = A$
- $A \cdot \bar{A} = 0$

### Anotações

---

---

---

---

---

---

---

## Leis e Propriedades

### Complemento

- $\bar{\bar{A}} = A$

### Demais teoremas multivariados

- $A + A \cdot B = A$
- $A + \bar{A} \cdot B = A + B$
- $\bar{A} + A \cdot B = \bar{A} + B$

### Anotações

---

---

---

---

---

---

---

## Teoremas de De Morgan

- A negação de um produto (AND) equivale à soma (OR) das negações de cada variável envolvida no produto
  - ▶  $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$
  - ▶  $\overline{A \cdot B \cdot C} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$
  - ▶  $\overline{A \cdot B \cdot C \cdot D} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}$
- Dual do Teorema: A negação uma soma (OR) equivale ao produto (AND) das negações individuais das variáveis
  - ▶  $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$
  - ▶  $\overline{A + B + C} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$
  - ▶  $\overline{A + B + C + D} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}$

### Anotações

---

---

---

---

---

---

---

Simplificações Algébricas

- Podemos simplificar as expressões através das leis e teoremas da Álgebra de Boole
- Problemas:
  - Não é óbvio qual teorema/lei devemos aplicar para simplificar
  - Não existe forma fácil de detectarmos se uma expressão já está em sua forma mais simples possível ou não
  - Logo, as simplificações vão exigir **treino**

Anotações

---

---

---

---

---

---

---

Simplificações Algébricas

- Uma forma comum para iniciar a simplificação é transformar a expressão para uma forma padrão
  - Caso ela não esteja na forma padrão
  - Podemos fazer isso, por exemplo, aplicando o Teorema de De Morgan e Distributivas

Anotações

---

---

---

---

---

---

---

Exemplo

- $F = A.B.C + A.\overline{B}.\overline{(\overline{A}.\overline{C})}$
- $F = A.B.C + A.\overline{B}.\overline{(\overline{A} + \overline{C})}$  De Morgan
- $F = A.B.C + A.\overline{B}.(A + C)$  Complemento
- $F = A.B.C + A.\overline{B}.A + A.\overline{B}.C$  Distributiva
- $F = A.B.C + A.\overline{B} + A.\overline{B}.C$  Multiplicação lógica
- Encontramos agora os termos em comum para aplicar a distributiva
  - $F = A.B.C + A.\overline{B} + A.\overline{B}.C$
  - O primeiro e o último mintermo compartilham  $A.C$ , então:
    - $F = A.C.(B + \overline{B}) + A.\overline{B}$  Distributiva
- $F = A.C.(1) + A.\overline{B}$  Adição lógica  $B + \overline{B} = 1$
- $F = A.C + A.\overline{B}$  Multiplicação lógica
- $F = A.(C + \overline{B})$  Fatoração pela distributiva ( $A$  é um termo comum)

Anotações

---

---

---

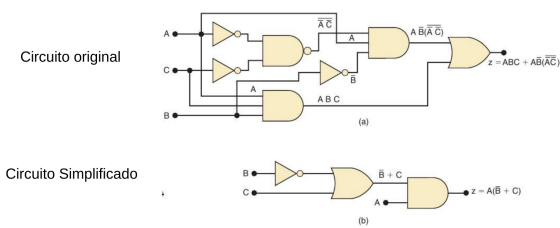
---

---

---

---

Exemplo



Anotações

---

---

---

---

---

---

---

Exercícios

- 1 Utilizando tabelas verdade, prove que os teoremas multivariados apresentados nos slides anteriores estão corretos
- 2 Simplifique as seguintes expressões. Faça a simplificação de forma detalhada como nos slides de exemplos, indicando qual a regra aplicada
  - 1  $A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + A.B.C$
  - 2  $A.C.(\overline{A}.B.D) + \overline{A}.B.\overline{C}.\overline{D} + A.\overline{B}.C$
  - 3  $(\overline{A} + B)(A + B + D).\overline{D}$
- 3 Desenhe os circuitos com portas lógicas das versões originais e simplificadas das expressões exercício 2

Anotações

---

---

---

---

---

---

---

Referências

- TOCCI, R.J.; WIDMER,N.S. **Sistemas digitais: princípios e aplicações**. 11a ed, Prentice-Hall, 2011.
- RUGGIERO, M.; LOPES, V. da R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. Makron Books do Brasil, 1996.
- NULL, L.; LOBUR, J. **Princípios Básicos de Arquitetura e Organização de Computadores**. 2014. Bookman, 2009. ISBN 9788577807666.

Anotações

---

---

---

---

---

---

---