INTRODUÇÃO À ANÁLISE NUMÉRICA

ANÁLISE NUMÉRICA

↓

ÁREA DA MATEMÁTICA

↓

... DESENVOLVER E ESTUDAR MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ENCONTRAR SOLUÇÕES APROXIMADAS PARA PROBLEMAS MATEMÁTICOS COMPLEXOS

OBJEÇÕES: i) MÉTODOS ANALÍTICOS EXATOS NÃO SÃO VIÁVEIS OU PRÁTICOS

- EQ. DIFERENCIAIS
- EQ. NÃO LINEARES
- INTEGRAIS COMPLEXAS OU SEM PRIMITIVAS

ii) SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS EXAUSTIVAS

- PREVISÃO DO TEMPO
- SIMULAÇÕES EM MECÂNICA DOS FLUIDOS - CFD.

EX: RESOLVA A EQUAÇÃO $e^x - x^3 = 0$

NÃO HÁ MÉTODO ANALÍTICO QUE POSSA FORNECER A SOLUÇÃO EXATA!

MÉTODO ANALÍTICO × MÉTODO NUMÉRICO

EX: RESOLVA A EQUAÇÃO $x^2 - 6x + 5 = 0$

MÉTODO ANALÍTICO

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad [\div a]$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad \left[+\frac{b^2}{4a^2}\right]$$

$$\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\text{PRODUTO NOTÁVEL}} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\underbrace{x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}_{\text{FÓRMULA DE BHÁSKARA}}$$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

APLICANDO A FÓRMULA DE BHASKARA

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} \longrightarrow x = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} \boxed{x' = 5} \\ \boxed{x'' = 1} \end{cases}$$

SOLUÇÕES EXATAS

MÉTODO NUMÉRICO

MÉTODO DA BISSEÇÃO

ESTIMATIVA INICIAL $I_0 = [0, 3]$

TEOREMA DE BOLZANO

SE $f(a) \cdot f(b) < 0$, ENTÃO EXISTE $c \in [a, b]$ TAL QUE $f(c) = 0$

ZERO DA FUNÇÃO

SE $f(x) = x^2 - 6x + 5$, ENTÃO

$f(0) = 5$ e $f(3) = -4$ LOGO:

HÁ PELO MENOS UM ZERO DA FUNÇÃO NO INTERVALO I_0

EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA

$$\boxed{x_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2}}$$

i	$a^{(+)}$	$b^{(-)}$
0	0	3
1	0	1,5
2	0,75	1,5
3	0,75	1,125

$$x_1 = \frac{0+3}{2} = 1,5$$

$$f(1,5) = -1,75$$

$$x_2 = \frac{0+1,5}{2} = 0,75$$

$$f(0,75) = +1,0625$$

$$x_3 = \frac{0,75+1,5}{2} = 1,125$$

$$f(1,125) = -0,4843...$$

ITERAÇÕES

SOLUÇÃO CONVERGINDO PARA $x = 1$.

AGORA, QUANDO PARAR?

CRITÉRIO DE PARADA

$x_3 = 1,125$

SOLUÇÃO APROXIMADA.

MÉTODOS NUMÉRICOS SÃO ESTRATÉGIAS QUE CONSIDERAM OS SEGUINTES ASPECTOS:

1 - CRITÉRIO DE PARADA: ESSENCIAL PARA GARANTIR PRECISÃO E EFICIÊNCIA, JÁ QUE MÉTODOS NUMÉRICOS EXIGEM ITERAÇÕES SUCESSIVAS.

TIPOS DE CRITÉRIOS DE PARADA

1.1 CRITÉRIO DE PRECISÃO

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$ ONDE

ε = ERRO ACEITÁVEL

1.2 NÚMERO MÁXIMO DE ITERAÇÕES

SE $n \geq N_{máx}$, ENTÃO O ALGORITMO PARA A EXECUÇÃO

1.3 CRITÉRIO DO RESÍDUO

$$|f(x_n)| < \varepsilon$$

2. PERFORMANCE DO MÉTODO: CONSIDERANDO CONVERGÊNCIA E VELOCIDADE

SOBRE A CONVERGÊNCIA

EX: A EQUAÇÃO DE RECORRÊNCIA

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

CONVERGE PARA A $\sqrt{2}$

$x_0 = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 2}{2x_0} \quad \text{Assim}$$

$$x_1 = 1 - \frac{1^2 - 2}{2 \cdot 1} = 1{,}5$$

$$x_2 = 1{,}5 - \frac{1{,}5^2 - 2}{2 \cdot 1{,}5} = 1{,}4166...$$

ARREDONDANDO 4 CASAS DECIMAIS APÓS A VÍRGULA.

$$x_3 = 1{,}4167 - \frac{1{,}4167^2 - 2}{2 \cdot 1{,}4167} = 1{,}4142$$

COMO $x = \sqrt{2} = 1{,}4142135623...$

PODEMOS AFIRMAR QUE O "MÉTODO" É CONVERGENTE.

3. ESFORÇO OU COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL

SOBRE O ESFORÇO COMPUTACIONAL

LINHA DO TEMPO DE EVOLUÇÃO DOS PROCESSADORES

CPU = CENTRAL PROCESSING UNIT

1971 - INTEL 4004
(1º MICROPROCESSADOR, 4 BITS e 740 KHZ)

1978 - INTEL 8086
(16 BITS, BASE DE ARQUITETURA x86)

1981 - IBM - PERSONAL COMPUTER

286 → 386 SX → 486 SX → 486 DX

1993 - INTEL PENTIUM
(SUPERESCALAR, 60 MHZ)

PENTIUM PRO → PENTIUM II → PENTIUM III

2000 PENTIUM IV
(1 GHZ, PIPELINE LONGO)

2006 INTEL CORE 2 DUO
(MULTICORE)

CORE i3 → CORE i5 → CORE i7 ...

2011

2017 AMD RYZEM

2023 APPLE M3

(ALTA EFICIÊNCIA ENERGÉTICA E DESEMPENHO)

2020 USO DE IA NA ARQUITETURA DE PROCESSAMENTO