Definição: Seja F uma primitiva de f. Denota-se e define-se a **integral indefinida** da função $f(x)$ por

$$\underbrace{\int}_{\text{Símbolo de integração}} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{Integrando}}\,\underbrace{dx}_{\text{Diferencial}}}_{\text{Elemento de integração}} = F(x) + c.$$

Integrais Imediatas

1. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1;$
2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c;$
3. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1;$
4. $\int e^u du = e^u + c;$
5. $\int \sin(u)\, du = -\cos u + c;$
6. $\int \cos(u)\, du = \sin u + c;$
7. $\int \sec^2(u)\, du = \operatorname{tg}(u) + c;$
8. $\int \operatorname{cossec}^2(u)\, du = -\operatorname{cotg}(u) + c;$
9. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{u}{a}\right) + c.$
10. $\int \sec(u)\, du = \ln|\sec(u) + \operatorname{tg}(u)| + c;$
11. $\int \operatorname{cossec}(u)\, du = \ln|\operatorname{cossec}(u) - \operatorname{cotg}(u)| + c;$

Exemplo:

1) $I = \int (2x-1)^3 dx = \int (2x + (-1))^3 dx$

2) $I = \int (2x-1)^{300} dx$

Lembre que: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$I = \int \left((2x)^3 + 3(2x)^2(-1) + 3(2x)(-1)^2 + (-1)^3\right) dx$$

$$I = \int (8x^3 - 12x^2 + 6x - 1) dx$$

$$I = 8\int x^3 dx - 12\int x^2 dx + 6\int x\, dx - \int dx$$

$$I = 8\frac{x^4}{4} - 12\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - x + k$$

$$\boxed{I = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x + k}$$

Método da Substituição

Está técnica aplica-se a integrações de funções compostas.

A ideia é recair na tabela de integrais imediatas através de mudança de variável.

Suponha que $F(x)$ seja uma primitiva de $f(x)$ e que $g(x)$ seja uma função diferenciável.

Pela regra da cadeia, sabemos que:

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right] = F'(g(x))\, g'(x).$$

E ainda, sabemos que:

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x)) + k\right] = F'(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x), \text{ com } k \in \mathbb{R}.$$

Assim sendo, a função $F(g(x)) + k$ é a primitiva da função $f(g(x))\, g'(x)$, ou seja,

$$\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\, \underbrace{g'(x)\, dx}_{du} = F(\underbrace{g(x)}_{u}) + c.$$

Dessa forma,

$$\boxed{\int f(u)\, du = F(u) + c.}$$

Exemplo:

2) $I = \int (2x-1)^{300} dx$

Definindo $u = 2x - 1 \Longrightarrow du = 2\ dx$

$$I = \frac{1}{2}\int (2x-1)^{300}\ 2dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int u^{300}\ du$$

$$I = \frac{1}{2}\frac{u^{301}}{301} + k$$

$$I = \frac{1}{602}u^{301} + k$$

$$\boxed{I = \frac{1}{602}(2x-1)^{301} + k}$$

3) $I = \int \sqrt{3x+1}\, dx$

Definindo $u = 3x + 1 \Longrightarrow du = 3\, dx$

$$I = \frac{1}{3}\int \sqrt{3x+1}\ \ 3dx$$

$$I = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\ \ du$$

$$I = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\ \ du$$

$$I = \frac{1}{3}\,\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + k$$

$$I = \frac{1}{3}\,\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k$$

$$\boxed{I = \frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}} + k}$$

4) $I = \int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4+4}}\,dx$

Definindo $u = x^4 + 4 \Longrightarrow du = 4x^3\,dx$

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{4\,x^3}{\sqrt[3]{x^4+4}}\,dx$$

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}}$$

$$I = \frac{1}{4}\int u^{-\frac{1}{3}}\,du$$

$$I = \frac{1}{4}\,\frac{u^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + k$$

$$I = \frac{1}{4}\,\frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + k$$

$$I = \frac{3}{8}u^{\frac{2}{3}} + k$$

$$\boxed{I = \frac{3}{8}(x^4+4)^{\frac{2}{3}} + k}$$

5) $I = \int \frac{dx}{2-5x}$

Definindo $u = 2 - 5x \Longrightarrow du = -5\,dx$

$$I = \frac{1}{-5}\int \frac{-5\,dx}{2-5x}$$

$$I = -\frac{1}{5}\int \frac{du}{u}$$

$$I = -\frac{1}{5}\,ln|u| + k$$

$$\boxed{I = -\frac{1}{5}\,ln|2-5x| + k}$$

6) $I = \int x e^{x^2} \, dx$

Definindo $u = x^2 \Longrightarrow du = 2x \, dx$

$$I = \frac{1}{2} \int e^{x^2} \, 2x dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int e^{u} \, du$$

$$I = \frac{1}{2} e^{u} + \mathrm{k}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} e^{x^2} + \mathrm{k}}$$

7) $I = \int \frac{sen(e^{-7x})}{e^{7x}}\ dx$

$$I = \int sen(e^{-7x})\ \ e^{-7x} dx$$

Definindo $u = e^{-7x} \Longrightarrow du = -7e^{-7x} dx$

$$I = \frac{1}{-7} \int sen(e^{-7x})\ \ (-7) e^{-7x} dx$$

$$I = -\frac{1}{7} \int sen(u)\ \ du$$

$$I = -\frac{1}{7} (-\cos(u) + c)$$

$$\boxed{I = \frac{1}{7} cos(e^{-7x}) + c}$$

$$7)\ I = \int e^{cos^2(3x)} sen(6x)\, dx$$

Definindo $u = cos^2(3x) \Longrightarrow du = 2cos(3x)(\cos(3x))' dx$

$$\Longrightarrow du = 2cos(3x)(-3)sen(3x)dx$$

$$\Longrightarrow du = -3\,.\,2\, cos(3x)sen(3x)dx$$

$$\Longrightarrow du = -3\, sen(6x)dx$$

$$I = \frac{1}{-3}\int e^{cos^2(3x)}(-3)sen(6x)\, dx$$

$$I = -\frac{1}{3}\int e^u\, du$$

$$I = -\frac{1}{3}e^u + k$$

$$\boxed{I = -\frac{1}{3}e^{cos^2(3x)} + k}$$

8) $I = \int \frac{tg(\ln(x))}{x} dx$

$$I = \int tg(\ln(x))\ \frac{1}{x} dx$$

Definindo: $u = \ln(x) \Longrightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$$I = \int tg(\ln(x))\ \frac{1}{x} dx$$

$$I = \int tg(u)\ \ du$$

$$I = \int \frac{sen(u)}{\cos(u)} du$$

Definindo: $v = \cos(u) \Longrightarrow dv = -sen(u)du$

$$I = \frac{1}{-1} \int \frac{1}{\cos(u)} (-1) sen(u) du$$

$$I = -\int \frac{1}{v} dv$$

$$I = -ln|v| + k$$

$$\boxed{I = -ln|\cos(\ln(x))| + k}$$

$$9)\ \ I = \int cos^3(4x)\ sen(4x)\, dx = \int (\cos(4x))^3\ sen(4x)\, dx$$

Definindo: $u = \cos(4x) \Longrightarrow du = -4sen(4x)dx$

$$I = \frac{1}{-4}\int (\cos(4x))^3\ (-4)sen(4x)\, dx$$

$$I = -\frac{1}{4}\int u^3\ \ du$$

$$I = -\frac{1}{4}\,\frac{u^4}{4} + k$$

$$I = -\frac{1}{16}(\cos(4x))^4 + k$$

$$\boxed{I = -\frac{1}{16}\cos^4(4x) + k}$$

$$10)\quad I = \int cos^3(4x)\, dx$$

$$I = \int cos^2(4x)\cos(4x)\, dx$$

Lembre que: $cos^2(\theta) + sen^2(\theta) = 1 \Longrightarrow cos^2(\theta) = 1 - sen^2(\theta)$

$$I = \int \left(1 - sen^2(4x)\right)\cos(4x)\, dx$$

Definindo: $u = \mathrm{sen}(4x) \Longrightarrow du = 4\, cos(4x) dx$

$$I = \frac{1}{4}\int \left(1 - sen^2(4x)\right) 4\cos(4x)\, dx$$

$$I = \frac{1}{4}\int (1 - u^2)\, du$$

$$I = \frac{1}{4}\left(u - \frac{u^3}{3}\right) + k \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{1}{4}\left(\mathrm{sen}(4x) - \frac{\mathrm{sen}^3(4x)}{3}\right) + k}$$

11) $I = \int cos^2(4x)\, dx$

Lembre que: $cos^2(2\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos(\theta)$

$$I = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos(8x)\right) dx$$

$$I = \frac{1}{2} \int \quad dx + \frac{1}{2} \int cos(8x)\, dx$$

$$I = \frac{1}{2} x + c_1 + \frac{1}{2.8} \int cos(8x)\, 8dx$$

$$I = \frac{1}{2} x + c_1 + \frac{1}{16} \int cos(v)\, dv$$

$$I = \frac{1}{2} x + \frac{1}{16} sen(v) + k$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} x + \frac{1}{16} sen(8x) + k}$$

Resumindo: $\int sen^n(u)du \;\; ou \int cos^n(u)du\,, \qquad n \in \mathbb{N}\; e\; n \geq 2$

- Se n é um número ímpar, reescreve-se o integrando da forma

$$\int sen^{n-1}(u)\underbrace{\,sen(u)\,du\,} \;\; ou \int cos^{n-1}(u)\underbrace{\cos(u)du}\,,$$

Objetivo: Este termo fará parte do diferencial.

Observe que $n-1$ é um número par. Usando a relação trigonométrica $cos^2(u) + sen^2(u) = 1$, temos que:

$$\int \left(1 - cos^2(u)\right)^{\frac{n-1}{2}} sen(u)\,du \;\; ou \int \left(1 - sen^2(u)\right)^{\frac{n-1}{2}} \cos(u)du\,,$$

Se n =3, tem-se que $\frac{n-1}{2} = 2$. Logo, tem-se no integrando $\left(1 - cos^2(u)\right)\operatorname{sen}(u)$ ou $\left(1 - sen^2(u)\right)\cos(u)$
Para finalizar, utiliza-se a propriedade da integral da soma e método da substituição, onde for necessário$\frac{n-1}{2} > 2$, será necessário expandir o Binômio de Newton, usar a propriedade da soma de integrais e utilizar as técnicas convenientes para as integrais que surgirem. Durante o processo de resolução será utilizado o método da substituição para cair na tabela de integrais imediatas.

Resumindo: $\int sen^n(u)du \;\; ou \int cos^n(u)du\,, \qquad n \in \mathbb{N}\; e\; n \geq 2$

- Se n é um número par, reescreve-se o integrando da forma

$$\int \left(sen^2(u)\right)^{\frac{n}{2}} du \;\; ou \int \left(cos^2(u)\right)^{\frac{n}{2}} du\,.$$

Na primeira integral, usa-se a relação trigonométrica $sen^2(u) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2u)$ e, na segunda integral, a relação $cos^2(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2u)$. Assim, temos que:

$$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2u)\right)^{\frac{n}{2}} du \;\; ou \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2u)\right)^{\frac{n}{2}} du\,,$$

Se $n = 2$, tem-se que $\frac{n}{2} = 1$. Para finalizar, utiliza-se a propriedade da integral da soma e método da substituição, onde for necessário $n > 2$, será necessário expandir o Binômio de Newton, usar a propriedade da soma de integrais e, onde tiver $\cos(2u)$ elevado a uma potência par, novamente ter-se-á que fazer uso do processo descrito anteriormente. Durante o processo de resolução será utilizado o método da substituição para cair na tabela de integrais imediatas.