Transformações lineares:

Definição: Uma função vetorial $T: V \to W$ é chamada de uma transformação linear se e somente se:

I) Para todo $u, v \in V$ tivermos que $T(u+v) = T(u) + T(v)$;

II) Para todo $K \in \mathbb{R}$ e para todo $u \in V$ tivermos que $T(Ku) = KT(u)$.

Núcleo de uma TL

Definição: chama-se núcleo de uma TL $T: V \to W$ ao conjunto de vetores $v \in V$ que são transformados em $\vec{0} \in W$. $N(T) = \{v \in V \mid T(v) = \vec{0}\}$

obs: $N(T) \neq \emptyset$

Imagem de uma TL

Definição: Seja $T: V \to W$ uma TL. Definimos o conjunto imagem de T como:

$$Im(T) = \{w \in V;\ w = T(v) \text{ para algum } v \in V\}$$

obs: $Im(T) \neq \emptyset$

Teorema: Se $T: V \to W$ é uma TL então:

$$\dim(N(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(V)$$

Transformações Lineares Injetoras e Sobrejetora

Teorema: Uma TL $T: V \to W$ é injetora se, e somente se, $N(T) = \{\vec{0}\}$.

Teorema: Uma TL $T: V \to W$ é sobrejetora se, e somente se, $Im(T) = W$, ou seja $\dim(Im(T)) = \dim(W)$.

Transformações Lineares Especiais

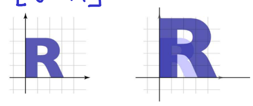
Dilatação ou Contração:

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(x,y) = K(x,y)$

Representação matricial de $T = [T] = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$

Representação geometrica $K = 1{,}5$



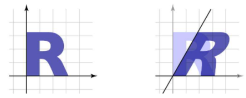
Cisalheamento: na direção do eixo x

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(x,y) = (x + Ky, y)$

Representação matricial de $T = [T] = \begin{bmatrix} 1 & K \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Representação geometrica $K = 0{,}5$

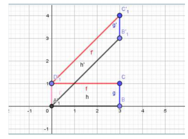


Cisalheamento: na direção do eixo y

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(x,y) = (x, y + Kx)$

Representação matricial de $T = [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ K & 1 \end{bmatrix}$



Representação geometrica $K = 1$

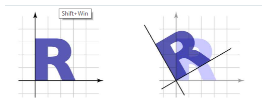
Rotação

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(x,y) = (x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta,\ x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta)$

Representação matricial de $T = [T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Representação geometrica $\theta = \frac{\pi}{6}$



Composição de Transformações lineares

Definição: Seja $T: V \to W$ e $S: W \to U$ transformações lineares. A transformação composta entre S e T é definida como $S \circ T: V \to U$ tal que:

$$(S \circ T)(v) = S(T(v))$$

Teorema: Se $T: V \to W$ e $S: W \to U$ são TL então a composta $(S \circ T): V \to U$ é tal que:

$$[S \circ T] = [S] \cdot [T]$$

Inversa de uma Transformação Linear

Definição: Se $T: V \to W$ é uma TL bijetora, então dizemos que T é invertível e que existe a TL inversa $T^{-1}: W \to V$ tal que:

$$(T^{-1} \circ T)(v) = v \text{ para todo } v \in V$$

$$(T \circ T^{-1})(w) = w \text{ para todo } w \in W$$

Teorema: Uma TL $T: V \to W$ é invertível se e somente se $\det([T]) \neq 0$, e neste caso, $T^{-1}: W \to V$ é tal que:

$$[T^{-1}] = [T]^{-1}$$

Matriz de uma Transformação Linear

Seja $T: V \to W$ linear, $\alpha\{v_1, \dots, v_n\}$ base de V e $\beta = \{w_1, \dots w_n\}$ base de W. Então $T(v_1), \dots, T(v_n)$ são vetores de W

$$[T]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$T(v_1) = a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_n$

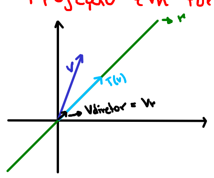
$\dots$

$T(v_n) = a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_n$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$[T(v_1)]_\beta \quad \cdots \quad [T(v_n)]_\beta$$

Projeção em torno de uma reta $y = ax$



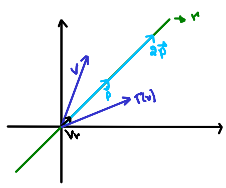
Temos de GAN que $T(v) = proj_{v_r} v$

$$T(v) = \left(\frac{v \cdot v_r}{v_r \cdot v_r}\right) \cdot \vec{v_r}$$

$$T(x,y) = \left(\frac{(x,y)\cdot(1,a)}{(1,a)\cdot(1,a)}\right)(1,a) \Rightarrow \left(\frac{x + ay}{1 + a^2}\right)\cdot(1,a)$$

$$T(x,y) = \left(\frac{x + ay}{1 + a^2}, \frac{ax + a^2y}{1 + a^2}\right) \quad [T] = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+a^2} & \frac{a}{1+a^2} \\ \frac{a}{1+a^2} & \frac{a^2}{1+a^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Reflexão de v atraves da reta $y = ax$



$T(v) = 2\vec{p} - v$

onde $p = proj_{v_r} \vec{v}$

$$T(v) = 2\left(\frac{v \cdot v_r}{v_r \cdot v_r}\right) \cdot v_r - v \quad \text{onde } v_r = (1,a)$$

Autovalores e Autovetores

Definição 1: Se $T: V \to V$ um operador linear. Um vetor $v \in V$, $v \neq 0$ é dito um autovetor de T se existe um número real λ tal que:

$$T(v) = \lambda v$$

O número λ é denominado autovalor de T associado ao vetor v.

Determinação dos Autovalores:

- Se $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$.
- Queremos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tq exista $(x,y) \neq (0,0)$ com $T(x,y) = \lambda(x,y)$
- $(x,y) \neq (0,0)$
  - $ax+by = \lambda x = (a-\lambda)x + by = 0$
  - $cx+dy = \lambda y = cx + (d-\lambda) = 0$

$$\det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Determinação dos Autovetores

- Os autovetores de T associados a λ são as soluções não nulos do Sistema linear homogêneo acima.

Diagonalização:

Def: O n̄ de vezes que um autovalor λ se repete é chamado que multiplicidade Algebrica (MA) de λ. A dimensão do autoespaço S_λ associado a λ é chamado de multiplicidade Geometrica (MG) de λ.

- Para cada λ tem-se que $MA \geq MG$

Def 2: Um operador linear $T: V \to V$ é diagonalizável se existir uma base β de autovalores para V.

Def 3: Um operador $T: V \to V$ diagonalizável se para cada autovalor λ, for válida que $MA = MG$.

Def 4: Seja $T: V \to V$ um operador diagonalizável e β uma base p/ V formada pelos autovetores de T então:

I) $[T]_\beta^\beta$ é uma matriz diagonal.

II) existe uma matriz P tq $[T]_\beta^\beta = P^{-1}[T]_\alpha^\alpha P$ onde

* α é a base canônica de V

* P é chamada de matriz diagonalizadora e é definida por $[I]_\alpha^\beta$ → matriz mudança de base de β para α

- Se $T: V \to V$ é um operador diagonalizável, então existe um P inversível tq $P^{-1}[T]P = D$ onde $D = [T]_\beta^\beta$ (Base de autovalores de V) e $P = [I]_\alpha^\alpha$ (base canônica de V)

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & v_3 & \vdots & v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Propriedade: Se $\lambda = 0$ é autovalor de um operador linear $T: V \to V$, então T não e injetora.

Ex: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tq $T(x,y) = (2x-12y, x-5y)$

$v = (4y, y) \to \lambda_1 = -1 \to \beta_1 = \{(4,1)\}$

$v = (3y, y) \to \lambda_2 = -2 \to \beta_2 = \{(3,1)\}$

$\beta_1 \cup \beta_2 = \{(4,1), (3,1)\}$ é base p/ $\mathbb{R}^2$ //

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = [T]_\alpha^\alpha \to [T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Método da Triangulação para Determinante

Operações Elementares

1. $L_i \Leftrightarrow L_j$ $\quad \det(A) = -\det(A')$
2. $L_i = kL_i$ $\quad \det(A) = 1/k \det(A')$
3. $L_i = L_i + kL_j$ $\quad \det(A) = \det(A')$

$$A^{-1} \Rightarrow \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$