LMA0001 – Lógica Matemática
Videoaula 12
Lógica de Predicados

Karina Girardi Roggia
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

2020

Limitações da Lógica Proposicional

Base da Lógica Proposicional:

- proposição *atômica*

Átomo:

- partícula que não pode ser dividida em partículas menores

Limitações da Lógica Proposicional

Considere o seguinte argumento:

- Penélope é uma lógica.
- Todos os lógicos usam chapéus divertidos.
- Portanto, Penélope usa chapéus divertidos.

Este é um argumento válido?

Limitações da Lógica Proposicional

Considere o seguinte argumento:

- Penélope é uma lógica. $\quad P$
- Todos os lógicos usam chapéus divertidos. $\quad T$
- Portanto, Penélope usa chapéus divertidos. $\quad C$

Este é um argumento válido?

$$¿P, T \vDash C?$$

Considere o seguinte argumento:

- Penélope é uma lógica. P
- Todos os lógicos usam chapéus divertidos. T
- Portanto, Penélope usa chapéus divertidos. C

Este é um argumento válido?

$$¿P, T \vDash C?$$

A Lógica Proposicional não consegue "quebrar" sentenças atômicas!

Limitações da Lógica Proposicional

- Francisco é filho de Ana.
- Ana é filha de Laura.

A Lógica Proposicional não consegue concluir que

Limitações da Lógica Proposicional

- Francisco é filho de Ana.
- Ana é filha de Laura.

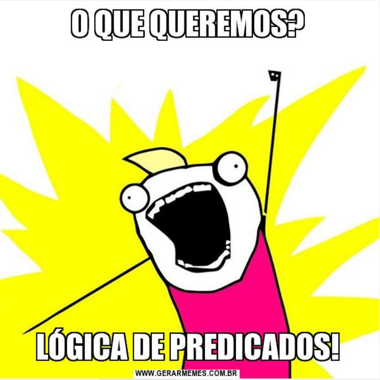
A Lógica Proposicional não consegue concluir que

Francisco é neto de Laura

Queremos mais detalhes!

Queremos mais detalhes!
Queremos mais expressividade!

Queremos mais detalhes!
Queremos mais expressividade!



Do que precisamos?

- Objetos (**nomes**)
- Características e Relações (**predicados**)
- Afirmações (**quantificadores**)

Do que precisamos?

- Objetos (**nomes**)
  Francisco, Ana, Laura, Penélope
  Representados por letras minúsculas: $a, b, c, \ldots$
- Características e Relações (**predicados**)
  é um lógico, é filho, é neto
  Representados por letras maiúsculas: $L, F, N, P, \ldots$
- Afirmações (**quantificadores**)
  todos, alguns, existe
  $\forall, \exists$

- Característica de um objeto
- Propriedade de algo
- Exemplos:
  - ________ é um cachorro.
  - ________ é membro de uma sociedade secreta.
  - Uma bigorna caiu em ________.

Representando Predicados Simples

Vamos representar predicados por **letras maiúsculas** $A, B, C, \ldots$

- $B(x)$: $\underline{\hspace{2cm}}_x$ está bravo.
- $F(x)$: $\underline{\hspace{2cm}}_x$ está feliz.

Olhando para exemplos concretos:

- Shrek está bravo.
- Burro e Gato de Botas estão felizes.
- Se Burro e Gato de Botas estão felizes, então Shrek está bravo.

Representando Predicados Simples

Vamos representar predicados por **letras maiúsculas** $A, B, C, \ldots$

- $B(x)$: $\underline{\hspace{3cm}}_x$ está bravo.
- $F(x)$: $\underline{\hspace{3cm}}_x$ está feliz.

Olhando para exemplos concretos:

- Shrek está bravo. $B(s)$
- Burro e Gato de Botas estão felizes. $F(b) \wedge F(g)$
- Se Burro e Gato de Botas estão felizes, então Shrek está bravo. $(F(b) \wedge F(g)) \rightarrow B(s)$

- Todos estão felizes.
- Alguém está bravo.

- Todos estão felizes. $F(b) \wedge F(g) \wedge F(s)$

- Alguém está bravo.

- Todos estão felizes.

$$\forall x.F(x)$$

- Alguém está bravo.

$$\exists x.B(x)$$

- Todos estão felizes.

$$\forall x.F(x)$$

- Alguém está bravo.

$$\exists x.B(x)$$

- Ninguém está bravo.

- Todos estão felizes.

$$\forall x.F(x)$$

- Alguém está bravo.

$$\exists x.B(x)$$

- Ninguém está bravo.
  Não é o caso de que alguém está bravo.

  Todos não estão bravos.

- Todos estão felizes.

$$\forall x.F(x)$$

- Alguém está bravo.

$$\exists x.B(x)$$

- Ninguém está bravo.
  Não é o caso de que alguém está bravo.

$$\neg\exists x.B(x)$$

Todos não estão bravos.

$$\forall x.\neg B(x)$$

- Todos estão felizes.

$$\forall x. F(x)$$

- Alguém está bravo.

$$\exists x. B(x)$$

- Ninguém está bravo.
  Não é o caso de que alguém está bravo.

$$\neg \exists x. B(x)$$

Todos não estão bravos.

$$\forall x. \neg B(x)$$

- Há alguém que não está feliz.
- Nem todo mundo está feliz.

- Todos estão felizes.

$$\forall x.F(x)$$

- Alguém está bravo.

$$\exists x.B(x)$$

- Ninguém está bravo.
  Não é o caso de que alguém está bravo.

$$\neg\exists x.B(x)$$

Todos não estão bravos.

$$\forall x.\neg B(x)$$

- Há alguém que não está feliz. $\exists x.\neg F(x)$
- Nem todo mundo está feliz. $\neg\forall x.F(x)$

Todo mundo tá feliz.

$$\forall x.F(x)$$

Domínios

Todo mundo tá feliz.

$$\forall x.F(x)$$

Quem é todo mundo?

Domínio:

Conjunto sobre o qual estamos falando.

- Um domínio deve ter **ao menos um** elemento.
- Um nome deve representar exatamente um elemento do domínio.
- Um elemento do domínio pode ser representado por diversos nomes (ou mesmo nenhum)

Considere as sentenças:

1. Toda caneta no meu bolso é preta.
2. Alguma caneta na mesa é azul.
3. Nem todas as canetas na mesa são azuis.

Brincando com Sentenças

Considere as sentenças:

1. Toda caneta no meu bolso é preta.
2. Alguma caneta na mesa é azul.
3. Nem todas as canetas na mesa são azuis.

Domínio: todas as canetas.

$B(x)$: ________$_x$ está no meu bolso.
$M(x)$: ________$_x$ está na mesa.
$P(x)$: ________$_x$ é preta.
$A(x)$: ________$_x$ é azul.

Toda caneta no meu bolso é preta.

$$\forall x.$$

Toda caneta no meu bolso é preta.

$$\forall x.$$

Toda caneta *no meu bolso*, não qualquer caneta...

Toda caneta no meu bolso é preta.

$$\forall x.(B(x) \to P(x))$$

Toda caneta *no meu bolso*, não qualquer caneta...

Mas não poderia ser $\forall x.(B(x) \land P(x))$?

Toda caneta no meu bolso é preta.

$$\forall x.(B(x) \to P(x))$$

Toda caneta *no meu bolso*, não qualquer caneta...

Mas não poderia ser $\forall x.(B(x) \wedge P(x))$?

Meu bolso não é tão grande para caber todas as canetas... 😄

Toda caneta no meu bolso é preta.

$$\forall x.(B(x) \rightarrow P(x))$$

Uma sentença pode ser traduzida para $\forall x.(\mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{B}(x))$ se tiver o significado de "todo $\mathcal{A}$ é $\mathcal{B}$".

Alguma caneta na mesa é azul.

$$\exists x.$$

Brincando com Sentenças

Alguma caneta na mesa é azul.

$\exists x.$

Existe caneta que está na mesa e é azul

Alguma caneta na mesa é azul.

$$\exists x.(M(x) \wedge A(x))$$

Existe caneta que está na mesa e é azul

Uma sentença pode ser traduzida para $\exists x.(\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x))$ se tiver o significado de "algum $\mathcal{A}$ é $\mathcal{B}$".

Brincando com Sentenças

Nem todas as canetas na mesa são azuis.

Nem todas as canetas na mesa são azuis.

Não é o caso de que toda caneta na mesa é azul?

Alguma caneta na mesa não é azul?

Nem todas as canetas na mesa são azuis.

Não é o caso de que toda caneta na mesa é azul

$$\neg\forall x.(M(x) \to A(x))$$

Alguma caneta na mesa não é azul

$$\exists x.(M(x) \land \neg A(x))$$

Nem todas as canetas na mesa são azuis.

Não é o caso de que toda caneta na mesa é azul

$$\neg\forall x.(M(x) \rightarrow A(x))$$

Alguma caneta na mesa não é azul

$$\exists x.(M(x) \wedge \neg A(x))$$

$$\begin{aligned} \neg\forall x.\mathcal{A}(x) &\equiv \exists x.\neg\mathcal{A}(x) \\ \neg(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) &\equiv \mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B} \end{aligned}$$

Como representar as seguintes sentenças?

- Ana é filha de Laura.
- Ricardo é mais novo do que Diego.
- João amava Teresa.

Como representar as seguintes sentenças?

- Ana é filha de Laura.
- Ricardo é mais novo do que Diego.
- João amava Teresa.

Predicados binários

_______ é filha de _______

_______ é mais novo do que _______

_______ amava _______

Como representar as seguintes sentenças?

- Ana é filha de Laura.
- Ricardo é mais novo do que Diego.
- João amava Teresa.

Predicados binários

$\_\_\_\_\_\__x$ é filha de $\_\_\_\_\_\__y$

$\_\_\_\_\_\__x$ é mais novo do que $\_\_\_\_\_\__y$

$\_\_\_\_\_\__x$ amava $\_\_\_\_\_\__y$

Como representar as seguintes sentenças?

- Ana é filha de Laura.
- Ricardo é mais novo do que Diego.
- João amava Teresa.

Predicados binários

- $F(x, y)$: $\_\_\_\_\_\__{x}$ é filha de $\_\_\_\_\_\__{y}$
- $N(x, y)$: $\_\_\_\_\_\__{x}$ é mais novo do que $\_\_\_\_\_\__{y}$
- $A(x, y)$: $\_\_\_\_\_\__{x}$ amava $\_\_\_\_\_\__{y}$

Cuidado com a **ordem** dos termos!
$F(a, l)$ é diferente de $F(l, a)$!!!

Poeminha

"João amava Teresa que amava Raimundo que amava Maria que amava Joaquim que amava Lili que não amava ninguém."

Quadrilha – Carlos Drummond de Andrade

- Um predicado pode ter qualquer número de *argumentos*.
- O número de argumentos é chamado de **aridade** do predicado.

Predicado	Significado	Aridade
$M(x)$	$\underline{\hspace{2cm}}_x$ é preta	1
$F(x, y)$	$\underline{\hspace{2cm}}_x$ é filha de $\underline{\hspace{2cm}}_y$	2

- Um predicado pode ter qualquer número de *argumentos*.
- O número de argumentos é chamado de **aridade** do predicado.

Predicado	Significado	Aridade
$M(x)$	$\_\_\_\_\__x$ é preta	1
$F(x, y)$	$\_\_\_\_\__x$ é filha de $\_\_\_\_\__y$	2

Predicados com 3 argumentos?

- Um predicado pode ter qualquer número de *argumentos*.
- O número de argumentos é chamado de **aridade** do predicado.

Predicado	Significado	Aridade
$M(x)$	$\_\_\_\_\_\__x$ é preta	1
$F(x, y)$	$\_\_\_\_\_\__x$ é filha de $\_\_\_\_\_\__y$	2

Predicados com 3 argumentos?

$S(x, y, z)$	z é a soma de x e y
$D(x, y, z)$	x tem pai y e mãe z

$A(x, y)$: $\underline{\hspace{2cm}}_x$ ama $\underline{\hspace{2cm}}_y$.

Todo mundo ama uma pessoa.

Ordem dos quantificadores

$A(x, y)$: $\underline{\hspace{2cm}}_x$ ama $\underline{\hspace{2cm}}_y$.

Todo mundo ama uma pessoa.

Para qualquer pessoa x, existe uma pessoa que x ama.

Existe uma pessoa em particular que todo mundo ama.

$A(x, y)$: $\_\_\_\_\_\__x$ ama $\_\_\_\_\_\__y$.

Todo mundo ama uma pessoa.

Para qualquer pessoa x, existe uma pessoa que x ama.

$$\forall x.\exists y.(A(x, y))$$

Existe uma pessoa em particular que todo mundo ama.

$$\exists y.\forall x.(A(x, y))$$

Identidade

Só pode haver um Highlander!

Só pode haver um Highlander!

Se dois objetos são um Highlander, então trata-se do mesmo objeto.

$H(x)$: $\_\_\_\_\__x$ é um Highlander.

$I(x, y)$: $\_\_\_\_\__x$ e $\_\_\_\_\__y$ são idênticos (iguais).

Só pode haver um Highlander!

Se dois objetos são um Highlander, então trata-se do mesmo objeto.

$H(x)$: $\_\_\_\_\_\__x$ é um Highlander.

$I(x, y)$: $\_\_\_\_\_\__x$ e $\_\_\_\_\_\__y$ são idênticos (iguais).

$$\forall x.\forall y.(H(x) \land H(y) \to I(x, y))$$

Só pode haver um Highlander!

Se dois objetos são um Highlander, então trata-se do mesmo objeto.

$H(x)$: $\underline{\qquad\qquad}_x$ é um Highlander.
$I(x, y)$: $\underline{\qquad\qquad}_x$ e $\underline{\qquad\qquad}_y$ são idênticos (iguais).

$$\forall x.\forall y.(H(x) \wedge H(y) \rightarrow I(x, y))$$

O predicado I, da identidade, é tão comum que possui notação especial.

- Seu nome é $=$
- A notação usual é $x = y$
  (infixa, ao invés da notação prefixa $= (x, y)$)

A mãe da minha irmã é a minha mãe.

$M(x, y)$: x é mãe de y.
$I(x, y)$: x é irmã de y.
e: Eu.

A mãe da minha irmã é a minha mãe.

$M(x, y)$: x é mãe de y.
$I(x, y)$: x é irmã de y.
e: Eu.

$$\forall x . \forall y . (I(x, e) \wedge M(y, x) \rightarrow M(y, e))$$

Para quaisquer x, e y, a soma de x e y é igual à soma de y e x.

$S(x, y, z)$: z é a soma de x e y.

Para quaisquer x, e y, a soma de x e y é igual à soma de y e x.

$S(x, y, z)$: z é a soma de x e y.

$$\forall x. \forall y. \forall s_1. \forall s_2. (S(x, y, s_1) \land S(y, x, s_2) \rightarrow s_1 = s_2)$$

Podemos utilizar a notação de **função** para facilitar a leitura e formalização de certos predicados.

$mae(x)$: retorna a mãe de x.
$soma(x, y)$: retorna $x + y$.

$$\forall x.\forall y.(I(x, e) \wedge M(y, x) \rightarrow M(y, e))$$

$$\forall x.\forall y.\forall s_1.\forall s_2.(S(x, y, s_1) \wedge S(y, x, s_2) \rightarrow s_1 = s_2)$$

Podemos utilizar a notação de **função** para facilitar a leitura e formalização de certos predicados.

$mae(x)$: retorna a mãe de x.
$soma(x, y)$: retorna $x + y$.

$$\forall x.\forall y.(I(x, e) \wedge M(y, x) \rightarrow M(y, e))$$
$$\forall x.(I(x, e) \rightarrow mae(x) = mae(e))$$
$$\forall x.\forall y.\forall s_1.\forall s_2.(S(x, y, s_1) \wedge S(y, x, s_2) \rightarrow s_1 = s_2)$$
$$\forall x.\forall y.(soma(x, y) = soma(y, x))$$

Podemos utilizar a notação de **função** para facilitar a leitura e formalização de certos predicados.

$mae(x)$: retorna a mãe de x.
$soma(x, y)$: retorna $x + y$.

$$\forall x.(I(x, e) \to mae(x) = mae(e))$$

$$\forall x.\forall y.(soma(x, y) = soma(y, x))$$

Somente é possível o uso de função quando um objeto (ou par de objetos, ou n objetos) tiver uma relação com **um único** objeto.