UDESC
JOINVILLE

Transformações Lineares no plano e no Espaço

Graciela Moro

UDESC
JOINVILLE

Transformações Lineares no plano

- Dilatação/contração
- Cisalhamento
- Rotação
- Projeção
- Reflexão

Dilatação ou contração

Representação Algébrica

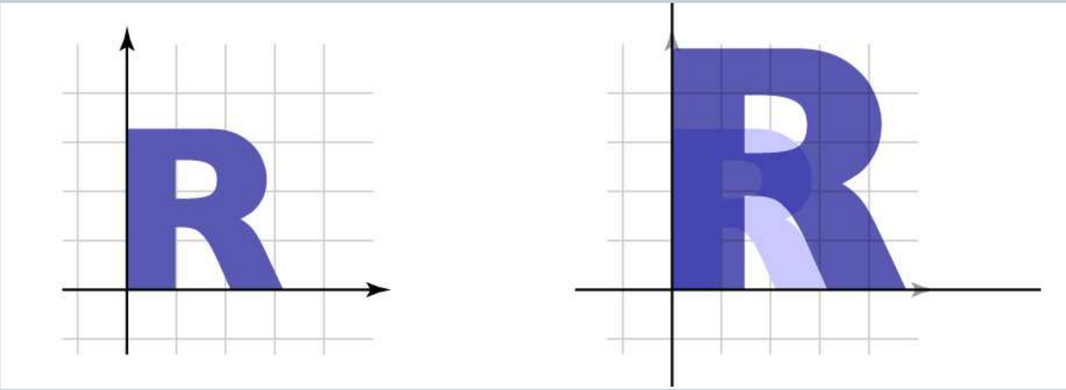
$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$T(x,y) = k(x,y)$$

Representação Matricial

$$T = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Representação geométrica de uma dilatação de fator k=1.5



Cisalhamento: na direção do eixo x

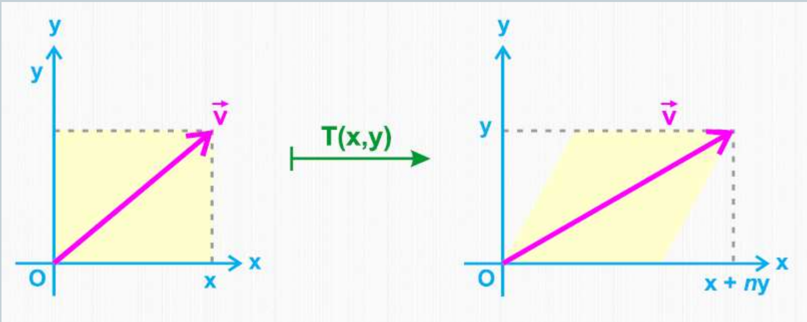
Representação Algébrica

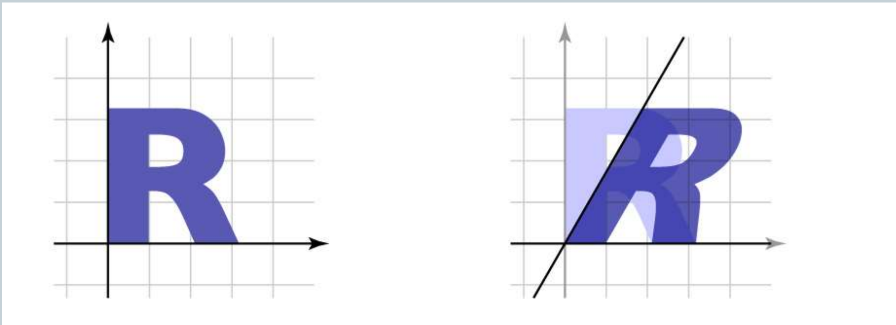
$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(x, y) = (x + ky, y)$$

Representação Matricial

$$T = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$





Representação geométrica de um cisalhamento de fator k=0,5

Cisalhamento: na direção do eixo y

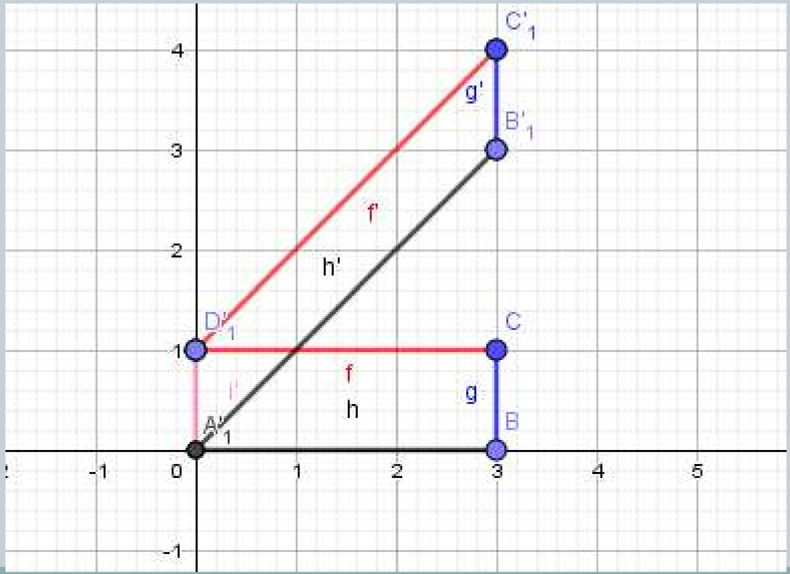
Representação Algébrica

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(x, y) = (x, y + kx)$$

Representação Matricial

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$



Representação geométrica de um cisalhamento de fator k=1

Rotação

Representação Algébrica

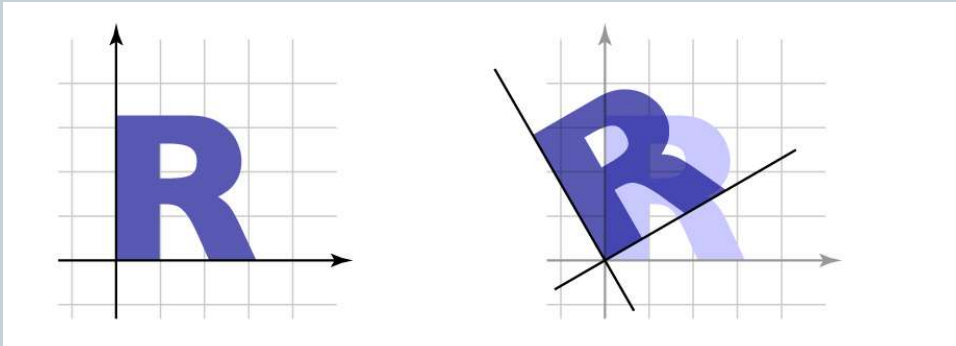
$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(x, y) = (x\cos\boldsymbol{\theta} - y\sin\boldsymbol{\theta}, x\sin\boldsymbol{\theta} + y\cos\boldsymbol{\theta})$$

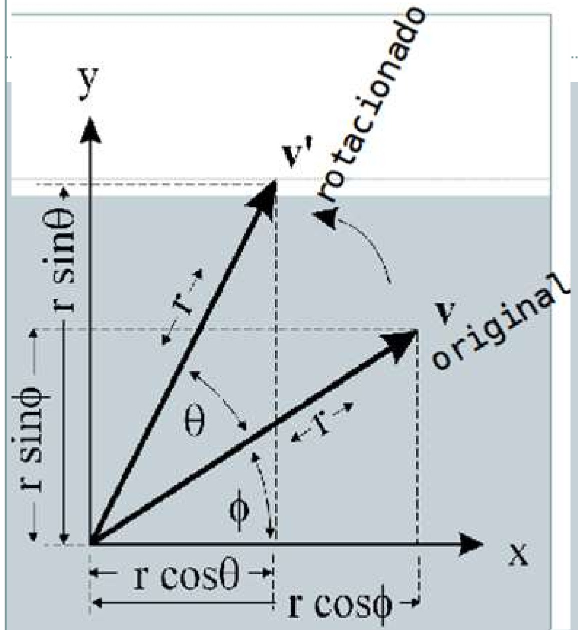
Representação Matricial

$$T = \begin{bmatrix} \cos\boldsymbol{\theta} & -\sin\boldsymbol{\theta} \\ \sin\boldsymbol{\theta} & \cos\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}$$

Representação geométrica de um cisalhamento de fator $\boldsymbol{\theta} = \frac{\pi}{6}$



Como determinar a rotação?



$$v = (x, y)$$

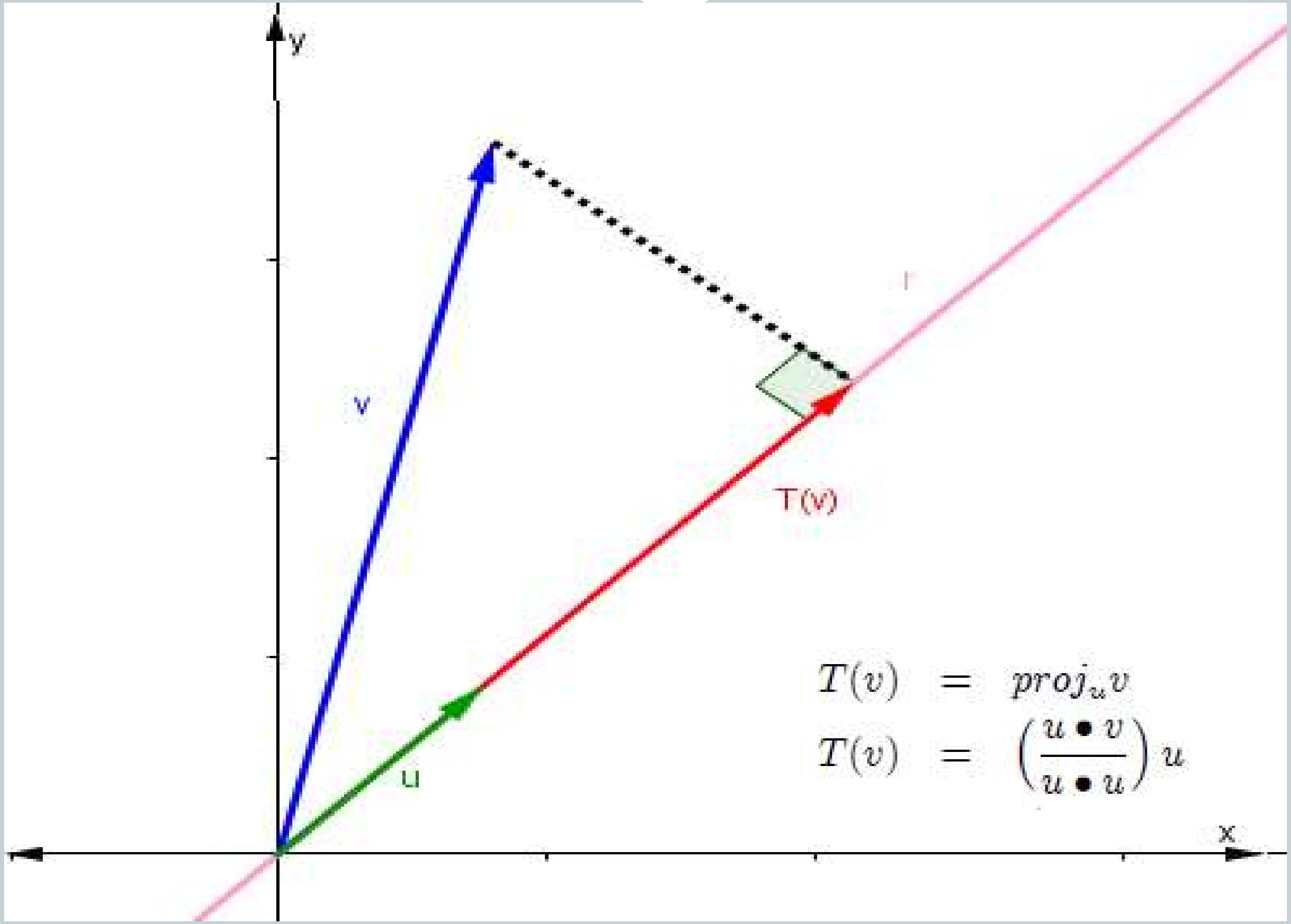
$$v' = T(v) = (x', y')$$

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

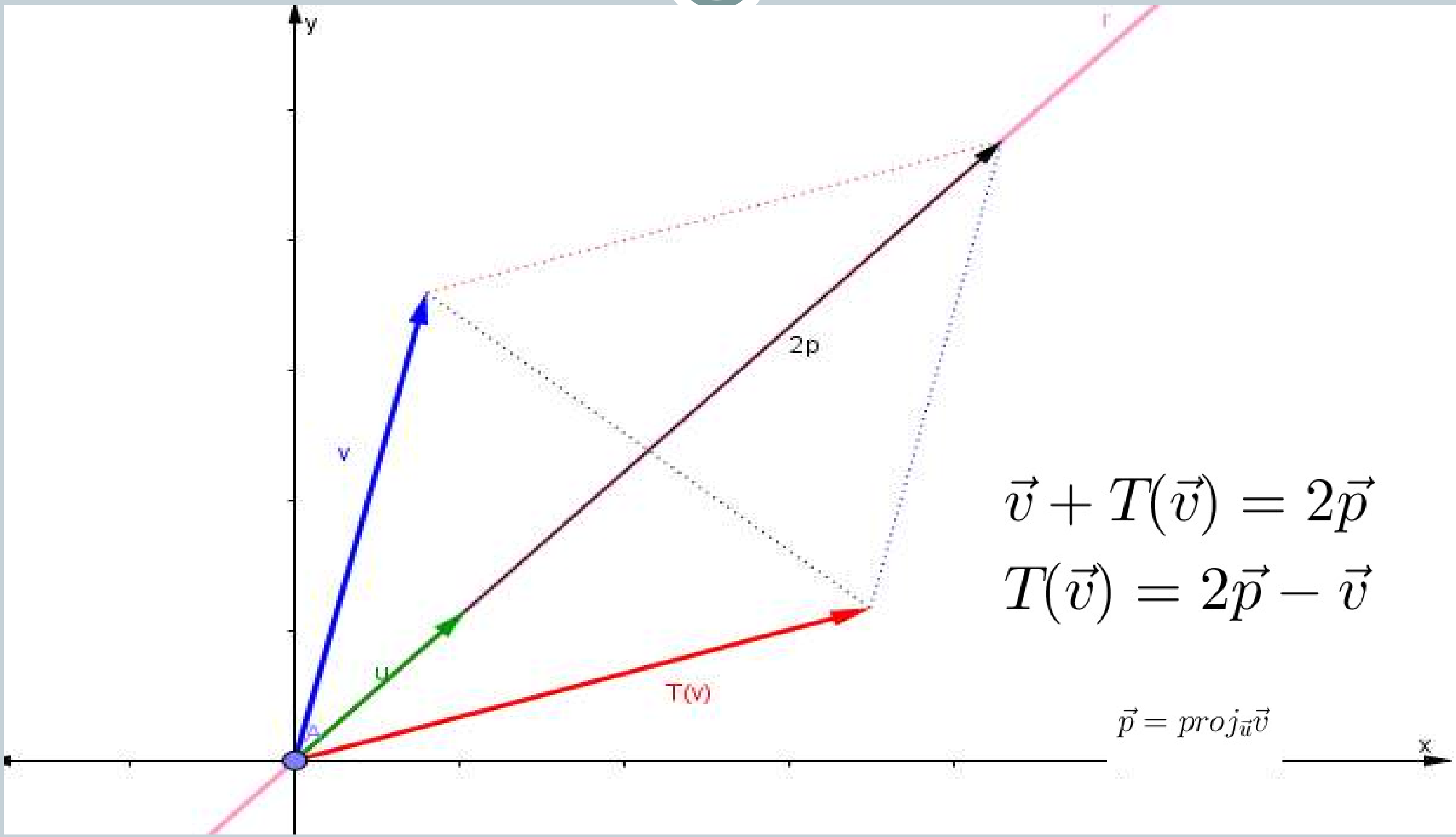
$$\begin{cases} x' = r\cos(\theta + \phi) = r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta \\ y' = r\sin(\theta + \phi) = r\cos\phi\sin\theta + r\sin\phi\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Projeção



Reflexão em torno de uma reta y=kx



$$\vec{v} + T(\vec{v}) = 2\vec{p}$$

$$T(\vec{v}) = 2\vec{p} - \vec{v}$$

$$\vec{p} = proj_{\vec{u}}\vec{v}$$

Reflexão em torno da reta x=0

Representação Algébrica

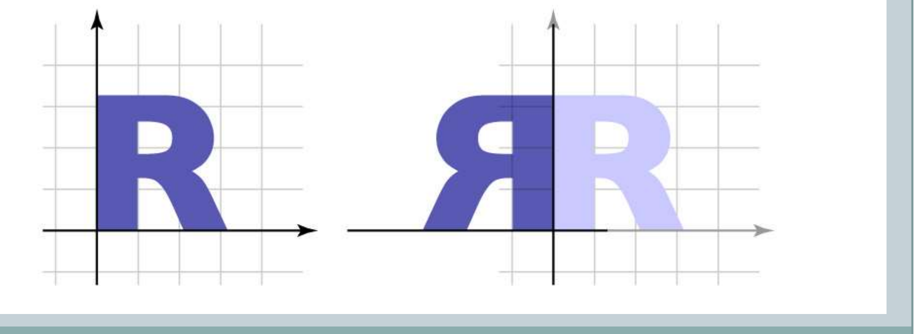
$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$T(x, y) = (-x, y)$$

Representação Matricial

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Representação geométrica da reflexão em torno do eixo y



Exemplos

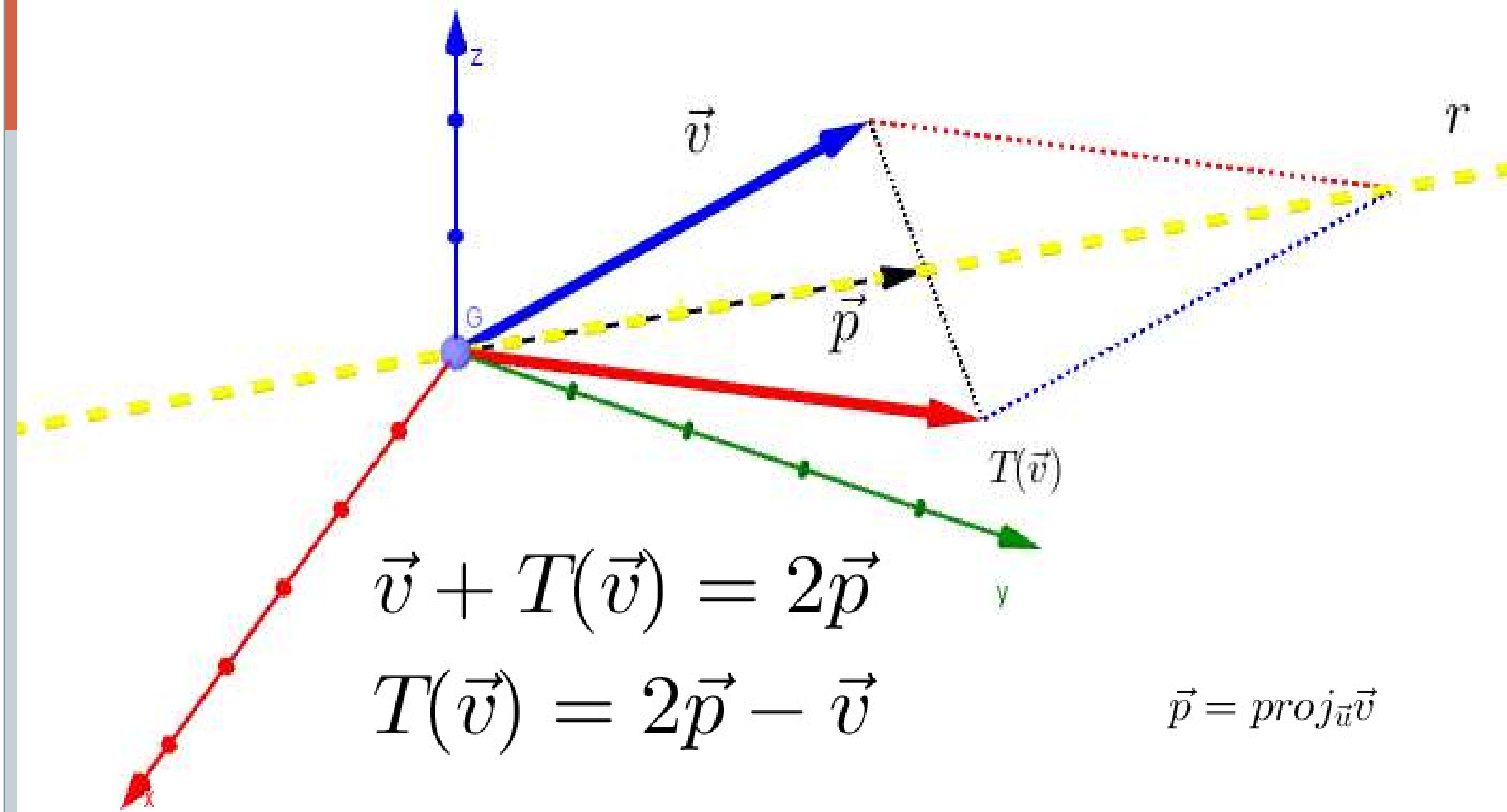
1) Qual a transformação linear T que representa uma expansão de fator 2, seguida por uma rotação anti-horária de 30°.

Considere o operador $T: R^2 \to R^2$ que realiza a projeção ortogonal sobre a reta $y = 2x$ seguido de um cisalhamento de 2 unidades na direção x. Que objeto geométrico é o núcleo de T? Que objeto geométrico é a imagem de T? Represente-os geometricamente.

Transformações Lineares no $\mathbb{R}^3$

- Transformações lineares no $\mathbb{R}^3$
  - Reflexão em torno de uma reta
  - Reflexão em torno de um plano
  - Rotação

Reflexão em torno de uma reta

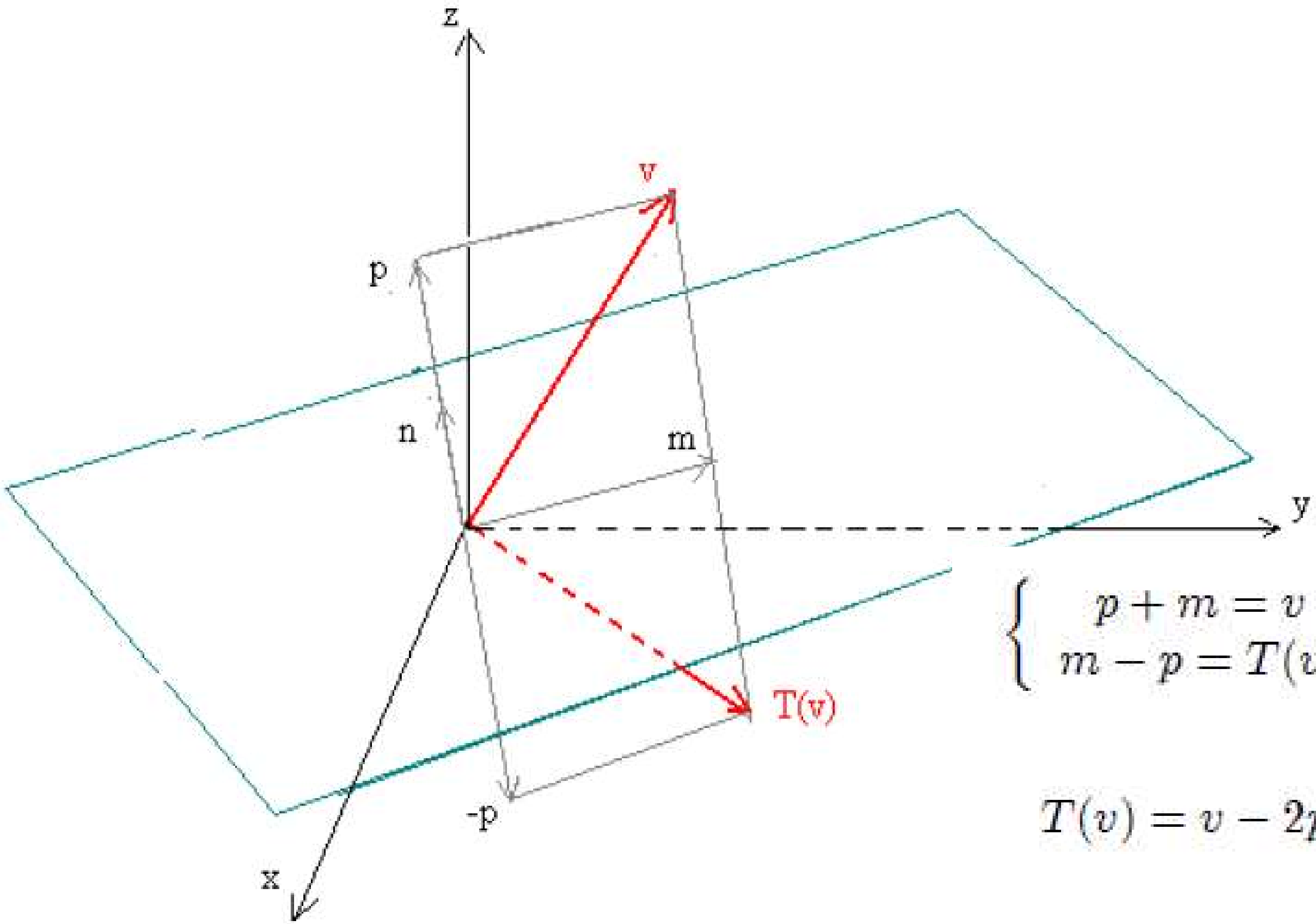


$$\vec{v} + T(\vec{v}) = 2\vec{p}$$

$$T(\vec{v}) = 2\vec{p} - \vec{v}$$

$$\vec{p} = proj_{\vec{u}}\vec{v}$$

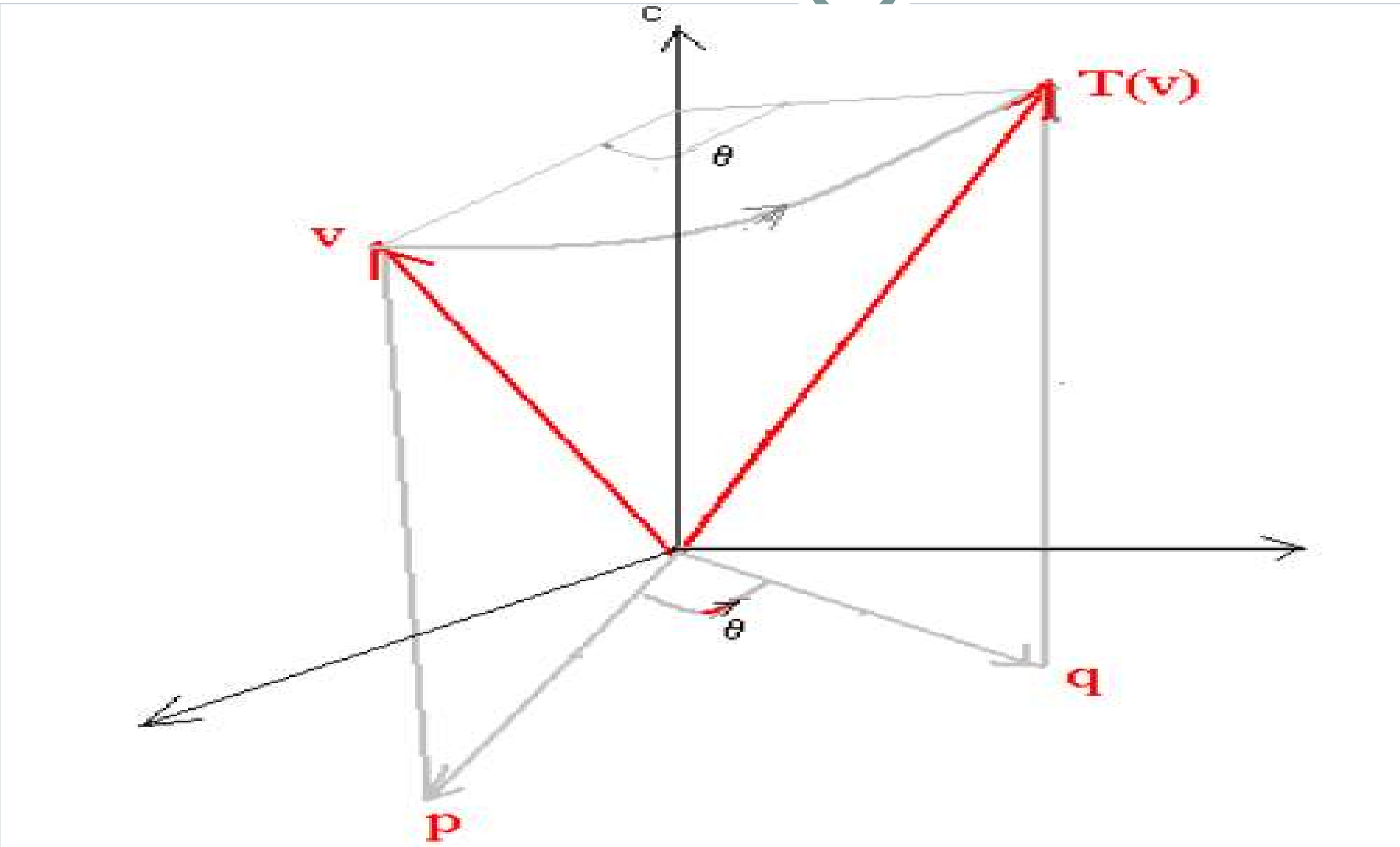
Reflexão em torno de um plano



$$\begin{cases} p + m = v \\ m - p = T(v) \end{cases}$$

$$T(v) = v - 2p$$

Rotação em torno do eixo Z



p = projeção de v no plano xy

q = projeção de $T(v)$ no plano xy

$T_\theta(x, y, z) = (x', y', z')$

Observe que $z' = z$

Rotação em torno do eixo Z

$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\
y' &= x\sin\theta + y\cos\theta
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
T_\theta &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\
T_\theta(x,y,z) &= (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, z)
\end{aligned}
$$

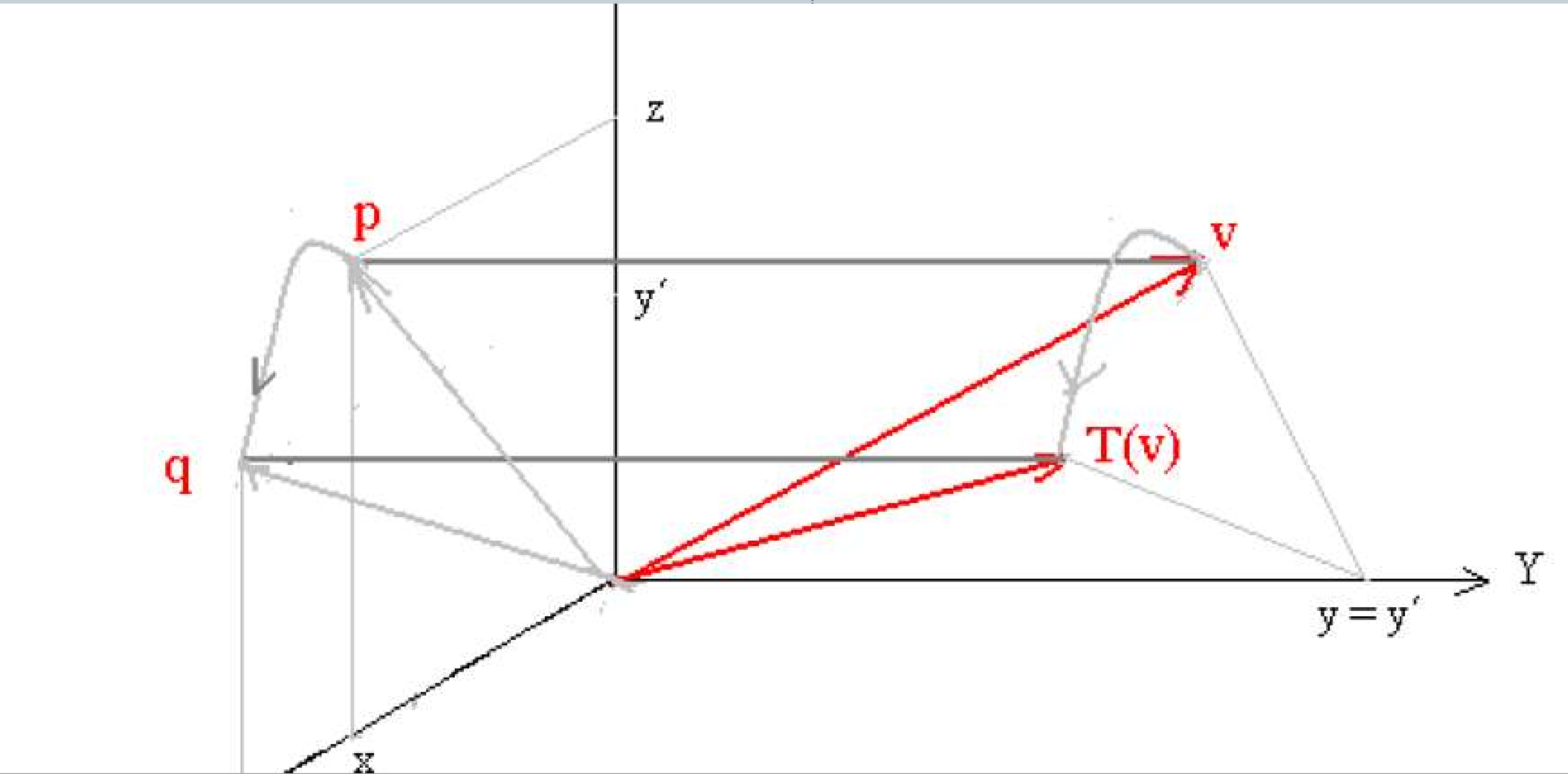
Matricialmente

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}
$$

$$
[T_\theta]_Z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

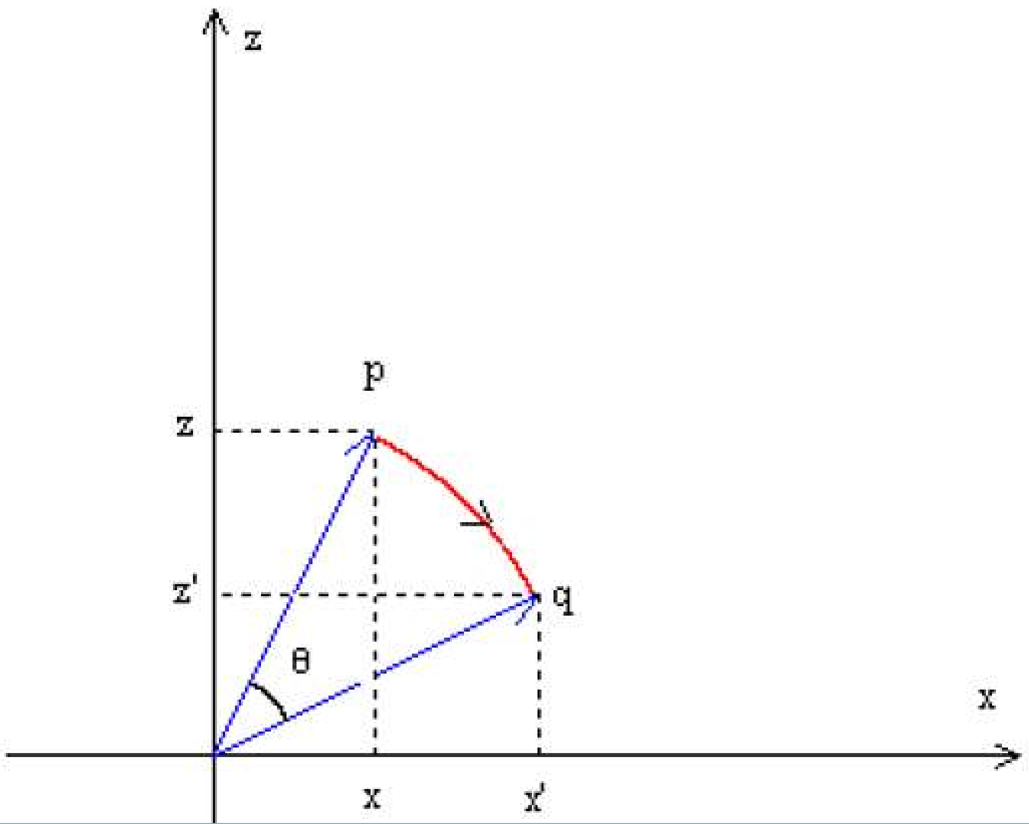
Rotação em torno do eixo y

$y = y'$



Rotação em torno do eixo y

No plano xz vemos que o vetor q é obtido a partir do vetor p pela rotação do ângulo no SENTIDO HORÁRIO.



- Portanto podemos considerar o vetor p obtido a partir do vetor q por uma rotação no sentido anti-horário, ou seja, R(p) = q

Rotação em torno do eixo y

$$T_\theta(x, y, z) = (x', y', z')$$
$$T_\theta(x, y, z) = (x\cos\theta + z\sin\theta, y, -x\sin\theta + z\cos\theta)$$

Matricialmente:

$$[T_\theta]_Y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Rotação em torno do eixo x

A matriz da Rotação em torno do eixo x é dada por

$$[T_\theta]_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

UDESC JOINVILLE

Exemplo

Considere o operador linear $T: R^3 \to R^3$ definido pelo triplo de uma reflexão através do plano $x - 2y - z = 0$, seguido do dobro de uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ em torno do eixo oy(sentido anti-horário) e seguido do triplo de uma reflexão através da reta $r: \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$. Encontre a expressão para $T(x, y, z)$.

Referências

- Adaptado de

© 2004 Steve Marschner. 2D Geometric Transformations. CS 465 Lecture 8.