Integral Indefinida

Exemplo. Qual é a função $F(x)$ cuja derivada é a função $f(x)$ dada?

a) $f(x) = 1 \Longrightarrow F(x) = x + c$

b) $f(x) = x \Longrightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + c$

c) $f(x) = x^2 \Longrightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} + c$

d) $f(x) = x^3 \Longrightarrow F(x) = \frac{x^4}{4} + c$

e) $f(x) = x^n \Longrightarrow F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, se\ n \neq -1$

f) $f(x) = e^{ax} \Longrightarrow F(x) = \frac{e^{ax}}{a} + c$

g) $f(x) = sen(ax) \Longrightarrow F(x) = -\frac{\cos(ax)}{a} + c$

h) $f(x) = cos(ax) \Longrightarrow F(x) = \frac{\mathrm{sen}(ax)}{a} + c$

<u>Definição</u>: Se F é uma **primitiva** ou **antiderivada** de f em um intervalo I, então $F'(x) = f(x)$.

Proposição: Se F e G são primitivas de f, então se diferem por uma constante.

Em outras palavras, esta proposição nos diz que se encontrar uma das primitivas, encontra-se todas, pois a diferença entre elas é apenas uma constante.

Queremos mostrar que: $\underbrace{F(x) - G(x)}_{H(x)} = c$

Demonstração:

A função H é uma função diferenciável, pois é a diferença de funções diferenciáveis.

$$H'(x) = \big(F(x) - G(x)\big)' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$H'(x) = 0 \Longrightarrow H(x) = c \Longrightarrow F(x) - G(x) = c \Longrightarrow F(x) = G(x) + c$$

Definição: Seja F uma primitiva de f. Denota-se e define-se a **integral indefinida** da função $f(x)$ por

$$\underbrace{\int}_{\text{Símbolo de integração}} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{Integrando}}\,\underbrace{dx}_{\text{Diferencial}}}_{\text{Elemento de integração}} = F(x) + c.$$

Exemplos:

a) $f(x) = 1 \Longrightarrow F(x) = x + c$

$$\int 1\,dx = x + c$$

b) $f(x) = x \Longrightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} + c$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

c) $f(x) = x^2 \Longrightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} + c$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$$

d) $f(x) = x^3 \Longrightarrow F(x) = \frac{x^4}{4} + c$

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{3} + c$$

e) $f(x) = x^n \Longrightarrow F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, se\ n \neq -1$$

f) $f(x) = e^{ax} \Longrightarrow F(x) = \frac{e^{ax}}{a} + c$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$$

h) $f(x) = cos(ax) \Longrightarrow F(x) = \frac{\text{sen}(ax)}{a} + c$

$$\int cos(ax)\,dx = \frac{\text{sen}(ax)}{a} + c$$

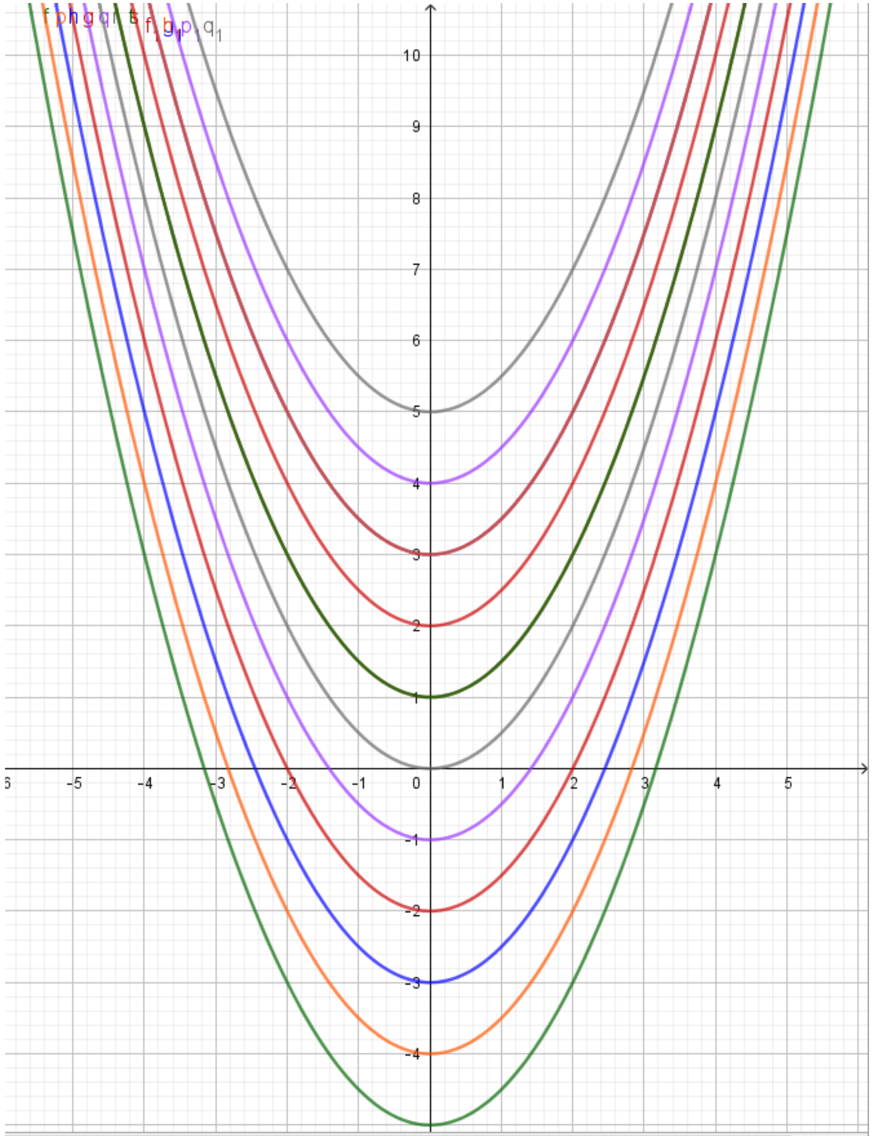
g) $f(x) = sen(ax) \Longrightarrow$

$$F(x) = -\frac{\cos(ax)}{a} + c$$

$$\int sen(ax)\,dx = -\frac{cos(ax)}{a} + c$$

Interpretação Geométrica

Exemplo. $\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c$



Família de curvas

➡ **Curvas integrais**

Exemplo. Prove que:

$$a)\ \int \frac{dx}{x} = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f(x)} dx = \underbrace{ln|x| + c}_{F(x)}$$

Devemos provar que $F(x) = ln|x| + c$ é primitiva de f , ou seja, que $F'(x) = f(x)$.

$$F'(x) = (ln|x| + c)' = (ln|x|)' + (c)'$$

Pela definição de módulo, temos que: $|x| = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}$

Para $x > 0$, temos que:

$$ln|x| = \ln(x) \Longrightarrow (\ln(x))' = \frac{1}{x} \Longrightarrow F'(x) = (ln|x| + c)' = (\ln(x) + c)' = \frac{1}{x} = f(x)$$

Para $x < 0$, temos que:

$$ln|x| = \ln(-x) \Longrightarrow (\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} \Longrightarrow F'(x) = (ln|x| + c)' = (\ln(-x) + c)' = \frac{1}{x} = f(x)$$

$$b)\ \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \underbrace{\frac{1}{a^2+x^2}}_{f(x)} dx = \underbrace{\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c}_{F(x)}$$

Devemos provar que $F(x) = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c$ é primitiva de f, ou seja, que $F'(x) = f(x)$.

$$F'(x) = \left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c\right)' = \left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right)' + (c)' = \frac{1}{a}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right)'$$

$$F'(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{\left(\frac{x}{a}\right)'}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\frac{a^2+x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2+x^2} = f(x)$$

Exemplo:

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \int \frac{1}{3^2+x^2} dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

Integrais Imediatas

1. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1;$
2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c;$
3. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c,\ a > 0 \text{ e } a \neq 1;$
4. $\int e^u du = e^u + c;$
5. $\int \sin(u)\, du = -\cos u + c;$
6. $\int \cos(u)\, du = \sin u + c;$
7. $\int \sec^2(u)\, du = \text{tg}(u) + c;$
8. $\int \text{cossec}^2(u)\, du = -\text{cotg}(u) + c;$
9. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\left(\dfrac{u}{a}\right) + c.$
10. $\int \sec(u)\, du = \ln|\sec(u) + \text{tg}(u)| + c;$
11. $\int \text{cossec}(u)\, du = \ln|\text{cossec}(u) - \text{cotg}(u)| + c;$

Propriedades:

i) $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

ii) $\int c f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$

Exemplo. Calcule as integrais indefinidas.

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1;$

2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c;$

$$a)\ I = \int \frac{(\sqrt{x}+4)^2}{x} dx$$

$$I = \int \frac{(\sqrt{x})^2 + 8\sqrt{x} + 16}{x} dx$$

$$I = \int \left(\frac{x}{x} + \frac{8\sqrt{x}}{x} + \frac{16}{x}\right) dx$$

$$I = \int 1\, dx + \int \frac{8}{\sqrt{x}} dx + \int \frac{16}{x} dx$$

$$I = \int 1\, dx + 8\int x^{-\frac{1}{2}} dx + 16\int \frac{1}{x} dx$$

$$I = \int 1\, dx + 8\int x^{-\frac{1}{2}} dx + 16\int \frac{1}{x} dx$$

$$I = x + c_1 + 8\int x^{-\frac{1}{2}} dx + 16\int \frac{1}{x} dx$$

$$I = x + c_1 + 8\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c_2\right) + 16\int \frac{1}{x} dx$$

$$I = x + c_1 + 8\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c_2\right) + 16(ln|x| + c_3)$$

$$I = x + c_1 + 16\sqrt{x} + 8c_2 + 16ln|x| + 16c_3$$

$$I = x + 16\sqrt{x} + 16ln|x| + c_1 + 8c_2 + 16c_3$$

$$\boxed{I = x + 16\sqrt{x} + 16ln|x| + k}$$

b) $I = \int \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4}\,dx$

$$I = \int \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^2 - 4}\,dx$$

$$I = \int (x^2 + 4)\,dx$$

$$I = \int x^2\,dx + \int 4\,dx$$

$$I = \int x^2\,dx + 4\int dx$$

$$I = \frac{x^3}{3} + c_1 + 4(x + c_2)$$

$$I = \frac{x^3}{3} + 4x + c_1 + 4c_2$$

$$\boxed{I = \frac{x^3}{3} + 4x + k}$$

c) $I = \int \frac{x^2 - 4}{x^4 - 16}\,dx$

$$I = \int \frac{x^2 - 4}{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}\,dx$$

$$I = \int \frac{1}{x^2 + 4}\,dx$$

$$I = \int \frac{1}{x^2 + 2^2}\,dx$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c}$$

d) $I = \int (2x-1)^3 dx = \int (2x+(-1))^3 dx$

e) $I = \int (2x-1)^{300} dx$

Lembre que: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$I = \int \left((2x)^3 + 3(2x)^2(-1) + 3(2x)(-1)^2 + (-1)^3\right) dx$$

$$I = \int (8x^3 - 12x^2 + 6x - 1) dx$$

$$I = 8\int x^3 dx - 12\int x^2 dx + 6\int x\, dx - \int dx$$

$$I = 8\frac{x^4}{4} - 12\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - x + k$$

$$I = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x + k$$