Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Séries Geométricas
Critério da Integral

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 do dia 25 de setembro de 2024.

UDESC

Séries Geométricas

Uma série geométrica consiste na soma dos infinitos termos de uma sequência geométrica, ou seja, é da forma:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

em que $a \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$ é dito primeiro termo e $q \in \mathbb{R}$ é dito razão.

Se $q = 1$ a Sequência de Somas Parciais da série geométrica é tal que

$$\begin{aligned} S_n &= a + a \cdot 1 + a \cdot 1^2 + a \cdot 1^3 + a \cdot 1^4 + \cdots + a \cdot 1^{n-1} \\ &= a + a + a + a + a + \cdots + a = a \cdot n. \end{aligned}$$

Como, neste caso

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} a \cdot n = +\infty$$

a Série Geométrica diverge quando $q = 1$.

Se $q = -1$ a Sequência de Somas Parciais da série geométrica é tal que

$$\begin{aligned} S_n &= a + a \cdot (-1) + a \cdot (-1)^2 + a \cdot (-1)^3 + a \cdot (-1)^4 + \cdots + a \cdot (-1)^{n-1} \\ &= a - a + a - a + a + \cdots + a \cdot (-1)^{n-1} \\ &= \begin{cases} 0, & se\ n\ é\ par \\ a, & se\ n\ é\ ímpar \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ não existe e a Série Geométrica também diverge quando $q = -1$.

Séries Geométricas

Se $q \neq \pm 1$ a Sequência de Somas Parciais da série geométrica é tal que

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \cdots + aq^{n-1}.$$

Multiplicando ambos os lados por q, obtemos

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \cdots + aq^{n-1} + aq^n.$$

Subtraindo as igualdades, obtemos

$$S_n - qS_n = a - aq^n \quad \Leftrightarrow \quad (1-q)S_n = a(1-q^n) \quad \Leftrightarrow \quad S_n = \frac{a(1-q^n)}{(1-q)}$$

Assim

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a(1-q^n)}{(1-q)} = \frac{a}{1-q} \lim_{n\to+\infty} (1-q^n) = \frac{a}{1-q}\left(1 - \lim_{n\to+\infty} q^n\right).$$

Como

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} \pm\infty, & se\ |q| > 1 \\ 0, & se\ |q| < 1 \end{cases}$$

temos que a série geométrica diverge para $|q| > 1$ e converge para $S = \frac{a}{1-q}$ se $|q| < 1$.

Séries Geométricas

Portanto obtemos o seguinte critério para as séries geométricas:

Critério das Séries Geométricas: Uma série geométrica é tal que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \cdots = \frac{a}{1-q} \quad se\ |q| < 1,$$

e é divergente se $|q| \geq 1$.

Exercício 1) Analise se são convergentes ou divergentes as séries abaixo. Caso convirjam, determine o valor da sua soma:

$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-7)^{n-1}}{5^n}$

$b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{3n-1}}{3^{2n+1}}$

$c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n + 3^{n+2}}{7^n}$

Critério da Integral

Critério da Integral para convergência de Séries Numéricas

Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série de termos positivos $(u_n \geq 0)$ e decrescentes $(u_{n+1} \leq u_n \; \forall n \in \mathbb{N}^*)$.

Considere $f\colon [1, +\infty)$ uma função contínua, positiva e decrescente tal que $f(n) = u_n \; \forall n \in \mathbb{N}$.
Sob essas condições, considere a integral imprópria

$$I = \int_1^{+\infty} f(x)dx\,.$$

i) Se I diverge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ também diverge.

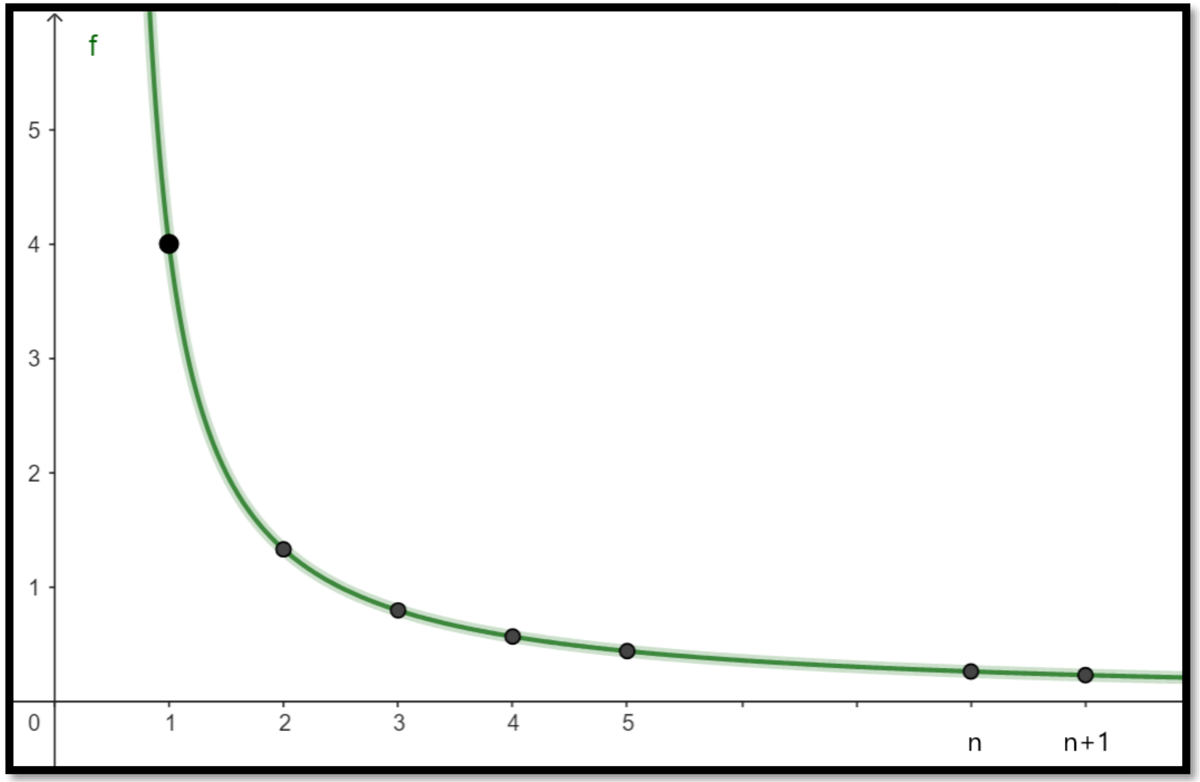
ii) Se I converge, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ também converge.

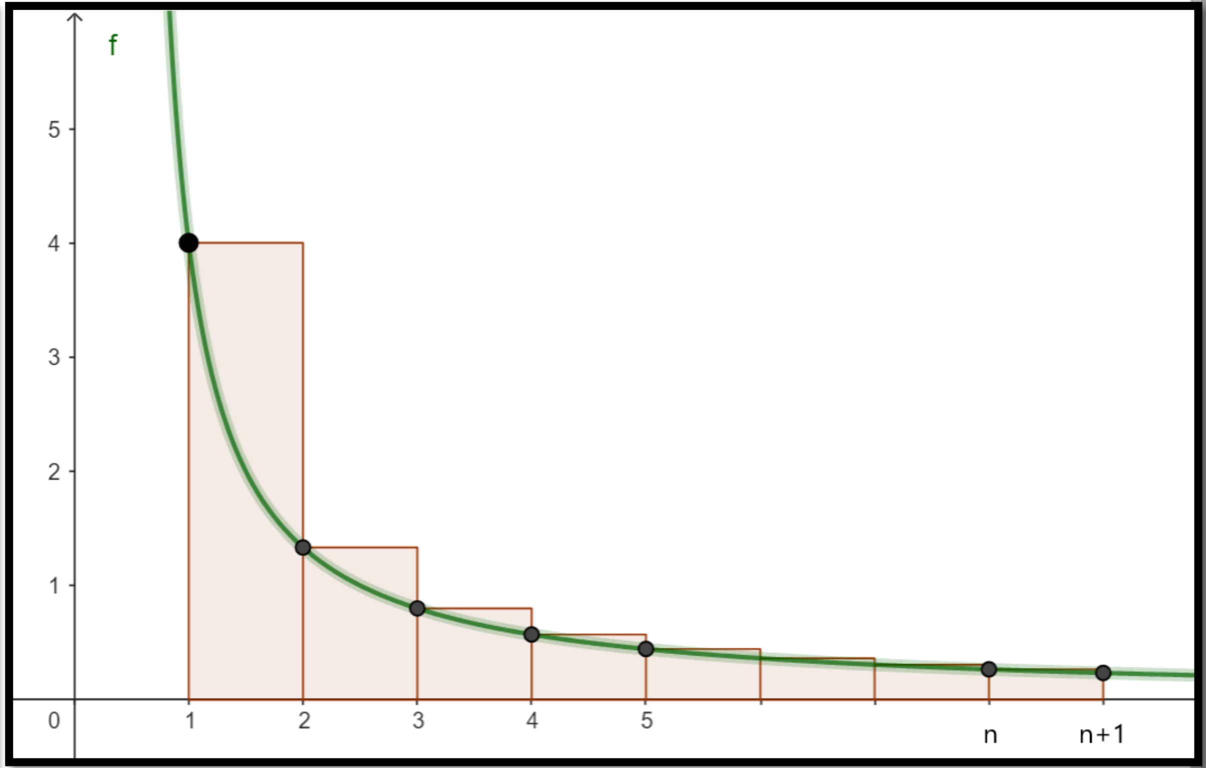
Observações:

- O critério da integral não permite encontrar o valor para o qual a série converge.
- O critério apenas garante que esse valor existe e, conforme veremos, fica limitado pelo valor da integral imprópria convergente somado com seu primeiro termo.

Justificativa – Interpretação geométrica

Como $u_n \geq 0$ e $u_{n+1} \leq u_n \; \forall n \in \mathbb{N}^*$, geometricamente têm-se que





Como $u_n = f(n)$ tem-se que

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \\ &= f(1) + f(2) + f(3) + + \cdots f(n) \\ &= f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + \cdots + f(n)\cdot 1 \\ &\geq \int_1^{n+1} f(x)dx \end{aligned}$$

Uma soma superior de f, com $\Delta x = 1$.

Justificativa

Logo

$$S_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx$$

e, por propriedades,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n \geq \lim_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx$$
$$= \int_1^{+\infty} f(x)dx\,.$$

Portanto, se a integral divergir, temos que

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = +\infty$$

e, consequentemente,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n \geq +\infty$$

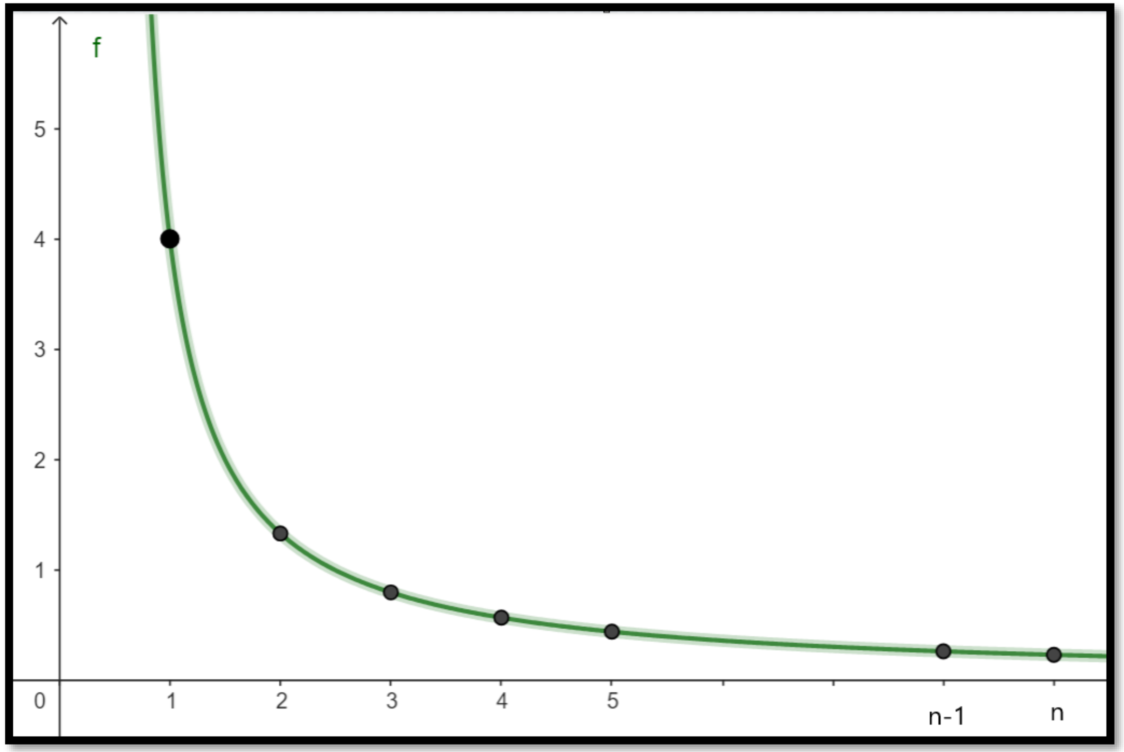
ou seja, não existe o limite das somas parciais e a série

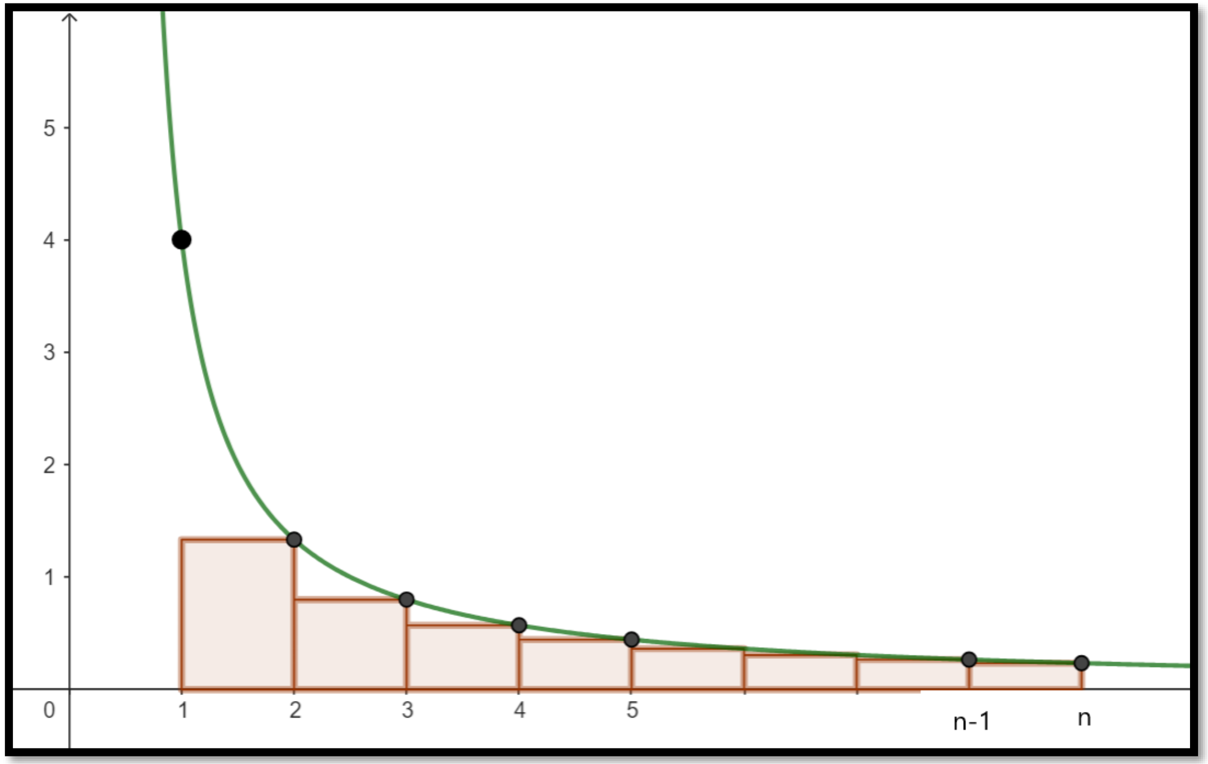
$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

é divergente.

Justificativa – Interpretação geométrica

Analogamente, comparando S_n com uma soma inferior de f, obtém-se que





Uma soma inferior de f, com $\Delta x = 1$.

$$
\begin{aligned}
S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \\
&= u_1 + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \\
&= u_1 + f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + \cdots + f(n)\cdot 1 \\
&\leq u_1 + \int_1^n f(x)dx
\end{aligned}
$$

Justificativa

Logo

$$0 \leq S_n \leq u_1 + \int_1^n f(x)dx$$

e, por propriedades,

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} S_n \leq u_1 + \lim_{n\to+\infty} \int_1^n f(x)dx$$

$$= u_1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx\,.$$

Portanto, se a integral convergir, temos que existe I tal que

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = I$$

e, consequentemente,

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} S_n \leq u_1 + I$$

ou seja, existe o limite das somas parciais é finito e a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

é convergente, ainda que não saibamos o valor da sua soma.

Exercícios

Exercício 2: Verifique se são convergentes ou divergentes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{e^{5n}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$

Exemplos resolvidos

Exemplo 1) Analise se são convergentes ou divergentes

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-5)^{n+1}}{3^{2n}} = \frac{5^2}{3^2} - \frac{5^3}{3^4} + \frac{5^4}{3^6} - \frac{5^5}{3^8} + \frac{5^6}{3^{10}} - \frac{5^7}{3^{12}} + \cdots$$

Note que trata-se de uma série geométrica (e também uma alternada) com

$$a = \frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9} \qquad \text{e} \qquad q = \frac{-5}{3^2} = -\frac{5}{9}.$$

Como $|\,q\,| = \left|-\frac{5}{9}\right| = \frac{5}{9} < 1$ é uma série geométrica convergente, que converge para

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{25/9}{1-(-5/9)} = \frac{25}{14}.$$

$$b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{7^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{7}{2^2} + \frac{7^2}{2^3} + \frac{7^3}{2^4} + \frac{7^4}{2^5} + \cdots$$

Note que trata-se de uma série geométrica com $a = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{7}{2}$.

Como $|\,q\,| = \left|\frac{7}{2}\right| = \frac{7}{2} > 1$, é uma série geométrica divergente.

Exemplos Resolvidos

Exemplo 2: Verifique se são convergentes ou divergentes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$

Solução: Temos que $u_n = \frac{n}{n^2+1} \geq 0$. Tomando $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ temos que $f(n) = u_n$ e f é positiva e decrescente para $x \in [1, +\infty)$. Para comprovar que f é decrescente, veja que a derivada de f é negativa:

$$f'(x) = \frac{1.(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-2x^2}{(x^2+1)^2} < 0 \quad para\, x \geq 1.$$

Portanto, as hipóteses do Critério da Integral estão satisfeitas. Como

$$I = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{x}{x^2+1}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_2^{b^2+1} \frac{1}{2u}du = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(u)\Big|_2^{b^2+1}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(b^2+1) - \frac{1}{2}\ln(2) = +\infty - \frac{1}{2}\ln(2) = +\infty$$

Como a integral I é divergente, a série dada também diverge. Portanto, apesar da série ter chance de convergir (por satisfazer a condição necessária), ela é divergente.

Exemplo Resolvido

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{3n}}$

Solução: Temos que $u_n = \frac{1}{e^{3n}} \geq 0$. Tomando $f(x) = \frac{1}{e^{3x}} = e^{-3x}$ temos que $f(n) = u_n$ e $f(x)$ é positiva e decrescente para $x \in [1, +\infty)$. Para comprovar que f é decrescente, veja que derivada de f é negativa:

$$f'(x) = -3e^{-3x} < 0 \quad para\ x \geq 1.$$

Portanto, as hipóteses do Critério da Integral estão satisfeitas. Como

$$I = \int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b e^{-3x}dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{3}e^{-3x}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{-1}{3}e^{-3b} + \frac{1}{3}e^{-3}$$

$$= 0 + \frac{1}{3}e^{-3} = \frac{1}{3}e^{-3}$$

Como a integral I é convergente, a série dada também converge.

Note que a integral converge para $\frac{1}{3}e^{-3}$ mas não podemos afirmar para qual valor a série converge. Somente sabemos que existe o valor da sua soma.