

# ÁLGEBRA 1

*Departamento de Matemática*  
*UDESC - Joinville*

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>CURVAS</b>	<b>3</b>
1.1	Cilindros projetantes de uma curva . . . . .	3
1.1.1	Exemplo . . . . .	4
1.2	Construção geométrica da curva formada pela interseção de seus cilindros projetantes	5
1.2.1	Exemplos . . . . .	8
1.2.2	Exercícios . . . . .	13
1.3	Equações Paramétricas . . . . .	14
1.3.1	Exemplo . . . . .	14
1.3.2	Equações paramétricas de algumas curvas . . . . .	16
1.3.3	Exemplos . . . . .	17
1.4	Equação vetorial das curvas . . . . .	18
1.4.1	Exemplos . . . . .	19
1.4.2	Exercícios . . . . .	20
<b>2</b>	<b>SISTEMAS DE COORDENADAS</b>	<b>22</b>
2.1	Coordenadas polares no $\mathbb{R}^2$ . . . . .	22
2.1.1	Exemplo . . . . .	22
2.1.2	Relação entre o Sistema de Coordenadas Cartesianas Retangulares e o Sistema de Coordenadas Polares. . . . .	23
2.1.3	Exemplos . . . . .	25
2.1.4	Gráficos de Equações em Coordenadas Polares. . . . .	25
2.1.5	Exemplos . . . . .	26
2.1.6	Algumas Equações em Coordenadas Polares e seus respectivos Gráficos. . . . .	27
2.1.7	Exercícios . . . . .	33
2.1.8	Respostas . . . . .	34
2.2	Coordenadas cilíndricas . . . . .	34
2.3	Coordenadas esféricas . . . . .	35
2.4	Exemplos . . . . .	35
2.5	Exercícios . . . . .	37
2.6	Respostas . . . . .	38

# 1 CURVAS

## 1.1 Cilindros projetantes de uma curva

Dada uma curva  $C$  no espaço é possível obter três cilindros retos cujas interseções fornecem a curva  $C$ . Estes cilindros são obtidos projetando-se a curva em cada um dos planos coordenados. Portanto,

- projetando a curva no plano  $xy$  teremos um cilindro cuja diretriz é a curva  $C$  e a geratriz é o eixo  $z$ ,
- projetando a curva no plano  $xz$  teremos um cilindro cuja diretriz é a curva  $C$  e a geratriz é o eixo  $y$  e
- projetando a curva no plano  $yz$  teremos um cilindro cuja diretriz é a curva  $C$  e a geratriz é o eixo  $x$ .

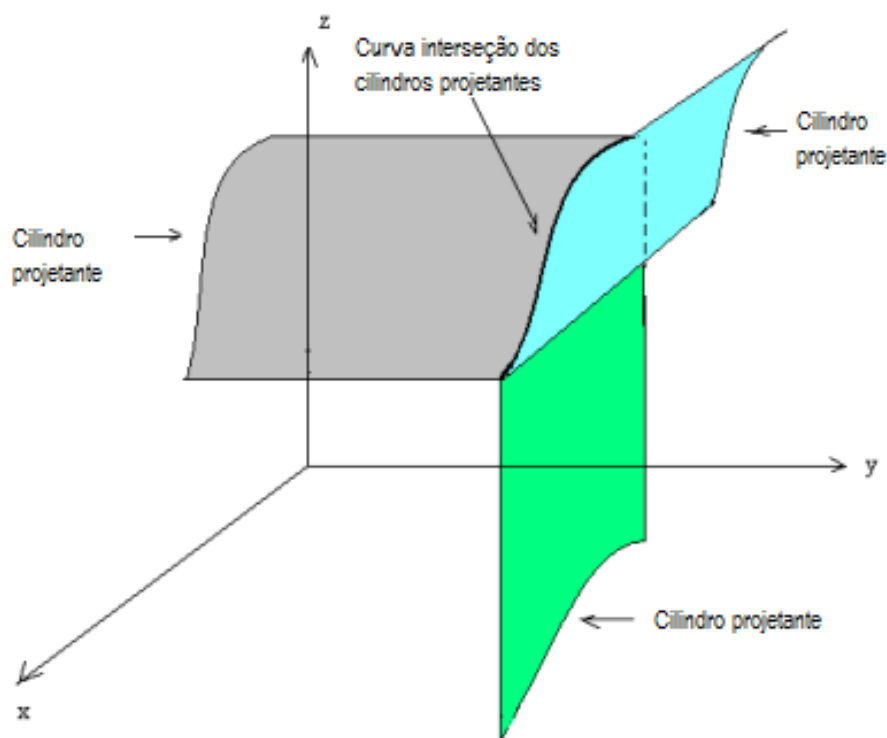


Figura 1:

Dada uma curva no espaço representada pela interseção das superfícies

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= 0, \\ f(x, y, z) &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

podemos representá-la analiticamente por qualquer das equações de duas superfícies que se interceptam segundo a mesma curva. As superfícies mais amenas para se trabalhar são os cilindros e dada uma curva no espaço podemos sempre obter esta mesma curva através da interseção de dois cilindros.

Com efeito, consideramos os sistemas equivalentes ao sistema (1) formado por um par qualquer das equações

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 0, \\ G(y, z) &= 0, \\ H(x, z) &= 0, \end{aligned}$$

resultante da eliminação respectiva das variáveis  $z$ ,  $x$ ,  $y$ . Cada um desses sistemas representa a mesma curva  $C$ .

Geometricamente, estes cilindros são obtidos projetando-se a curva nos três planos coordenados e, por isso, são chamados **cilindros projetantes da curva**.

### 1.1.1 Exemplo

1. Determinar os cilindros projetantes da curva dada pela interseção das superfícies

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 + z^2 - 7 &= 0, \\ 2x^2 + y^2 - z^2 + 1 &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Para eliminar a variável  $x$ , multiplicamos a segunda equação por 2 e a primeira por  $-1$  e em seguida somamos as duas equações

$$\begin{aligned} -4x^2 - y^2 - z^2 + 7 &= 0, \\ 4x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Obtemos o cilindro hiperbólico

$$3z^2 - y^2 = 9. \tag{3}$$

Para eliminar a variável  $y$ , devemos retornar ao sistema (2) e multiplicar a segunda equação por  $-1$  e somar com a primeira equação

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 + z^2 - 7 &= 0, \\ -2x^2 - y^2 + z^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Obtemos o cilindro circular

$$x^2 + z^2 = 4. \tag{4}$$

Para eliminar a variável  $z$ , voltamos ao sistema (2) e adicionamos as duas equações

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 + z^2 - 7 &= 0, \\ 2x^2 + y^2 - z^2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Encontramos como resultado o cilindro circular

$$3x^2 + y^2 = 3. \quad (5)$$

A mesma curva representada pelo sistema (2) pode ser substituído por qualquer um dos sistemas seguintes formados pelos cilindros projetantes da curva:

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3 \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases}, \quad (6)$$

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3 \\ 3z^2 - y^2 = 9 \end{cases}, \quad (7)$$

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 4 \\ 3z^2 - y^2 = 9 \end{cases}. \quad (8)$$

## 1.2 Construção geométrica da curva formada pela interseção de seus cilindros projetantes

Para traçar a curva de interseção de dois cilindros projetantes não é necessário desenhar os cilindros completos, basta apenas desenhar as curvas diretrizes de cada cilindro nos planos coordenados correspondentes e através de segmentos paralelos aos eixos coordenados obter cada ponto da curva de interseção.

Para exemplificar, considere os dois cilindros projetantes

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases}. \quad (9)$$

Inicialmente, desenhamos cada cilindro separadamente e em seguida construímos a curva de interseção dos dois cilindros:

(a) Cilindro parabólico  $y = x^2$  (Figura 2).

Note que no plano  $xy$  temos a parábola  $y = x^2$ .

(b) Cilindro circular  $y^2 + z^2 = 4$  (Figura 3).

Note que no plano  $yz$  temos a circunferência  $y^2 + z^2 = 4$ .

(c) Vamos agora desenhar os dois cilindros conjuntamente no mesmo sistema de coordenadas (Figuras 4 e 5).

(d) Vamos agora traçar a curva de interseção dos dois cilindros e para isso necessitamos apenas das curvas diretrizes nos respectivos planos coordenados (Figura 6). Depois de obter a curva de interseção podemos então desenhar os cilindros para termos uma visualização completa dos destes e da curva de interseção.

Para simplificar a obtenção da curva de interseção adotaremos sempre o primeiro octante para efetuarmos o traçado. Para os outros octantes o procedimento é o mesmo. Além disso, por simetria, podemos sempre inferir qual será a curva completa.

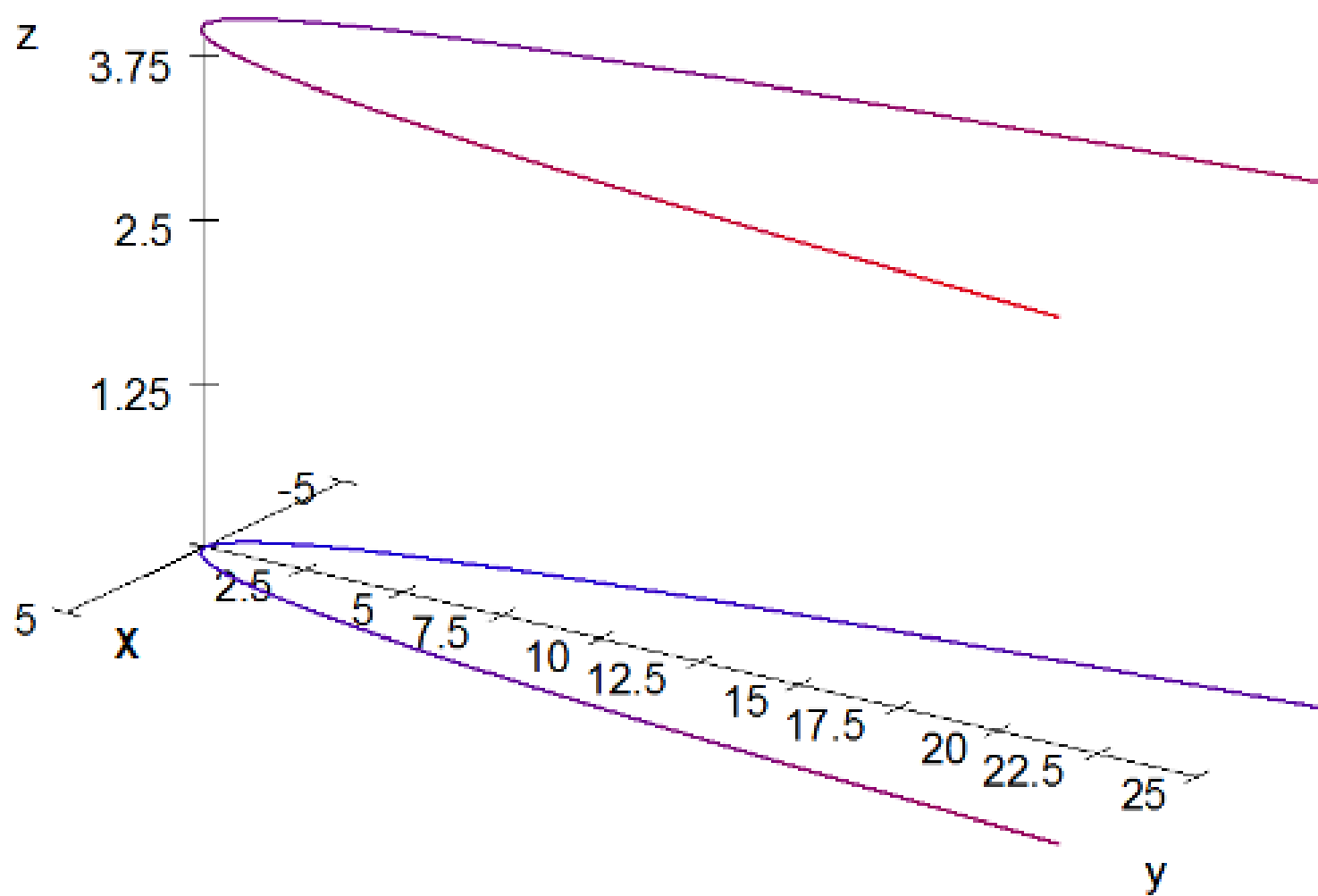


Figura 2:

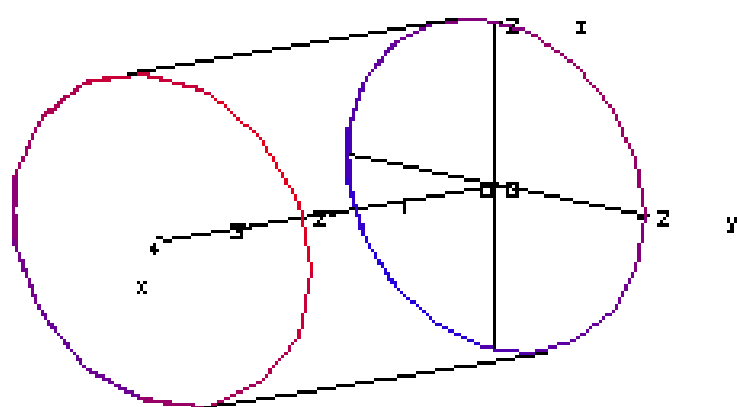


Figura 3:

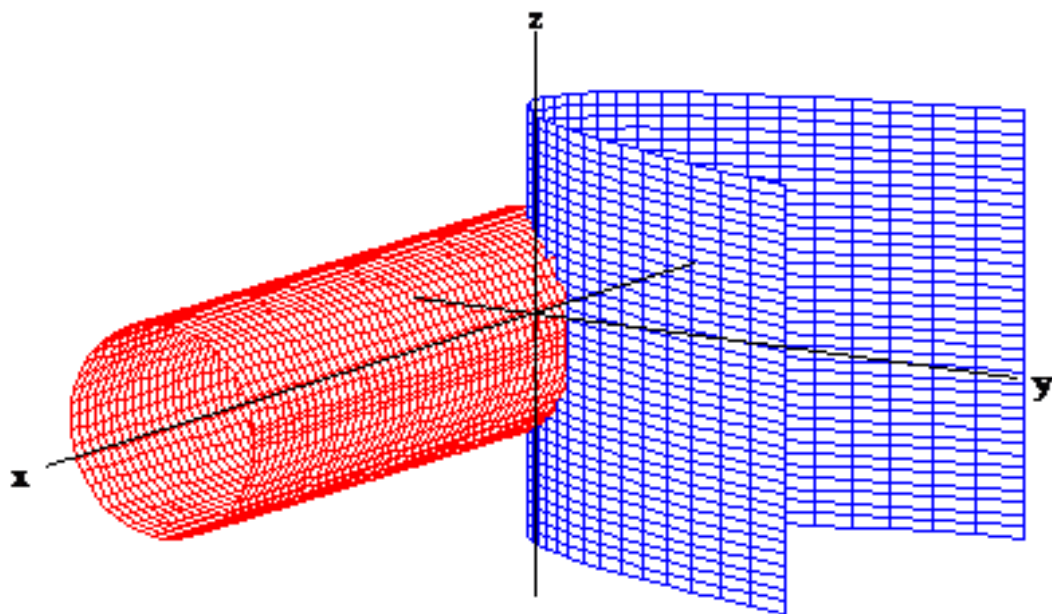


Figura 4:

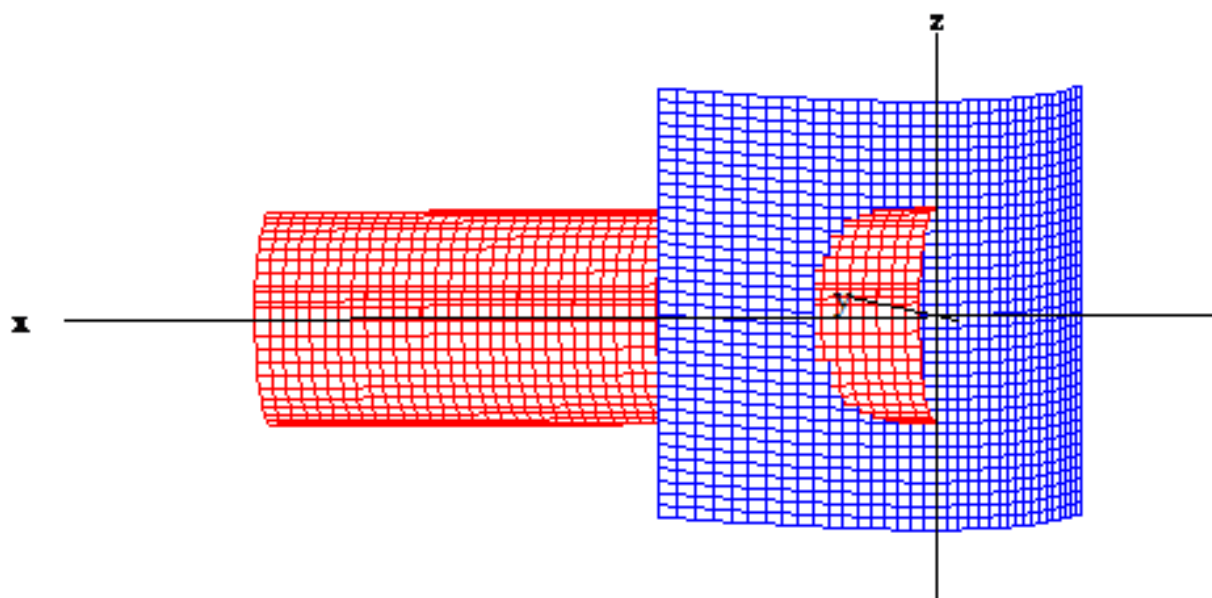


Figura 5:

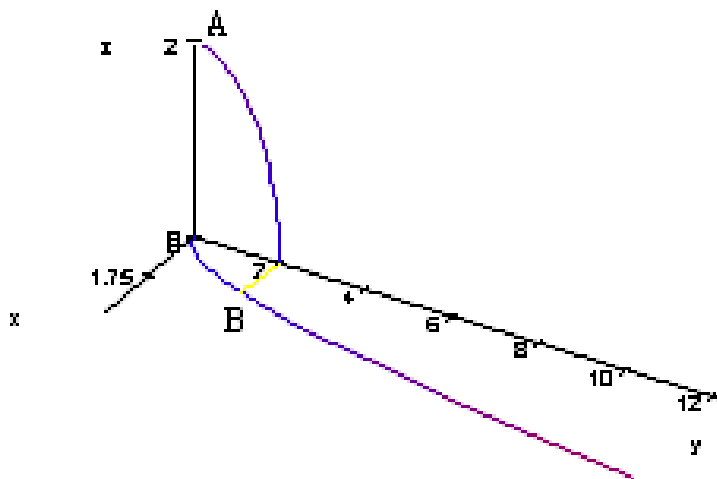


Figura 6:

Claramente os pontos  $A$  e  $B$  pertencem a curva de interseção mas também podem ser obtidos usando-se a técnica geral de construção da curva de interseção que vamos agora descrever.

Vamos tomar um ponto  $P$  qualquer de uma das curvas e através de segmentos paralelos aos eixos coordenados **ir de encontro** a um ponto da outra curva. Na Figura 7 partimos do ponto  $P$  da curva  $z^2 + y^2 = 4$  e vamos de encontro ao ponto  $Q$  da curva  $y = x^2$ . Para isso, traçamos inicialmente o segmento  $PM$  paralelo ao eixo  $z$  e em seguida o segmento  $MQ$  paralelo ao eixo  $x$ .

O ponto  $C$  (Figura 8) da curva de interseção dos dois cilindros é agora obtido através da interseção da reta  $r$  que passa pelo ponto  $Q$  e é paralela ao segmento  $PM$  com a reta  $s$  que passa pelo ponto  $P$  e é paralela ao segmento  $QM$ .

Utilizando este mesmo procedimento com vários pontos obtemos a curva de interseção (Figura 9).

### 1.2.1 Exemplos

1. Obter a curva de interseção dos cilindros  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 + z^2 = 1$ .

Vamos apenas desenhar as curvas diretrizes nos planos coordenados somente no primeiro octante e, através do processo descrito acima, encontrar a curva de interseção dos cilindros (Figura 10).

A seguir, representamos no primeiro octante o desenho completo da interseção dos dois cilindros (Figura 11).

2. Determinar dois cilindros projetantes da curva gerada pela interseção das superfícies dadas abaixo e obter um desenho da curva de interseção das superfícies, no primeiro octante, do sistema  $0x$ ,  $0y$  e  $0z$ .

$$\begin{cases} 7x^2 + 14y^2 + 63z^2 - 28y = 63 \\ 6x^2 + 3y^2 - 27z^2 - 24y + 27 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Para obter os cilindros projetantes devemos trabalhar com as equações de modo a eliminar sucessivamente as variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Para melhor trabalhar com as equações, observe que



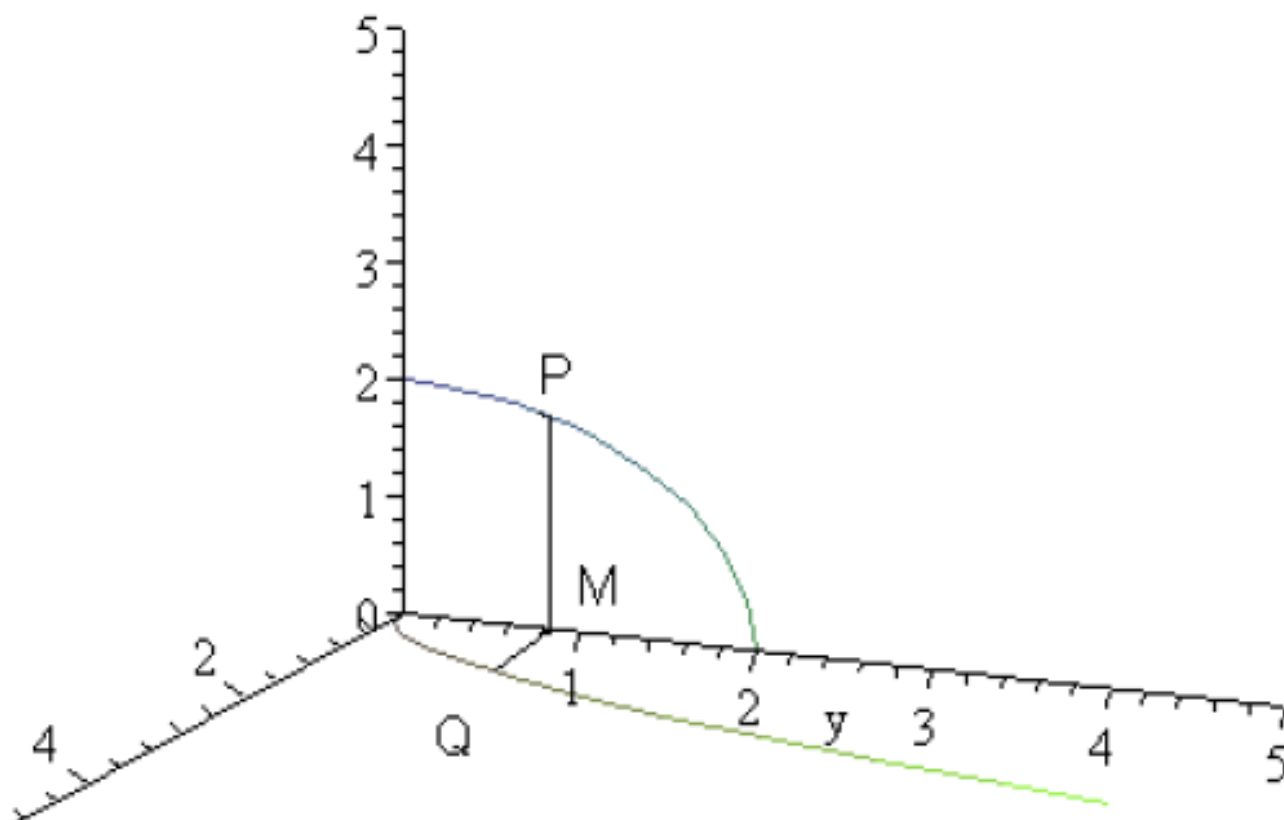


Figura 7:

podemos simplificá-las um pouco, dividindo a primeira equação por 7 e a segunda por 3. Fazendo isso temos:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 9z^2 - 4y = 9 \\ 62x^2 + y^2 - 9z^2 - 8y = -9 \end{cases} \quad (11)$$

Observe que facilmente podemos eliminar a variável  $z$  somando as duas equações acima

$$3x^2 + 3y^2 - 12y = 0. \quad (12)$$

Para eliminar a variável  $x$ , multiplicamos a primeira equação por 2 e subtraímos a segunda equação da primeira,

$$-\begin{cases} 2x^2 + 4y^2 + 18z^2 - 8y = 18 \\ 2x^2 + y^2 - 9z^2 - 8y = -9 \end{cases}.$$

Obtemos,

$$3y^2 + 27z^2 = 27. \quad (13)$$

Observe que neste caso não vamos conseguir eliminar facilmente a variável  $y$ , mas como já temos as equações (12) e (13) de dois cilindros projetantes, vamos usá-las para obter a curva de interseção.

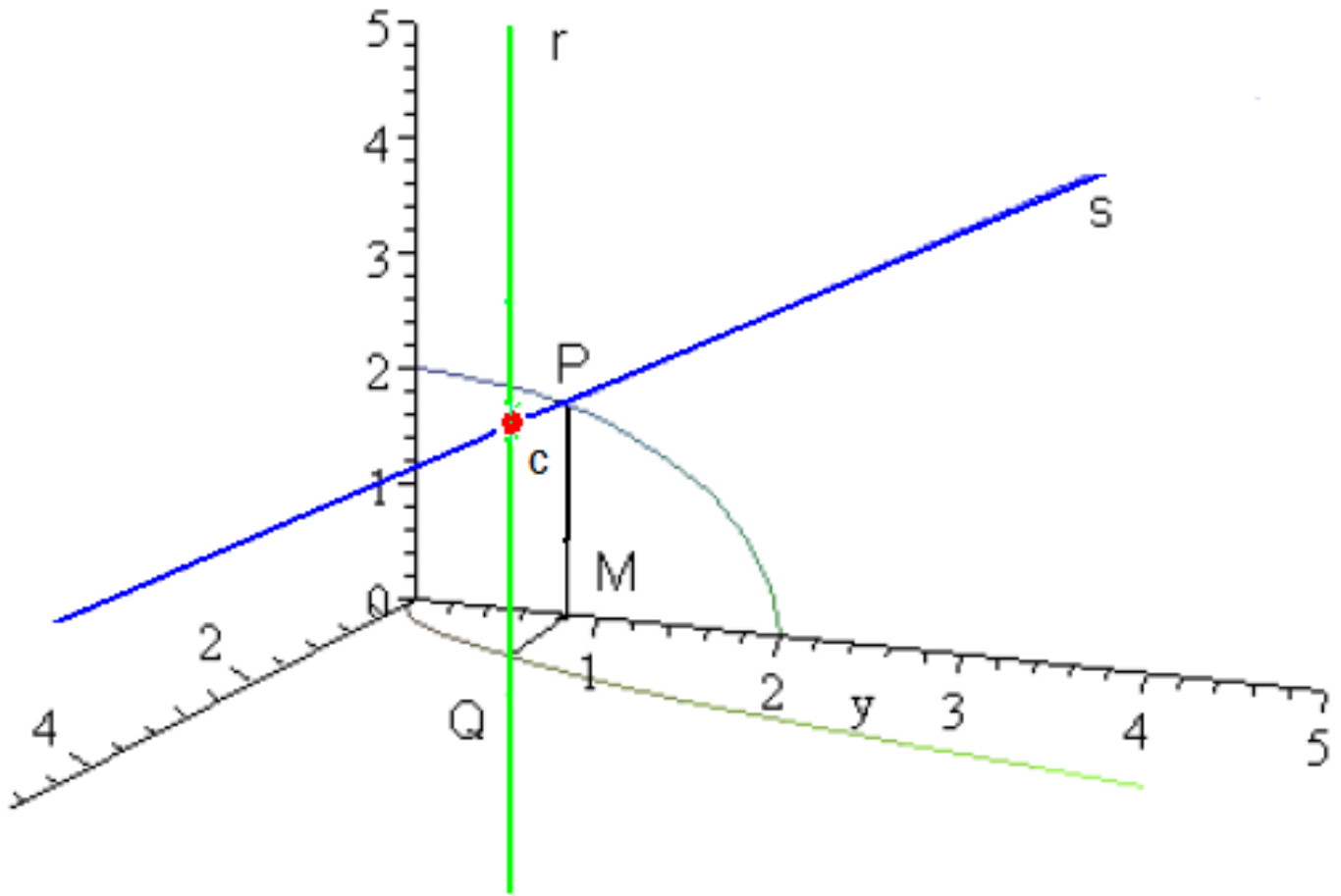


Figura 8:

Note que na equação  $3x^2 + 3y^2 - 12y = 0$  temos  $y$  e  $y^2$ . Logo, devemos **completar os quadrados** de modo a obter uma equação mais simples para podermos identificar a curva e fazer seu desenho. Ou seja,

$$\begin{aligned}
 3x^2 + 3y^2 - 12y &= 0 \\
 x^2 + y^2 - 4y &= 0 \\
 x^2 + y^2 - 4y + 4 - 4 &= 0 \\
 x^2 + (y^2 - 4y + 4) - 4 &= 0 \\
 x^2 + (y^2 - 4y + 4) &= 4 \\
 x^2 + (y - 2)^2 &= 4
 \end{aligned}$$

Portanto, obtemos os cilindros projetantes,

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4, \text{ que é um cilindro circular e} \quad (14)$$

$$\frac{y^2}{9} + z^2 = 1, \text{ que é um cilindro elíptico.} \quad (15)$$

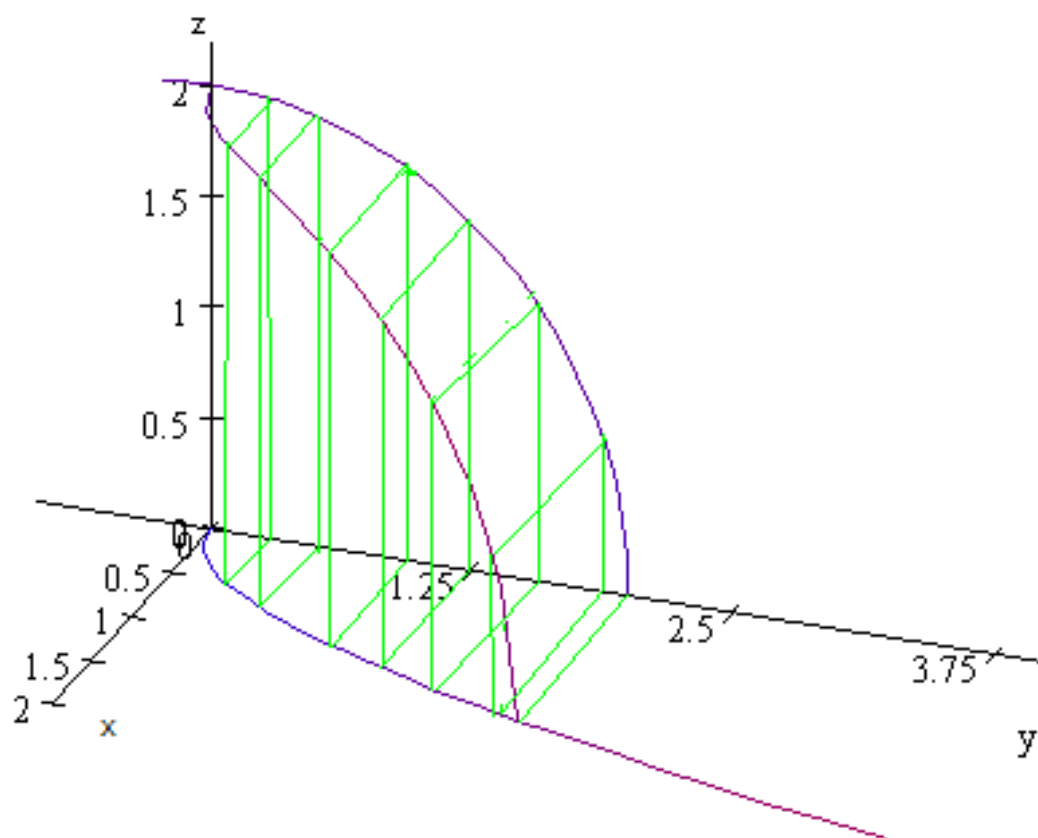


Figura 9:

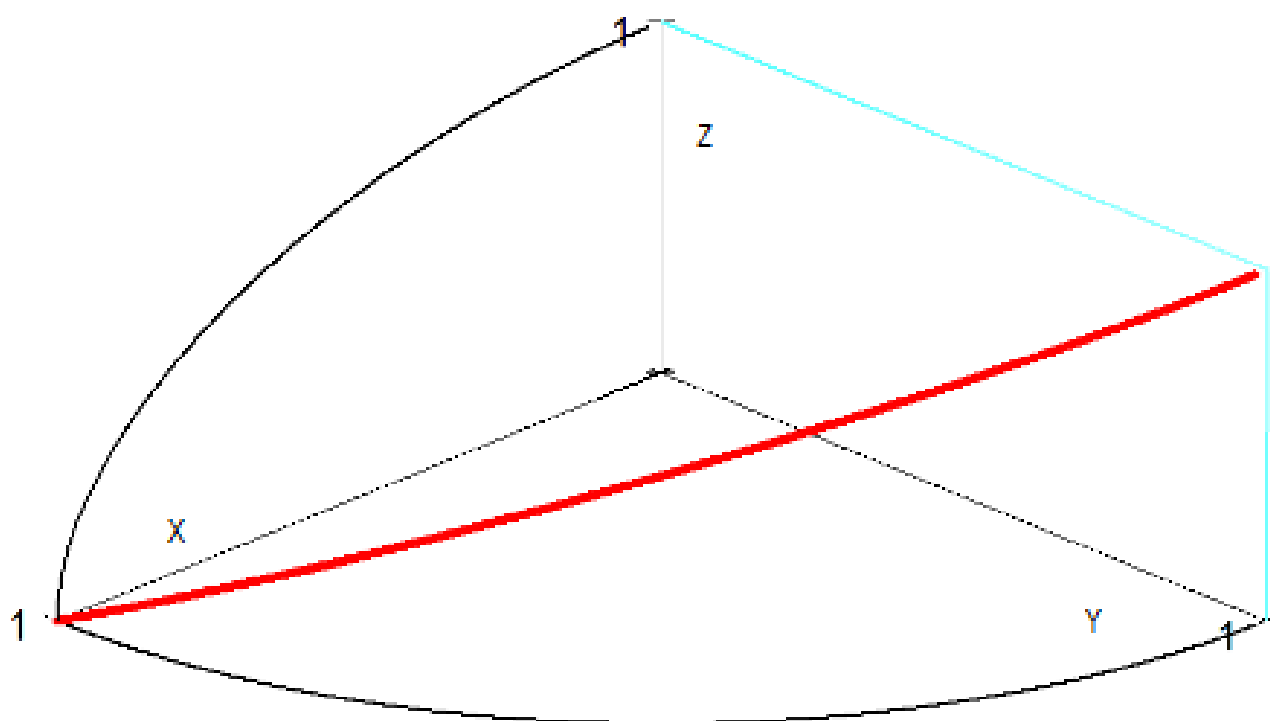


Figura 10:

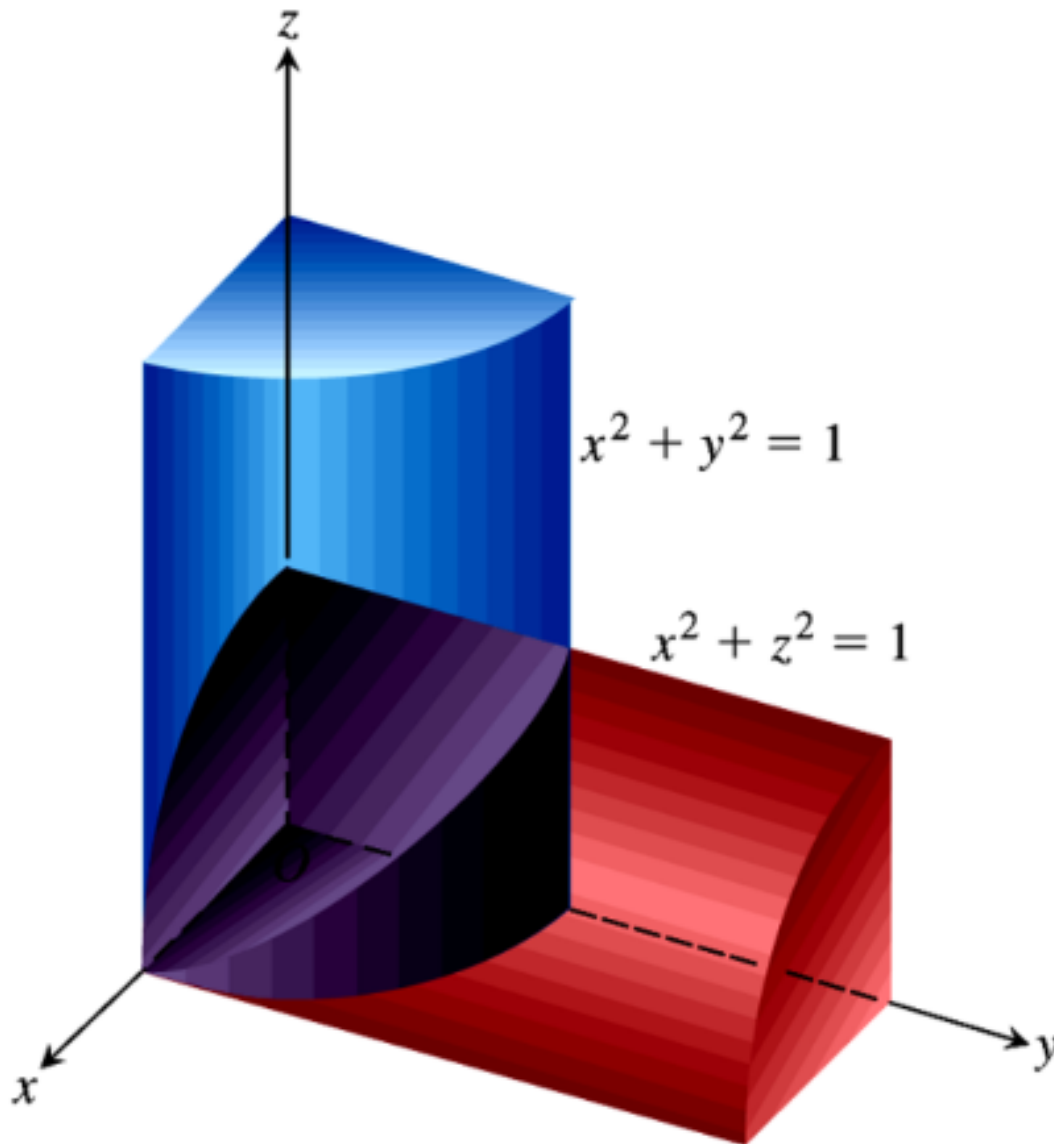


Figura 11:

Observe que o primeiro cilindro é gerado por uma circunferência de raio 2, no plano  $xy$ , com centro no ponto  $C(0, 2)$  e o segundo cilindro é gerado por uma elipse, no plano  $yz$ , com semi-eixo maior 3 no eixo  $y$  e semi-eixo menor 1 no eixo  $z$  (Figura 12).

3. Aplicando o mesmo procedimento descrito acima, obter a curva de interseção dos cilindros, no primeiro octante, dados por:

$$z = \frac{1}{y}$$

$$x^2 + (y - 2)^2 = 1$$

Note que neste caso devemos ter  $y > 0$ . As curvas estão representadas na Figura 13.

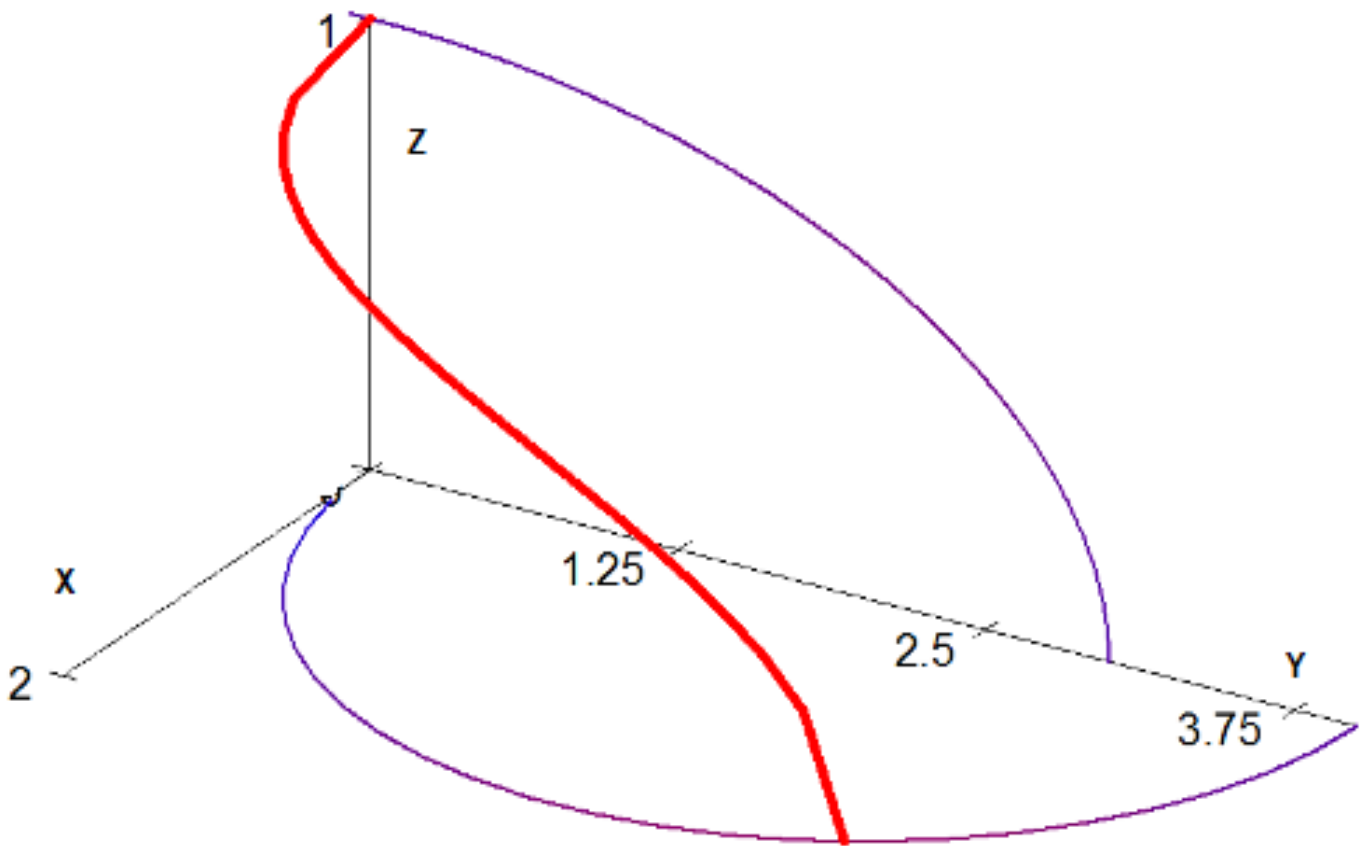


Figura 12:

### 1.2.2 Exercícios

1. Determinar os cilindros projetantes e construir a curva dada pela interseção das superfícies no primeiro octante, quando for possível. Caso não seja possível no primeiro, escolha outro octante.
  - (a)  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$  e  $x^2 - y^2 - 2z^2 + 1 = 0$
  - (b)  $x^2 + y^2 + z^2 + z = 124$  e  $x^2 - y^2 - z^2 + 3z = 0$
  - (c)  $4x^2 + y^2 + z^2 = 72$  e  $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$
  - (d)  $x^2 - 3y^2 - 3x + z = 0$  e  $x^2 + y^2 + x + z = 0$
  - (e)  $2x^2 + 3y^2 + z = 12$  e  $2x^2 - y^2 - 3z + 4 = 0$
  - (f)  $3y^2 + x + 2z = 12$  e  $y^2 - x + 2z = 4$
  - (g)  $y^2 + 4z^2 - 3x = 4$  e  $y^2 - z^2 + 2x = 0$
  - (h)  $y^2 + 4z^2 - 3x = 4$  e  $y^2 - z^2 + 2x = 4$
  - (i)  $x^2 + 2y^2 + 9z^2 - 4y = 92$  e  $x^2 + y^2 - 9z^2 - 8y + 9 = 0$
  - (j)  $180y + 9x^2 + 4z^2 = 180 \sin x + 36$  e  $36y + 9x^2 + 4z^2 = 36 \sin x + 36$
  - (k)  $x^2 - y^2 + 8z + 4y = 0$  e  $2x^2 + y^2 + 4z - 4y = 0$

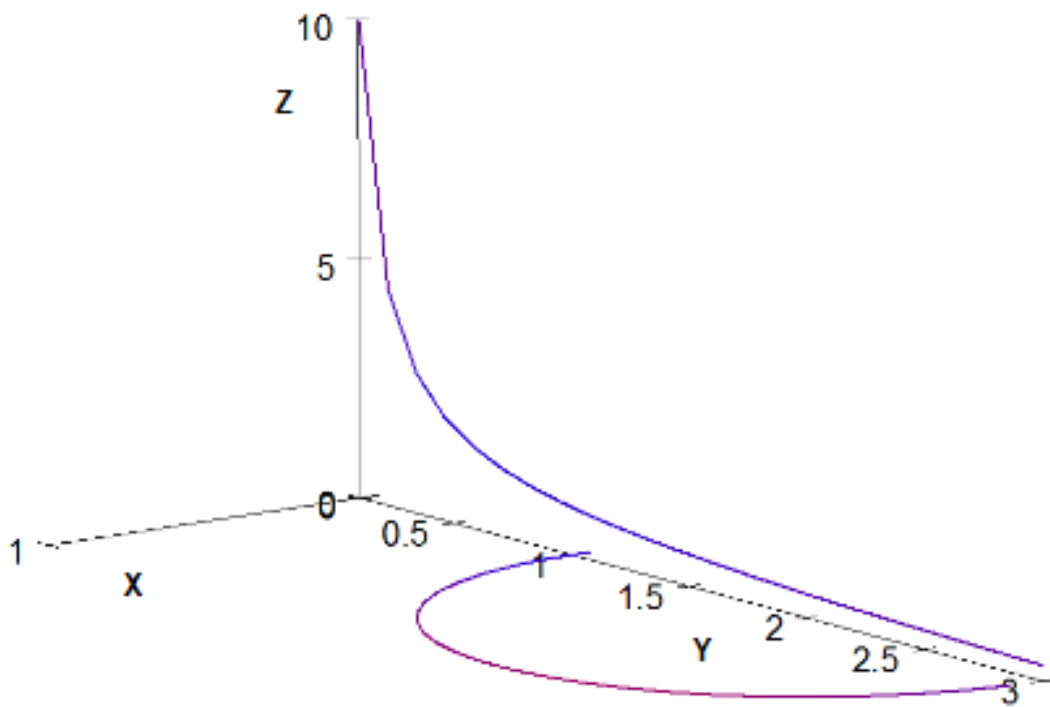


Figura 13:

### 1.3 Equações Paramétricas

Uma curva no espaço pode ser representada por três equações da forma

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \quad (16)$$

onde cada coordenada do ponto da curva depende de um parâmetro  $t$ . Convenciona-se usar a notação  $t$  para o parâmetro em virtude das equações paramétricas serem usadas na Física para representar o movimento de uma partícula em função do tempo. Mas, podemos usar outras notações para o parâmetro, como por exemplo  $\theta$  e  $s$ , quando for conveniente.

Se na primeira equação isolarmos o valor de  $t$  e substituirmos este valor nas outras duas equações teremos as equações da curva na forma cartesiana,

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, z) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Estas são as equações cartesianas dos cilindros projetante da curva (16).

#### 1.3.1 Exemplo

Fazer um desenho da curva

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t^2 \end{cases} \quad (18)$$

Para fazer o esboço da curva podemos proceder de dois modos:

1. Determinamos cada ponto da curva atribuindo valores ao parâmetro  $t$ , como na tabela abaixo.

$t$	$x$	$y$	$z$
-4	1	-4	16
-3	1	-3	9
-2	1	-2	4
-1	1	-1	1
0	1	0	0
1	1	1	1
2	1	2	4
3	1	3	9
4	1	4	16

Marcamos cada um dos pontos no sistema tridimensional  $P_1(1, -4, 16)$ ,  $P_2(1, -3, 9)$ ,  $P_3(1, -2, 4)$ ,  $P_4(1, -1, 1)$ ,  $P_5(1, 0, 0)$ ,  $P_6(1, 1, 1)$ ,  $P_7(1, 2, 4)$ ,  $P_8(1, 3, 9)$ ,  $P_9(1, 4, 16)$ , como na Figura 14.

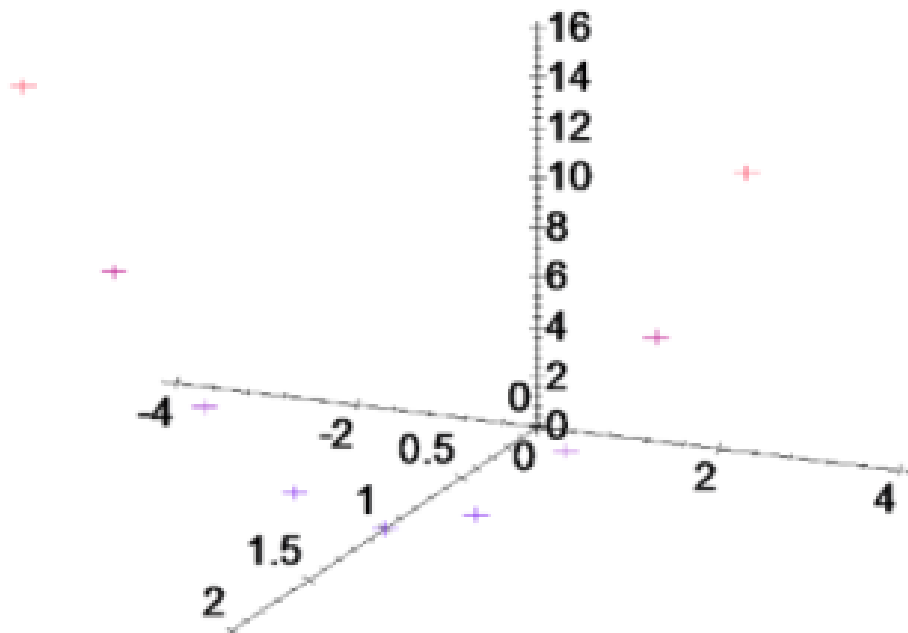


Figura 14:

Em seguida unimos os pontos para visualizarmos a curva (Figura 15). É claro que quanto mais pontos tivermos mais preciso será o traçado da curva. As equações paramétricas são ideais para fazermos traçados de curvas no computador pois o computador pode calcular em pouquíssimo tempo uma grande quantidade de parâmetros e pontos da curva.

2. Outra maneira é passar as equações paramétricas para a forma de equações cartesianas, respectivamente, como dadas abaixo,

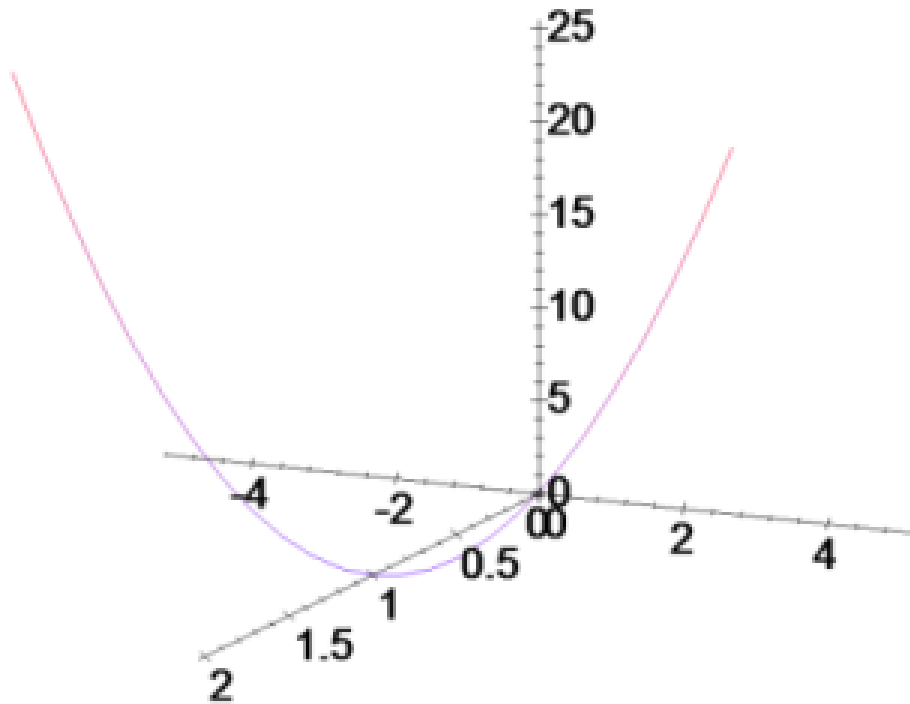


Figura 15:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t^2 \end{cases}, \quad (19)$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ z = y^2 \end{cases}. \quad (20)$$

Logo, temos uma parábola em cima do plano  $x = 1$ . Ou seja, é a projeção da parábola de equação  $z = y^2$  do plano  $yz$  sobre o plano  $x = 1$  (Figura 15).

### 1.3.2 Equações paramétricas de algumas curvas

1. Circunferência com Centro  $C(x_0, y_0)$  e raio  $r$  no plano:

$$\begin{cases} x(\theta) = x_0 + r \cos \theta \\ y(\theta) = y_0 + r \sin \theta \end{cases}. \quad (21)$$

2. Elipse com centro  $C(x_0, y_0)$  e semi-eixos  $a$  e  $b$  no plano:

$$\begin{cases} x(\theta) = x_0 + a \cos \theta \\ y(\theta) = y_0 + b \sin \theta \end{cases}. \quad (22)$$



3. Reta com vetor diretor  $\vec{v} = (a, b, c)$  passando pelo ponto  $P(x_0, y_0, z_0)$  no espaço:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + at \\ y(t) = y_0 + bt \\ z(t) = z_0 + ct \end{cases} . \quad (23)$$

### 1.3.3 Exemplos

1. Desenhe a curva

$$\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \\ z = 3 \end{cases} . \quad (24)$$

Passando para coordenadas cartesianas temos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 3 \end{cases} . \quad (25)$$

Portanto, a curva é uma circunferência em cima do plano  $z = 3$  e a projeção dessa curva no plano  $xy$  é a circunferência  $x^2 + y^2 = 4$  (Figura 16).

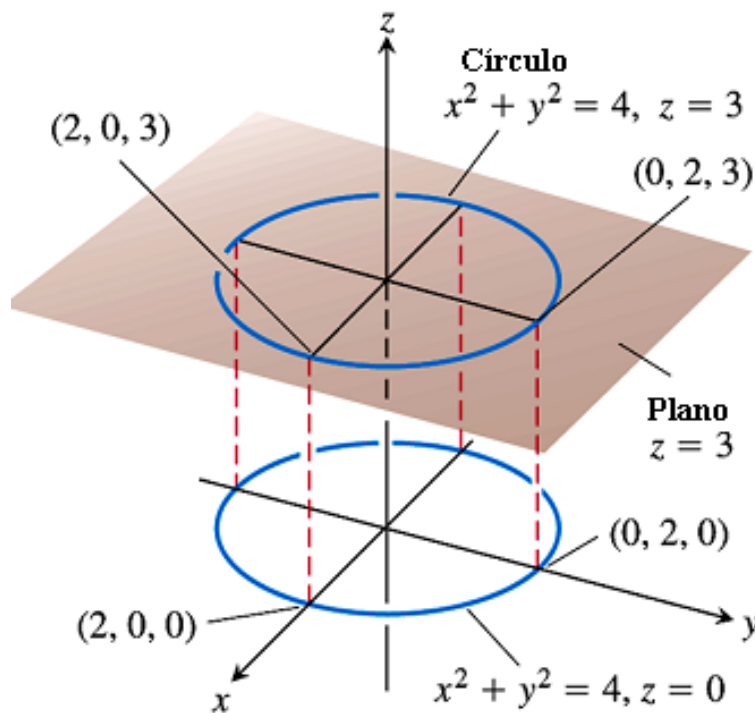


Figura 16:

2. Desenhe a curva

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \cos \theta \\ z = 2 \sin \theta \end{cases} . \quad (26)$$

Observe que a curva no plano  $yz$  é uma circunferência de raio 2. Portanto, temos uma circunferência de raio 2 em cima do plano  $x = 2$  (Figura 17).

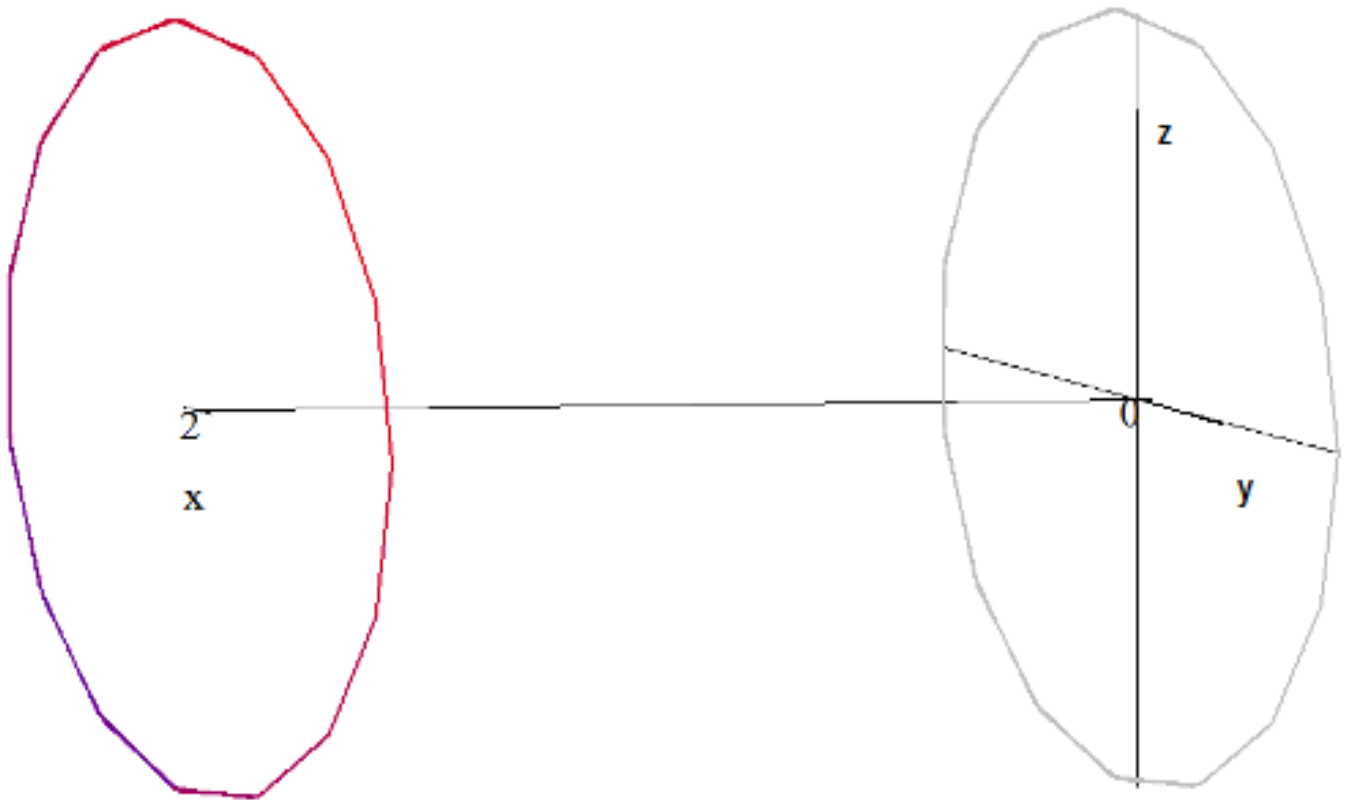


Figura 17:

3. Desenhe a curva

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \cos \theta \\ z = 3 \sin \theta \end{cases} . \quad (27)$$

## 1.4 Equação vetorial das curvas

Uma curva pode ser determinada pelo vetor posição de cada ponto da curva. Neste caso, cada ponto da curva será dado por um vetor cuja extremidade se encontra nesse ponto.

Uma equação vetorial é da forma,

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (28)$$

### 1.4.1 Exemplos

1. Desenhar a curva  $\vec{r}(t) = (t + 2)\vec{i} + (2t - 4)\vec{j} + (1 - t)\vec{k}$ .

Para cada valor de  $t$  teremos um vetor que indicará um ponto da curva, como na tabela abaixo.

$$\left[ \begin{array}{c|c} t & \vec{r}(t) \\ \hline 0 & 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k} \\ -1 & \vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k} \\ 1 & 3\vec{i} - 2\vec{j} \\ -2 & -8\vec{j} + 3\vec{k} \\ 2 & 4\vec{i} - 1\vec{k} \end{array} \right] \quad (29)$$

Para obter a curva, representamos os vetores no espaço, localizamos a extremidade de cada vetor e unimos os pontos das extremidades (Figura 18).

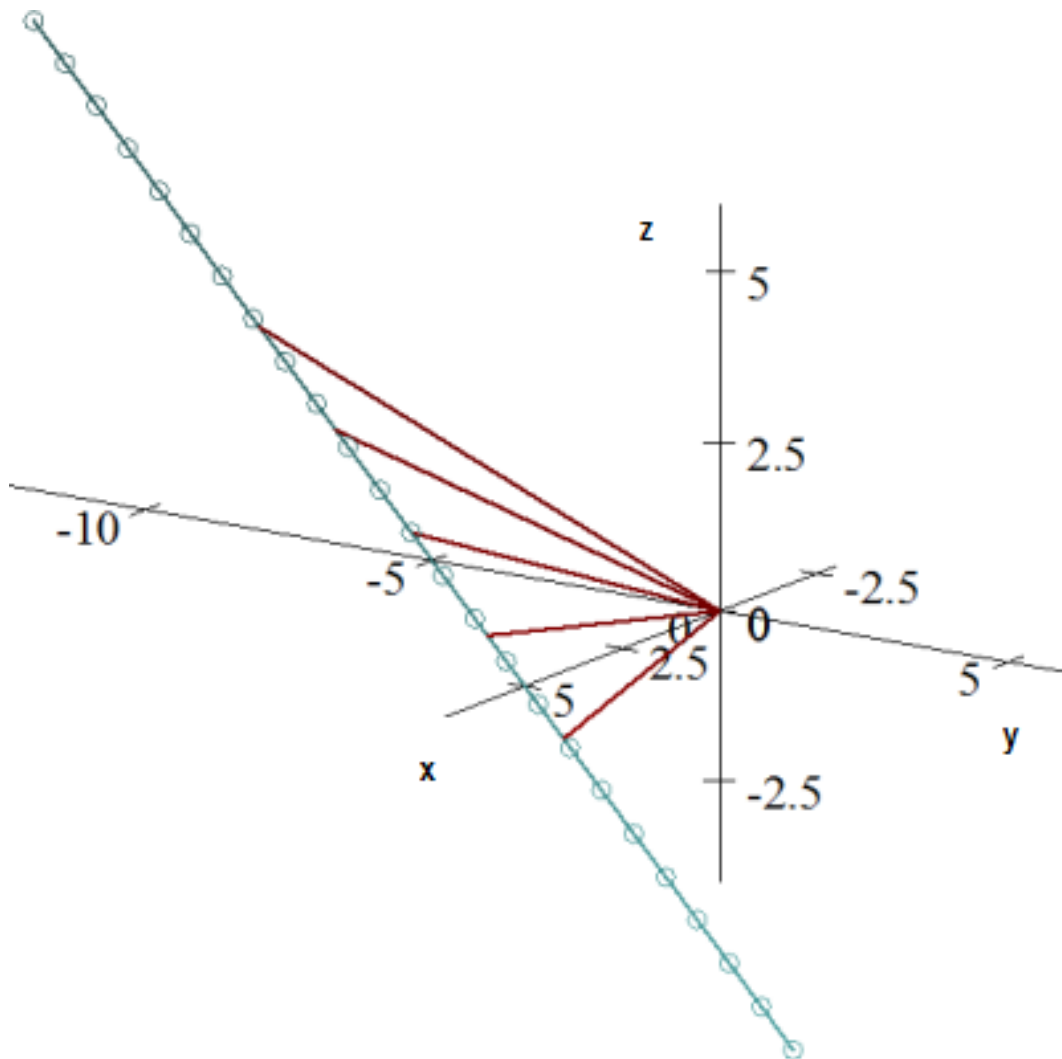


Figura 18:

Assim como no caso da equações paramétricas, necessitamos um grande número de vetores

para traçarmos a curva. Podemos ter uma idéia da curva passando a equação vetorial para equações paramétricas e daí para equações cartesianas. Deste modo podemos usar todo o nosso conhecimento anterior.

Com a equação vetorial  $\vec{r}(t) = (t+2)\vec{i} + (2t-4)\vec{j} + (1-t)\vec{k}$ , obtemos as equações paramétricas

$$\begin{cases} x(t) = 2 + t \\ y(t) = -4 + 2t \\ z(t) = 1 - t \end{cases} \quad (30)$$

que possuem vetor diretor  $\vec{v} = (1, 2, -1)$  e ponto  $P(2, -4, 1)$  (Figura 19).

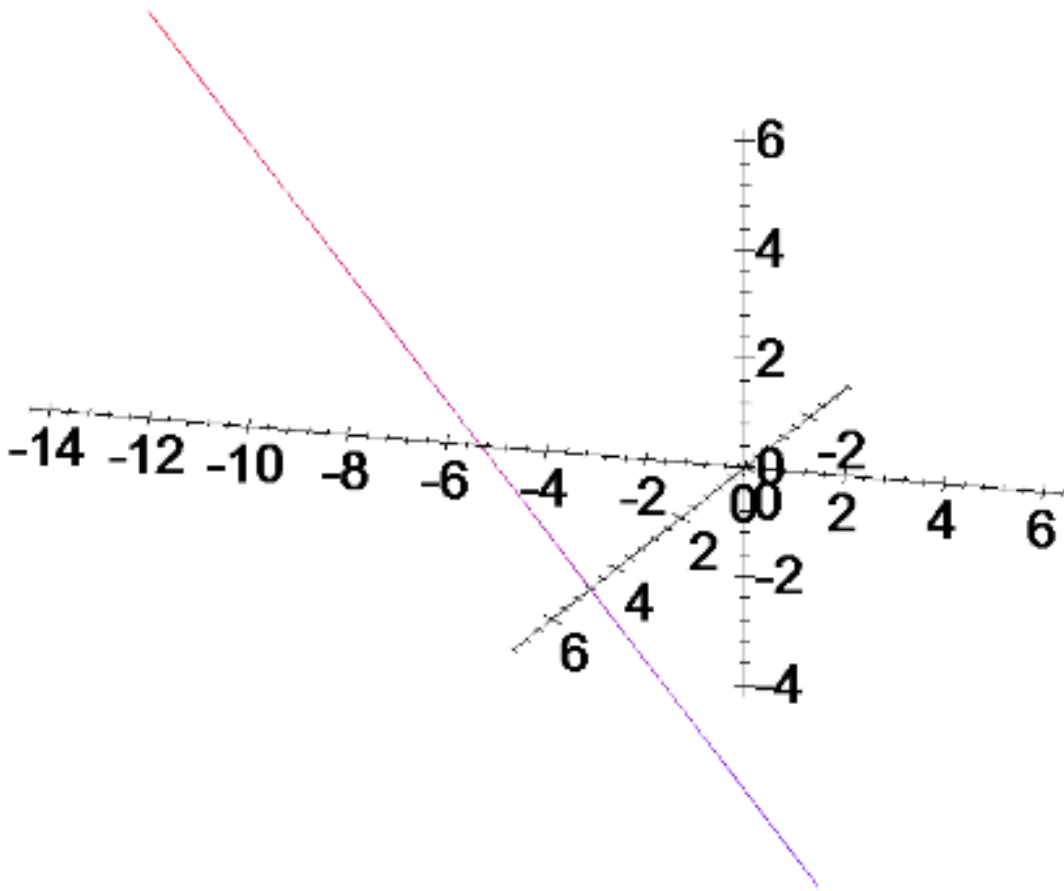


Figura 19:

2. Seguindo o mesmo procedimento do exemplo anterior, desenhe a curva  $r(t) = \cos(t)\vec{i} + 2\sin(t)\vec{j} + 4\vec{k}$ .

### 1.4.2 Exercícios

1. Escrever as equações paramétricas das seguintes curvas:

(a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  e  $z = 2$ ,

- (b)  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  e  $y = 2x$ ,
- (c)  $x^2 + y^2 = 1$  e  $y = z$ ,
- (d)  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$  e  $x^2 - y^2 - 2z^2 + 1 = 0$ ,
- (e)  $x^2 + y^2 = 4$  e  $x + y - z = 0$ .

2. Desenhar a curva  $x = 4 \cos t$ ,  $y = 9 \sin t$ ,  $z = 1$ .

3. Desenhar a curva  $x = t$ ,  $y = 0$ ,  $z = e^t$ .

4. Escrever a equação cartesiana da curva  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = \cos t + \sin t$ .

5. Construir a curva cujas equações vetoriais são dadas abaixo:

- (a)  $\vec{r}(t) = (-2t - 3)\vec{i} + (2t - 4)\vec{j} + (4t - 7)\vec{k}$ ,
- (b)  $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + 4t^2\vec{j} + t\vec{k}$ ,
- (c)  $\vec{r}(t) = \cos \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{k}$ ,
- (d)  $\vec{r}(t) = 4 \sin^2 \theta \vec{i} + 2 \cos \theta \vec{j} + 2 \sin \theta \vec{k}$ .

6. Fazer o desenho, no primeiro octante, da curva cujas equações paramétrica são dadas por

$$\begin{cases} x = -24 \sin^2 t + 6 \\ y = 6 \cos t \\ z = 4 \sin t \end{cases}.$$

7. Determine a equação vetorial que representa a curva de intersecção das superfícies  $x^2 + y^2 = 1$  e  $y + z = 2$ . Faça um esboço da curva.

8. Parametrize a curva de intersecção das superfícies dadas an seguir:

- (a)  $\begin{cases} 2x = -y^2 + z^2 \\ x^2 + \frac{y^2}{2} + z^2 = 2 \end{cases}$ ,
- (b)  $\begin{cases} x^2 + 2z^2 = 4 \\ y = 9 - 2x^2 - 4z^2 \end{cases}$ .

9. Represente no primeiro octante a curva cuja equação vetorial é dada abaixo:

- (a)  $\vec{r}(t) = (t, t^2, \cos t)$ ,
- (b)  $\vec{r}(t) = (3 - 12 \cos^2 t, 3 \sin t, 2 \cos t)$ .

## 2 SISTEMAS DE COORDENADAS

### 2.1 Coordenadas polares no $\mathbb{R}^2$

**Fonte:** *Cálculo A. Funções. Limite. Derivação. Integração.*

*Diva Marília Flemming.*

*Mírian Buss Gonçalves.*

Até o presente momento, localizamos um ponto no plano por meio de suas coordenadas cartesianas retangulares. Existem outros sistemas de coordenadas. Um sistema bastante utilizado é o sistema de coordenadas polares.

No sistema de coordenadas polares, as coordenadas consistem de uma distância e da medida de um ângulo em relação a um ponto fixo e a uma semireta fixa.

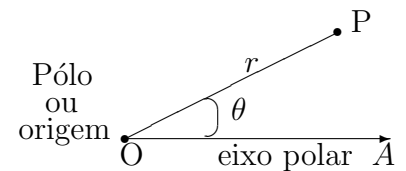
A Figura 1 ilustra um ponto  $P$  num sistema de coordenadas polares.

O ponto fixo, denotado por  $O$ , é chamado *pólo* ou *origem*.

A semireta fixa  $\overrightarrow{OA}$  é chamada *eixo polar*.

O ponto  $P$  fica bem determinado através do par ordenado  $(r, \theta)$ , onde  $|r|$  representa a distância entre a origem e o ponto  $P$ , e  $\theta$  representa a medida, em radianos, do ângulo orientado  $\widehat{AOP}$ .

O segmento  $\overline{OP}$ , muitas vezes, é chamado *raio*.



**Figura 1**

Usaremos as seguintes convenções:

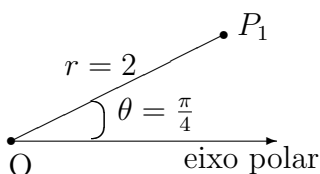
- (i) Se o ângulo  $\widehat{AOP}$  for descrito no sentido anti-horário, então  $\theta > 0$ . Caso contrário, teremos  $\theta < 0$ .
- (ii) Se  $r < 0$ , o ponto  $P$  estará localizado na extensão do lado terminal do ângulo  $\widehat{AOP}$ .
- (iii) O par ordenado  $(0, \theta)$ ,  $\theta$  qualquer, representará o pólo.

#### 2.1.1 Exemplo

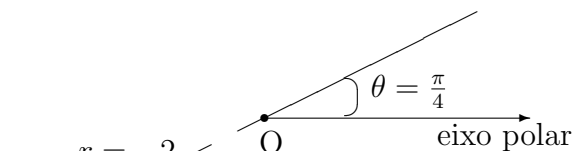
1. Representar num sistema de coordenadas polares os seguintes pontos:

- (a)  $P_1(2, \pi/4)$
- (b)  $P_2(-2, \pi/4)$
- (c)  $P_3(-2, -\pi/4)$
- (d)  $P_4(2, -\pi/4)$

As Figuras 2 (a) e 2 (b), representam os pontos  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente.



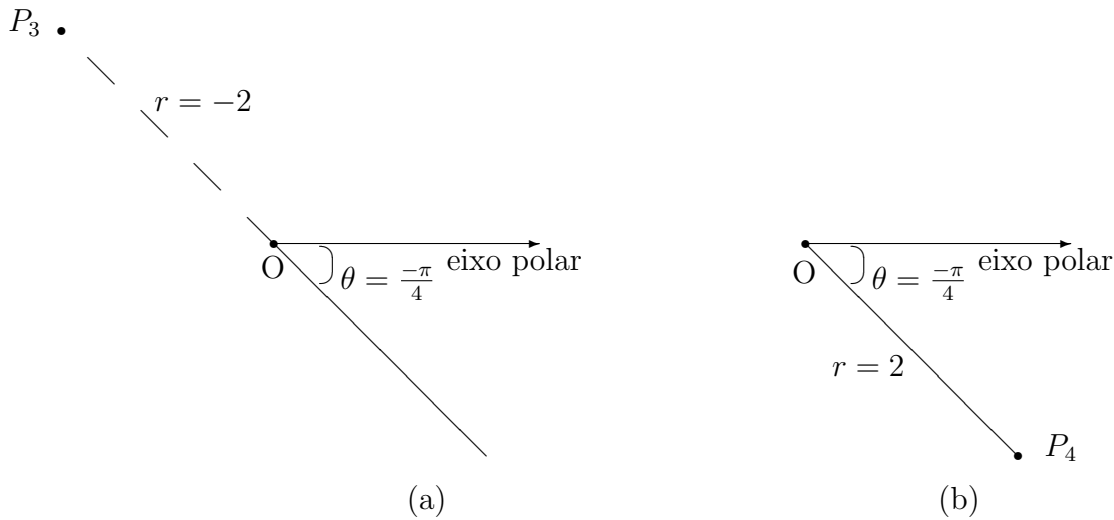
(a)



(b)

**Figura 2**

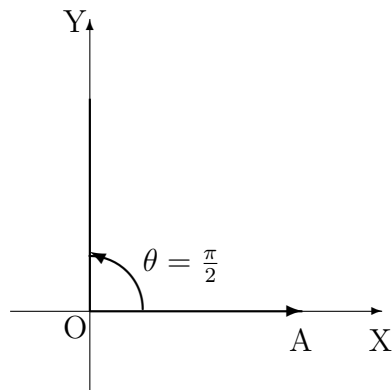
As Figuras 3 (a) e 3 (b), mostram os pontos  $P_3$  e  $P_4$ , respectivamente.



**Figura 3**

### 2.1.2 Relação entre o Sistema de Coordenadas Cartesianas Retangulares e o Sistema de Coordenadas Polares.

Em várias situações, surge a necessidade de nos referirmos a ambas, coordenadas cartesianas e coordenadas polares de um ponto  $P$ . Para visualizar isto, fazemos a origem do primeiro sistema coincidir com o pólo do segundo sistema, o eixo polar com o eixo positivo dos  $x$  e o raio para o qual  $\theta = \pi/2$  com o eixo positivo dos  $y$  (ver Figura 4).



**Figura 4**

Supondo que  $P$  seja um ponto com coordenadas cartesianas  $(x, y)$  e coordenadas polares  $(r, \theta)$ , vamos analisar o caso em que o ponto  $P$  está no primeiro quadrante.

A Figura 5 (a) e (b) ilustra o caso para  $r > 0$  e  $r < 0$ , respectivamente.

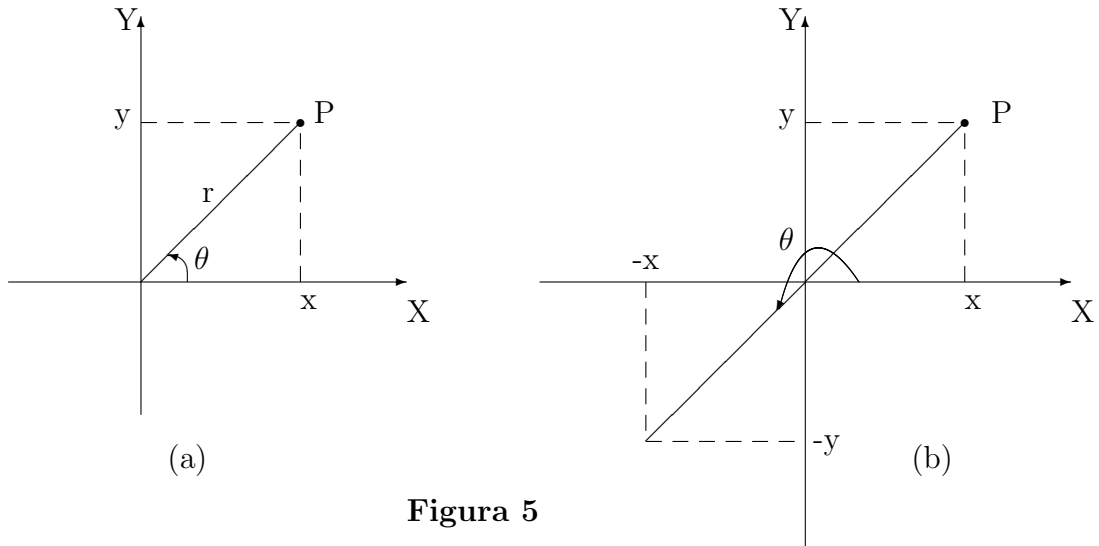


Figura 5

Podemos observar que:

- (i) Para  $r > 0$ , temos  
 $\cos \theta = \frac{x}{r}$  e  $\sin \theta = \frac{y}{r}$ .
- (ii) Para  $r < 0$ , temos  
 $\cos \theta = \frac{-x}{-r}$  e  $\sin \theta = \frac{-y}{-r}$ .

Portanto,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta. \end{cases} \quad (31)$$

Pode-se verificar a validade das relações encontradas, no caso em que o ponto  $P$  se encontra sobre um dos eixos ou num outro quadrante.

Usando (31), podemos deduzir outra relação muito usada.

Elevando ambos os membros das equações em (31) ao quadrado, podemos escrever

$$\begin{cases} x^2 = r^2 \cos^2 \theta \\ y^2 = r^2 \sin^2 \theta. \end{cases}$$

Adicionando membro a membro, obtemos:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta$$

ou

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Portanto,

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (32)$$



### 2.1.3 Exemplos

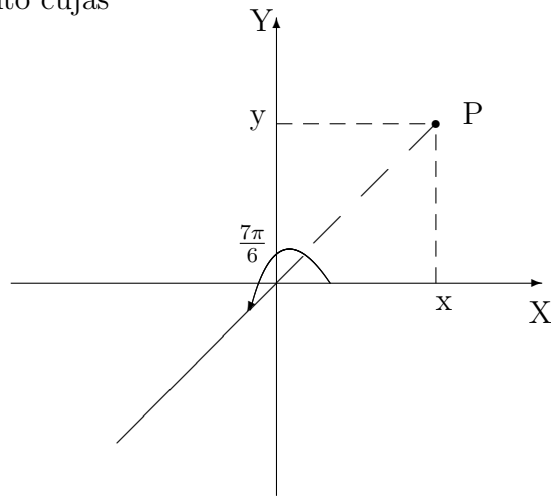
1. Encontrar as coordenadas cartesianas do ponto cujas coordenadas polares são  $(-4, 7\pi/6)$ .

*Solução.* A Figura 6 ilustra este ponto.

Temos,

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & \text{e} & & y &= r \sin \theta \\ &= -4 \cos \frac{7\pi}{6} & & & &= -4 \sin \frac{7\pi}{6} \\ &= -4 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) & & & &= -4 \left( -\frac{1}{2} \right) \\ &= 2\sqrt{3} & & & &= 2. \end{aligned}$$

Portanto,  $(2\sqrt{3}, 2)$  são as coordenadas cartesianas do ponto dado.



**Figura 6**

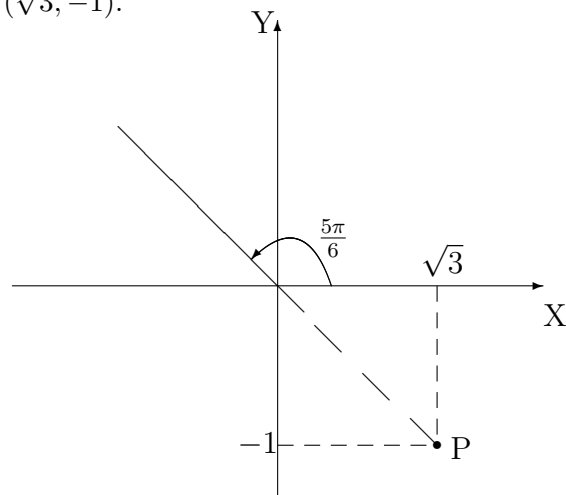
2. Encontrar  $(r, \theta)$ , supondo  $r < 0$  e  $0 \leq \theta < 2\pi$  para o ponto  $P$ , cujas coordenadas cartesianas são  $(\sqrt{3}, -1)$ .

*Solução.* A Figura 7 ilustra o ponto  $P$ .

$$\begin{aligned} r &= -\sqrt{x^2 + y^2} \\ &= -\sqrt{3 + 1} \\ &= -2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{-2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{e} \\ \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ .



**Figura 7**

### 2.1.4 Gráficos de Equações em Coordenadas Polares.

O gráfico de  $F(r, \theta) = 0$  é formado por todos os pontos cujas coordenadas polares satisfazem a equação. É comum apresentarmos a equação numa forma explícita, isto é,  $r = f(\theta)$ .

Na prática, os seguintes procedimentos poderão nos auxiliar no esboço do gráfico:

- (i) calcular os pontos de máximo e/ou mínimos;
- (ii) encontrar os valores de  $\theta$  para os quais a curva passa pelo pólo;
- (iii) verificar simetrias. Se,
  - a equação não se altera quando substituirmos  $r$  por  $-r$ , existe simetria em relação à origem;
  - a equação não se altera quando substituirmos  $\theta$  por  $-\theta$ , existe simetria em relação ao eixo polar;

- a equação não se altera quando substituirmos  $\theta$  por  $\pi - \theta$ , existe simetria em relação ao eixo  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

### 2.1.5 Exemplos

1. Esboçar a curva  $r = 2(1 - \cos \theta)$ .

Como a equação não se altera ao substituirmos  $\theta$  por  $-\theta$ , isto é

$$r = 2(1 - \cos \theta) = 2(1 - \cos(-\theta)),$$

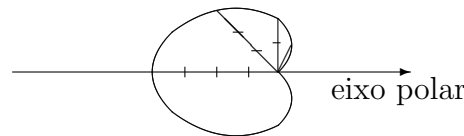
concluimos que existe simetria em relação ao eixo polar. Logo, basta analisar valores de  $\theta$  tais que  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Para  $0 \leq \theta \leq \pi$ , encontramos um ponto de máximo  $(4, \pi)$  e um ponto de mínimo  $(0, 0)$ . Observamos que, considerando  $r = f(\theta)$ , os pontos de máximos e mínimos podem ser encontrados de maneira análoga aos da Seção 5.7 (Cálculo A).

A Tabela 1 mostra alguns pontos da curva, cujo esboço é mostrado na Figura 8.

**Tabela 1**

$\theta$	$r$
0	0
$\frac{\pi}{3}$	1
$\frac{\pi}{2}$	2
$\frac{2\pi}{3}$	3
$\pi$	4



**Figura 8**

2. Esboçar a curva  $r = 2 \cos 2\theta$ .

Analisando as simetrias, temos que

(a) A curva é simétrica em relação ao eixo dos  $x$ , pois  $r = 2 \cos(-2\theta) = 2 \cos 2\theta$ .

(b) A curva é simétrica em relação ao eixo dos  $y$ , pois  $r = 2 \cos[2(\pi - \theta)] = 2 \cos(2\pi - 2\theta) = 2 \cos 2\theta$ .

Logo, basta fazer uma tabela para  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

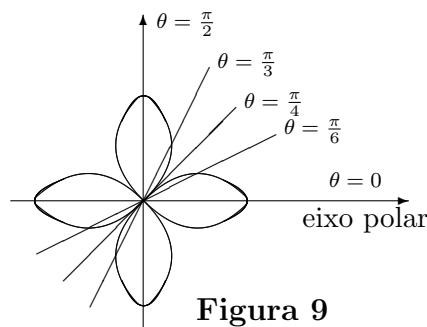
Em  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , a curva passa pelo pólo quando  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , pois  $r = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 2 \cos \frac{\pi}{2} = 0$ .

Podemos ainda verificar que, para  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , temos um ponto de máximo  $(2, 0)$  e um ponto de mínimo  $(-2, \pi/2)$ .

Usando a Tabela 2 e os resultados anteriores, esboçamos a curva vista na Figura 9.

**Tabela 2**

$\theta$	$r$
0	2
$\frac{\pi}{6}$	1
$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{3}$	-1
$\frac{\pi}{2}$	-2

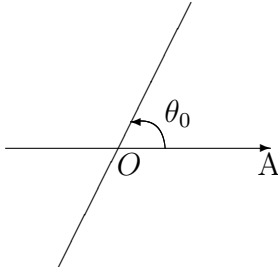


**Figura 9**

### 2.1.6 Algumas Equações em Coordenadas Polares e seus respectivos Gráficos.

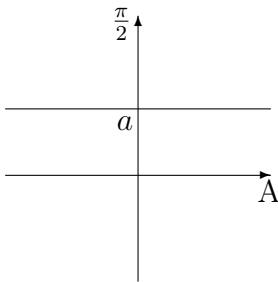
#### (I) Equações de retas.

- (a)  $\theta = \theta_0$  ou  $\theta = \theta_0 \pm n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  é uma reta que passa pelo pólo e faz um ângulo de  $\theta_0$  ou  $\theta_0 \pm n\pi$  radianos com o eixo polar (ver Figura 10).

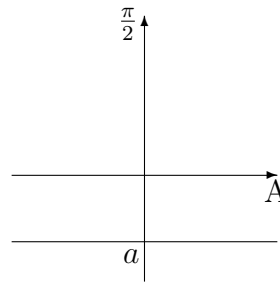


**Figura 10**

- (b)  $r \sin \theta = a$  e  $r \cos \theta = b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , são retas paralelas aos eixos polar e  $\pi/2$ , respectivamente (ver Figuras 11 e 12).

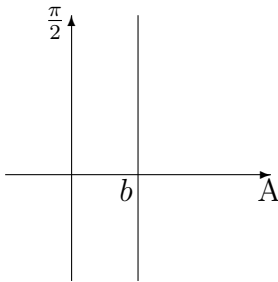


$$[r \sin \theta = a, a > 0]$$

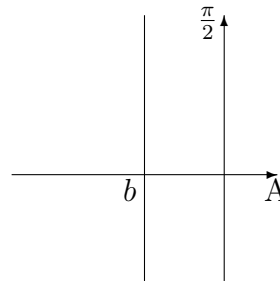


$$[r \sin \theta = a, a < 0]$$

**Figura 11**



$$[r \cos \theta = b, b > 0]$$

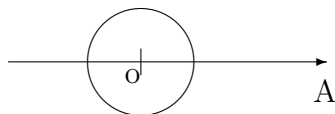


$$[r \cos \theta = b, b < 0]$$

**Figura 12**

#### (II) Circunferências.

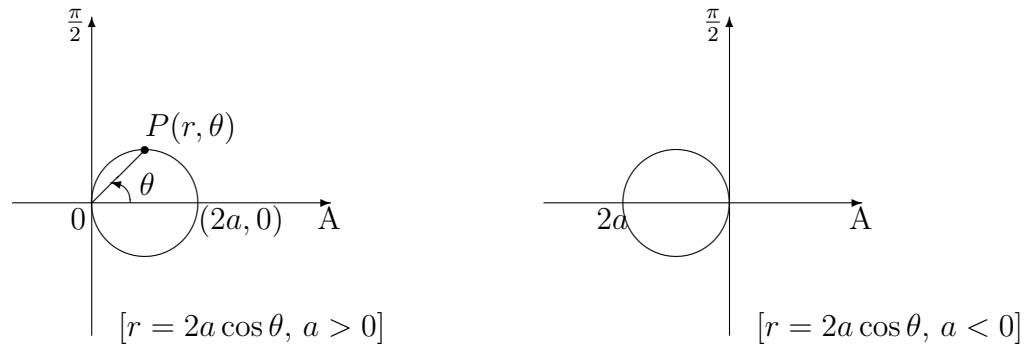
- (a)  $r = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  é uma circunferência centrada no pólo e raio  $|c|$  (ver Figura 13).



**Figura 13**

(b)  $r = 2a \cos \theta$  é uma circunferência de centro no eixo polar, tangente ao eixo  $\theta = \pi/2$ :

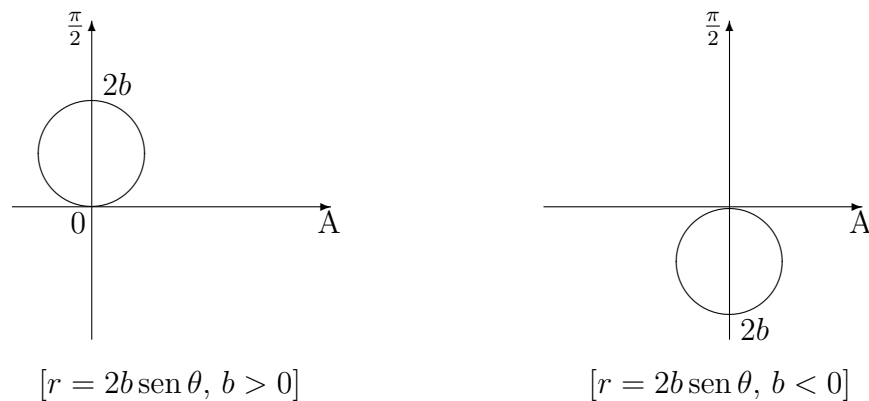
- se  $a > 0$ , o gráfico está à direita do pólo;
- se  $a < 0$ , o gráfico está à esquerda do pólo (ver Figura 14).



**Figura 14**

(c)  $r = 2b \sin \theta$  é uma circunferência de centro no eixo  $\pi/2$  e que tangencia o eixo polar:

- se  $b > 0$ , o gráfico está acima do pólo;
- se  $b < 0$ , o gráfico está abaixo do pólo (ver Figura 15).



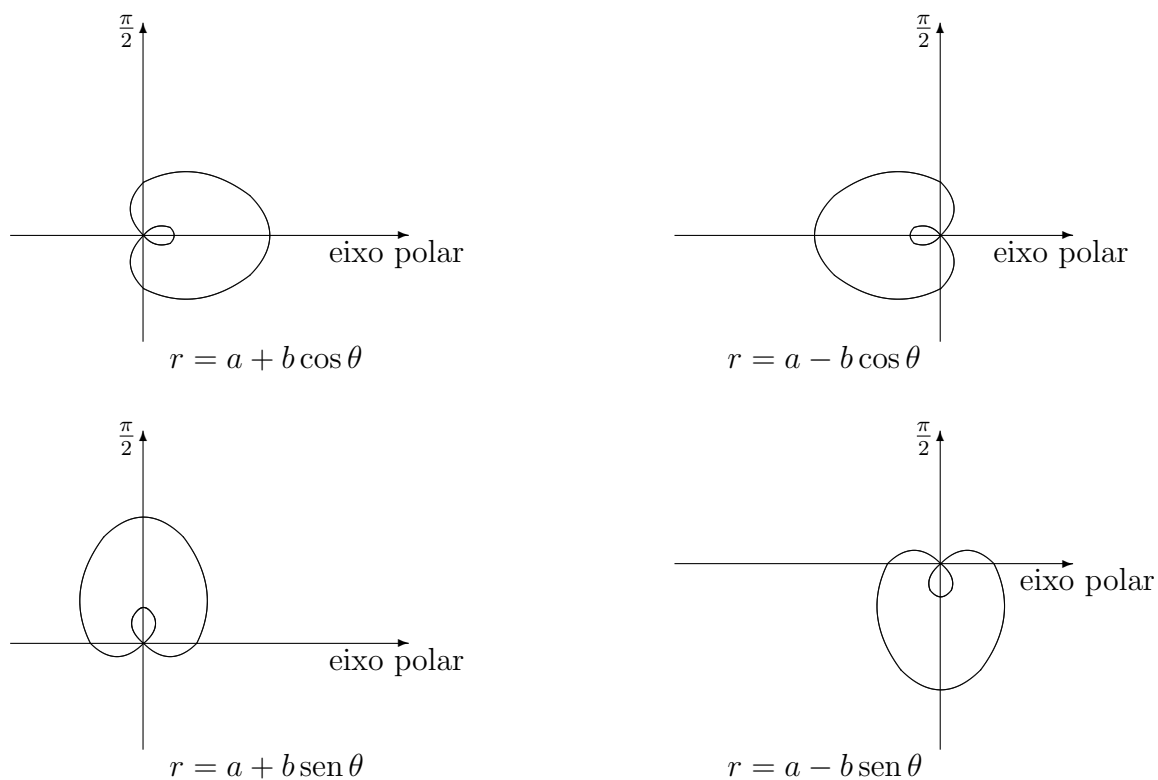
**Figura 15**

### (III) Limaçons.

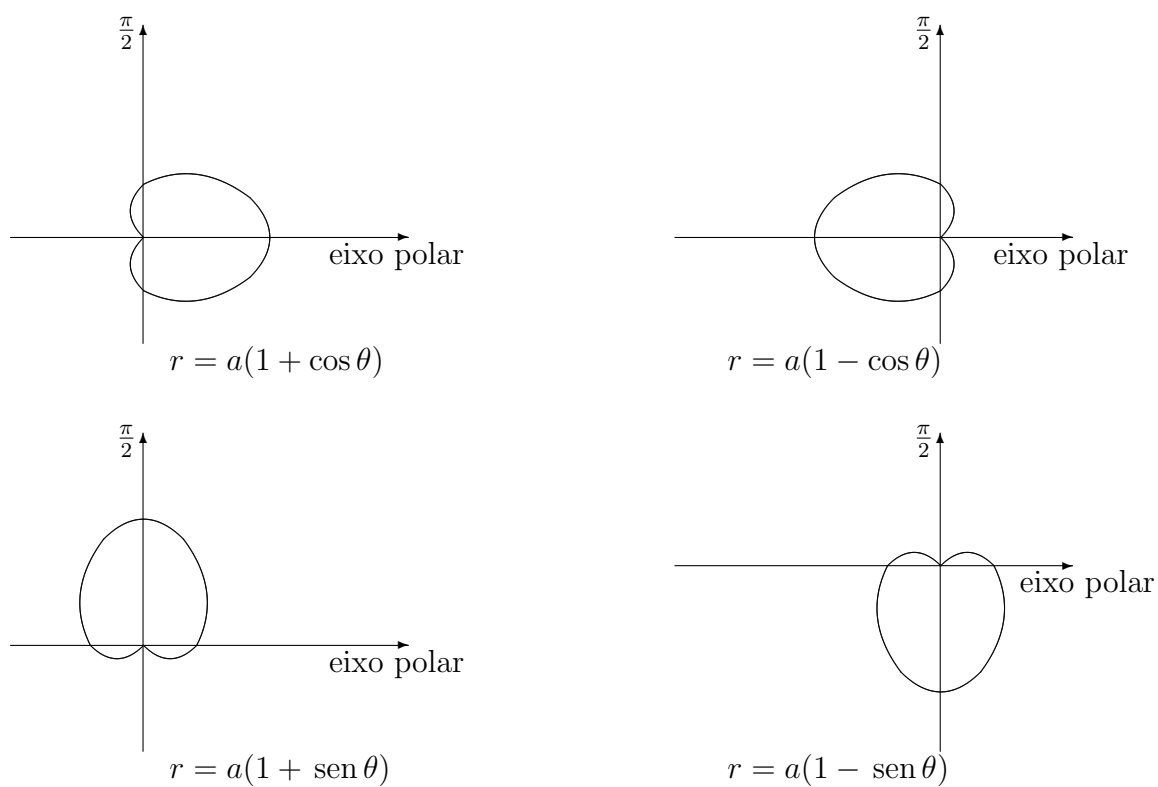
$r = a \pm b \cos \theta$  ou  $r = a \pm b \sin \theta$ , onde  $a, b \in \mathfrak{R}$  são limaçons.

Temos,

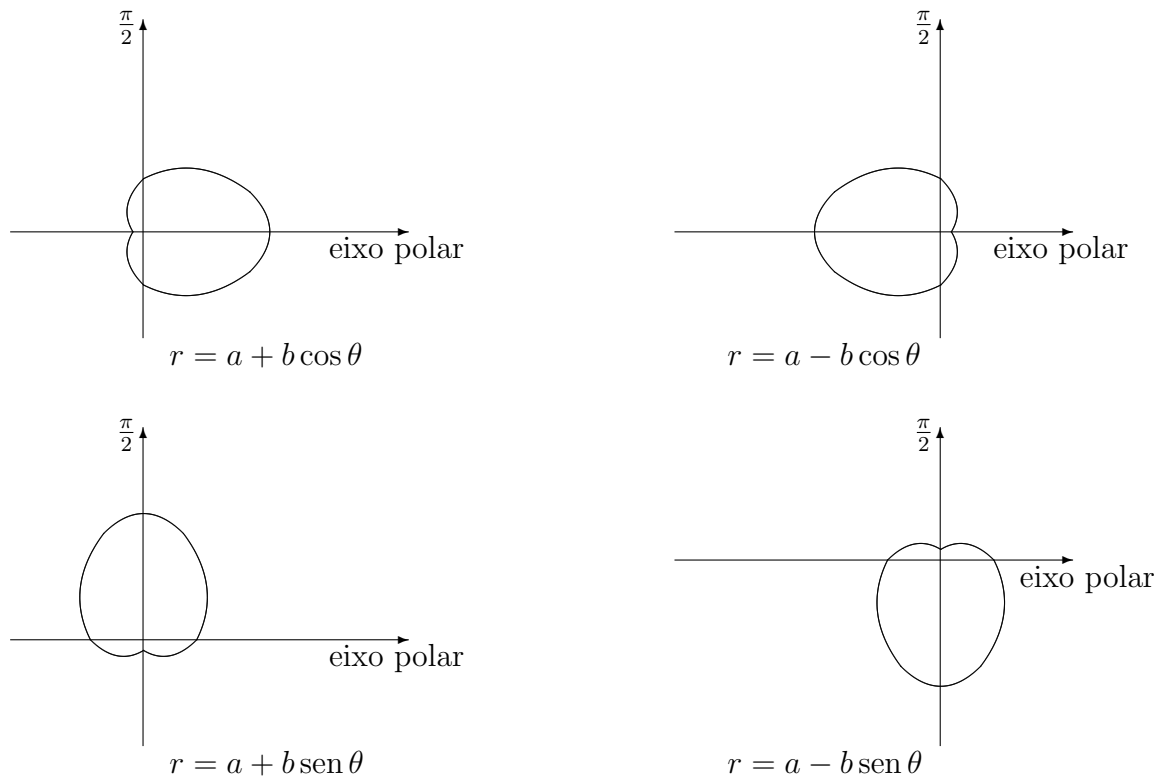
- se  $b > a$ , então o gráfico tem um laço (ver Figura 16);

**Figura 16**

- se  $b = a$ , então o gráfico tem o formato de um coração, por isso é conhecido como *Cardióide* (ver Figura 17);

**Figura 17**

- se  $b < a$ , então o gráfico não tem laço (ver Figura 18).



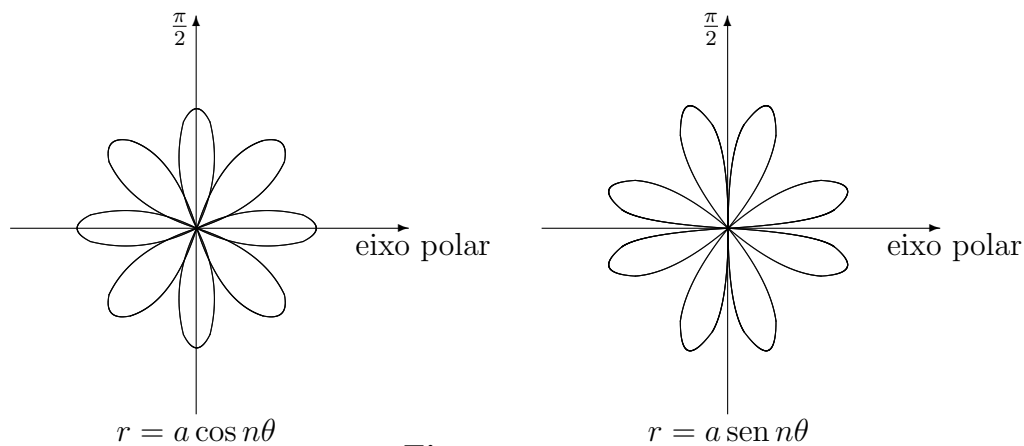
**Figura 18**

Observamos que na Figura 16 usamos  $a = 1$  e  $b = 2$ , na Figura 17 usamos  $a = b = 1$  e na Figura 18 usamos  $a = 3$  e  $b = 2$ .

**(IV) Rosáceas.**

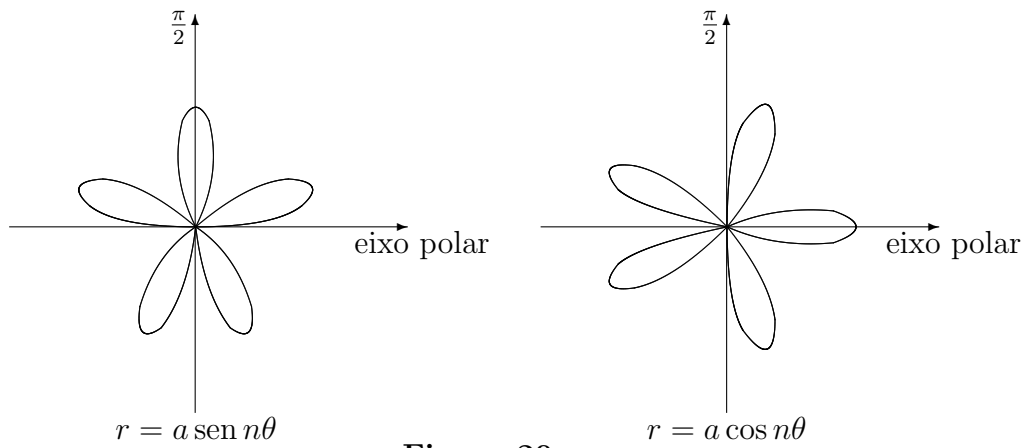
$r = a \cos n\theta$  ou  $r = a \sen n\theta$ , onde  $a \in \Re$  e  $n \in \mathbb{N}$  são rosáceas:

- se  $n$  é par temos uma rosácea de  $2n$  pétalas (ver Figura 19);



**Figura 19**

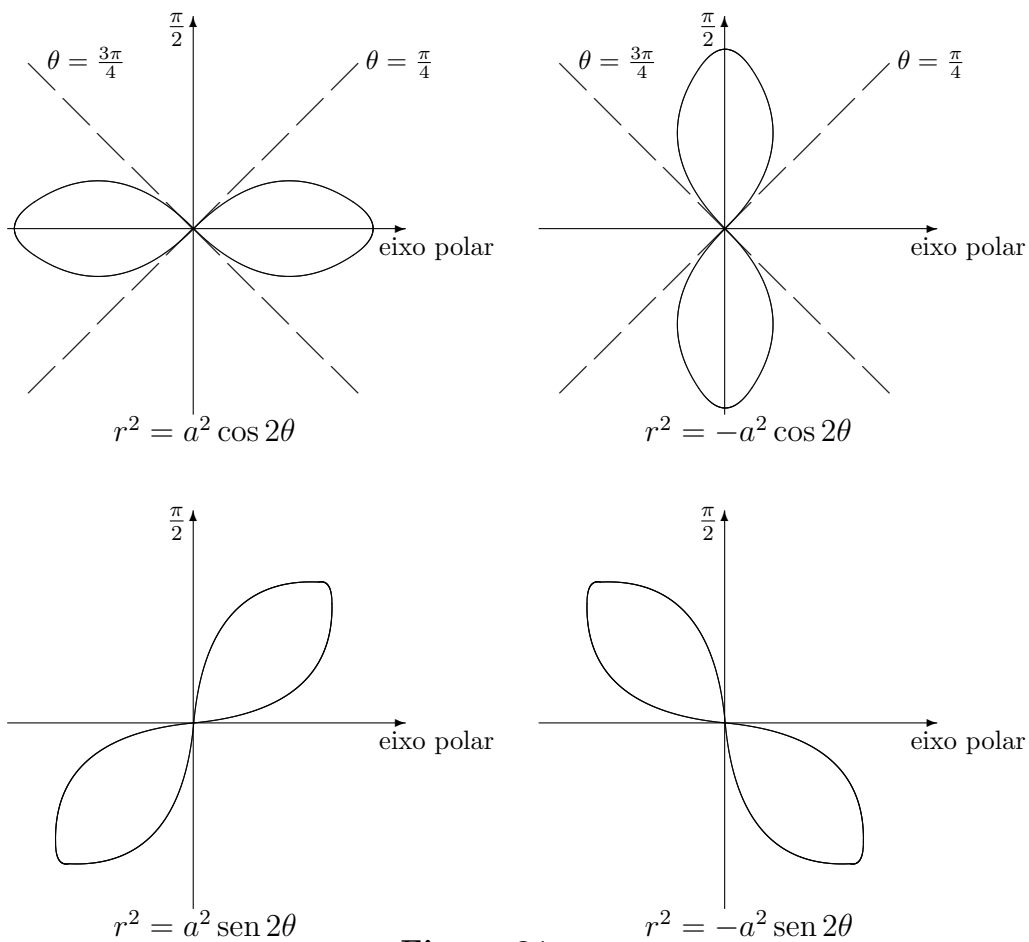
- se  $n$  é ímpar temos uma rosácea de  $n$  pétalas (ver Figura 20).

**Figura 20**

Observamos que na Figura 19 usamos  $a = 1$  e  $n = 4$ , na Figura 20 usamos  $a = 1$  e  $n = 5$ .

**(V) Lemniscatas.**

$r^2 = \pm a^2 \cos 2\theta$  ou  $r^2 = \pm a^2 \sen 2\theta$ , onde  $a \in \Re$  são lemniscatas (ver Figura 21).

**Figura 21**

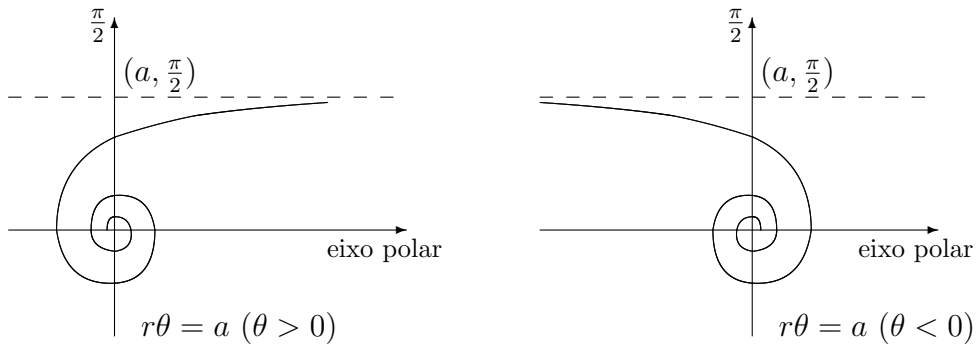
Observamos que na Figura 21 usamos  $a = 1$ .

#### (IV) Espirais.

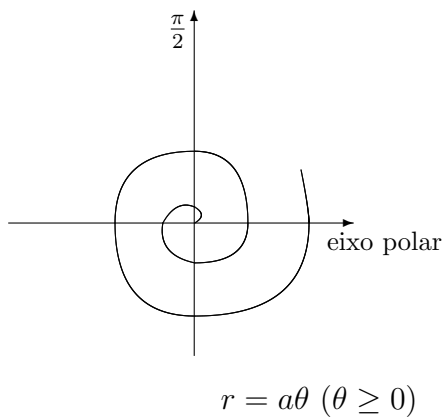
As equações seguintes representam algumas espirais:

- (a)  $r\theta = a, a > 0$  ——— espiral hiperbólica;
- (b)  $r = a\theta, a > 0$  ——— espiral de Arquimedes;
- (c)  $r = e^{a\theta}$  ——— espiral logarítmica;
- (d)  $r^2 = \theta$  ——— espiral parabólica.

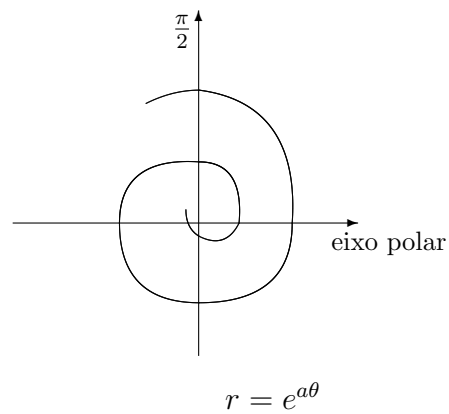
As Figuras 22 a 25 ilustram estas espirais.



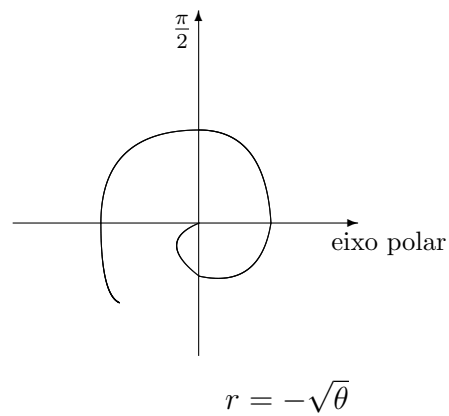
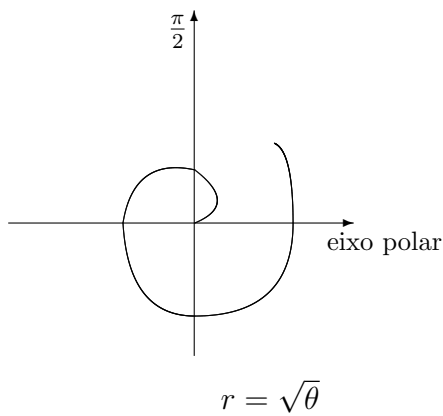
**Figura 22**



**Figura 23**



**Figura 24**



**Figura 25**



### 2.1.7 Exercícios

- Demarcar os seguintes pontos no sistema de coordenadas polares.
 

(a) $P_1(4, \pi/4)$	(c) $P_3(-4, \pi/4)$
(b) $P_2(4, -\pi/4)$	(d) $P_4(-4, -\pi/4)$
- Demarcar os seguintes pontos no sistema de coordenadas polares e encontrar suas coordenadas cartesianas.
 

(a) $P_1(3, \pi/3)$	(c) $P_3(3, -\pi/3)$
(b) $P_2(-3, \pi/3)$	(d) $P_4(-3, -\pi/3)$
- Encontrar as coordenadas cartesianas dos seguintes pontos dados em coordenadas polares.
 

(a) $(-2, 2\pi/3)$	(d) $(-10, \pi/2)$
(b) $(4, 5\pi/8)$	(e) $(-10, 3\pi/2)$
(c) $(3, 13\pi/4)$	(f) $(1, 0)$
- Encontrar um par de coordenadas polares dos seguintes pontos:
 

(a) $(1, 1)$	(c) $(-1, -1)$
(b) $(-1, 1)$	(d) $(1, -1)$
- Usar
 

(a) $r > 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$ ;	(c) $r > 0$ e $-2\pi < \theta \leq 0$ ;
(b) $r < 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$ ;	(d) $r < 0$ e $-2\pi < \theta \leq 0$ ;

 para descrever os pontos  $P_1(\sqrt{3}, -1)$  e  $P_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ , em coordenadas polares.
- Identificar e transformar as seguintes equações para coordenadas polares.
 

(a) $x^2 + y^2 = 4$	(d) $y + x = 0$
(b) $x = 4$	(e) $x^2 + y^2 - 2x = 0$
(c) $y = 2$	(f) $x^2 + y^2 - 6y = 0$
- Transformar as seguintes equações para coordenadas cartesianas e identificá-las.
 

(a) $r = \cos \theta$	(c) $r = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}$
(b) $r = 2 \sin \theta$	(d) $r = a, a > 0$ .
- Nos exercícios a seguir esboçar o gráfico das curvas em coordenadas polares.
 

(a) $r = 1 + 2 \cos \theta$	(f) $r = 2 \sin 2\theta$
(b) $r = 1 - 2 \sin \theta$	(g) $r = 2 - \cos \theta$
(c) $r = a \pm b \cos \theta, a = 2$ e $b = 3$ ; $a = 3$ e $b = 2$ ; $a = b = 3$	(h) $r = 2 - \sin \theta$
(d) $r = \cos 3\theta$	(i) $r = a \pm b \sin \theta, a = 2$ e $b = 3$ ; $a = 3$ e $b = 2$ ; $a = b = 2$
(e) $r = 2 \cos 3\theta$	(j) $r = 2 \sin 3\theta$

- |                                      |                          |                            |
|--------------------------------------|--------------------------|----------------------------|
| (k) $\theta = \pi/4$                 | (q) $r = \sqrt{2}$       |                            |
| (l) $\theta = \pi/9$                 | (r) $r = 10 \cos \theta$ |                            |
| (m) $r^2 = 4 \cos 2\theta$           | (s) $r = 2 \cos \theta $ | (w) $r \cos \theta = 5$    |
| (n) $r = 3\theta, \theta \geq 0$     | (t) $r = 12 \sin \theta$ | (x) $5r \cos \theta = -10$ |
| (o) $r = 4 \sin \theta$              | (u) $r = e^{\theta/3}$   |                            |
| (p) $r = e^{-\theta}, \theta \geq 0$ | (v) $r = 2\theta$        |                            |

### 2.1.8 Respostas

- |                                     |   |   |
|-------------------------------------|---|---|
| (2a) $(3/2, 3\sqrt{3}/2)$           | (4a) $(\sqrt{2}, \pi/4)$                  | (6a) $r = \pm 2$  |
| (2b) $(-3/2, -3\sqrt{3}/2)$         | (4b) $(\sqrt{2}, 3\pi/4)$                 | (6b) $r \cos \theta = 4$                                |
| (2c) $(3/2, -3\sqrt{3}/2)$          | (4c) $(\sqrt{2}, 5\pi/4)$                 | (6c) $r \sin \theta = 2$                                |
| (2d) $(-3/2, 3\sqrt{3}/2)$          | (4d) $(\sqrt{2}, 7\pi/4)$                 | (6d) $\theta = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ |
| (3a) $(1, -\sqrt{3})$               | (5a) $P_1(2, 11\pi/6); P_2(2, 5\pi/4)$    | (6e) $r = 2 \cos \theta$                                |
| (3b) $(-1.5307, 3.6955)$            | (5b) $P_1(-2, 5\pi/6); P_2(-2, \pi/4)$    | (6f) $r = 6 \sin \theta$                                |
| (3c) $(-3\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2}/2)$ | (5c) $P_1(2, -\pi/6); P_2(2, -3\pi/4)$    | (7a) $x^2 + y^2 - x = 0$                                |
| (3d) $(0, -10)$                     | (5d) $P_1(-2, -7\pi/6); P_2(-2, -7\pi/4)$ | (7b) $x^2 + y^2 - 2y = 0$                               |
| (3e) $(0, 10)$                      |   | (7c) $x + y = 1$  |
| (3f) $(1, 0)$                       |   | (7d) $x^2 + y^2 = a^2$                                  |

## 2.2 Coordenadas cilíndricas

**Fonte:** *Geometria Analítica.*

*Coleção Schaum.*

*Joseph H. Kindle.*

No espaço, além das coordenadas cartesianas retangulares, dois outros sistemas são frequentemente empregados: os de coordenadas cilíndricas e esféricas.

No sistema de coordenadas cilíndricas, um ponto  $P(x, y, z)$ , Fig. 2, é localizado pelas coordenadas  $r, \theta, z$ , devendo-se notar que  $r$  e  $\theta$  são as coordenadas polares da projeção  $Q$  do ponto  $P$  no plano  $xy$ . Para designar essas coordenadas, escrevemos:  $(r, \theta, z)$ . As relações entre coordenadas cilíndricas e retangulares são

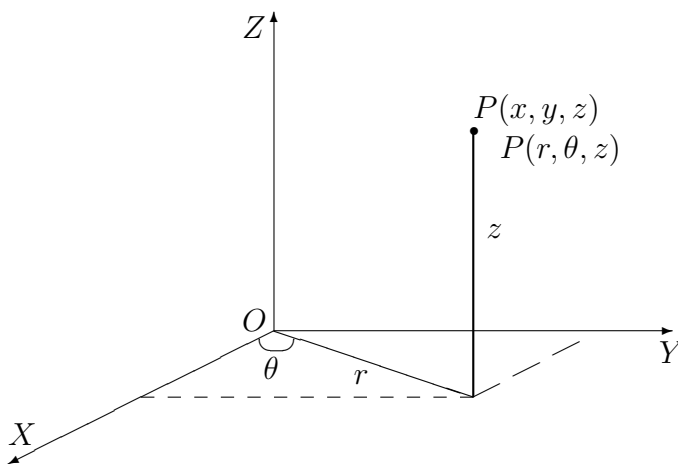


Figura 2

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z. \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} r &= \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (34)$$

O ângulo  $\theta$  não sofre restrição de valor, podendo  $r$  receber valores negativos, como em coordenadas polares.

## 2.3 Coordenadas esféricas

Seja  $P(x, y, z)$  um ponto qualquer do espaço e  $Q$ , sua projeção no plano  $xy$ . Chamemos de  $r$  a distância  $OP$ , como em coordenadas polares. Designemos o ângulo  $ZOP$  por  $\phi$ .

Consideremos o ângulo  $\phi$  como positivo e capaz de variar no  $0^\circ \leq \phi \leq 180^\circ$ . Designemos o ângulo  $XOQ$  por  $\theta$ . Os símbolos  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$  tomam o nome de coordenadas esféricas do ponto  $P$  e representam-se por  $P(r, \theta, \phi)$ ;  $r$  é o *raio vetor*,  $\theta$  é a *longitude* e  $\phi$  é a *co-latitute* de  $P$ . O ângulo  $\theta$  pode receber qualquer valor.

Do triângulo retângulo  $OPQ$ , deduzimos

$$OQ = r \sin \phi, \quad QP = r \cos \phi. \quad (35)$$

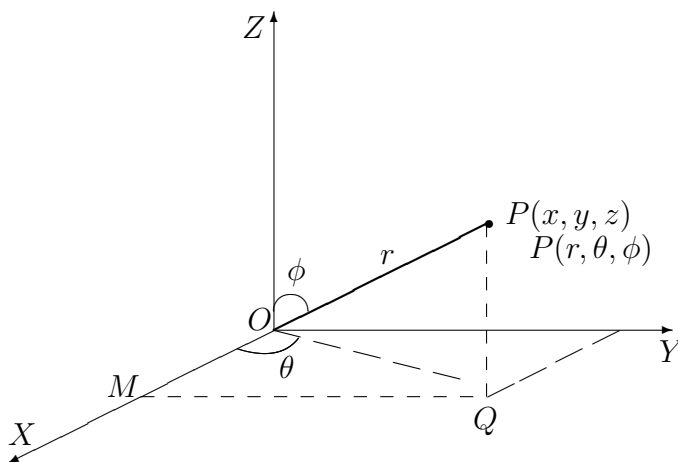


Figura 3

Do triângulo retângulo  $OMQ$  tiramos  $OM = OQ \cos \theta$ ,  $MQ = OQ \sin \theta$ .  
Portanto,

$$\begin{cases} x = OM = r \sin \phi \cos \theta \\ y = MQ = r \sin \phi \sin \theta \\ z = QP = r \cos \phi. \end{cases} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} r &= \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x}, \\ \phi &= \arccos \frac{z}{r}. \end{aligned} \quad (37)$$

Nos problemas que envolvem a determinação de áreas e volumes pelo cálculo, o trabalho muito se simplifica com o emprego de coordenadas cilíndricas ou esféricas. As coordenadas cilíndricas mostram-se particularmente úteis quando a superfície limite é de revolução.

## 2.4 Exemplos

1. Determinar as coordenadas cilíndricas e esféricas do ponto de coordenadas retangulares  $(1, -2, 2)$ .

*Coordenadas cilíndricas.*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} = \arctan -2 = 296^\circ 34',$$

$$z = 2.$$

*Resposta:*  $(\sqrt{5}, 296^\circ 34', 2)$ .

*Coordenadas esféricas.*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} = \arctan -2 = 296^\circ 34',$$

$$\phi = \arccos \frac{z}{r} = \arccos \frac{2}{3} = 48^\circ 11',$$

*Resposta:*  $(3, 296^\circ 34', 48^\circ 11')$ .

2. Determinar as coordenadas cartesianas ortogonais do ponto, cujas coordenadas cilíndricas são  $(6, 120^\circ, -2)$ .

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta = 6 \cos 120^\circ = -3, \\ \text{Solução. } y &= r \sin \theta = 6 \sin 120^\circ = 3\sqrt{3}, \\ z &= -2. \end{aligned}$$

*Resposta:*  $(-3, 3\sqrt{3}, -2)$ .

3. Determinar as coordenadas retangulares do ponto de coordenadas esféricas  $(4, -45^\circ, 30^\circ)$ .

*Solução.*

$$x = r \sin \phi \cos \theta = 4 \sin 30^\circ \cos(-45^\circ) = \sqrt{2},$$

$$y = r \sin \phi \sin \theta = 4 \sin 30^\circ \sin(-45^\circ) = -\sqrt{2},$$

$$z = r \cos \phi = 4 \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}.$$

*Resposta:*  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$ .

4. Determinar as coordenadas cartesianas e esféricas de um ponto, cujas coordenadas cilíndricas são  $(6, 120^\circ, 4)$ .

*Solução – Retangulares.*

$$x = r \cos \theta = 6 \cos 120^\circ = -3,$$

$$y = r \sin \theta = 6 \sin 120^\circ = 3\sqrt{3},$$

$$z = 4.$$

*Resposta:*  $(-3, 3\sqrt{3}, 4)$ .

*Esféricas.*

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{3})^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} = \arctan \frac{3\sqrt{3}}{-3} = 120^\circ,$$

$$\phi = \arccos \frac{z}{r} = \arccos \frac{4}{2\sqrt{13}} = 56^\circ 19',$$

*Resposta:*  $(2\sqrt{13}, 120^\circ, 56^\circ 19')$ .

5. Passar a equação  $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2x - 3y - z + 2 = 0$  para coordenadas cilíndricas.

*Solução.* Empreguemos as fórmulas  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  e  $z = z$ .

Substituindo, na equação dada,  $x$ ,  $y$  e  $z$  pelos valores acima, vem  
 $r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta + 2z^2 - 2r \cos \theta - 3r \sin \theta - z + 2 = 0$ .

Simplificando, resulta

$$r^2 - r(2 \cos \theta + 3 \sin \theta) + 2z^2 - z + 2 = 0.$$

6. Passar a equação  $2x^2 + 3y^2 - 6z = 0$  para coordenadas esféricas.

*Solução.* Empreguemos as fórmulas  $x = r \sin \phi \cos \theta$ ,  $y = r \sin \phi \sin \theta$  e  $z = r \cos \phi$ .

Substituindo, temos  $2r^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + 3r^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta - 6r \cos \phi = 0$   
 ou  $2r \sin^2 \phi \cos^2 \theta + 3r \sin^2 \phi \sin^2 \theta - 6 \cos \phi = 0$ .

7. Exprimir a equação  $r + 6 \sin \phi \cos \theta + 4 \sin \phi \sin \theta - 8 \cos \phi = 0$ , em coordenadas retangulares.

*Solução.* A equação dada está expressa em coordenadas esféricas.

Podemos Multiplicá-la por  $r$ . Empregando os valores de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , dados no problema 7, obtemos

$$r^2 + 6r \sin \phi \cos \theta + 4r \sin \phi \sin \theta - 8r \cos \phi = 0,$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 4y - 8z = 0.$$

Esta é a equação de uma esfera com centro em  $(-3, -2, 4)$  e raio  $r = \sqrt{29}$ .

8. Reduzir a equação  $z = r^2 \cos 2\theta$ , expressa em coordenadas cilíndricas, a coordenadas cartesianas ortogonais.

*Solução.* Façamos  $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ . Teremos então

$$z = r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta.$$

Como  $r \cos \theta = x$  e  $r \sin \theta = y$ , a equação pedida é  $z = x^2 - y^2$ .

## 2.5 Exercícios

1. Determinar as coordenadas cilíndricas dos seguintes pontos:

(a) $(0, 1, 1)$	(c) $(1, -2, 2)$	(e) $(8, -4, 1)$
(b) $(0, -2, -2)$	(d) $(6, 3, 2)$	

2. Determinar as coordenadas esféricas do problema 1.

3. Determinar as coordenadas ortogonais dos pontos, cujas coordenadas cilíndricas são:

(a) $(6, 120^\circ, -2)$	(c) $(4, 45^\circ, 2)$	(e) $(6, 30^\circ, -3)$
(b) $(1, 330^\circ, -2)$	(d) $(8, 120^\circ, 3)$	

4. Determinar as coordenadas retangulares dos pontos, cujas coordenadas esféricas são:

(a) $(4, 210^\circ, 30^\circ)$	(c) $(6, 330^\circ, 60^\circ)$	(e) $(2, 180^\circ, 270^\circ)$
(b) $(3, 120^\circ, 240^\circ)$	(d) $(5, 150^\circ, 210^\circ)$	

5. Determinar as coordenadas esféricas dos pontos, cujas coordenadas cilíndricas são:

(a) $(8, 120^\circ, 6)$	(c) $(6, 135^\circ, 2)$	(e) $(12, -90^\circ, 5)$
(b) $(4, 30^\circ, -3)$	(d) $(3, 150^\circ, 4)$	

6. Transformar as seguintes equações nas correspondentes do sistema esférico.

$$(a) \ 3x^2 - 3y^2 = 8z \qquad (b) \ x^2 - y^2 - z^2 = a^2 \qquad (c) \ 3x + 5y - 2z = 6$$

7. Transformar as coordenadas retangulares das equações dadas em coordenadas cilíndricas:

$$(a) \ 5x + 4y = 0 \qquad (c) \ x^2 + y^2 - 8x = 0 \qquad (e) \ x^2 + y^2 - z^2 = a^2$$

$$(b) \ 5x^2 - 4y^2 + 2x + 3y = 0 \qquad (d) \ x^2 - y^2 + 2y - 6 = 0$$

8. As superfícies dadas por suas equações estão expressas em coordenadas cilíndricas. Referi-las ao sistema cartesiano ortogonal e identificá-las.

$$(a) \ r^2 + 3z^2 = 36 \qquad (c) \ r^2 + z^2 = 16 \qquad (e) \ r^2 - z^2 = 1$$

$$(b) \ r = a \operatorname{sen} \theta \qquad (d) \ \theta = 45^\circ$$

9. Transformar as seguintes equações, dadas em coordenadas esféricas, em equações de coordenadas retangulares e identificá-las.

$$(a) \ r = 5a \cos \phi \qquad (c) \ r \operatorname{sen} \phi = a$$

$$(b) \ \theta = 60^\circ \qquad (d) \ r = 4$$

## 2.6 Respostas

$$(6a) \ 3r \operatorname{sen}^2 \phi \cos 2\theta = 8 \cos \theta$$

$$(6b) \ r^2 (\operatorname{sen}^2 \phi \cos 2\theta - \cos^2 \phi) = a^2$$

$$(6c) \ r(3 \operatorname{sen} \phi \cos \theta + 5 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta - 2 \cos \phi) = 6$$

$$(7a) \ \theta = \arctan(-5/4)$$

$$(7b) \ 5r \cos^2 \theta - 4r \operatorname{sen}^2 \theta + 2 \cos \theta + 3 \operatorname{sen} \theta = 0$$

$$(7c) \ r - 8 \cos \theta = 0$$

$$(7d) \ r^2 \cos 2\theta + 2r \operatorname{sen} \theta - 6 = 0$$

$$(7e) \ r^2 - z^2 = a^2$$

$$(8a) \ x^2 + y^2 + 3z^2 = 36. \text{ Elipsóide de revolução.}$$

$$(8b) \ x^2 + y^2 = ay. \text{ Cilindro circular reto.}$$

$$(8c) \ x^2 + y^2 + z^2 = 16. \text{ Esfera.}$$

$$(8d) \ y = x. \text{ Plano.}$$

$$(8e) \ x^2 + y^2 - z^2 = 1. \text{ Hiperbolóide de uma folha.}$$

$$(9a) \ x^2 + y^2 + z^2 = 5az$$

$$(9b) \ y = \sqrt{3}x$$

$$(9c) \ x^2 + y^2 = a^2$$

$$(9d) \ x^2 + y^2 + z^2 = 16$$