Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Volume de Sólidos de Revolução

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 de 11 de setembro de 2024.

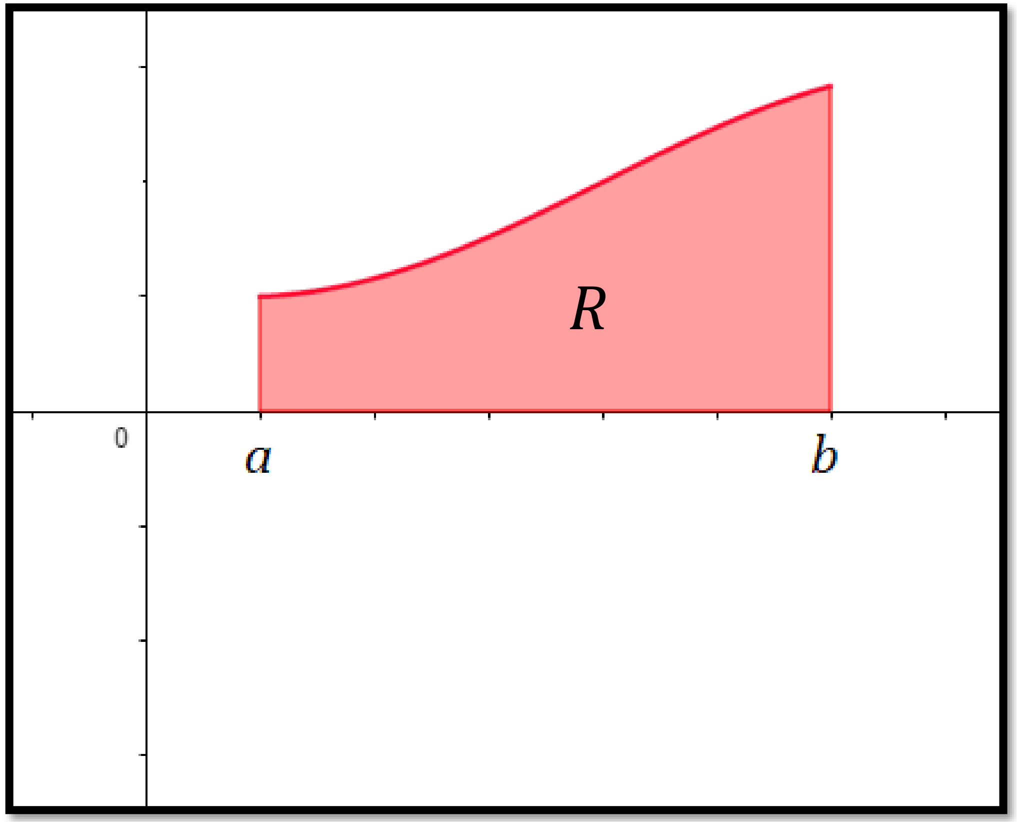
UDESC

3 - Volume de Sólido de Revolução

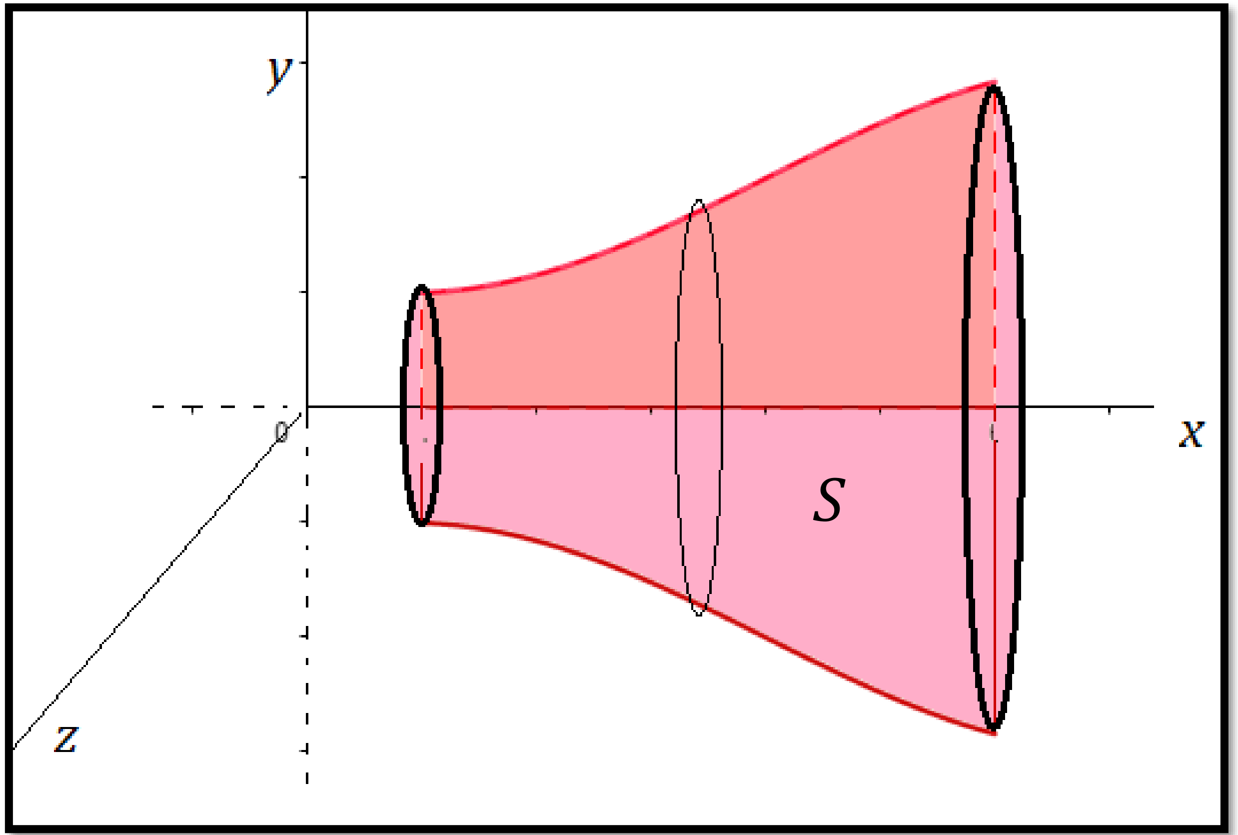
Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere a região R delimitada por

$$y = f(x), \quad y = 0, \quad x = a \quad \text{e} \quad x = b.$$

Quando a região R é rotacionada em torno do eixo $\vec{O}x$, é formado um sólido S, situado em $\mathbb{R}^3$, conforme indicado na figura:



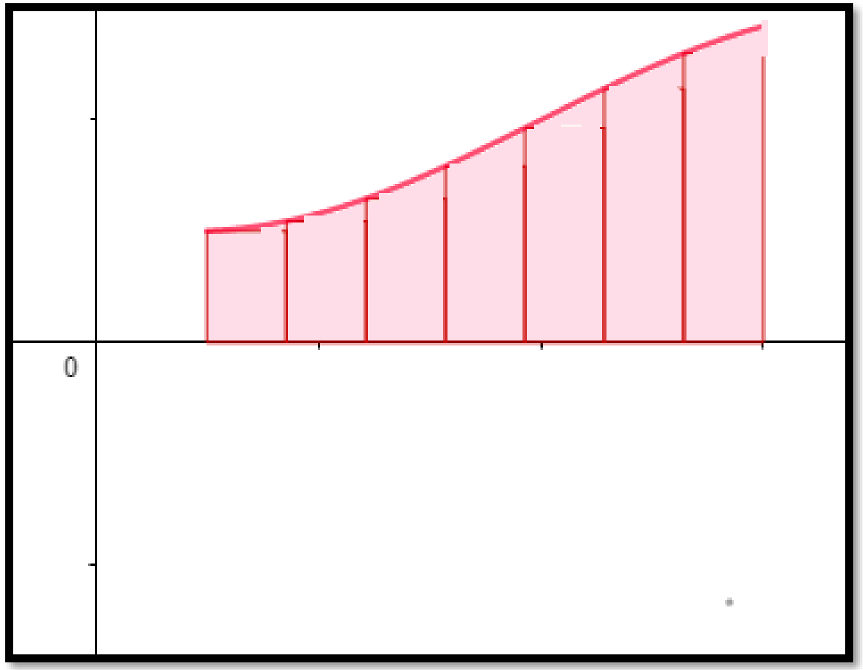
$\Rightarrow$



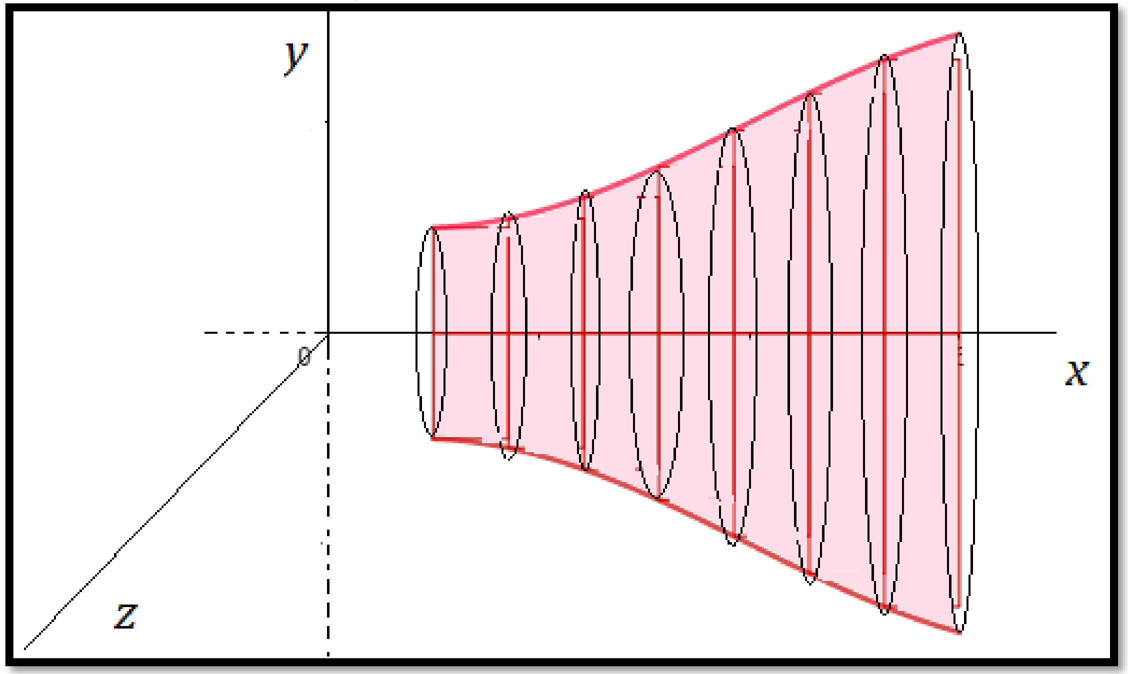
Questão: Qual o volume do sólido S obtido quando R é rotacionada em torno do eixo $\vec{O}x$?

Volume de Sólido de Revolução

- Para obter uma expressão para o volume desejado, seguiremos o método infinitesimal:
- 1º Passo: Dividimos R em n “pedaços”, tomando $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.



$\Rightarrow$



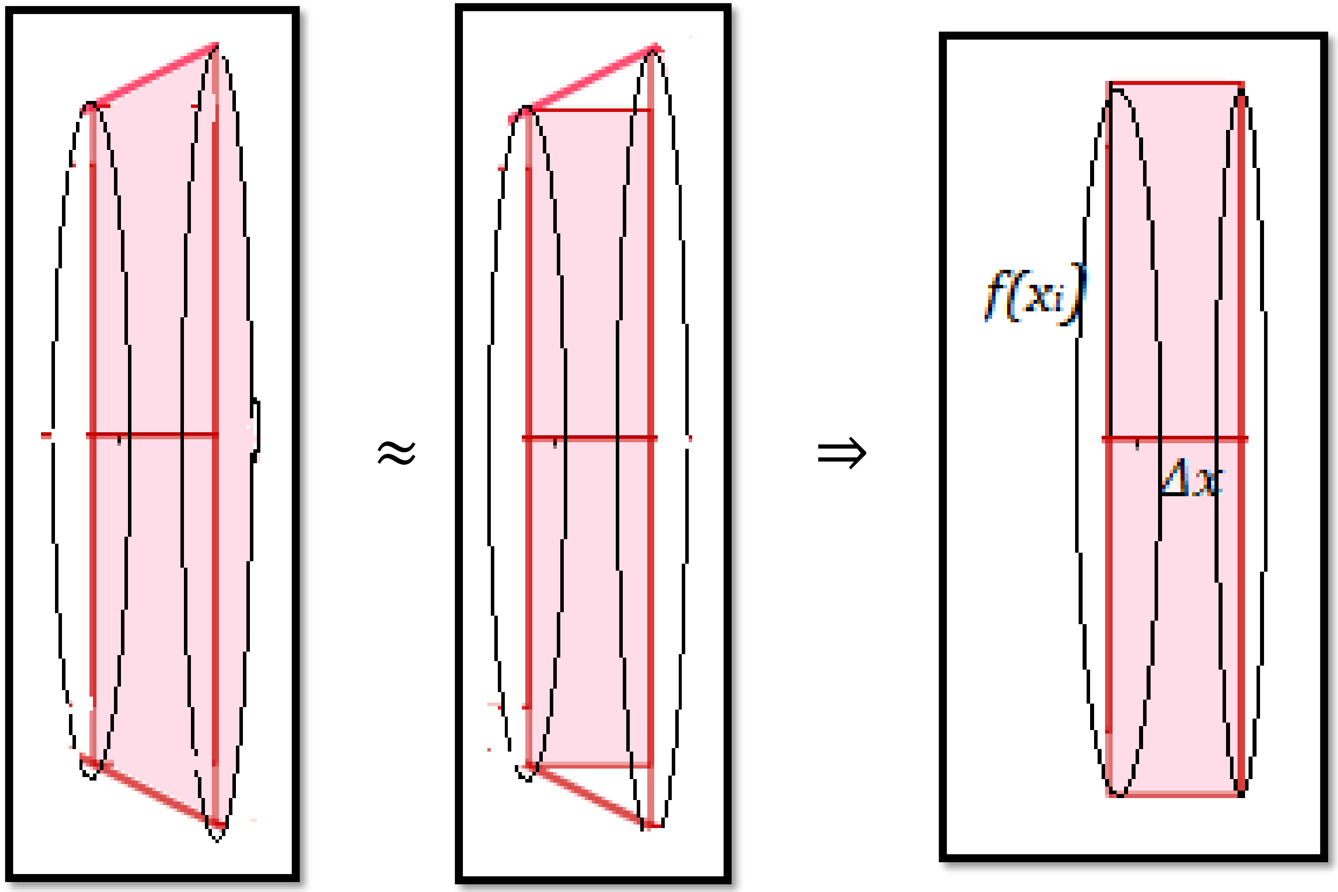
- Ao fazer isso, o sólido S também fica “fatiado” em n “pedaços”.
- 2º Passo: Somamos os volumes de todos os “pedaços”:

$$Volume(S) = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

- onde V_i representa o volume do “i-ésimo pedaço”.

Volume de Sólido de Revolução

<u>3º Passo:</u> Aproximamos o volume do “$i-ésimo$ pedaço” por meio do volume de um sólido conhecido.



Note que tal pedaço pode ser aproximado por um cilindro circular, obtido pela rotação de um retângulo inscrito (ou circunscrito) ao gráfico de f.

O raio do cilindro é dado por $r = f(x_i)$ e a sua altura é dada por $h = \Delta x$. Portanto:

$$V_i \approx V_{cilindro} = \pi r^2 h = \pi f(x_i)^2 \Delta x.$$

Volume de Sólido de Revolução

Substituindo na expressão obtida anteriormente, obtemos que

$$Volume(S) = \sum_{i=1}^{n} V_i \approx \sum_{i=1}^{n} \pi\, f(x_i)^2 \Delta x.$$

Soma de Riemann para o volume do sólido

4º Passo: Melhoramos a aproximação, fazendo a quantidade de "pedaços" ficar cada maior, ou seja, tomamos $n \to +\infty$.

Com isso, obtemos:

$$Volume(S) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi\, f(x_i)^2 \Delta x.$$

O raio de rotação, dado por $f(x)$, consiste na distância entre a curva e o eixo de rotação!

Portanto, obtemos que

$$\boxed{Volume(S) = \int_a^b \pi f(x)^2 dx = \pi \int_a^b f(x)^2 dx,}$$

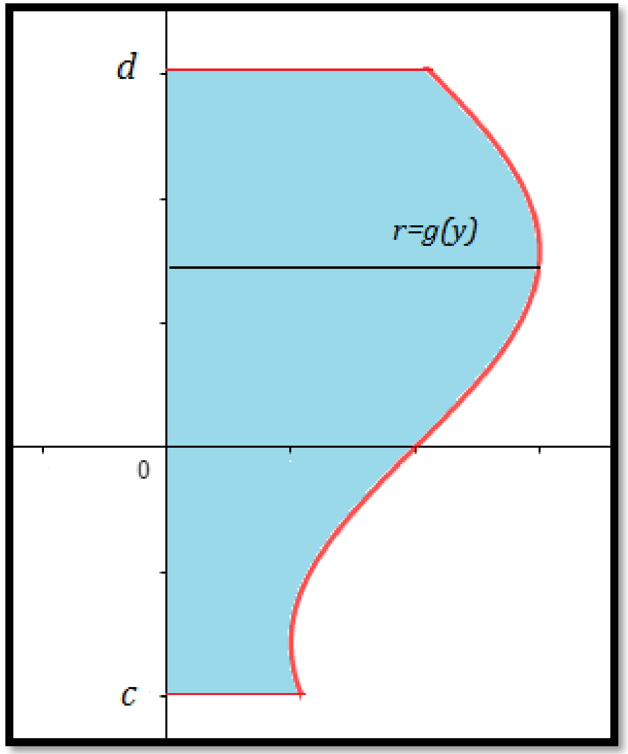
que é a expressão que permite calcular **o volume de um sólido de revolução**.

Rotação em torno de $\vec{O}y$

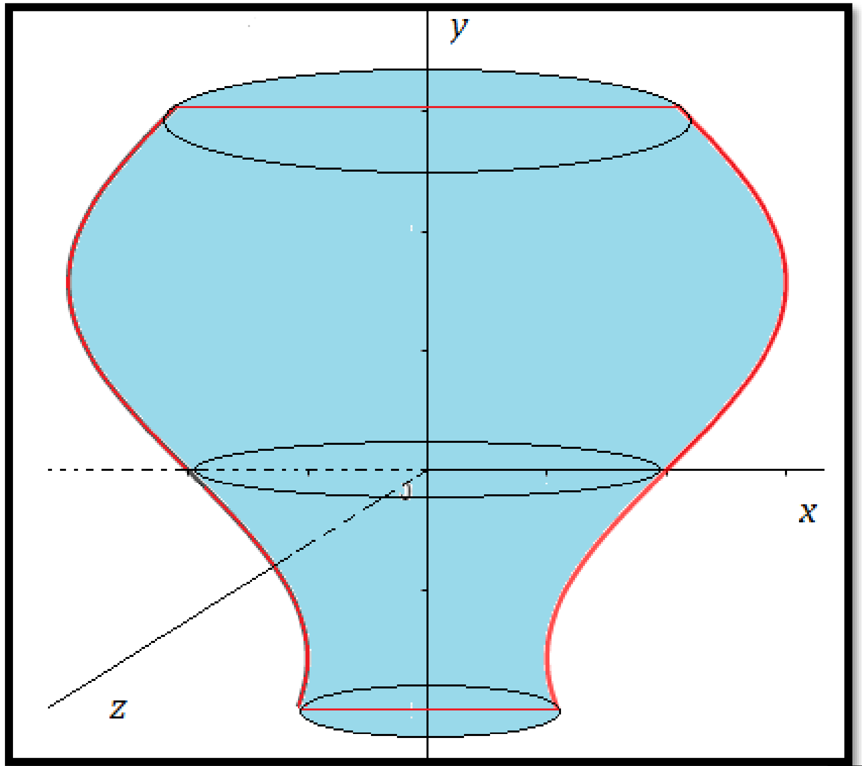
Caso tenhamos uma função contínua $g: [c, d] \to \mathbb{R}$ e a região delimitada pelas curvas

$$x = g(y), \quad x = 0, \quad y = c \quad \text{e} \quad y = d$$

for rotacionada em torno do eixo $\vec{O}y$, obtemos o sólido S exibido abaixo:



$\Rightarrow$



O volume do sólido S resultante é dado por:

$$V(S) = \pi \int_c^d g(y)^2 dy.$$

Aqui, o raio de rotação é $r = g(y)$, que novamente é a distância da curva ao eixo de rotação.

Exemplo

Exercício 1) Calcule o volume do sólido obtido quando a região delimitada pela curva

$$4x^2 + y^2 = 16$$

é rotacionada em torno:

a) do eixo $\vec{O}x$. b) do eixo $\vec{O}y$.

Exercício 2) Calcule o volume do sólido obtido quando a região delimitada pelas curvas

$$-x^2 + y^2 = 3 \qquad \text{e} \qquad y = \sqrt{9 - x^2}$$

é rotacionada em torno:

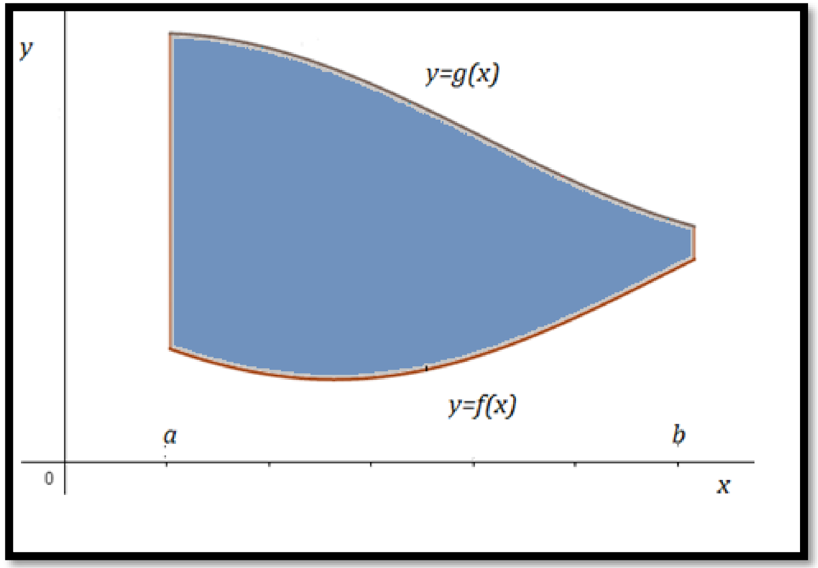
a) do eixo $\vec{O}x$. b) do eixo $\vec{O}y$.

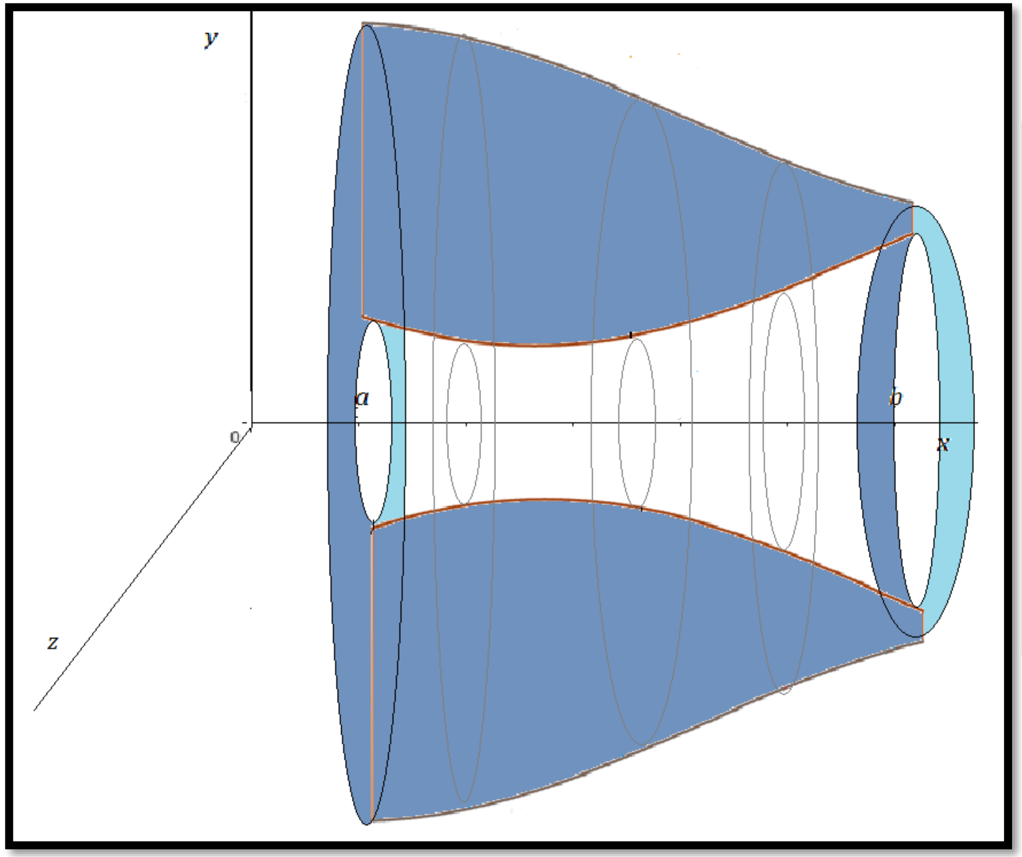
Sólidos não maciços

Um sólido não maciço ocorre quando revolucionamos em torno do eixo $\vec{O}x$ uma região situada entre duas curvas, dadas por

$$y = g(x), \quad y = f(x), \quad x = a \quad \text{e} \quad x = b,$$

com $f(x) \leq g(x)$. Geometricamente:





Como o sólido é "vazado", fazemos uma diferença de volumes:

$r_{ext} = g(x)$

$r_{int} = f(x)$.

O volume do sólido resultante é

$$V(S) = V_{ext} - V_{int} = \pi \int_a^b g(x)^2 dx - \pi \int_a^b f(x)^2 dx = \pi \int_a^b g(x)^2 - f(x)^2 dx.$$

Exemplo

Exercício 3) Escreva as integrais que permitem calcular o volume do sólido obtido quando a região delimitada simultaneamente pelas curvas

$$y = \sqrt{x-1}, \quad x + y = 3 \quad \text{e} \quad y = \sqrt{9-2x}.$$

é rotacionada em torno:

a) do eixo $\vec{O}x$.

b) do eixo $\vec{O}y$.

Solução: As interseções entre as curvas foram calculadas e a região foi esboçada no GeoGebra. Discutimos a montagem das integrais dos dois itens, que ficaram para os alunos escreverem. Respostas:

$$a)\ V = \int_0^2 \left(\sqrt{9-2x}\right)^2 - (3-x)^2 dx + \int_0^2 \left(\sqrt{9-2x}\right)^2 - \left(\sqrt{x-1}\right)^2 dx = \int_0^2 (4x - x^2) dx + \int_0^2 (10-3x)\, dx$$

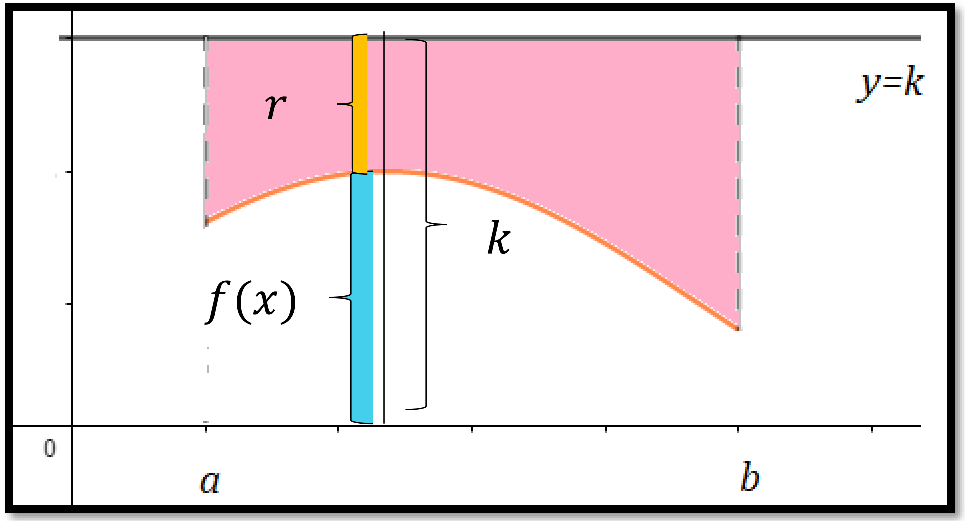
$$b)\ V = \int_1^{\sqrt{\frac{3}{7}}} (y^2+1)^2 - (3-y)^2 dy + \int_{\sqrt{\frac{3}{7}}}^3 \left(\frac{9-y^2}{2}\right)^2 - (3-y)^2 dy$$

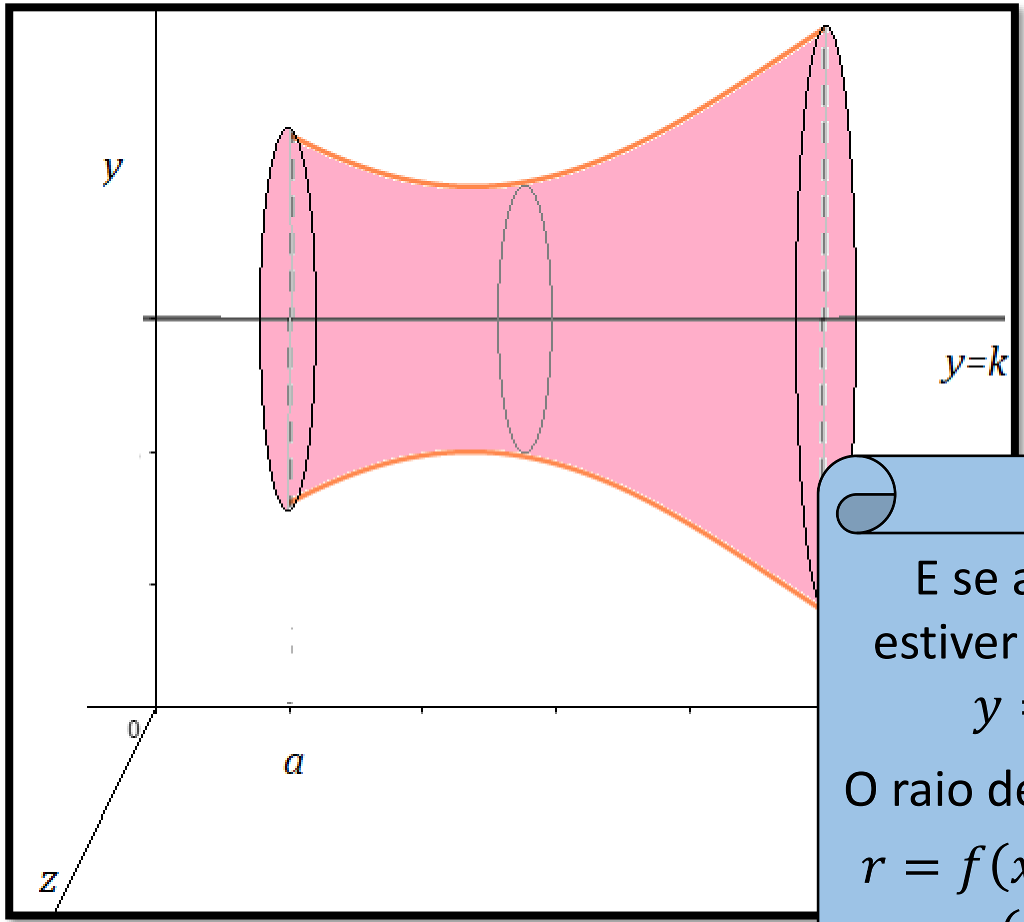
$$= \int_1^{\sqrt{\frac{3}{7}}} (y^4 + y^2 + 6y - 8)\, dy + \int_{\sqrt{\frac{3}{7}}}^3 \left(\frac{y^4}{4} - \frac{11y^2}{2} + 6y + \frac{45}{4}\right) dy$$

Revolução em torno de retas paralelos aos eixos coordenados

E se uma região R for rotacionada em torno de uma reta $y = k$ (paralela ao eixo x)?

Basta apenas identificar o novo raio r de rotação, que é a distância da curva ao eixo de revolução:





Veja que
$r = k - f(x)$.

E se a região estiver acima de $y = k$?

O raio de rotação é

$$r = f(x) - k$$
$$= -(k - f(x)).$$

O sinal oposto não altera a expressão, devido ao quadrado de r.

Assim, o volume do sólido resultante S é dado por:

$$V(S) = \pi \int_a^b (k - f(x))^2 dx.$$

Exemplo

Exemplo 1) Calcule o volume do sólido obtido quando a região delimitada pela curva

$$16x^2 + 25y^2 = 400$$

é rotacionada em torno: a) do eixo $\vec{O}x$. b) do eixo $\vec{O}y$.

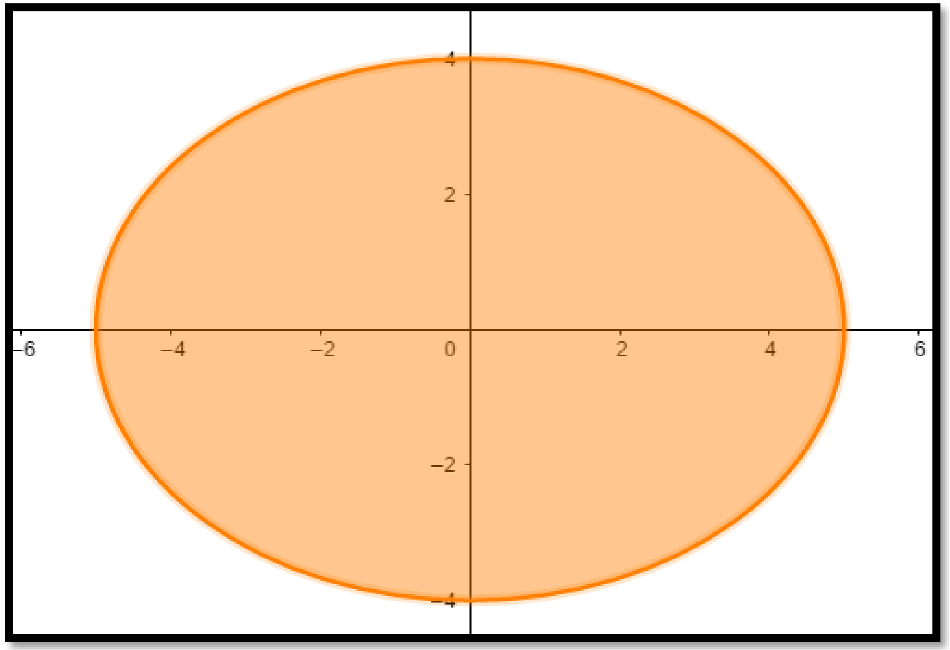
Solução: Representando geometricamente a curva obtemos

$$16x^2 + 25y^2 = 400$$

$$\frac{16x^2}{400} + \frac{25y^2}{400} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Uma elipse com semieixos 5 e 4.



Isolando $y = y(x)$:

$$25y^2 = 400 - 16x^2$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{400-16x^2}}{5}$$

a) Para a rotação em x, usamos integração com $x \in [-5, 5]$.

Para achar o raio de revolução, basta calcular a distância da curva ao eixo de revolução $\vec{O}x$:

$$r = y = \pm\frac{\sqrt{400 - 16x^2}}{5}.$$

Exemplo

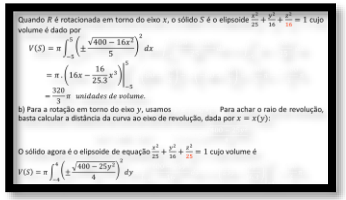
Quando R é rotacionada em torno do eixo x, o sólido S é o elipsoide $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{16}=1$ cujo volume é dado por

$$V(S)=\pi\int_{-5}^{5}\left(\pm\frac{\sqrt{400-16x^2}}{5}\right)^2 dx=\pi\int_{-5}^{5}\frac{400-16x^2}{25}dx=\pi\int_{-5}^{5}16-\frac{16x^2}{25}\,dx$$

$$=\pi.\left(16x-\frac{16}{25.3}x^3\right)\Bigg|_{-5}^{5}=\pi\left(80-\frac{80}{3}\right)-\pi\left(-80+\frac{80}{3}\right)=\frac{160}{3}\pi-\frac{-160}{3}\pi$$

$$=\frac{320}{3}\pi\quad unidades\ de\ volume.$$

b) Para a rotação em torno do eixo y, usamos $y\in[-4,4]$. Para achar o raio de revolução, basta calcular a distância da curva ao eixo de revolução, dada por $x=x(y)$:



$$16x^2+25y^2=400$$
$$16x^2=400-25y^2$$

$$r=x=\pm\frac{\sqrt{400-25y^2}}{4}.$$

Mudando o eixo de rotação, o sólido também muda e, portanto, o volume é diferente!

O sólido agora é o elipsoide de equação $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=1$ cujo volume é

$$V(S)=\pi\int_{-4}^{4}\left(\pm\frac{\sqrt{400-25y^2}}{4}\right)^2 dy=\pi\int_{-4}^{4}\frac{400-25y^2}{16}dy=\pi.\left(25y-\frac{25y^3}{16.3}\right)\Bigg|_{-4}^{4}=\frac{400}{3}\pi.$$

Exemplo

Exemplo 2) Calcule o volume do sólido obtido quando a menor região delimitada pelas curvas

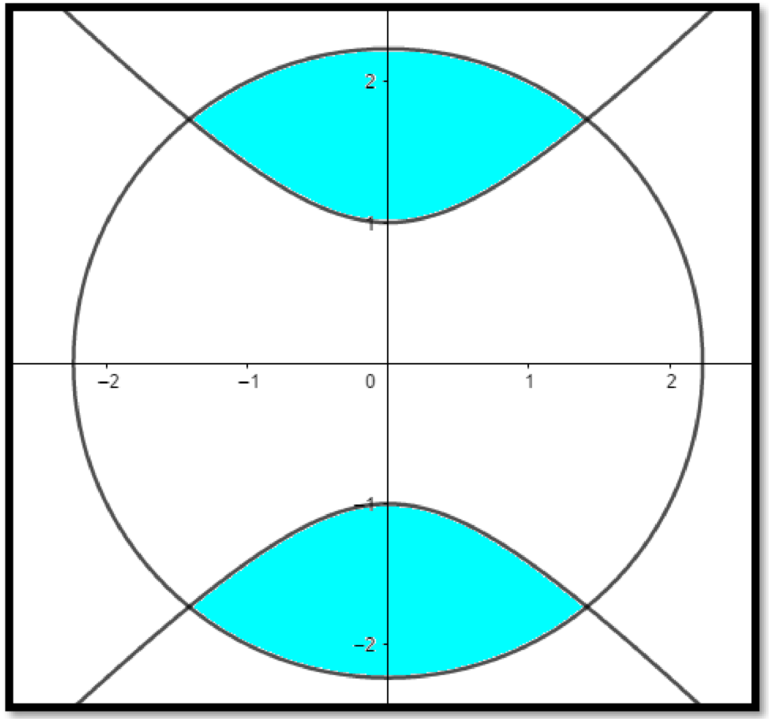
$$-x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad x^2 + y^2 = 5$$

é rotacionada em torno: a) do eixo $\vec{O}x$. b) do eixo $\vec{O}y$.

Solução: A interseção entre as curvas é:

$$\begin{cases} -x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Longrightarrow \quad 2y^2 = 6 \quad \Longrightarrow \quad y^2 = 3 \quad \Longrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = \pm\sqrt{3} \end{cases}.$$

Geometricamente, temos a região:



a) Para a rotação em x, usamos $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Veja que a região está "distante" do eixo de rotação.

Por isso, nesse caso, usamos uma diferença de volumes:

$$V(S) = V_{ext} - V_{int}$$

onde o volume externo é definido pela circunferência e o volume interno é definido pela hipérbole.

Isolando y na equação da circunferência:

$$x^2 + y^2 = 5 \qquad \Rightarrow \qquad y^2 = 5 - x^2 \qquad \Rightarrow \qquad y = \pm\sqrt{5 - x^2}.$$

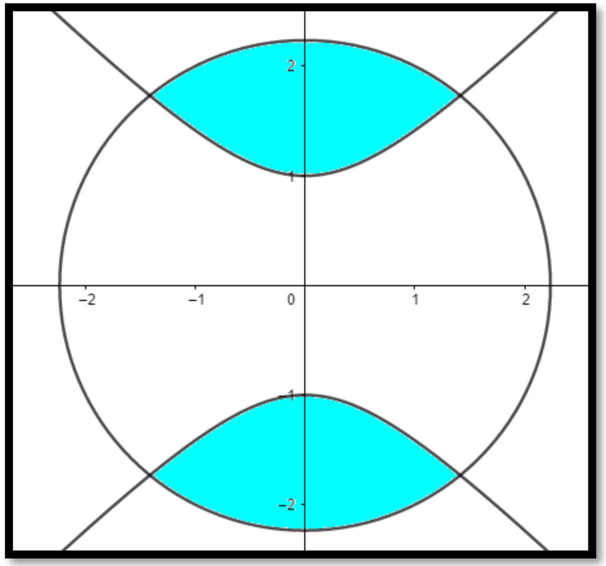
Fazendo o mesmo na equação da hipérbole:

$$-x^2 + y^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y^2 = 1 + x^2 \qquad \Rightarrow \qquad y = \pm\sqrt{1 + x^2}.$$

Denotaremos $\boxed{r_{ext} = y = \pm\sqrt{5 - x^2}}$ $\boxed{r_{int} = y = \pm\sqrt{1 + x^2}}$

Portanto, obtemos

$$V(S) = \pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(\pm\sqrt{5 - x^2})^2 dx - \pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(\pm\sqrt{1 + x^2})^2 dx$$



$$= \pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(5 - x^2) - (1 + x^2)\, dx$$

$$= \pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}4 - 2x^2\, dx$$

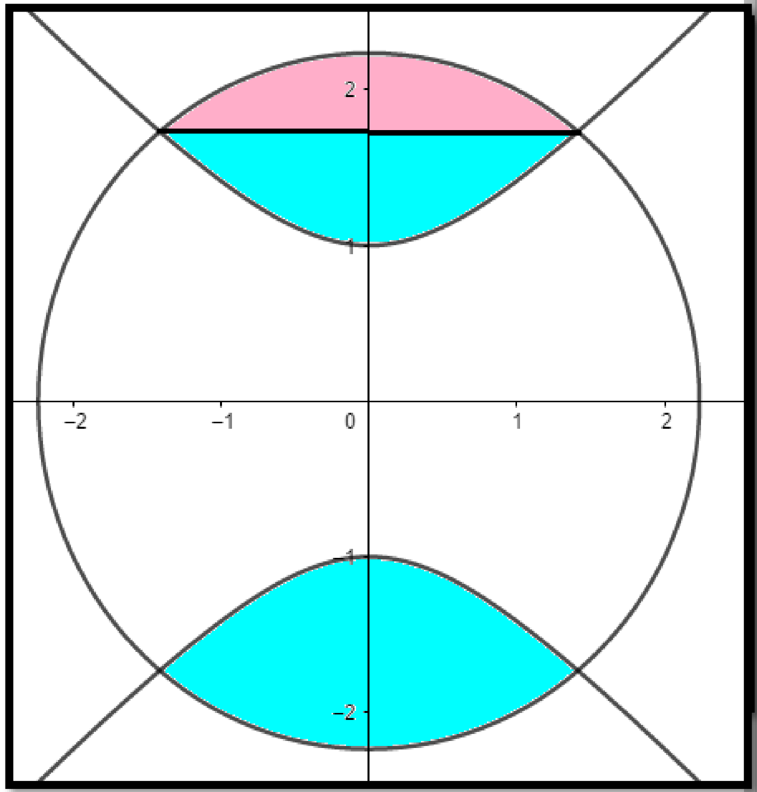
$$= \pi\left(4x - \frac{2}{3}x^3\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\right) = \pi\left(4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right) - \pi\left(-4\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi.$$

b) Quando rotacionamos em torno do eixo y, devemos usar simetria em duas vezes ,para considerar as partes “separadas” do sólido.

Como a região é adjacente ao eixo de rotação, não é necessário efetuar uma diferença de volumes.

Veja que ocorre uma troca no raio externo em $y = \sqrt{3}$.

Por isso, devemos usar uma soma de integrais:



Parte 1:

$$y \in [1, \sqrt{3}]$$

$$r_{ext} = x = \pm\sqrt{y^2 - 1}$$

Parte 2:

$$y \in [\sqrt{3}, \sqrt{5}]$$

$$r_{ext} = x = \pm\sqrt{5 - y^2}$$

Assim, por simetria, o volume do sólido obtido é

$$V(S) = 2\pi \int_1^{\sqrt{3}} \left(\pm\sqrt{y^2 - 1}\right)^2 dy + 2\pi \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} \left(\pm\sqrt{5 - y^2}\right)^2 dy$$

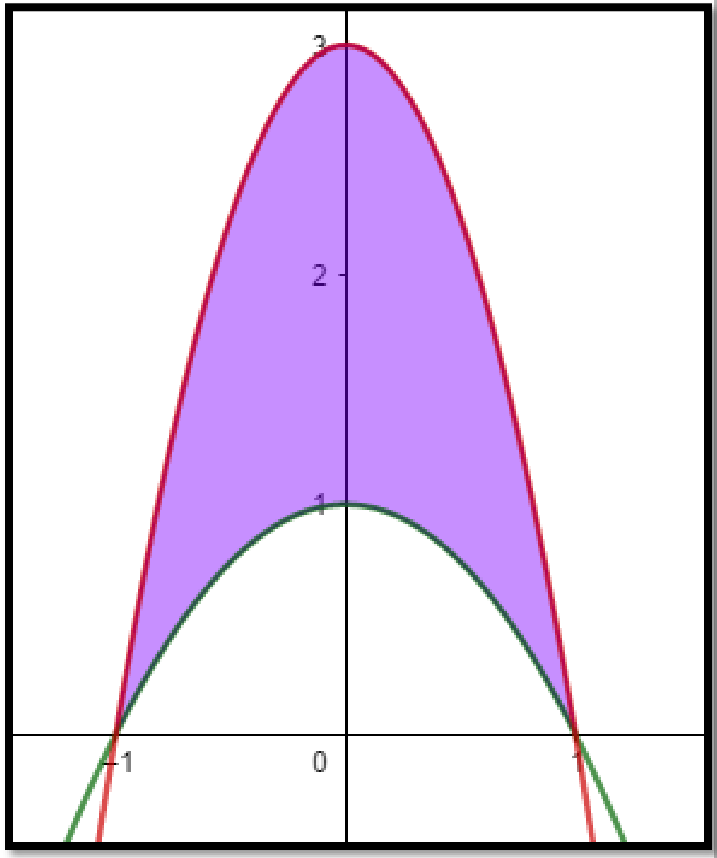
$$= 2\pi \int_1^{\sqrt{3}} (y^2 - 1) dy + 2\pi \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5}} (5 - y^2) dy.$$

Exercício: resolver as integrais!

Exemplo

Exemplo 3) Calcule o volume do sólido obtido quando a região delimitada pelas curvas $y = 3 - 3x^2$ e $y = 1 - x^2$ é revolucionada em torno:

a) do eixo $\vec{O}x$. b) do eixo $\vec{O}y$.



Solução: A interseção é dada por:

$$3 - 3x^2 = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1 \text{ e } y = 0.$$

Geometricamente:

a) Ao rotacionar em torno do eixo x, temos que

$$x \in [-1,1].$$

Os raios são dados por $\boxed{r_{ext} = 3 - 3x^2}$ $\boxed{r_{int} = 1 - x^2.}$

Logo, o volume do sólido obtido com a revolução em torno de x é

$$V(S) = \pi \int_{-1}^{1} (3 - 3x^2)^2 - (1 - x^2)^2 \; dx.$$

Exercício: resolver as integrais!

b) Ao rotacionar em y, observe que parte da região está distante do eixo de rotação e parte da região é adjacente ao eixo de rotação.

Por isso, precisar usar uma soma de duas integrais.

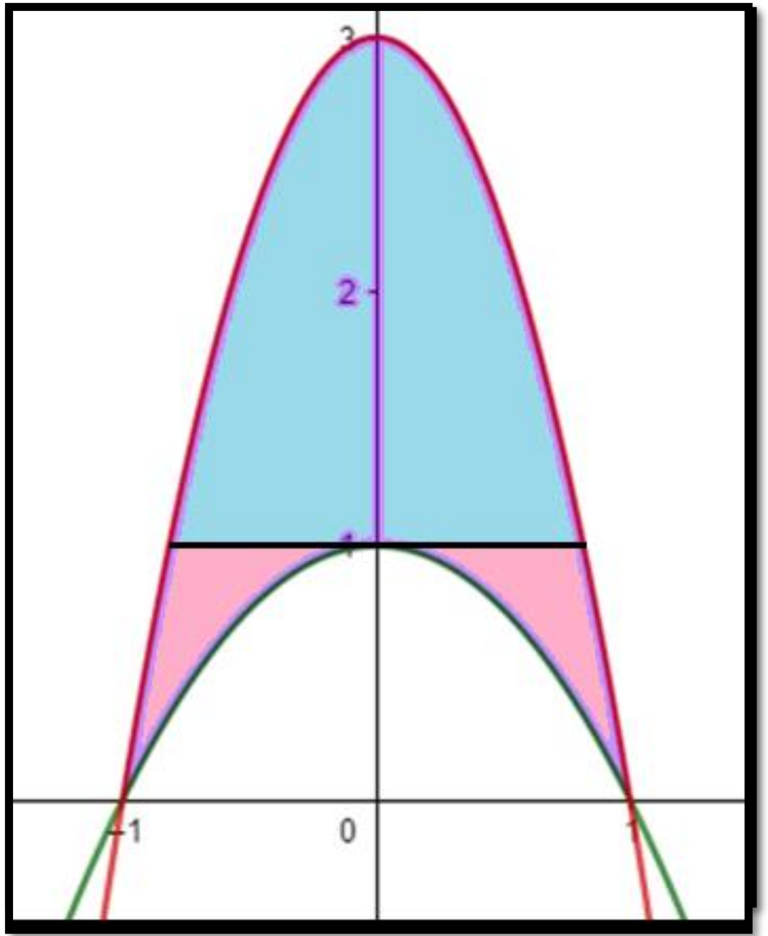
Além disso, invertendo as funções:

$$y = 3 - 3x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{3-y}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{3-y}{3}}$$

$$y = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 - y \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{1-y}$$

Para $y \in [0,1]$: $r_{ext} = x = \pm\sqrt{\dfrac{3-y}{3}}$ $\quad r_{int} = x = \pm\sqrt{1-y}$

Para $y \in [1,3]$: $r_{ext} = x = \pm\sqrt{\dfrac{3-y}{3}}$ $\quad r_{int} = x = 0$



Portanto, o volume de revolução em y é dado por

$$V(S) = \pi\int_0^1 \frac{3-y}{3} - (1-y)\,dy + \pi\int_1^3 \frac{3-y}{3}\,dy.$$

Exercício: resolver as integrais!

OBS: Existem outras formas de resolver o item b. Por exemplo, calculando o volume definido por toda a parábola externa (usando $y \in [0,3]$) e descontando o volume definido pela parábola interna (considerando $y \in [0,1]$). Nesse caso, é usada uma diferença de volumes.

Exemplo:

Exemplo 4) Considere a região R delimitada simultaneamente pelas curvas $y = \sqrt{3-x}$, $x + y = -3$ e $y - x = -1$. Escreva as integrais que permitem calcular o volume do sólido de revolução obtido quando R é rotacionada em torno:

a) da reta $y = 3$.

b) da reta $x = -7$.

Solução: A região R é a mesma de um Exemplo da aula de Área em Cartesianas.

Nessa aula, foram calculadas as interseções:

$$I \cap II: \begin{cases} y = \sqrt{3-x} \\ x + y = -3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A(-6, 3)$$

$$II \cap III: \begin{cases} x + y = -3 \\ y - x = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B(-1, -2)$$

$$I \cap III: \begin{cases} y = \sqrt{3-x} \\ y - x = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C(2, 1).$$

Exemplo

Portanto, obtemos:

$$y = \sqrt{3 - x} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 3 - x$$

$$\Rightarrow \quad x = 3 -$$

semiparábola

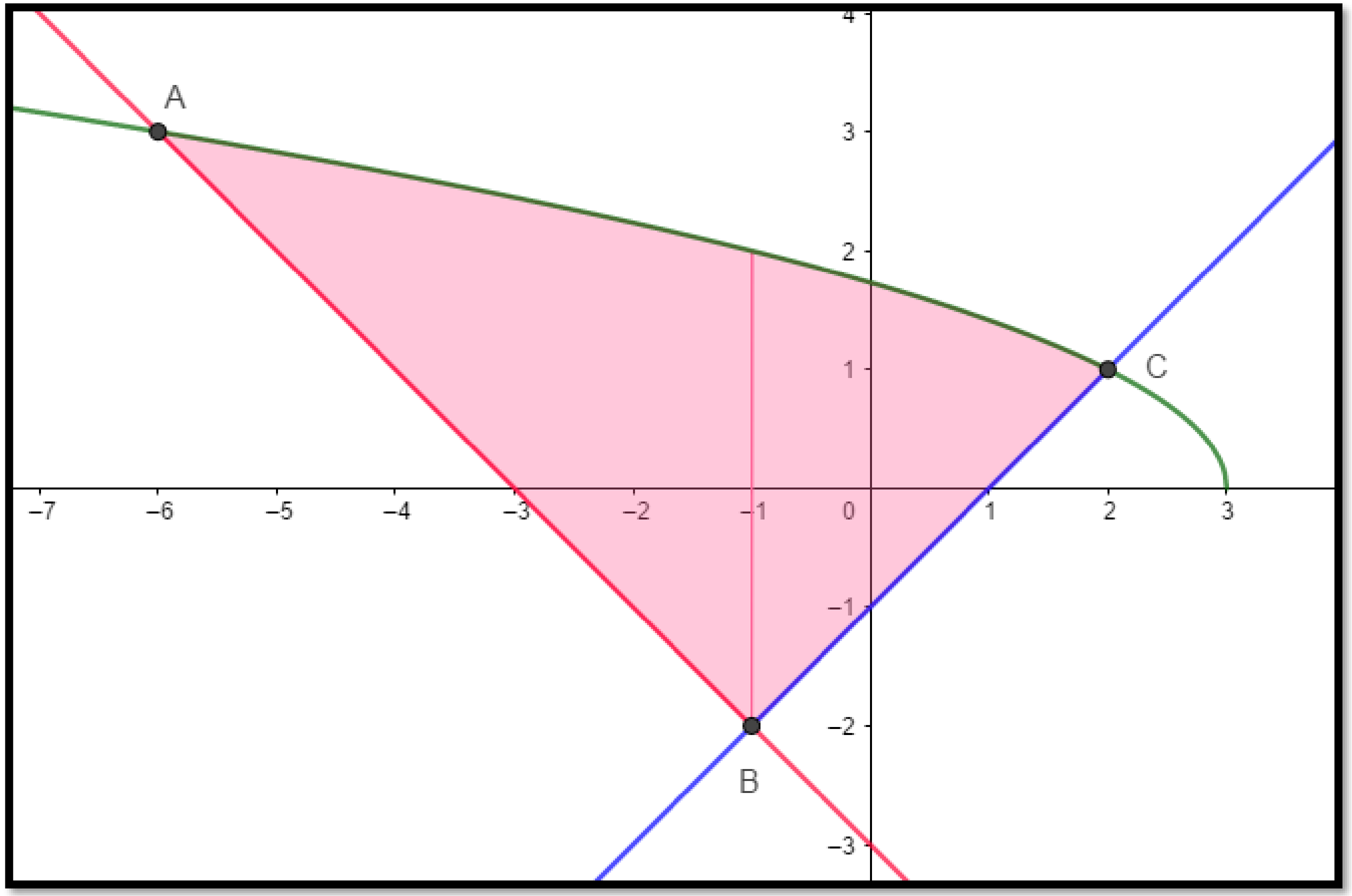
$$x + y = -3 \quad \Rightarrow \quad y = -3 - x$$

reta decrescente

e

$$y - x = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -1 + x$$

reta crescente.



Exemplo

a) Para a revolução em torno de $y = 3$, note que há uma "troca" para o raio externo quando $x = -1$. Por isso, precisamos usar duas integrais.

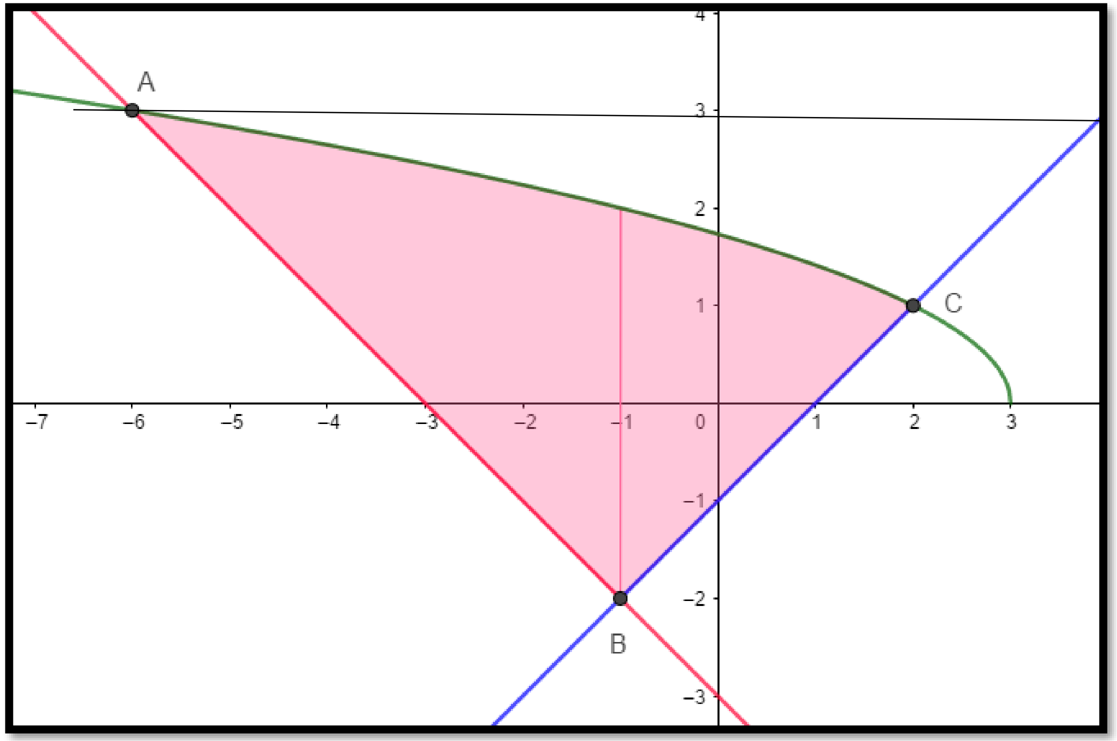
Os raios externos e internos precisam ser analisados a partir do eixo de rotação (dado pela reta $y = 3$).

Parte 1:

$$x \in [-6, -1]$$

$$r_{ext} = 3 - (-3 - x) = 6 + x$$

$$r_{int} = 3 - \sqrt{3 - x}.$$



Parte 2:

$$x \in [-1, 2]$$

$$r_{ext} = 3 - (-1 + x) = 4 - x$$

$$r_{int} = 3 - \sqrt{3 - x}.$$

Assim, temos que o volume do sólido obtido é dado por:

$$V(S) = \pi \int_{-6}^{-1} (6 + x)^2 - (3 - \sqrt{3 - x})^2 dx + \pi \int_{-1}^{2} (4 - x)^2 - (3 - \sqrt{3 - x})^2 dx$$

A resolução das integrais fica como exercício!

Exemplo

b) Para a rotação em $x = -7$ (reta paralela ao eixo y, portanto a integração é em y), note que há "troca" para o raio exterior quando $y = 1$.

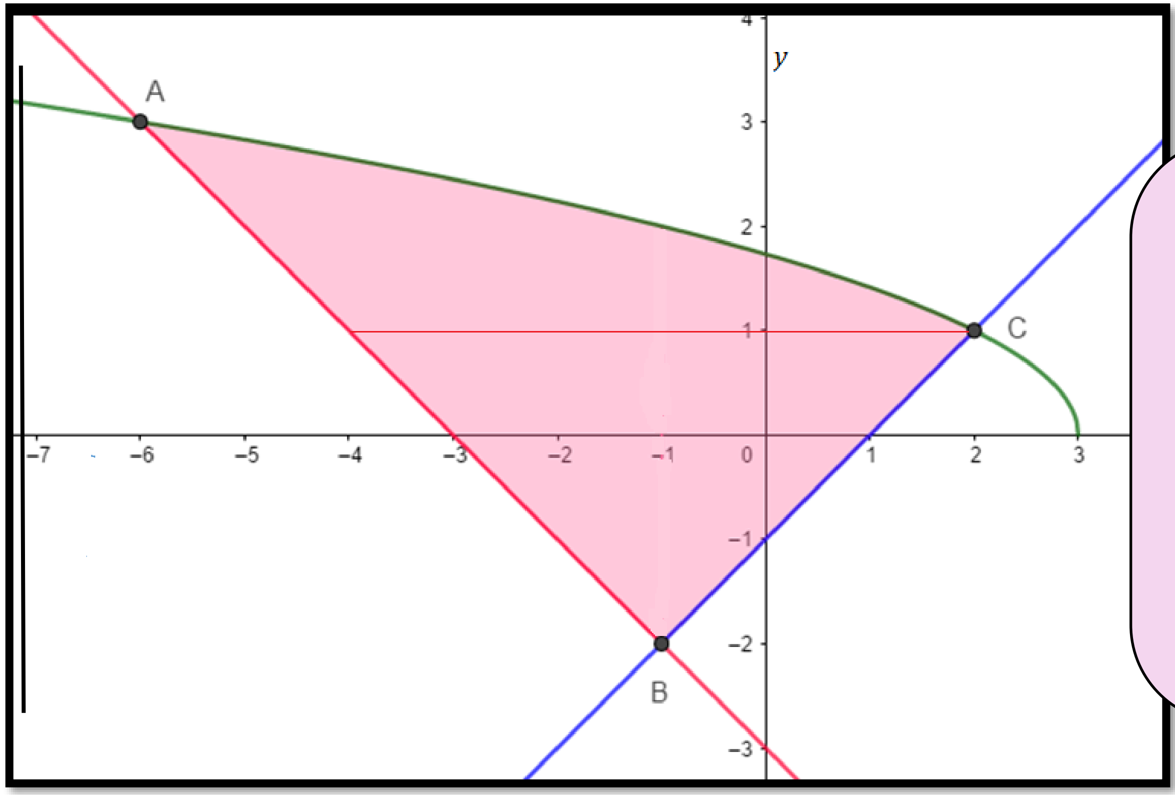
Os raios externos e internos devem ser analisados a partir do eixo de revolução (que agora é a reta $x = -7$).

Parte 1:

$$y \in [-2,1]$$

$$r_{ext} = (y+1) - (-7) = y + 8$$

$$r_{int} = (-3-y) - (-7) = 4 - y$$



Parte 2:

$$y \in [1,3]$$

$$r_{ext} = (3-y^2) - (-7) = 10 - y^2$$

$$r_{int} = (-3-y) - (-7) = 4 - y$$

Além disso, precisamos inverter as funções:

$$y = \sqrt{3-x} \quad \Rightarrow \quad x = 3 - y^2$$

$$x + y = -3 \quad \Rightarrow \quad x = -3 - y$$

$$y - x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = y + 1$$

Exemplo

Portanto, também precisamos usar duas integrais:

$$V(S) = \pi \int_{-2}^{1} (y+8)^2 - (4-y\ )^2 dy + \pi \int_{1}^{3} (10-y^2)^2 - (4-y\ )^2 dy\,.$$

A resolução dessas integrais fica como exercício!