# Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

## Derivadas Parciais

**Professor:** Marnei Luis Mandler

Aula do dia 04 de novembro de 2024.

UDESC

# Definição

- Em CDI-1, a derivada de uma função de uma variável $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida como

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

desde que o limite exista.

A definição indica que a derivada fornece uma taxa de variação instantânea da função $f$.

- De forma bastante análoga, vamos definir a(s) derivada(s) de uma função de duas (ou mais) variáveis. Somente precisaremos adaptar a notação para a derivada parcial, para indicar a variável em relação à qual a derivada ocorre:

**Definição:** Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais. Definimos a **derivada parcial de $f$ em relação a $x$** por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

E a **derivada parcial de $f$ em relação a $y$** por

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

O símbolo $\partial f$ (lido como "del $f$") representa a derivada parcial da função $f$, em relação à variável de derivação: $\partial x$ ou $\partial y$. Veja que a derivada parcial em $x$ é obtida por meio de um incremento infinitesimal $\Delta x$ nessa variável.

# Exercícios

Exercício 1) Calcule as derivadas parciais de $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = 3x^2y^5 - 4xy.$$

# Regra de Derivação Parcial

- Note que a definição de derivadas parciais envolve o limite de uma única variável!
- Quando calculamos $\frac{\partial f}{\partial x}$, efetuamos um incremento infinitesimal $\Delta x$ somente na primeira variável. Assim, a segunda variável não recebeu nenhuma variação, ou seja, $y$ permaneceu constante!
- Portanto, para calcular a derivada parcial em relação a $x$, basta considerar $y$ como uma constante e derivar usualmente (usando as regras de $\mathrm{CDI} - 1$) na variável $x$!
- Da mesma forma, ao obter a derivada parcial em relação a $y$, efetuamos um incremento infinitesimal $\Delta y$ somente na segunda variável. Assim, a primeira variável não recebeu nenhuma variação, ou seja, $x$ permaneceu constante!
- Portanto, para calcular a derivada parcial em relação a $y$, basta considerar $x$ como uma constante e derivar usualmente (usando as regras de $\mathrm{CDI} - 1$) na variável $y$!

# Regra de Derivação Parcial

Portanto, derivar parcialmente uma função de duas variáveis é muito simples.

Para derivar parcialmente em relação a uma variável, basta considerar a outra variável como uma constante e derivar normalmente, seguindo as regras de derivação de função de uma única variável.

Exercício 2) Suponha que a distribuição de temperatura em pontos do plano seja dada por

$$f(x,y) = 3x^2y^5 - 4xy.$$

Calcule as derivadas parciais de $f$ no ponto $P(-1,1)$ e interprete fisicamente os valores obtidos.

Exercício 3) Calcule as derivadas parciais de

a) $f(x,y) = e^{-5x^3y^4} + \cos(x^3 - 8y^7) + 7x - 5y + 1.$

b) $f(x,y,z) = x^9y^7z^5 + \ln(1 + x^6y^8z^6).$

# Derivadas de Ordem Superior

- Dada $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ , note que $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ também são funções de duas variáveis reais e, portanto, podem novamente ser derivadas, tanto em relação a $x$ quanto em relação a $y$.

- Tais derivadas são definidas por

Para obter cada derivada sucessiva em relação a $x$, aplicamos o operador $\frac{\partial}{\partial x}$.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ é a derivada parcial segunda de $f$, em relação à $x$;

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ é a derivada parcial segunda de $f$, primeiro em relação à $x$ e depois em relação à $y$.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é a derivada parcial segunda de $f$, primeiro em relação à $y$ e depois em relação à $x$.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ é a derivada parcial terceira de $f$, em relação à $x$;

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ é a derivada parcial terceira de $f$, em relação à $y$;

# Exercício

Exercício 4) Calcule todas as derivadas de segunda ordem de

$$f(x,y) = e^{-5x^3y^4} + \cos(x^3 - 8y^7) + 7x - 5y + 1.$$

# Teorema de Schwartz

- A igualdade entre as derivadas parciais "cruzadas" do exemplo anterior não é um acaso. Ela decorre do seguinte Teorema:

**Teorema de Schwartz:** Se $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, com todas derivadas parciais até segunda ordem também contínuas, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

**Observações:**

- O Teorema de Schwartz indica que, sob a hipótese de continuidade, a ordem de derivação parcial (de segunda ordem) em relação a variáveis distintas não interfere no resultado da derivada.
- O resultado do Teorema de Schwartz pode ser ampliado para funções de três ou mais variáveis, acrescentando as seguintes igualdades:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}.$$

- O Teorema de Schwartz pode ser generalizado para derivadas de terceira ordem, fornecendo igualdades do tipo $\dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial y}.$

# Notação Alternativa

- Outra notação usual para derivadas parciais de primeira ordem é:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad f_z = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

- Nessa notação, as derivadas de ordem superior são escritas como:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

- Veja que usando a notação de índice, a ordem de derivação segue a ordem com a qual são escritas as variáveis, da esquerda para a direita.
- Nessa notação, o Teorema de Schwartz é escrito como $f_{xy} = f_{yx}$.
- A mesma ideia pode ser aplicada para derivadas de ordem superior de funções de mais variáveis. Por exemplo:

$$f_{zxxy} = \frac{\partial^4 f}{\partial y \partial^2 x \partial z} = f_{xzxy} = f_{xxzy} = f_{xxyz}.$$

- Note que $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admite $n^2$ derivadas parciais de segunda ordem, $n^3$ derivadas parciais de terceira ordem e assim sucessivamente. Nem todas elas são distintas.

# Exemplo

Exemplo 1) Calcule as derivadas parciais de $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = 4x^2y^3 - 7xy$.

Solução: Aplicando a definição para a derivada parcial em relação a $x$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(x+\Delta x)^2y^3 - 7(x+\Delta x)y - (4x^2y^3 - 7xy)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(x^2+2x\Delta x + (\Delta x)^2)y^3 - 7xy - 7y\Delta x - 4x^2y^3 + 7xy}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x^2y^3 + 8xy^3\Delta x + 4(\Delta x)^2y^3 - 7y\Delta x - 4x^2y^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8xy^3\Delta x + 4(\Delta x)^2y^3 - 7y\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x.(8xy^3 + 4\Delta x.y^3 - 7y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 8xy^3 + 4\Delta x.y^3 - 7y = 8xy^3 + 4.0.y^3 - 7y = 8xy^3 - 7y.$$

Portanto

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8xy^3 - 7y.$$

Veja que o limite calculado refere-se a um limite de uma única variável ($\Delta x$), devido ao incremento dado somente na variável $x$.

# Exemplo

De forma análoga, aplicando a definição para a derivada parcial em relação a $y$ , temos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{4x^2(y+\Delta y)^3 - 7x(y+\Delta y) - (4x^2y^3 - 7xy)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{4x^2(y^3 + 3y^2\Delta y + 3y(\Delta y)^2 + (\Delta y)^3) - 7xy - 7x\Delta y - 4x^2y^3 + 7xy}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{4x^2y^3 + 12x^2y^2\Delta y + 12x^2y(\Delta y)^2 + 4x^2(\Delta y)^3 - 7x\Delta y - 4x^2y^3}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{12x^2y^2\Delta y + 12x^2y(\Delta y)^2 + 4x^2(\Delta y)^3 - 7x\Delta y}{\Delta y}$$

Novamente, o limite refere-se a uma única variável ($\Delta y$), devido ao incremento dado agora somente na variável $y$.

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y(12x^2y^2 + 12x^2y\Delta y + 4x^2(\Delta y)^2 - 7x)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} 12x^2y^2 + 12x^2y\Delta y + 4x^2(\Delta y)^2 - 7x \;= 12x^2y^2 + 12x^2y.0 + 4x^2.0 - 7x$$

$$= 12x^2y^2 - 7x$$

Portanto $\frac{\partial f}{\partial y} = 12x^2y^2 - 7x.$

# Interpretação Física Geral

- As derivadas parciais fornecem a taxa de variação instantânea da função $f$ mediante incrementos horizontais $\left(\text{no caso de } \frac{\partial f}{\partial x}\right)$ ou incrementos verticais $\left(\text{no caso de } \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ a partir de um ponto $P(x_0, y_0)$.
- Por exemplo, se $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ representar a distribuição de temperatura numa região $D$ do plano $xy$ e $P(x_0, y_0) \in D$, então $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$ mede a taxa de variação instantânea da temperatura $f$ enfrentada por uma partícula que se desloca horizontalmente, a partir do ponto $P(x_0, y_0)$, por meio de incrementos infinitesimais $\Delta x$.
- De forma análoga, $\frac{\partial f}{\partial y}(P)$ mede a taxa de variação instantânea da temperatura $f$ enfrentada por uma partícula que se desloca verticalmente, a partir do ponto $P(x_0, y_0)$, por meio de incrementos infinitesimais $\Delta y$.
- Por enquanto, não é possível medir a variação instantânea por meio de deslocamentos quaisquer (não horizontais nem verticais).
- Isso é feito somente em CVE/MAP, com a definição das "derivadas direcionais", conceito que irá generalizar as derivadas parciais. Para isso, a direção de derivação precisará ser escrita como uma combinação linear da base canônica do espaço considerado.

# Exemplo

Exemplo 2) Aplique as derivadas parciais de $f(x,y) = 4x^2y^3 - 7xy$ no ponto $P(1,-2)$.

Solução: No exemplo anterior, obtivemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8xy^3 - 7y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 12x^2y^2 - 7x.$$

Portanto, aplicando as derivadas em $x = 1, y = -2$ obtemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,-2) = 8.1.(-2)^3 - 7.(-2) = -50.$$

O resultado negativo indica que, por meio de deslocamentos horizontais, a função $f$ é decrescente (numa taxa de 50 unidades por unidade de deslocamento). De forma análoga,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,-2) = 12.1^2.(-2)^2 - 7.(1) = 41$$

O resultado positivo indica que, por meio de deslocamentos verticais, a função $f$ é crescente (numa taxa de 41 unidades por unidade de deslocamento).

Assim, se $f$ representar a distribuição de temperatura, uma partícula que parte do ponto $P(1,-2)$ se resfriará 50 unidades de temperatura ao se deslocar horizontalmente e se aquecerá 41 unidades de temperatura ao se deslocar verticalmente.

# Regra de Derivação Parcial

Exemplo 3) Calcule as derivadas parciais de $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = 6x^5y^4 + e^{7xy} + \cos(x^2 + 3y).$$

Solução: Tomando $y$ como constante, obtemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 5.6x^4y^4 + 7ye^{7xy} + (2x)(-\sin(x^2 + 3y))$$

$$= 30x^4y^4 + 7ye^{7xy} - 2x\sin(x^2 + 3y)$$

Tomando $x$ como constante, obtemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4.6x^5y^3 + 7xe^{7xy} + (3)(-\sin(x^2 + 3y))$$

$$= 24x^5y^3 + 7xe^{7xy} - 3\sin(x^2 + 3y)$$

Veja como foi mais prático obter as derivadas parciais usando a regra de derivação parcial em vez da definição.

# E para funções de 3 variáveis?

Se $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função real de três variáveis reais, procedemos de forma análoga:

- Para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ tomamos $y$ e $z$ como constantes.
- Para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ tomamos $x$ e $z$ como constantes.
- Para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ tomamos $x$ e $y$ como constantes.

Exemplo 4) Calcule as derivadas parciais de $f(x,y,z) = \sin(x^7y^8z^9) + \sqrt{3x+5y-7z}$

Solução: Considerando $y$ e $z$ como constantes, obtemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 7x^6y^8z^9\cos(x^7y^8z^9) + \frac{3}{2\sqrt{3x+5y-7z}}$$

Considerando $x$ e $z$ como constantes, obtemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 8x^7y^7z^9\cos(x^7y^8z^9) + \frac{5}{2\sqrt{3x+5y-7z}}$$

Considerando $x$ e $y$ como constantes, obtemos que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 9x^7y^8z^8\cos(x^7y^8z^9) + \frac{-7}{2\sqrt{3x+5y-7z}}$$

# Exemplo

Exemplo 5) Calcule todas as derivadas de segunda ordem de $f(x,y) = 4x^2y^3 - 7xy$.

Solução: No exemplo 1, obtivemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8xy^3 - 7y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 12x^2y^2 - 7x$$

Derivando novamente em relação a $x$ (tomando $y$ como constante), obtemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(8xy^3 - 7y) = 8y^3.$$

Derivando novamente em relação a $y$ (tomando $x$ como constante), obtemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(8xy^3 - 7y) = 24xy^2 - 7.$$

Da mesma forma, obtemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(12x^2y^2 - 7x) = 24x^2y$$

E

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(12x^2y^2 - 7x) = 24xy^2 - 7$$

Compare os resultados das derivadas “cruzadas” $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

# Exemplo

- Como o processo de derivação parcial consiste em assumir as demais variáveis como constantes, permanecem válidos todos os resultados de CDI-1 em relação à derivada de uma soma, de um produto e de um quociente.

Exemplo 6) Seja $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^k$. Determine para quais valores de $k$ a equação diferencial homogênea $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ é satisfeita para todo $(x, y, z)$.

Solução: Derivando $f$ em relação a $x$, usando a regra da cadeia, obtemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = k(x^2 + y^2 + z^2)^{k-1}.2x$$

Derivando novamente em relação a $x$, pela regra do produto, temos que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = k.(k-1).(x^2 + y^2 + z^2)^{k-2}.2x.2x + k(x^2 + y^2 + z^2)^{k-1}.2.$$

$$= 4x^2k.(k-1).(x^2 + y^2 + z^2)^{k-2} + 2k(x^2 + y^2 + z^2)^{k-1}.$$

De forma análoga, derivando duas vezes em relação a $y$, obtemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y^2k.(k-1).(x^2 + y^2 + z^2)^{k-2} + 2k(x^2 + y^2 + z^2)^{k-1}.$$

# Exemplo

E derivando duas vezes em relação a $z$, obtemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 4z^2k.(k-1).(x^2+y^2+z^2)^{k-2} + 2k(x^2+y^2+z^2)^{k-1}.$$

Substituindo as derivadas parciais na equação $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$ obtemos que

$$\begin{aligned} &4x^2k.(k-1).(x^2+y^2+z^2)^{k-2} + 2k(x^2+y^2+z^2)^{k-1} \\ &+ 4y^2k.(k-1).(x^2+y^2+z^2)^{k-2} + 2k(x^2+y^2+z^2)^{k-1} \\ &+ 4z^2k.(k-1).(x^2+y^2+z^2)^{k-2} + 2k(x^2+y^2+z^2)^{k-1} = 0. \end{aligned}$$

Evidenciando os termos comuns, encontramos:

$$4k.(k-1).(x^2+y^2+z^2)^{k-2}(x^2+y^2+z^2) + 6k(x^2+y^2+z^2)^{k-1} = 0.$$

Utilizando propriedades de potências, obtemos

$$4k.(k-1).(x^2+y^2+z^2)^{k-1} + 6k(x^2+y^2+z^2)^{k-1} = 0.$$

Mais uma vez, podemos evidenciar o termo comum e obter

$$[4k(k-1) + 6k](x^2+y^2+z^2)^{k-1} = 0.$$

# Exemplo e Exercícios

Portanto, temos que

$$[4k.(k-1)+6k]=0 \quad \text{ou} \quad (x^2+y^2+z^2)^{k-1}=0.$$

A segunda igualdade é satisfeita apenas quando $x^2+y^2+z^2=0$, ou seja, quando $x=0$, $y=0$ e $z=0$. Como é desejado que a igualdade dada no enunciado seja válida para toda tripla $(x,y,z)$, devemos ter que

$$4k.(k-1)+6k=0.$$

Logo

$$4k^2-4k+6k=0 \quad \Rightarrow \quad 4k^2+2k=0 \quad \Rightarrow \quad 2k(2k+1)=0 \quad \Rightarrow \quad 2k=0 \;\; \text{ou} \;\; 2k+1.$$

Portanto

$$k=0 \quad \text{ou} \quad k=-\frac{1}{2}.$$

Exercícios:

1) Verifique o Teorema de Schwartz para as funções dos Exemplos 3 e 4.

2) Determine todas as derivadas parciais de primeira ordem da função

$$f(x,y)=\cos(xy)\cdot\ln(x^2+y^2).$$