Produto Vetorial

Dados $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, chama-se produto vetorial de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e se representa por $\vec{u} \times \vec{v}$, ao vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}.$$

que também pode ser expresso usando a notação

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}$$

ou

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

(Regra de Laplace)

OBS Leemos $\vec{u} \times \vec{v}$ como

$\vec{u}$ "vetorial" $\vec{v}$.

Exemplo 1: Calcule $\vec{u} \times \vec{v}$ para os seguintes vetores

(a) $\vec{u} = (5,4,3)$

$\vec{v} = \vec{i} + \vec{k} = (1,0,1)$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 5 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right.$$

$= 4\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k} - (4\vec{k} + 0\vec{i} + 5\vec{j})$

$= 4\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k} - 5\vec{j}$

$= 4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$

$= (4, -2, -4)$

(b) $\vec{u} = (1,0,1)$

$\vec{v} = (5,4,3)$

Propriedades

I) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ para qualquer vetor $\vec{u}$.

II) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

III) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

IV) $(m\vec{u}) \times \vec{v} = m(\vec{u} \times \vec{v})$ → dá pra ver na def

V) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, um dos vetores é nulo ou $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

VI) $\vec{u} \times \vec{v}$ é simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

De fato, observe que

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$$

$$= (x_1, y_1, z_1) \cdot \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= x_1(y_1 z_2 - z_1 y_2) - y_1(x_1 z_2 - z_1 x_2) + z_1(x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

$$= \cancel{x_1 y_1 z_2} - \cancel{x_1 y_2 z_1} - \cancel{x_1 y_1 z_2} + \cancel{x_2 y_1 z_1} + \cancel{x_1 y_2 z_1} - \cancel{x_2 y_1 z_1}$$

$$= 0$$

Analogamente, $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$.
Logo,

$$\vec{u} \perp (\vec{u} \times \vec{v}) \quad \text{e} \quad \vec{v} \perp (\vec{u} \times \vec{v})$$

$\boxed{\text{Exemplo}}$ Voltando ao exemplo 1(a), com

$$\vec{u} = (5,4,3) \quad \text{e} \quad \vec{v} = (1,0,1),$$

encontramos

$$\vec{u} \times \vec{v} = (4,-2,-4)$$

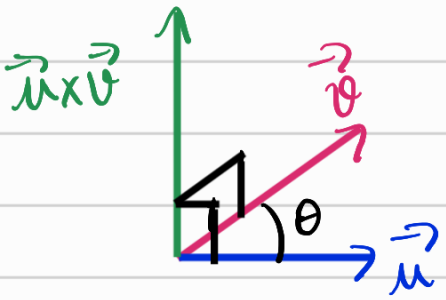
Observe que

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) &= 5 \cdot 4 + 4(-2) + 3(-4) \\ &= 20 - 8 - 12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) &= 1 \cdot 4 + 0(-2) + 1(-4) \\ &= 4 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

VII) (Regra da mão direita)

Dados $\vec{u}$ e $\vec{v}$, podemos determinar o sentido do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ apontando o dedo indicador na direção de $\vec{u}$ e o dedo médio na direção de $\vec{v}$. Dessa forma, a direção de $\vec{u} \times \vec{v}$ é a direção do polegar.



OBS

(a) $\vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}$

(b) $\vec{j} \times \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}$

(c) $\vec{i} \times \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{j}$

Então,

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$
$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$
$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

VIII) $|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

(identidade de Lagrange)

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2.$$

IX) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ e θ é o ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen}\theta$$

Do fato

$$\begin{aligned} |\vec{u} \times \vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \\ &= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \cos^2\theta \\ &= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen}\theta,$$

lembrando que $\operatorname{sen}\theta > 0 \quad \forall \; 0 < \theta < 180^\circ$.

X) O produto vetorial não é associativo.

De fato, $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ é ortogonal a $\vec{v} \times \vec{w}$, que por sua vez, é ortogonal a $\vec{v}$ e a $\vec{w}$.

Logo, $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ é coplanar com $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

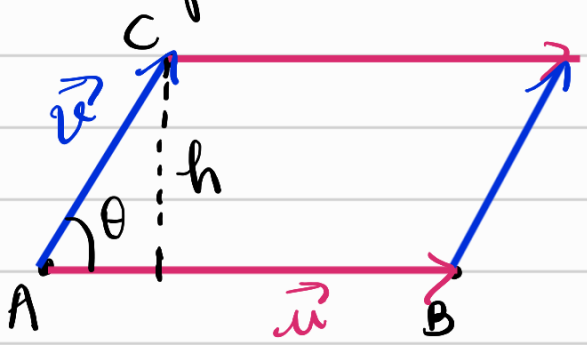
Já o vetor $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ é coplanar com $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Então, em geral:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$$

Interpretação geométrica

O módulo do produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mede a área do paralelogramo ABCD determinado pelos vetores $\vec{u} = \vec{AB}$ e $\vec{v} = \vec{AC}$:



De fato, $\text{área}_{ABCD} = |\vec{u}|\,h$.

Além disso, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{h}{|\vec{v}|} \Rightarrow h = |\vec{v}|\operatorname{sen}\theta$

$$\Rightarrow \text{área}_{ABCD} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\operatorname{sen}\theta = |\vec{u}\times\vec{v}|.$$

Exercício ① Sejam os vetores $\vec{u} = (3,1,-1)$ e $\vec{v} = (a,0,2)$.

Calcule o valor de a para que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja igual a $2\sqrt{6}$.

Resolução: A área do paralelogramo é dada por

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|,$$

com

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + (-a-6)\vec{j} - a\vec{k}.$$

Como queremos $A = 2\sqrt{6}$, temos

$$2\sqrt{6} = \sqrt{4 + (-a-6)^2 + a^2}$$
$$= \sqrt{4 + a^2 + 12a + 36 + a^2}$$
$$\Rightarrow (2\sqrt{6})^2 = (\sqrt{40 + 12a + 2a^2})^2$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 6 = 40 + 12a + 2a^2$$
$$\Rightarrow 12 = 20 + 6a + a^2$$
$$\Rightarrow a^2 + 6a + 8 = 0$$
$$\Rightarrow (a+2)(a+4) = 0$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{a = -2}} \text{ ou } \underline{\underline{a = -4}}.$$

<u>Ex 2</u>: Determine um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, -6, 3)$ e $\vec{v} = (4, 3, 1)$.

Resolução: Sabemos que o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

Temos

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -6 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & -6 \\ 4 & 3 \end{matrix}$$

$$= -6\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k} - (-24\vec{k} + 9\vec{i} + 2\vec{j})$$

$$= -15\vec{i} + 10\vec{j} + 30\vec{k}$$

$$= (-15, 10, 30)$$

Note que $(-15, 10, 30) = 5(-3, 2, 6)$.
Logo, o vetor

$$\vec{w} = (-3, 2, 6)$$

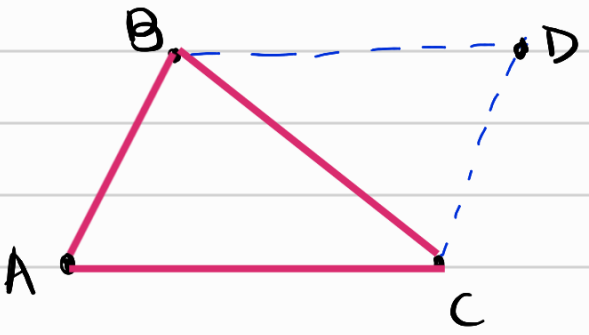
também é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.

Por fim, como queremos um vetor unitário, fazemos

$$\frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{9+4+36}}\vec{w} = \frac{1}{7}(-3, 2, 6)$$

$$\Rightarrow \left(-3/7, 2/7, 6/7\right)$$ é o vetor desejado.

Exercício 3: Calcule a área do triângulo de vértices $A(0,0,3)$, $B(5,1,2)$, $C(-2,-5,0)$.



Note que a área do triângulo ABC é metade da área do paralelogramo ABCD, ou seja

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right|,$$

onde $\vec{AB} = (5,1,-1)$ e $\vec{AC} = (-2,-5,-3)$

$$\Rightarrow \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -8\vec{i} + 17\vec{j} - 23\vec{k}$$

Logo,

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| (-8, 17, -23) \right|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{64 + 289 + 529} = \frac{1}{2}\sqrt{882}$$

$$\cong 14.85.$$

Exercício 4: Dados os vetores $\vec{u} = (1,2,-1)$ e $\vec{v} = (0,-1,3)$, calcule a área do paralelogramo determinado pelos vetores $3\vec{u}$ e $\vec{v} - \vec{u}$.

Temos

$$A = \left| 3\vec{u} \times (\vec{v} - \vec{u}) \right|$$

$$\vec{v}-\vec{u} = (0,-1,3)-(1,2,-1) = (-1,-3,4)$$

$$\Rightarrow \vec{u}\times(\vec{v}-\vec{u}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 8\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}+2\vec{k}-4\vec{j}-3\vec{i}$$
$$= 5\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$$

Então

$$A = |3\vec{u}\times(\vec{v}-\vec{u})| = 3|\vec{u}\times(\vec{v}-\vec{u})|$$

$$= 3\sqrt{25+9+1} = 3\sqrt{35}\ u.a.$$

Produto misto

Dados os vetores $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)$ e $\vec{w}=(x_3,y_3,z_3)$, chamamos de produto misto o número real

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Notação

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$$

Exemplo: Calcule $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ sendo

$\vec{u} = (2, 3, 5)$, $\vec{v} = (-1, 3, 3)$ e $\vec{w} = (4, -3, 2)$

Temos

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \\ 4 & -3 \end{matrix}$$

$$= 12 + 36 + 15 - (60 - 18 + 6)$$
$$= 48 + 15 - 48$$
$$= 15$$

Propriedades:

I) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ se um dos vetores é nulo, se dois deles são paralelos ou se os três vetores são coplanares.

De fato, $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ implica que $\vec{u}$ e $\vec{v} \times \vec{w}$ são ortogonais. Como o vetor $\vec{v} \times \vec{w}$ é simultâneamente ortogonal a $\vec{v}$ e a $\vec{w}$, devemos ter $\vec{u}$ no mesmo plano que $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Consequência: Para verificar que quatro pontos A, B, C e D estão no mesmo plano, basta mostrar que

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = 0.$$

Exercício: Verifique se os vetores $\vec{u} = (3,-1,4)$, $\vec{v} = (1,0,-1)$ e $\vec{w} = (2,-1,0)$ são coplanares.

Temos que

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{matrix}$$

$$= 0 + 2 - 4 - (0 + 3 + 0)$$

$$= -2 - 3$$

$$= -5 \neq 0$$

Logo, os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ não são coplanares.

Exercício: Os pontos $A(1,2,4)$, $B(-1,0,-2)$, $C(0,2,2)$ e $D(-2,1,-3)$ pertencem ao mesmo plano?

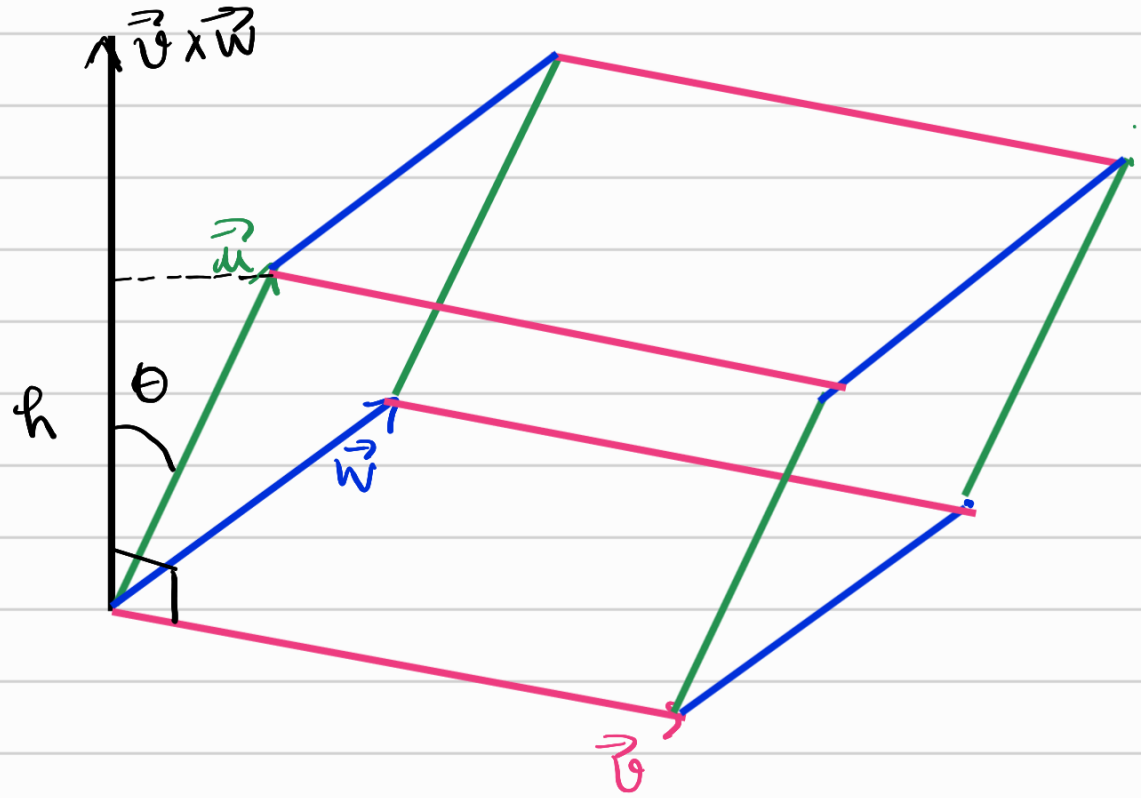
Temos
$$\vec{AB} = B - A = (-2,-2,-6)$$
$$\vec{AC} = C - A = (-1,0,-2)$$
$$\vec{AD} = D - A = (-3,-1,-7)$$

Basta fazer

$$(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -7 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & -2 \\ -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{matrix}$$

$$= 0 - 12 - 6 - (0 - 4 - 14)$$
$$= -18 - (-18)$$
$$= 0$$

Interpretação geométrica do produto misto.



Observe que o volume do paralelepípedo é dado pela área da base vezes a altura:

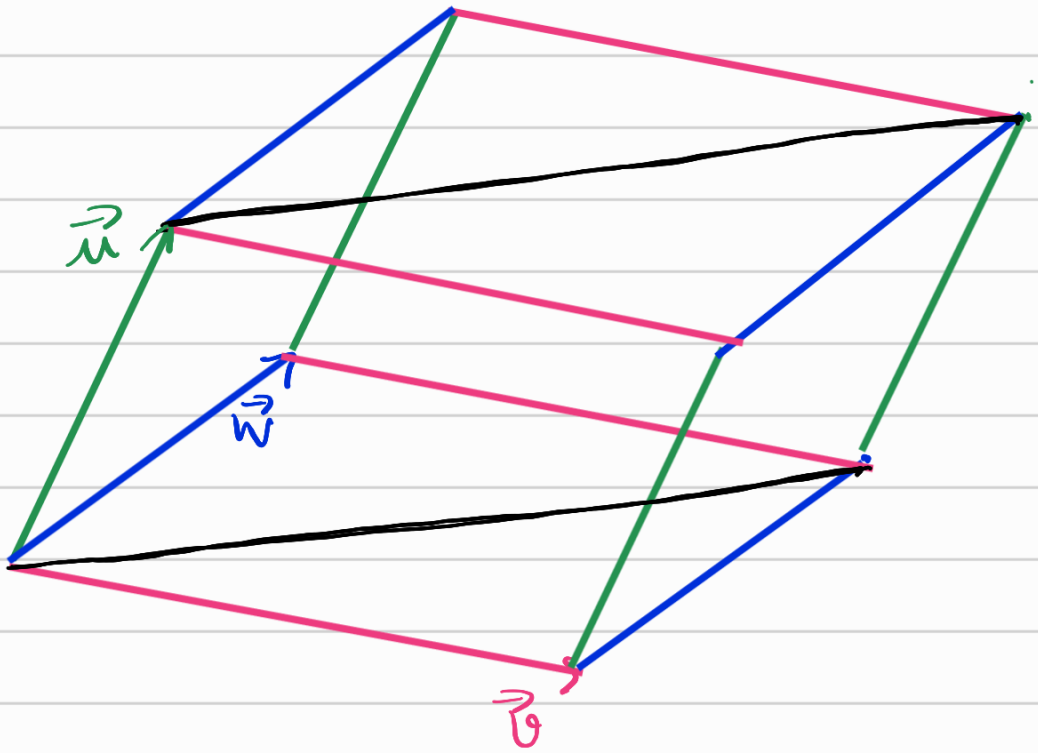
$$V = |\vec{v} \times \vec{w}|\, h$$

$$= |\vec{v} \times \vec{w}|\, |\vec{u}| \cos\theta$$

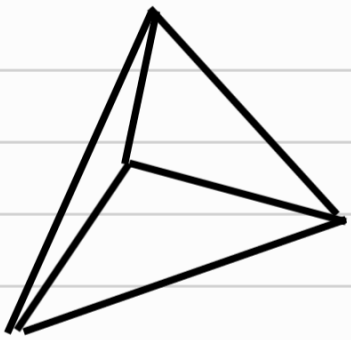
$$= \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

$$\boxed{V = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}$$

- Cada paralelepípedo pode ser dividido em dois prismas triangulares.



- Cada um dos prismas pode ser dividido em 3 tetraedros de mesmo volume.



Nesse caso, o volume do tetraedro determinado por três vetores é dado por

$$\boxed{V_T = \frac{1}{6}\left|(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\right|}$$

Exemplo: Dados os vetores $\vec{u} = (x, 5, 0)$, $\vec{v} = (3, -2, 1)$ e $\vec{w} = (1, 1, -1)$, calcule o valor de x, para que o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ seja 24 u.v. (unidades de volume).

Observe que temos dois casos:

1º caso: o volume é dado por

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 24$$

2º caso: o volume é dado por

$$(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = 24$$

$$\| $$

$$-(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Juntando os dois casos, temos

$$V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = 24.$$

Então,

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & 5 \\ 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= 2x + 5 + 0 - (0 + x - 15)$$

$$= x + 20$$

$$\Rightarrow \quad 24 = |x+20|$$

$$\Rightarrow \quad x+20 = 24 \quad \text{ou} \quad x+20 = -24$$

$$\boxed{x = 4} \qquad \boxed{x = -44}$$

Exemplo: Calcule o volume do tetraedro de vértices $A(1,2,1)$, $B(7,4,3)$, $C(4,6,2)$ e $D(3,3,3)$.

$$\vec{AB} = B - A = (6,2,2)$$
$$\vec{AC} = C - A = (3,4,1)$$
$$\vec{AD} = D - A = (2,1,2)$$

Temos que $V_T = \frac{1}{6}\left|(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})\right|$

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

$$= 48 + 4 + 6 - (16 + 6 + 12)$$
$$= 58 - 34 = 24$$

$$\Rightarrow \quad V_T = \frac{1}{6} \cdot 24 = \boxed{4 \text{ u.v.}}$$

1 5 19 21 23 26