UDESC
UNIVERSIDADE
DO ESTADO DE
SANTA CATARINA

Geometria Analítica

Prof.: Francielle Kuerten Boeing

Retas

Seja r uma reta com equações paramétricas

$$r: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \, , \\ z = z_1 + ct \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

passando por $A(x_1, y_1, z_1)$ e vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$.

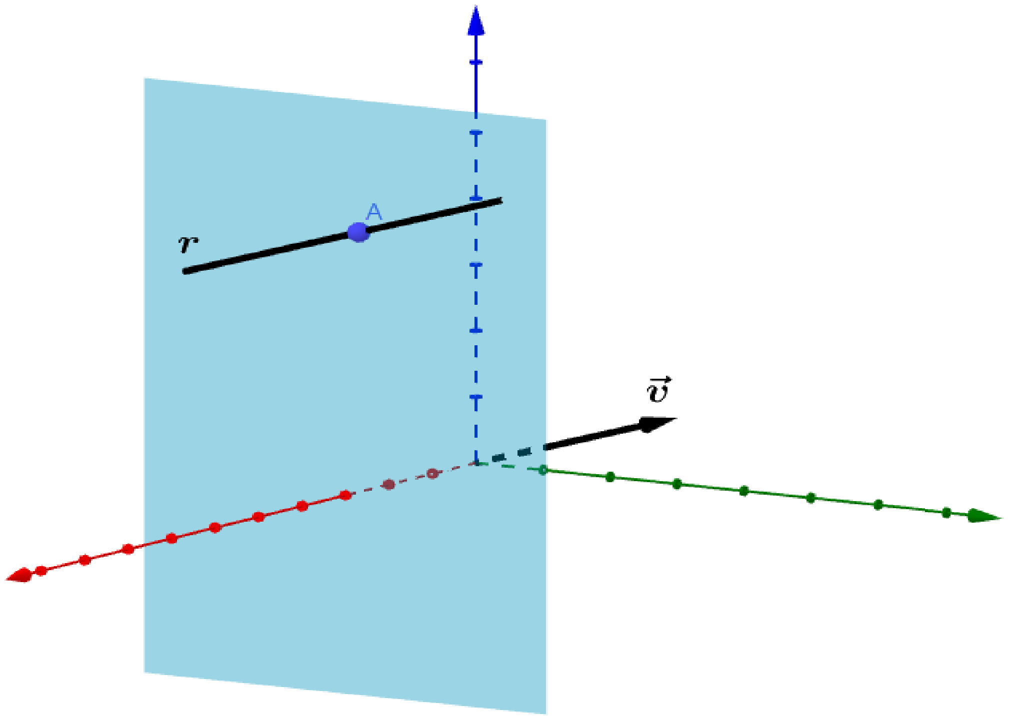
Casos especiais:

I) Uma das componentes de $\vec{v}$ é nula;
II) Duas das componentes de $\vec{v}$ são nulas.

Retas

I) Uma das componentes de $\vec{v}$ é nula;

a) $a = 0$ implica que $\vec{v} = (0, b, c) \perp \vec{i}$. Logo, a reta é paralela ao plano yz.



Retas

I) Uma das componentes de $\vec{v}$ é nula;

a) $a = 0$ implica que $\vec{v} = (0, b, c) \perp \vec{i}$. Logo, a reta é paralela ao plano yz.

Equações simétricas:

$$r: \begin{cases} x = x_1 \\ \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c} \end{cases}$$

b) $b = 0$ implica que $\vec{v} = (a, 0, c) \perp \vec{j}$. Logo, a reta é paralela ao plano xz.

Equações simétricas:

$$r: \begin{cases} y = y_1 \\ \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{z - z_1}{c} \end{cases}$$

c) $c = 0$ implica que $\vec{v} = (a, b, 0) \perp \vec{k}$. Logo, a reta é paralela ao plano xy.

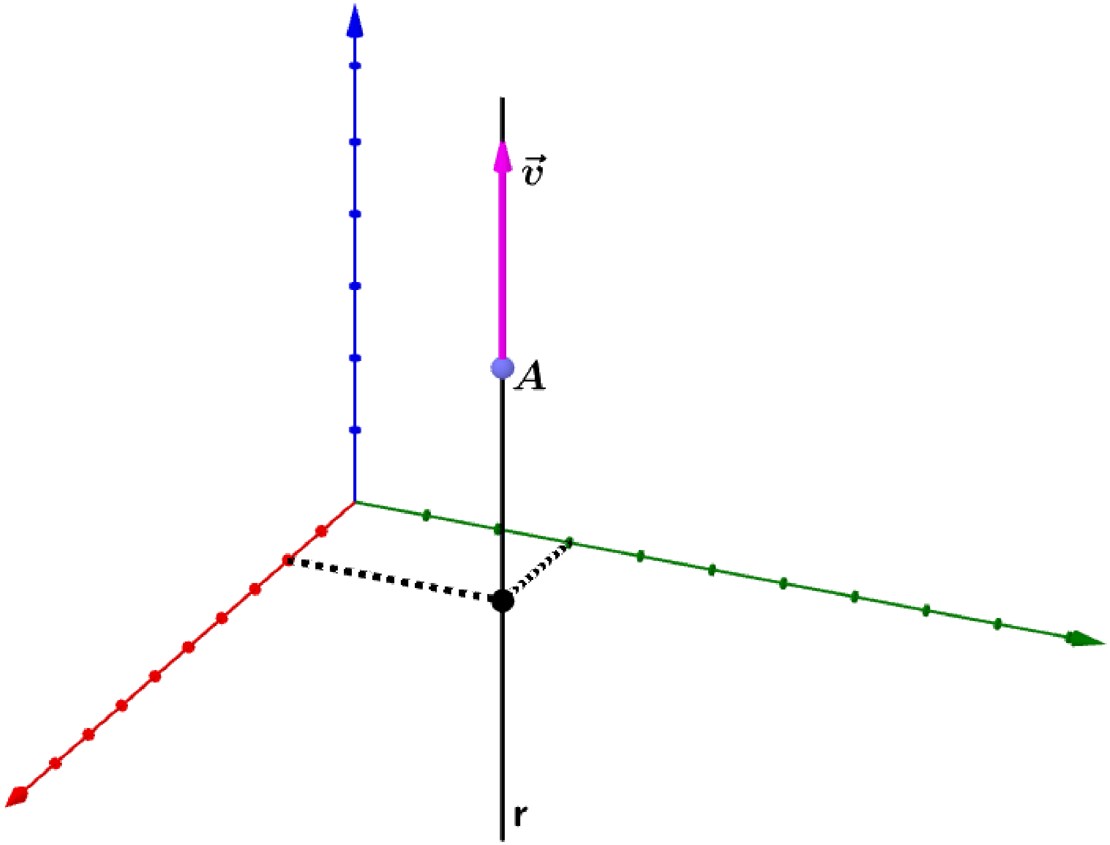
Equações simétricas:

$$r: \begin{cases} z = z_1 \\ \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} \end{cases}$$

Retas

II) Duas das componentes de $\vec{v}$ são nulas.

a) $a = b = 0$ implica que $\vec{v} = (0,0,c)$ // $\vec{k}$. Logo, a reta é paralela ao eixo z.



Retas

II) Duas das componentes de $\vec{v}$ são nulas.

a) $a = b = 0$ implica que $\vec{v} = (0,0,c)$ // $\vec{k}$. Logo, a reta é paralela ao eixo z.

Nesse caso, podemos escrever a reta simplesmente como

$$r: \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases},$$

subentendendo-se o z, que é livre.

b) $a = c = 0$ implica que $\vec{v} = (0, b, 0)$ // $\vec{j}$. Logo, a reta é paralela ao eixo y.

Equações:

$$r: \begin{cases} x = x_1 \\ z = z_1 \end{cases}$$

c) $b = c = 0$ implica que $\vec{v} = (a, 0,0)$ // $\vec{i}$. Logo, a reta é paralela ao eixo x.

Equações:

$$r: \begin{cases} y = y_1 \\ z = z_1 \end{cases}$$

Retas

Podemos ainda enxergar os eixos coordenados como as retas

- Eixo x: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases};$

- Eixo y: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases};$

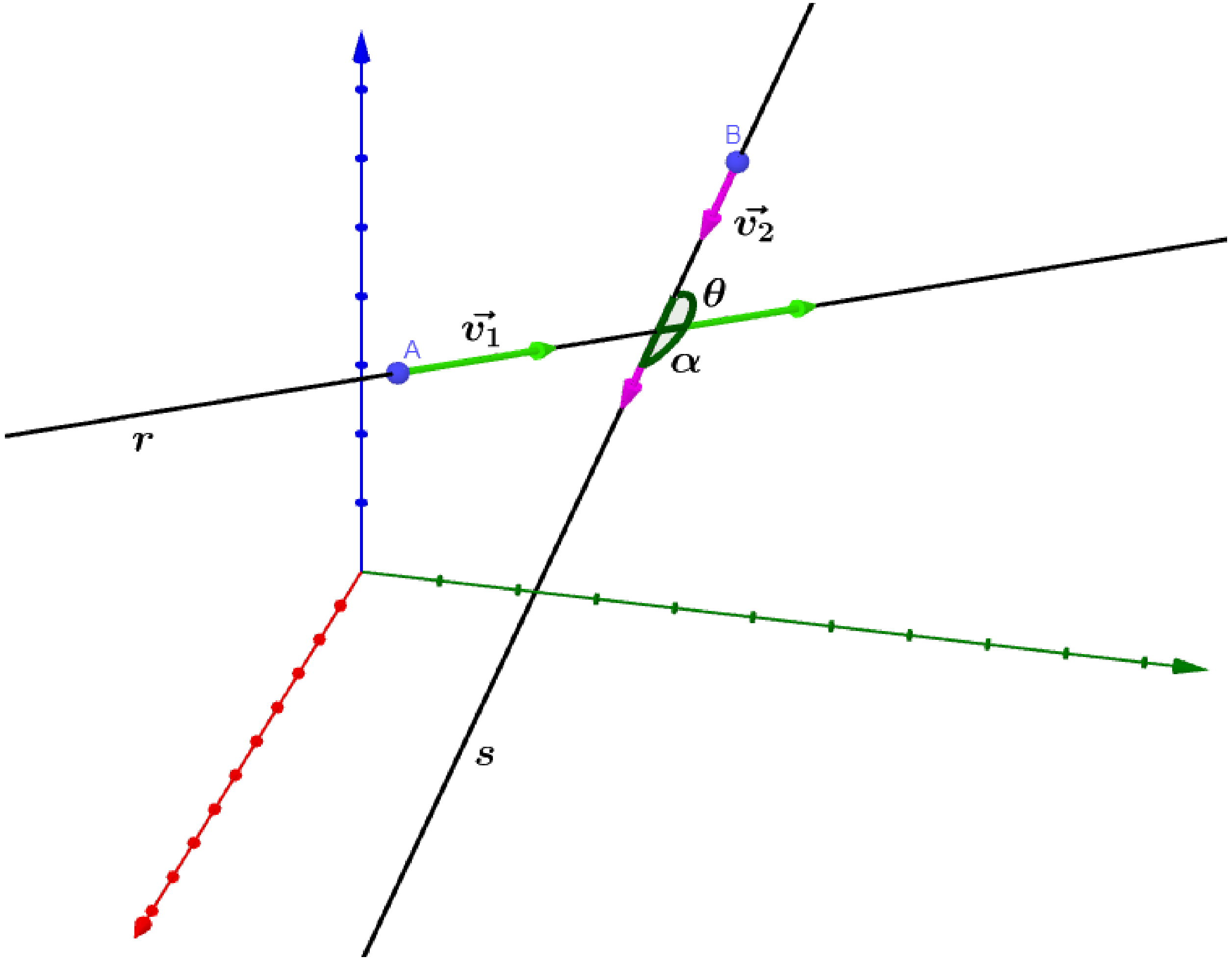
- Eixo z: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases};$

Retas

Exemplo 1: Determine a equação da reta que passa pelo ponto $A(0,3,-2)$ e tem direção $\vec{v} = 4\vec{i}$.

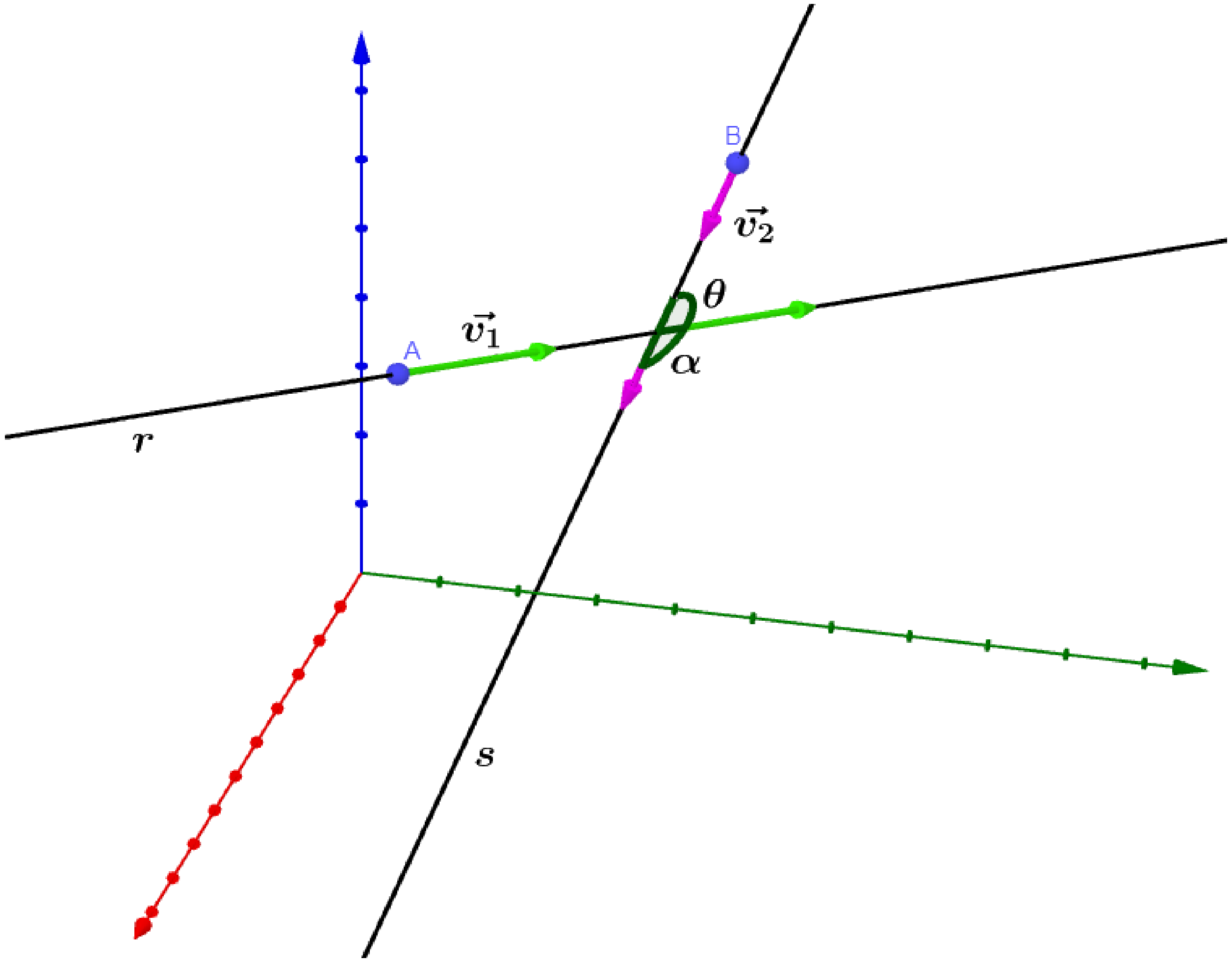
Ângulos

Chama-se ângulo de duas retas r_1 e r_2 o menor ângulo θ formado por um vetor diretor $\overrightarrow{v_1}$ de r_1 e um vetor diretor $\overrightarrow{v_2}$ de r_2. Assim



Ângulos

Chama-se ângulo de duas retas r_1 e r_2 o menor ângulo θ formado por um vetor diretor $\overrightarrow{v_1}$ de r_1 e um vetor diretor $\overrightarrow{v_2}$ de r_2. Assim



Temos

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}|}{|\overrightarrow{v_1}||\overrightarrow{v_2}|},$$

com $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Ângulos

Exemplo 2: Determine o ângulo entre as retas

$$r_1\colon \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad e \quad r_2\colon \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}.$$

Ângulos

Condição de paralelismo

Duas retas r_1 e r_2 são paralelas

Ângulos

Condição de paralelismo

Duas retas r_1 e r_2 são paralelas se seus vetores diretores $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$ são colineares, ou seja,

$$\overrightarrow{v_1} = m\overrightarrow{v_2}$$

para algum $m \in \mathbb{R}$ ou

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

OBS: O vetor diretor $\vec{v}$ de uma reta r é também vetor diretor de qualquer reta s paralela a r.

Ângulos

Condição de ortogonalidade

Duas retas r_1 e r_2 são ortogonais se seus vetores diretores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são ortogonais, ou seja,

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0.$$

OBS: Dizemos que duas retas são perpendiculares se são coplanares e ortogonais.

Ângulos

Exemplo 3: Calcule o valor de m para que as retas

$$r_1: \begin{cases} y = mx - 3 \\ z = -2x \end{cases} \quad e \quad r_2: \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{-1} \\ z = 2 \end{cases}$$

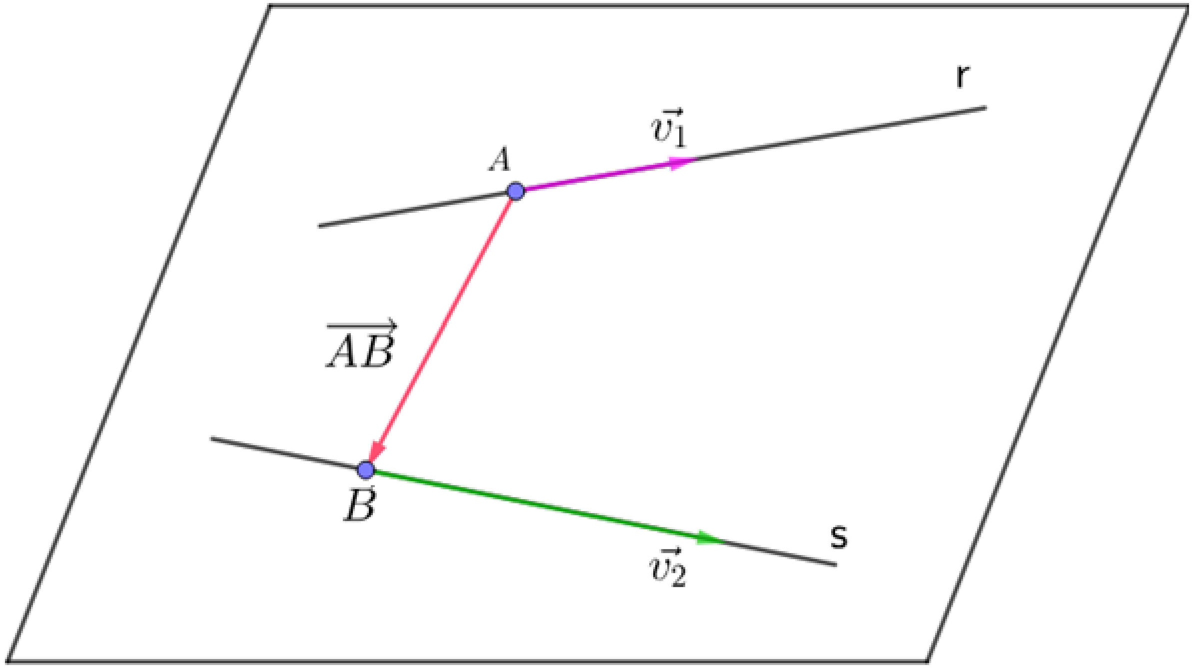
sejam ortogonais.

Ângulos

Exemplo 4: Mostre que a reta r_1 que passa por $A_1(-3,4,2)$ e $B_1(5,-2,4)$ é paralela à reta r_2 que passa por $A_2(-1,2,-3)$ e $B_2(-5,5,-4)$.

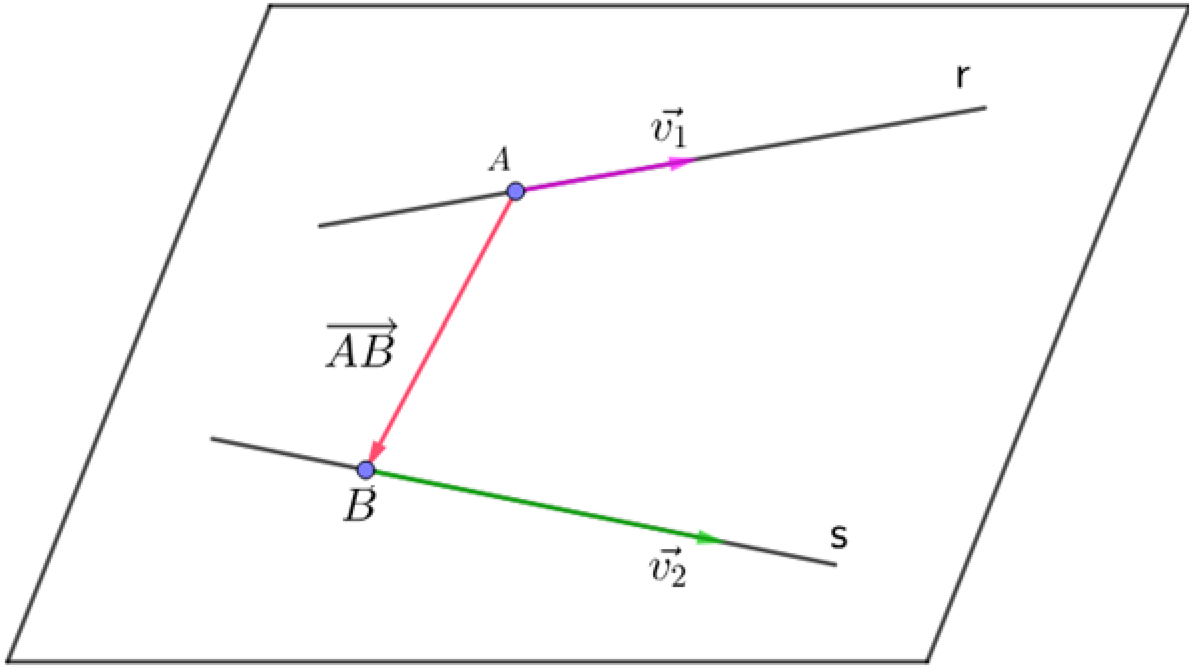
Ângulos

Condição de coplanaridade: Considere a situação



Ângulos

Condição de coplanaridade: Considere a situação



Temos que r e s são coplanares se $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{AB}$ forem coplanares, ou seja, se

$$\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{AB}\right) = 0.$$

Ângulos

Exemplo 5: Verifique se as retas

$$r_1: \begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = 3t \\ z = 4t + 5 \end{cases} \quad e \quad r_2: \begin{cases} x = -y - 8 \\ z = 3y + 15 \end{cases}$$

são coplanares.

Posições relativas de duas retas

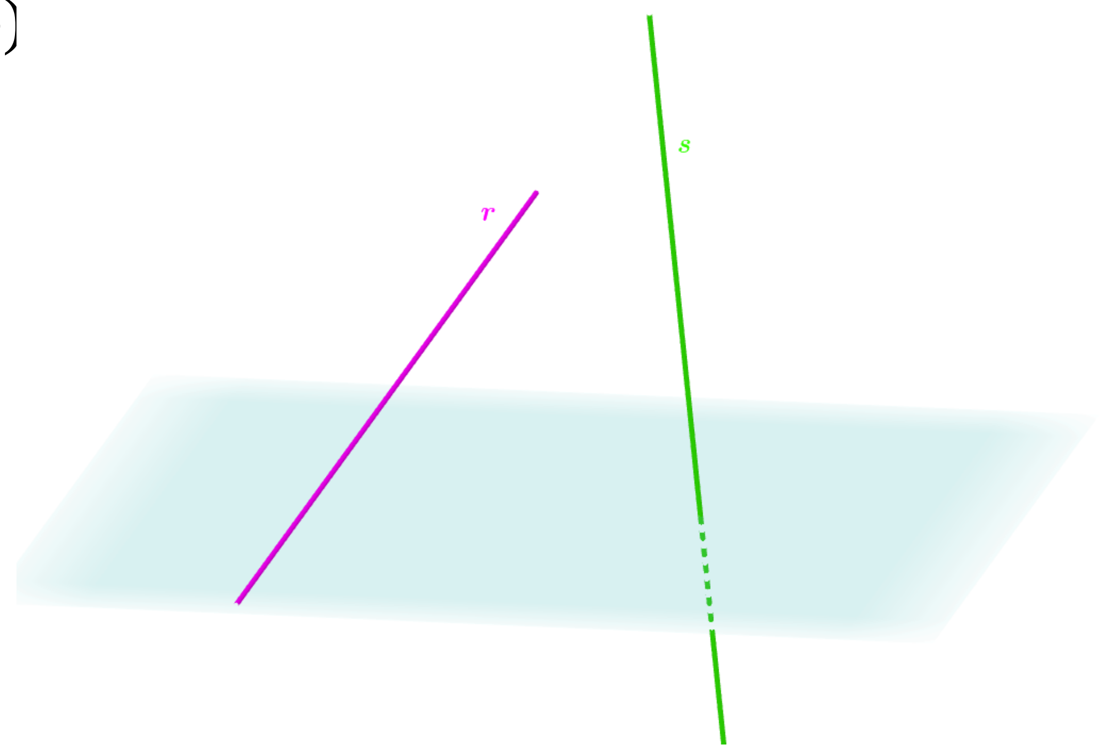
Duas retas r e s podem ser

a) Coplanares. Nesse caso, podem também ser

i) concorrentes: se interceptam em apenas um ponto ($r \cap s = \{I\}$);

ii) paralelas: não se interceptam ($r \cap s = \{\,\}$) ou são coincidentes ($r \cap s = r$).

b) Reversas ou não coplanares ($r \cap s = \{\,\}$)



Posições relativas de duas retas

Para estudar a posição relativa entre duas retas r e s com pontos A_1e A_2 e vetores diretores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, respectivamente, checamos primeiro se $\overrightarrow{v_1} // \overrightarrow{v_2}$.

- Se sim, então r e s são paralelas e falta apenas verificar se r e s são coincidentes: basta verificar se A_1 está em s;

- Se não, fazemos o produto misto $\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\right)$ para verificar se r e s são concorrentes (o produto misto é igual a zero) ou reversas (o produto misto não é zero).

Posições relativas de duas retas

Exemplo 6: Determine a posição relativa entre as retas

a)

$$r: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 4 - 6t \\ z = 3t \end{cases}$$

Posições relativas de duas retas

b)

$$r: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$$

Posições relativas de duas retas

c)

$$r: \begin{cases} y = 3 \\ z = 2x \end{cases} \quad \text{e} \quad s: x = y = z$$

Posições relativas de duas retas

d)

$$r: \begin{cases} x = \dfrac{y}{2} + \dfrac{3}{2} \\ z = 2y - 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: x = \frac{y-7}{-3} = \frac{z-12}{-7}$$