Derivada Implícita

É a aplicação da regra da cadeia para obter a derivada de uma função na sua forma implícita.

O que é a forma implícita de uma função?

Exemplo 1: $y = x^2 \longrightarrow y = f(x) \longrightarrow$ Função na **forma explícita**

Reescrevendo: $\underbrace{y - x^2}_{F(x,y)} = 0$

<u>**Observação**</u>: **Funções** definidas na forma **explicita**, **SEMPRE** podem ser escritas na forma **implícita.**

Funções definidas de forma implícita, sempre podem ser escritas de forma explícita?

Exemplo 2. $xy^2 + 4x^2y = 16$

Isolando a variável y: $y(xy + 4x^2) = 16 \Longrightarrow \quad y = \dfrac{16}{xy + 4x^2}$

Isolando a variável x: $x(y^2 + 4xy) = 16 \Longrightarrow \quad x = \dfrac{16}{y^2 + 4xy}$

<u>Observação</u>: Nem toda função implícita possui representação explícita.

Apesar disso, é possível encontrar $\frac{dy}{dx} = y'$ mesmo que a função implícita não admita forma explícita.

Supondo que $y = y(x)$, ou seja, que x é a variável independente de y, mesmo que não seja possível isolar o y.

Assim, a função implícita será interpretada como $F(x, y(x)) = k$.

Exemplo 2. $\underbrace{xy^2 + 4x^2y}_{F(x,y(x))} = 16$

$$\frac{d}{dx}(xy^2 + 4x^2y) = \frac{d}{dx}(16)$$

$$\frac{d}{dx}(xy^2) + \frac{d}{dx}(4x^2y) = 0$$

Usando a regra do produto, temos que:

$$x\frac{d}{dx}(y^2) + y^2\frac{d}{dx}(x) + 4x^2\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(4x^2) = 0$$

$$x\frac{d}{dx}\left((y(x))^2\right) + y^2.1 + 4x^2\frac{d}{dx}\left((y(x))^1\right) + y.8x = 0$$

$$x\,(2(y(x))^1y'(x)) + y^2 + 4x^2\frac{d}{dx}(1(y(x))^0y'(x)) + 8xy = 0$$

$$2xyy' \; + y^2 + 4x^2y' + 8xy = 0$$

$$2xyy' \; + y^2 + 4x^2y' + 8xy = 0$$

$$y'(2xy + 4x^2) + y^2 + 8xy = 0$$

$$y' = -\frac{y^2 + 8xy}{2xy + 4x^2}, se\ 2xy + 4x^2 \neq 0$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 + 8xy}{2xy + 4x^2}, se\ 2xy + 4x^2 \neq 0}$$

Exemplo 2. $\underbrace{xy^2 + 4x^2y}_{F(x(y),y)} = 16$

$$\frac{d}{dy}(xy^2 + 4x^2y) = \frac{d}{dy}(16)$$

$$\frac{d}{dy}(xy^2) + \frac{d}{dy}(4x^2y) = 0$$

Usando a regra do produto, temos que:

$$x\frac{d}{dy}(y^2) + y^2\frac{d}{dy}(x) + 4x^2\frac{d}{dy}(y) + y\frac{d}{dy}(4x^2) = 0$$

$$x.2y + y^2.\frac{d}{dy}\left((x(y))^1\right) + 4x^2.1 + y.\frac{d}{dy}(4(x(y))^2) = 0$$

$$2xy + y^2.(1(x(y))^0x'(y)) + 4x^2 + y.(4.2(x(y))^1x'(y) = 0$$

$$2xy + y^2.x' + 4x^2 + y.8xx' = 0$$

$$2xy \ + y^2x' + 4x^2 + 8xyx' = 0$$

$$x'(y^2 + 8xy) + 2xy \ + 4x^2 = 0$$

$$x' = -\frac{2xy \ + 4x^2}{y^2 + 8xy}, se \ y^2 + 8xy \neq 0$$

$$\boxed{\frac{dx}{dy} = -\frac{2xy \ + 4x^2}{y^2 + 8xy}, se \ y^2 + 8xy \neq 0}$$

Exemplo 2. $xy^2 + 4x^2y = 16$

Observe que:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 + 8xy}{2xy + 4x^2}, se\ 2xy + 4x^2 \neq 0$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2xy\ + 4x^2}{y^2 + 8xy}, se\ y^2 + 8xy \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$$

Observação:

Esta observação sempre é verdadeira, pois está associada com a derivada de funções inversas.

Exemplo 3. Prove que se $y = \text{arctg}(u)$, em que $u = g(x)$ é uma função diferenciável, então $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

Temos que:

$$y = \text{arctg}(u)$$

$$\text{tg}(y) = \text{tg}(\text{arctg}(u))$$

$$\text{tg}(y) = u$$

$$\frac{d}{dx}(\text{tg}(y)) = \frac{d}{dx}(u)$$

$$y' sec^2(y) = u'$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{u'}{sec^2(y)}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{u'}{1 + tg^2(y)}$$

$$sen^2 a + cos^2 a = 1$$

$$\frac{sen^2 a + cos^2 a}{cos^2 a} = \frac{1}{cos^2 a}$$

$$\frac{sen^2 a}{cos^2 a} + \frac{cos^2 a}{cos^2 a} = \frac{1}{cos^2 a}$$

$$\left(\frac{sen(a)}{\cos(a)}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos(a)}\right)^2$$

$$tg^2(a) + 1 = sec^2(a)$$

Exemplo 4. Obtenha $\frac{dy}{dx}$ da funções dadas a seguir.

a) $x^5 + y^3 + \frac{e^{3y}}{x} = cos(xy)$

$$\frac{d}{dx}\left(x^5 + y^3 + \frac{e^{3y}}{x}\right) = \frac{d}{dx}\big(cos(xy)\big)$$

$$\frac{d}{dx}(x^5) + \frac{d}{dx}(y^3) + \frac{d}{dx}(x^{-1}e^{3y}) = \frac{d}{dx}\big(cos(xy)\big)$$

$$5x^4 + 3y^2y' + x^{-1}\frac{d}{dx}(e^{3y}) + \frac{d}{dx}(x^{-1})e^{3y} = \frac{d}{dx}\big(cos(xy)\big)$$

$$5x^4 + 3y^2y' + x^{-1}3y'^{e^{3y}} + (-x^{-2})e^{3y} = -\frac{d(xy)}{dx}sen(xy)$$

$$5x^4 + 3y^2y' + x^{-1}3y'e^{3y} + (-x^{-2})e^{3y} = -(xy' + y)sen(xy)$$

$$5x^4 + 3y^2y' + x^{-1}3y'e^{3y} + (-x^{-2})e^{3y} = -xy'sen(xy) - ysen(xy)$$

$$5x^4 + y'\big(3y^2 + 3x^{-1}\,e^{3y} + x\,sen(xy)\big) + (-x^{-2})e^{3y} = -y\,sen(xy)$$

$$y'\big(3y^2 + 3x^{-1}\,e^{3y} + x\,sen(xy)\big) = -5x^4 - y\,sen(xy) + x^{-2}\,e^{3y} \longrightarrow \boxed{y' = \frac{-5x^4 - y\,sen(xy) + x^{-2}\,e^{3y}}{3y^2 + 3x^{-1}\,e^{3y} + x\,sen(xy)}}$$

b) $arctg(x^3) = arctg^4(y^3)$

$$\frac{d}{dx}\left(arctg(x^3)\right) = \frac{d}{dx}\left(arctg^4(y^3)\right)$$

$$\frac{(x^3)'}{1+(x^3)^2} = \frac{d}{dx}\left(\left(arctg(y^3)\right)^4\right)$$

$$\frac{3x^2}{1+x^6} = 4\left(arctg(y^3)\right)^3\left(arctg(y^3)\right)'$$

$$\frac{3x^2}{1+x^6} = 4\left(arctg(y^3)\right)^3\frac{(y^3)'}{1+(y^3)^2}$$

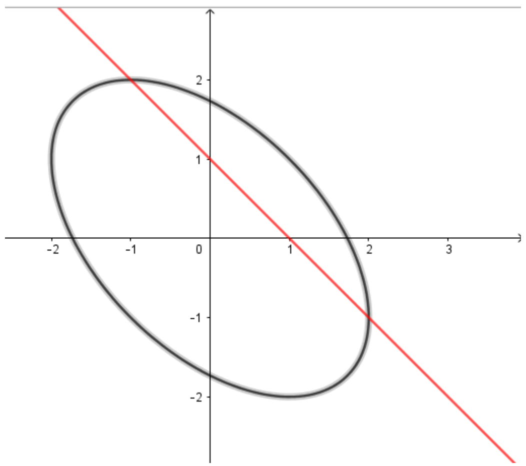
$$\frac{3x^2}{1+x^6} = 4\left(arctg(y^3)\right)^3\frac{3y^2y'}{1+y^6}$$

$$\left(\frac{3x^2}{1+x^6}\right)\left(\frac{1+y^6}{3y^2}\right) = 4\left(arctg(y^3)\right)^3 y'$$

$$\frac{1}{4\left(arctg(y^3)\right)^3}\left(\frac{x^2}{1+x^6}\right)\left(\frac{1+y^6}{3y^2}\right) = y' \quad \Rightarrow \quad \boxed{y' = \frac{x^2(1+y^6)}{4y^2(1+x^6)\left(arctg(y^3)\right)^3}}$$

Exemplo 4. Seja $x^2 + xy + y^2 = 3$ uma curva. Se existir, determine a(s) equação(ões) da(s) reta(s) tangente(s) a esta curva e que seja(m) paralela (s) a reta $r: x + y = 1$.

Graficamente:



Analiticamente:

Seja t a reta tangente a curva C e paralela a reta r.

A equação da reta t é dada por

$$y - f(x_0) = m_t(x - x_0)$$

Como a reta $t//r \Longrightarrow m_t = m_r$ ➡ $m_t = -1$

$$y - f(x_0) = -1(x - x_0)$$

Como C é uma função dada implicitamente, usaremos a derivada implícita para encontrar o ponto em que a reta t é

tangente a C e paralela a reta r, pois $m_t = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$.

$$\frac{d}{dx}(x^2 + xy + y^2) = \frac{d}{dx}(3) \Longrightarrow 2x + \frac{d}{dx}(xy) + 2yy' = 0 \Longrightarrow 2x + xy' + y + 2yy' = 0 \Longrightarrow y'(x + 2y) = -2x - y$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 2y}, se\ x + 2y \neq 0}$$

Como $m_t = -1$, segue que:

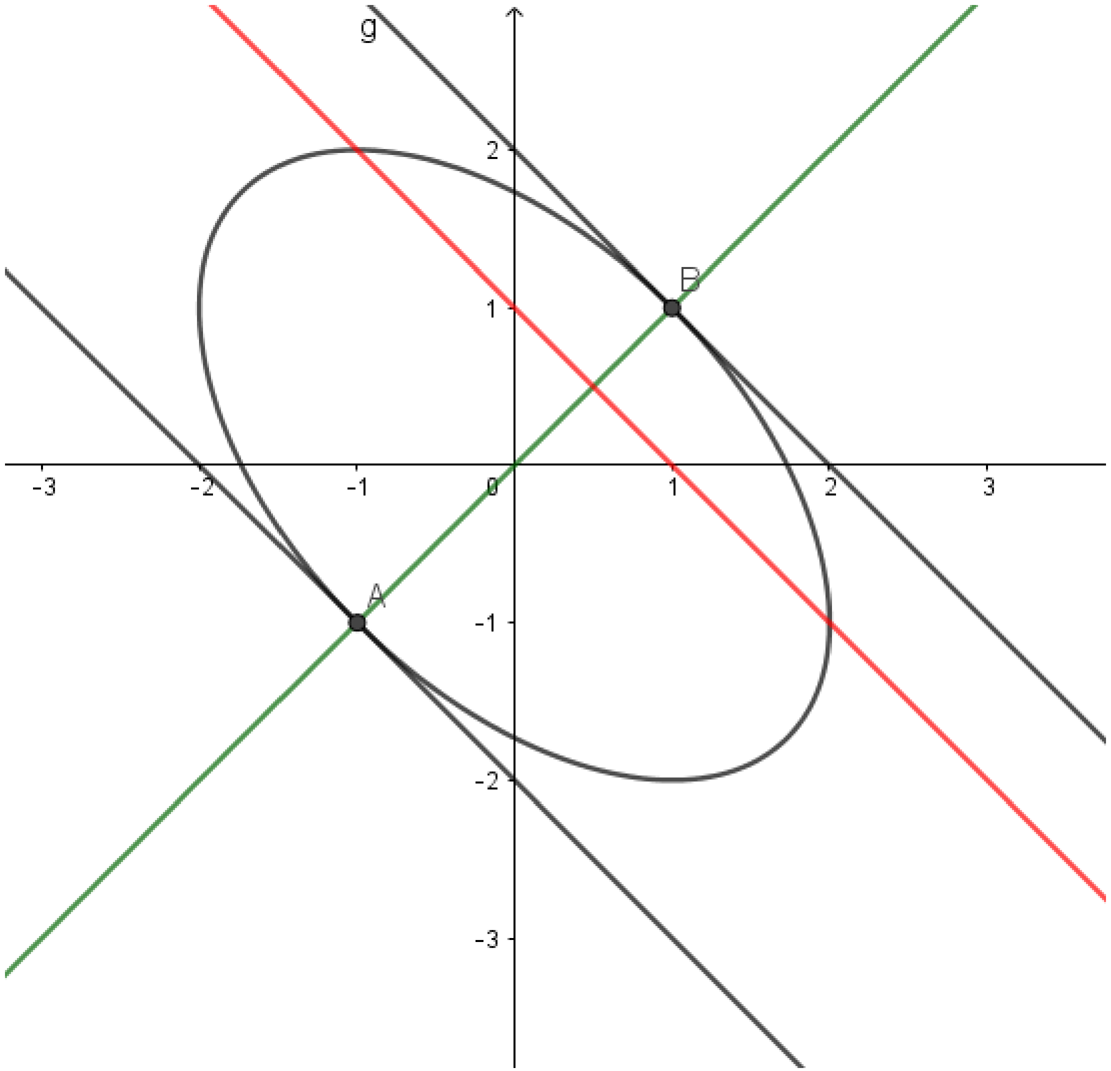
$$\frac{-2x - y}{x + 2y} = -1 \Longrightarrow -2x - y = -x - 2y$$
$$\Longrightarrow \boxed{x = y}$$

Para encontrar os pontos que satisfazem essa igualdade, substituiu-se sem C essa relação:

$$C \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y^2 + y^2 + y^2 = 3 \\ 3y^2 = 3 \\ y = \pm 1 \end{array}$$

Para $y = 1 \Longrightarrow x = 1$ e a equação da reta será: $y - 1 = -1(x - 1) \Longrightarrow \boxed{y = -x + 2}$

Para $y = -1 \Longrightarrow x = -1$ e a equação da reta será: $y + 1 = -1(x + 1) \Longrightarrow \boxed{y = -x - 2}$



g
B
A
2
1
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
1
2
3