Álgebra Linear

SISTEMAS LINEARES
Aula 1

UDESC

O que é uma equação linear?

Uma **equação linear** nas n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma equação que pode ser escrita na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

em que $a_1, \ldots, a_n$ e b são constantes.

Example

- $2x + 4y - 5z = 1$ (linear)
- $xy + 2z = 0$ (não linear)
- $x^4 + 2y - z = 0$ (não linear)
- $\operatorname{sen} x + y = 2$ (não linear)

Sistemas de equações lineares - Introdução

Exemplo 1: A equação $ax = b$

A equação $2x - 3 = 0$ ou $2x = 3$ é uma equação linear com uma incógnita x. Sua solução é única e tal que $x = \frac{3}{2}$

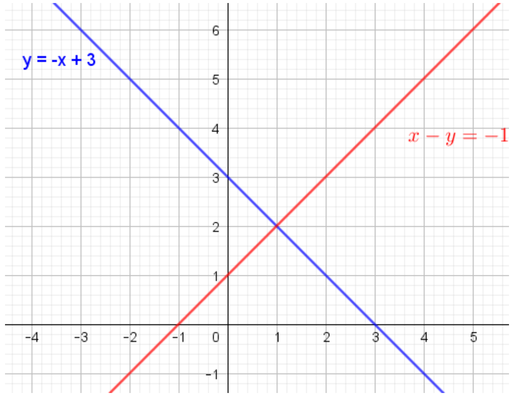
Exemplo 2: A reta $ax + by + c = 0$ no plano $(\mathbb{R}^2)$

A equação linear com duas incógnitas x e y dada por $2x - 3y + 6 = 0$ é uma reta no plano. A solução desta equação é $y = \frac{2}{3}x + 2$. A variável x é **livre**, o que significa que ela pode assumir qualquer valor real.

Exemplo 3: Interseção entre duas retas

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

A solução é $x = 1; y = 2$, ou o par ordenado (1,2)



Exemplo 4: Suponhamos que queremos preparar um café da manhã com manteiga, presunto e pão, de maneira tal que obtenhamos 500 calorias, 10 gramas de proteína e 30 gramas de gorduras. A tabela abaixo mostra o numero de calorias, proteínas (expressas em grama) e de gorduras (expressas em grama) encontradas em 1 grama de manteiga, de presunto e de pão.

	manteiga	*presunto*	*pão*
calorias	7.16	3.44	2.60
proteínas	0.006	0.152	0.085
gorduras	0.81	0.31	0.02

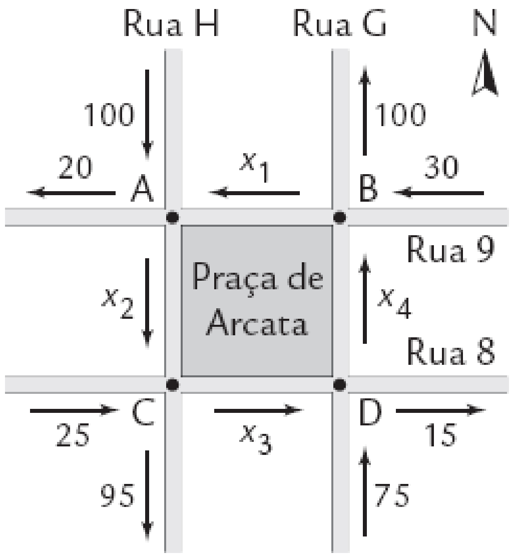
Se indicamos com x_1, x_2 e x_3 respectivamente o número de gramas de manteiga, presunto e pão, a resposta a nossa questão nada mais é que a solução do sistema linear

$$\begin{cases} 7.16\,x_1 + 3.44\,x_2 + 2.60\,x_3 = 500 \\ 0.006\,x_1 + 0.152\,x_2 + 0.085\,x_3 = 10 \\ 0.81\,x_1 + 0.31\,x_2 + 0.02\,x_3 = 30 \end{cases}$$

Ao resolvermos o sistema vamos encontrar as quantidades x_1 de manteiga, x_2 de presunto e x_3 de pão de forma que sejam consumidos exatamente 500 calorias, 10 gramas de proteína e 30 gramas de gorduras

Exemplo 5: **Fluxo de Tráfego**

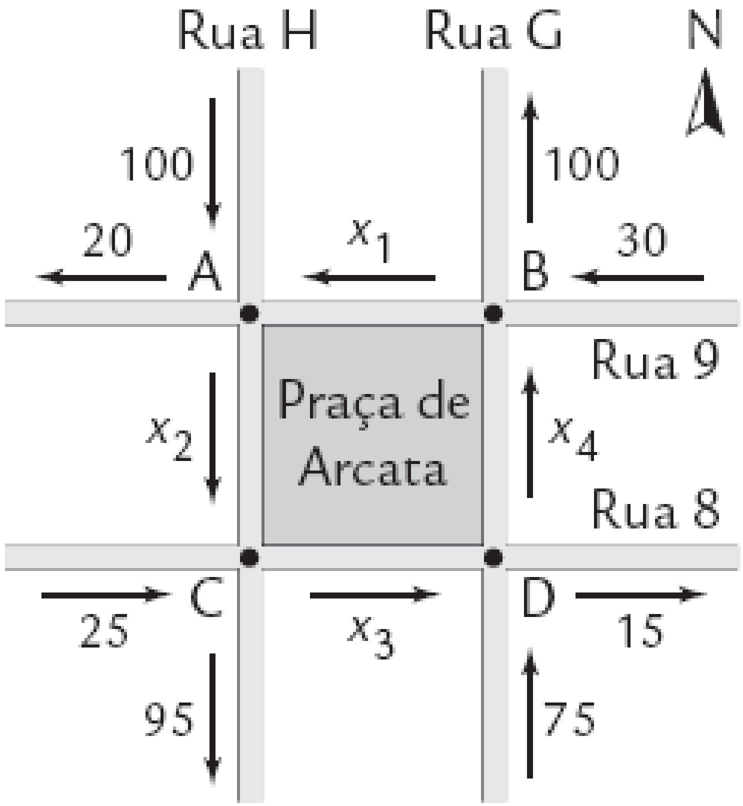
Arcata, na costa mais ao norte da Califórnia, nos Estados Unidos, é uma pequena cidade universitária com uma praça central (Figura 1).



A Figura 2 mostra ruas em torno e adjacentes a essa praça central. Como indicado pelas setas, todas as ruas na vizinhança da praça são de mão única.

O tráfico flui para o norte e para o sul ao longo das ruas G e H, respectivamente, e flui para o leste e para o oeste ao longo das ruas 8 e 9, respectivamente. O número de carros entrando e saindo da praça durante um período típico de 15 minutos em uma manhã de sábado também está mostrado. Nosso objetivo é encontrar x_1, x_2, x_3 e x_4, o fluxo de tráfego ao longo de cada lado da praça.

As quatro interseções estão marcadas com as letras A, B, C e D. Em cada interseção, o número de carros entrando na interseção tem que ser igual ao número de carros saindo.



O número de carros entrando em A é 100 + x_1 e o número de carros saindo é 20 + x_2. Como esses números têm que ser iguais, chegamos à equação

$$A:\ 100 + x_1 = 20 + x_2$$

Aplicando o mesmo raciocínio para as interseções B, C e D, chegamos a outras três equações

$$B:\ x_4 + 30 = x_1 + 100$$
$$C:\ x_2 + 25 = x_3 + 95$$
$$D:\ x_3 + 75 = x_4 + 15$$

Reescrevendo as equações na forma usual, obtemos o sistema

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad\qquad &= -80 \\ x_1 \qquad\qquad - x_4 &= -70 \\ x_2 - x_3 \qquad &= 70 \\ x_3 - x_4 &= -60 \end{aligned}$$

Sistemas lineares genéricos - Caracterização

- Um sistema de m equações a n variáveis é chamado sistema de equações lineares. Ele tem a forma genérica seguinte:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sistemas lineares genéricos - Solução

- Uma sequência ordenada de valores $(x_1, \ldots, x_n)$ verificando as equações do sistema é uma solução do sistema.
- Um sistema cujos valores dos coeficientes b_i são iguais a 0 é um sistema homogêneo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Sistemas lineares genéricos - representação matricial

- O sistema pode ser escrito sob a forma de um produto de matrizes:

$$AX = B$$

onde:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B}$$

Matriz dos coeficientes | Matriz das incógnitas | Matriz dos termos independentes

Sistemas lineares genéricos - matriz ampliada

- Podemos abreviar a escrita do sistema escrevendo a tabela retangular de números

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

- É a chamada matriz ampliada do sistema.
- Genericamente podemos adotar a notação $[A|B]$

Exemplos:

Exemplo Seja:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Forma Matricial Podemos escrever este exemplo de duas maneiras:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Solução: $x = -\dfrac{1}{3}$ e $y = \dfrac{2}{3}$, ou $X = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} \end{bmatrix}$

Exemplos:

Exemplo:

- O sistema

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x - 2y + 5z = 9 \\ -x + 2y - z = -1 \end{cases}$$

pode ser representado na forma matricial por

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 9 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right] \text{(Forma ampliada)}$$

A solução pode ser escrita como: $x = 44, y = 17$ e $z = -9$ ou $X = \begin{bmatrix} 44 \\ 17 \\ -9 \end{bmatrix}$

Exercícios propostos:

1. Verifique se $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ é solução do sistema de equações lineares $\begin{cases} 5x - y + 2z = 7 \\ -2x + 6y + 9z = 0 \\ -7x + 5y - 3z = -7 \end{cases}$.

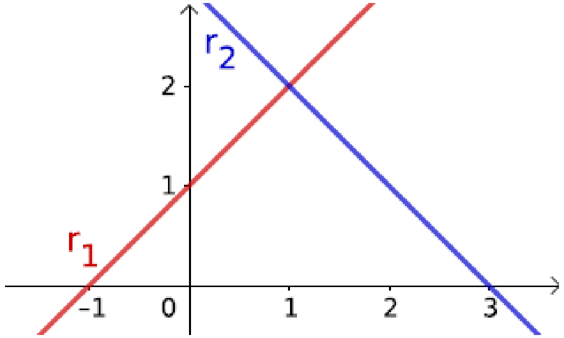
2. Indique as equações de um sistema linear não-homogêneo, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ é a matriz dos coeficientes e $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$ é uma solução do sistema.

Interpretação geométrica dos sistemas lineares:

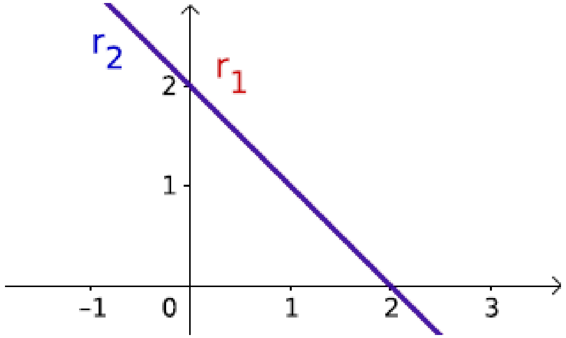
- Nos sistemas 2×2, cada equação representa uma reta no plano

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

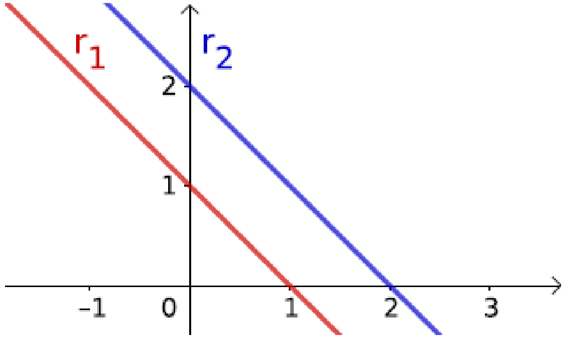
- Cada solução (x, y) desse sistema representa um ponto da interseção das duas retas:



Retas concorrentes
Única solução



Retas coincidentes
Infinitas soluções



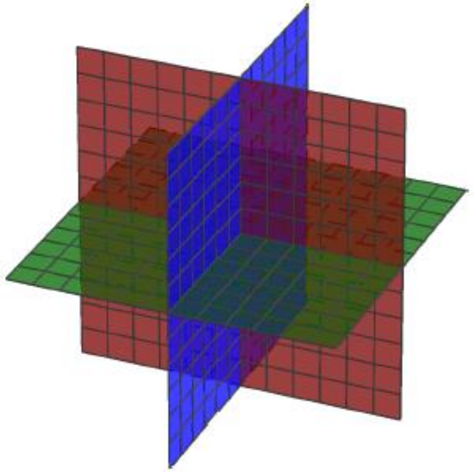
Retas paralelas
Nenhuma solução

Interpretação geométrica dos sistemas lineares:

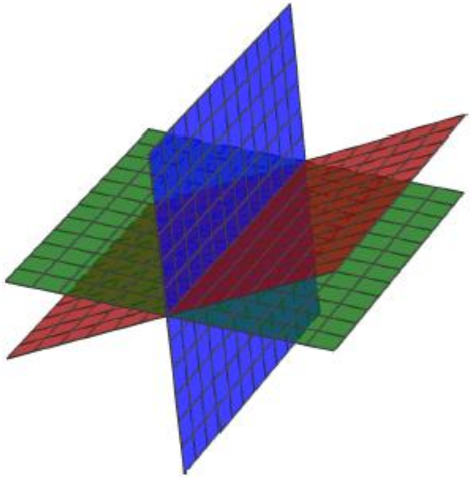
- Nos sistemas 3×3, cada equação representa um plano:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

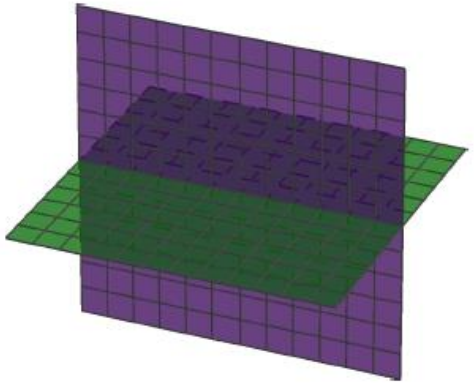
- Encontrar a solução significa encontrar a interseção dos planos. Existem 8 possíveis posições relativas dos três planos:



Única solução
A interseção é um ponto

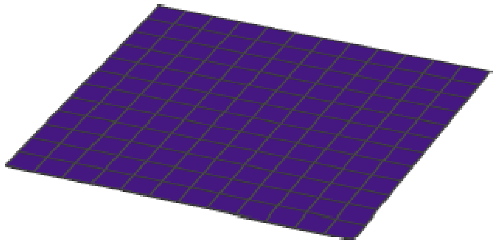


Infinitas soluções
A interseção é uma reta

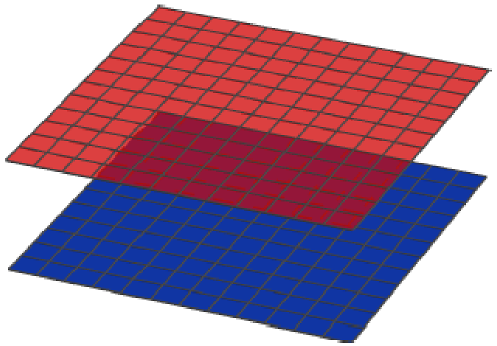


Infinitas soluções
Dois planos coincidentes A interseção é uma reta

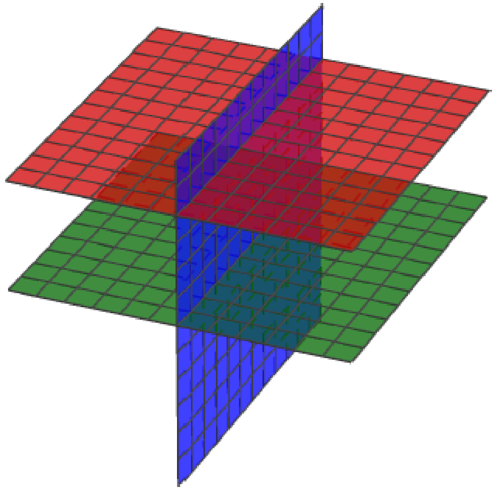
Interpretação geométrica dos sistemas lineares:



Infinitas soluções
Três planos coincidentes A interseção é um plano

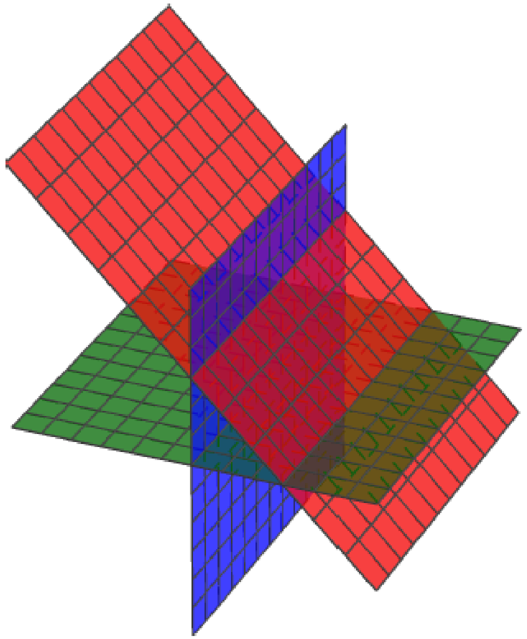


Nenhuma solução
Dois planos coincidentes paralelos ao terceiro, sem interseção comum

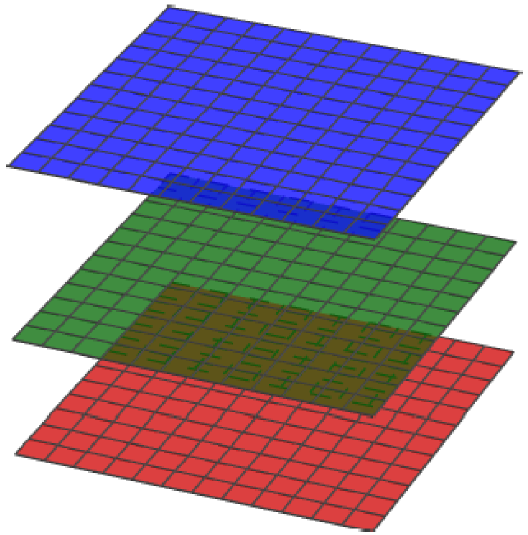


Nenhuma solução
Dois planos paralelos, sem interseção comum

Interpretação geométrica dos sistemas lineares:



Nenhuma solução
Sem interseção comum



Nenhuma solução
Três planos paralelos

Resumo: Soluções