LMA0001 – Lógica Matemática
Aula 03
Sintaxe da Lógica Proposicional

Karina Girardi Roggia
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

2020

Símbolos atômicos

Após termos visto como traduzir sentenças em linguagem natural para proposições, veremos como descrever e manipular de forma matemática as proposições.

Começamos **assumindo** um conjunto **infinito e contável** de **símbolos atômicos** $\mathcal{P}$.

$$\mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r}, \mathrm{s}, \mathrm{t}, \ldots \in \mathcal{P}$$

Símbolos atômicos representam proposições atômicas, e serão representados por letras minúsculas.

A única comparação possível entre símbolos atômicos é o teste de igualdade: $\mathrm{p} = \mathrm{p}$, e $\mathrm{p} \neq \mathrm{q}, \mathrm{r}, \mathrm{s} \ldots$

Com base em $\mathcal{P}$ e dos conectivos lógicos, definimos **por indução** o conjunto $\mathcal{L}$ de **fórmulas proposicionais bem-formadas**:

$\mathcal{L}$ é o *menor* conjunto tal que

1. $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}$ (símbolos atômicos)
2. se $A \in \mathcal{L}$ então $\neg A \in \mathcal{L}$ (negação)
3. se $A, B \in \mathcal{L}$ então
   - $A \wedge B \in \mathcal{L}$ (conjunção)
   - $A \vee B \in \mathcal{L}$ (disjunção)
   - $A \to B \in \mathcal{L}$ (implicação)

Usaremos letras maiúsculas $A, B, C, D \ldots$ para representar fórmulas.

Representação de fórmulas (1)

As fórmulas proposicionais podem ser representadas **textualmente** ou como uma **árvore**.

Representação de fórmulas (1)

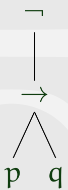
As fórmulas proposicionais podem ser representadas **textualmente** ou como uma **árvore**.

A convenção textual apresenta ambiguidade. Ex: $\neg p \rightarrow q$ representa qual formação?

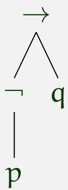
Representação de fórmulas (1)

As fórmulas proposicionais podem ser representadas **textualmente** ou como uma **árvore**.

A convenção textual apresenta ambiguidade. Ex: $\neg p \rightarrow q$ representa qual formação?



ou

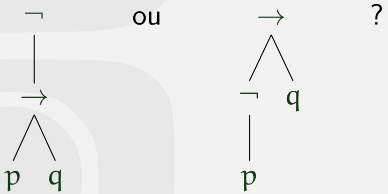


?

Representação de fórmulas (1)

As fórmulas proposicionais podem ser representadas **textualmente** ou como uma **árvore**.

A convenção textual apresenta ambiguidade. Ex: $\neg p \rightarrow q$ representa qual formação?



Resolução da ambiguidade = parênteses: $\neg(p \rightarrow q)$ vs $(\neg p) \rightarrow q$

Representação de fórmulas (2)

Convenções que reduzem a quantidade de parênteses:

1. Conjunção e disjunção associam à esquerda. Ex:

$$A \wedge B \wedge C = ((A \wedge B) \wedge C)$$
$$A \vee B \vee C = ((A \vee B) \vee C)$$

Representação de fórmulas (2)

Convenções que reduzem a quantidade de parênteses:

1. Conjunção e disjunção associam à esquerda. Ex:

$$A \wedge B \wedge C = ((A \wedge B) \wedge C)$$
$$A \vee B \vee C = ((A \vee B) \vee C)$$

2. Implicações associam à direita. Ex:

$$A \rightarrow B \rightarrow C = (A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

Representação de fórmulas (2)

Convenções que reduzem a quantidade de parênteses:

1. Conjunção e disjunção associam à esquerda. Ex:

$$A \wedge B \wedge C = ((A \wedge B) \wedge C)$$
$$A \vee B \vee C = ((A \vee B) \vee C)$$

2. Implicações associam à direita. Ex:

$$A \rightarrow B \rightarrow C = (A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

3. Prioridade: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$, nesta ordem. Ex:

$$\neg p \wedge q = (\neg p) \wedge q$$
$$p \vee q \wedge r = p \vee (q \wedge r)$$
$$p \vee (\neg q) \rightarrow r = (p \vee (\neg q)) \rightarrow r$$

Exercícios

Desenhe a árvore associada a cada uma das seguintes fórmulas:

1. $p \to q \to p \wedge q$
2. $\neg(p \vee \neg q \wedge s)$
3. $(\neg p \to q) \to (q \to \neg p)$
4. $p \wedge q \wedge \neg(r \vee s)$
5. $p \wedge q \vee \neg r \wedge s$

Simplifique removendo parênteses desnecessários:

1. $((A \vee B) \vee (C \vee A))$
2. $\neg(p \vee (q \wedge r))$
3. $((A) \wedge (\neg(q) \vee B \wedge x))$

Subfórmulas

O **conjunto de subfórmulas** de A, escrita $\mathbf{Subf}(A)$, contém todas as fórmulas utilizadas para construir A, incluindo ela mesma. Ex:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Subf}(p) &= \{p\} \\
\mathbf{Subf}(p \land q) &= \{p, q, p \land q\} \\
\mathbf{Subf}(\neg p \to q) &= \{p, q, \neg p, \neg p \to q\} \\
\mathbf{Subf}(p \land q \lor r) &= \{p, q, r, p \land q, p \land q \lor r\}
\end{aligned}$$

O **conjunto de subfórmulas** de A, escrita $\mathbf{Subf}(A)$, contém todas as fórmulas utilizadas para construir A, incluindo ela mesma. Ex:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Subf}(p) &= \{p\} \\
\mathbf{Subf}(p \wedge q) &= \{p, q, p \wedge q\} \\
\mathbf{Subf}(\neg p \to q) &= \{p, q, \neg p, \neg p \to q\} \\
\mathbf{Subf}(p \wedge q \vee r) &= \{p, q, r, p \wedge q, p \wedge q \vee r\}
\end{aligned}
$$

$\mathbf{Subf}(A)$ é definido por casos:

Caso $A = p$, para $p \in \mathcal{P}$	$\mathbf{Subf}(A) = \{p\}$
Caso $A = \neg B$	$\mathbf{Subf}(A) = \{A\} \cup \mathbf{Subf}(B)$
Caso $A = B \wedge C$	$\mathbf{Subf}(A) = \{A\} \cup \mathbf{Subf}(B) \cup \mathbf{Subf}(C)$
Caso $A = B \vee C$	$\mathbf{Subf}(A) = \{A\} \cup \mathbf{Subf}(B) \cup \mathbf{Subf}(C)$
Caso $A = B \to C$	$\mathbf{Subf}(A) = \{A\} \cup \mathbf{Subf}(B) \cup \mathbf{Subf}(C)$

Determine o conjunto de subfórmulas das seguintes proposições:

- $\neg p \rightarrow q$
- $p \vee q$
- $p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s$
- $p \wedge \neg(p \rightarrow \neg q) \vee \neg q$