GAN: Geometria Analítica

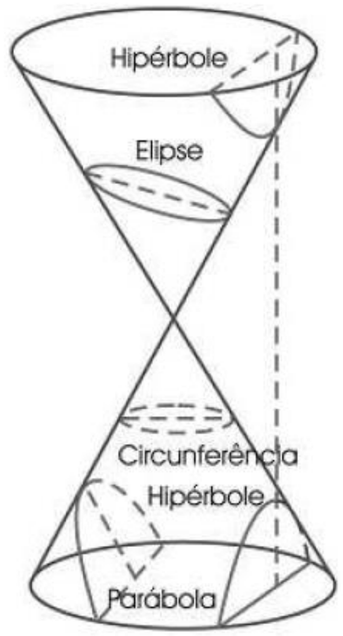
Cônicas - Parábola

Prof.: Francielle Kuerten Boeing

Seções cônicas

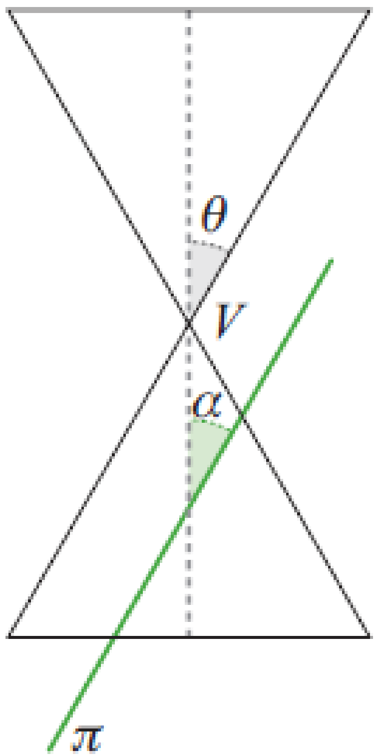
Definição: Chama-se seção cônica ao conjunto de pontos definido pela interseção de um plano com a superfície cônica.

Ao seccionar-se uma superfície cônica por um plano π que não passa pelo vértice O obtém-se as cônicas não degeneradas conforme a relação entre o ângulo θ e α, sendo α o ângulo entre o plano π e o eixo de rotação do cone.

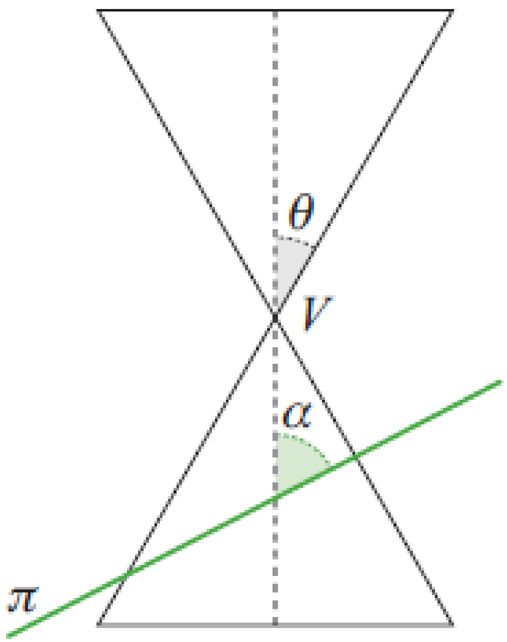


Seções cônicas

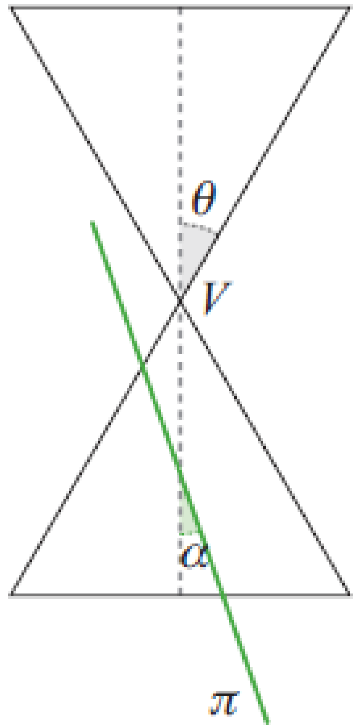
$\alpha = \theta$ a seção é uma parábola



$\alpha > \theta$ a seção é uma elipse

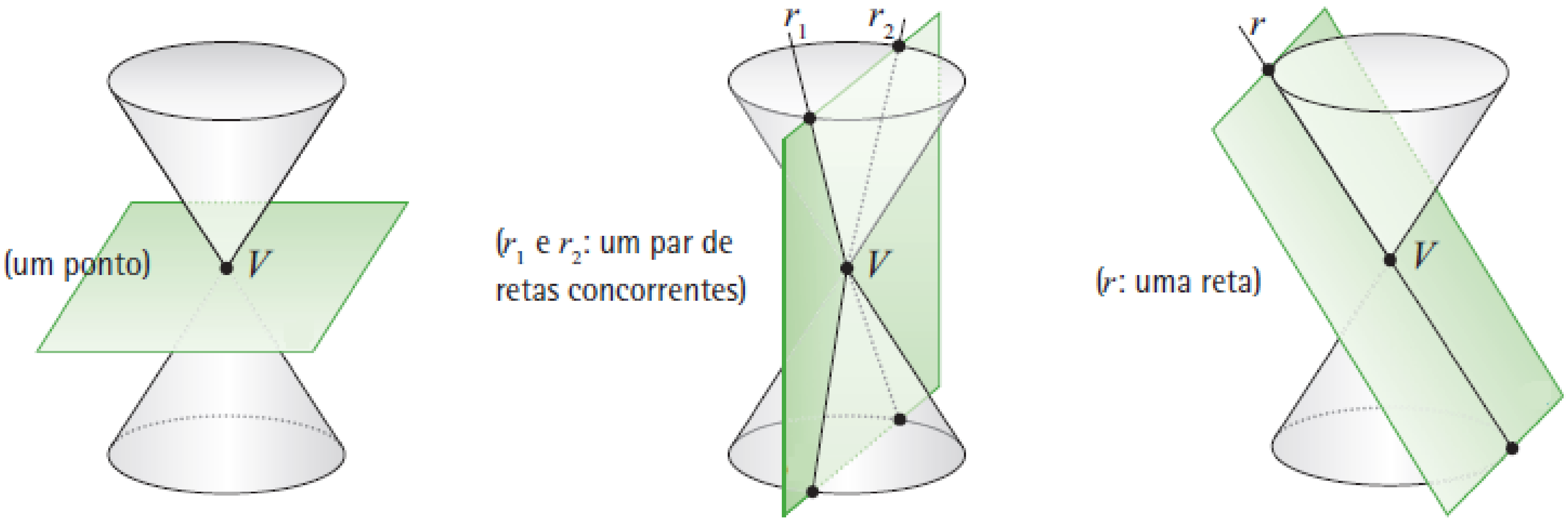


$\alpha < \theta$ a seção é uma hipérbole



Seções cônicas

Caso o plano π passe pelo vértice do cone obtém-se as cônicas degeneradas:



A cônica parábola

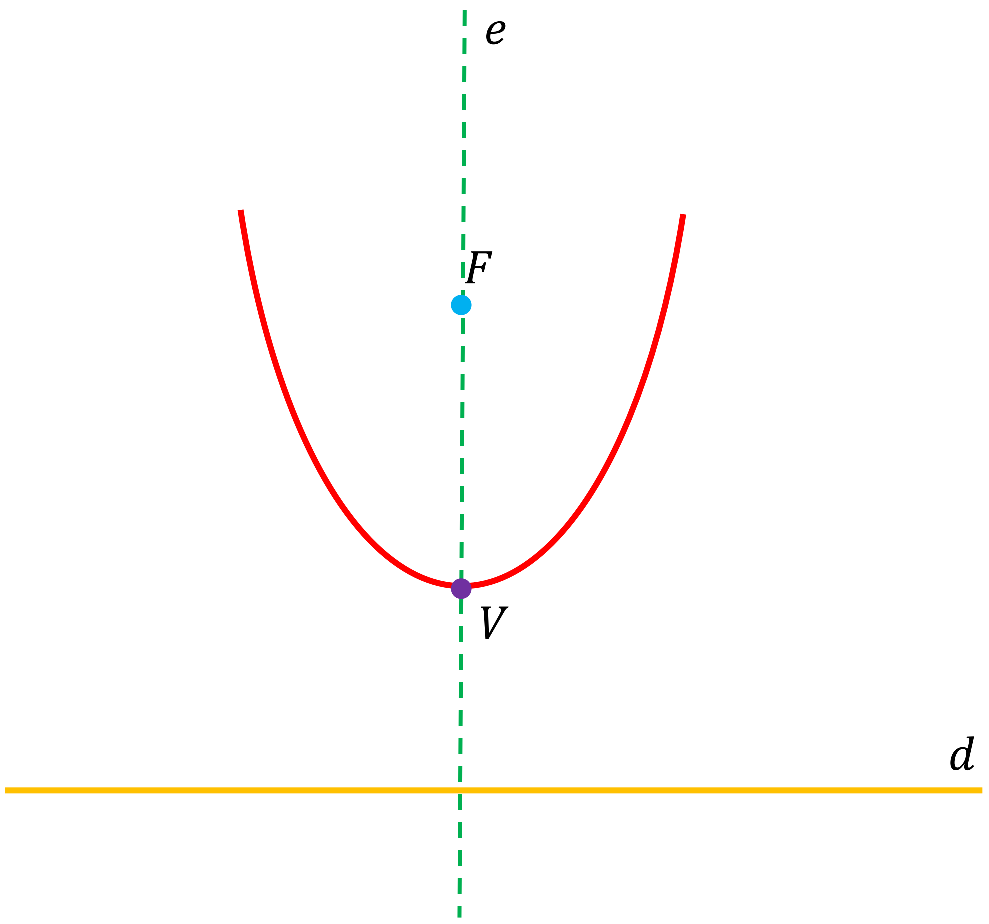
Definição: Considere num plano α uma reta d e um ponto $F \notin d$.

A **parábola** com diretriz d e foco F é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ do plano α equidistantes da reta d e do ponto F, ou seja, a parábola é o conjunto dos pontos $P(x, y)$ tais que

$$\boldsymbol{d(P, F) = d(P, d)}.$$

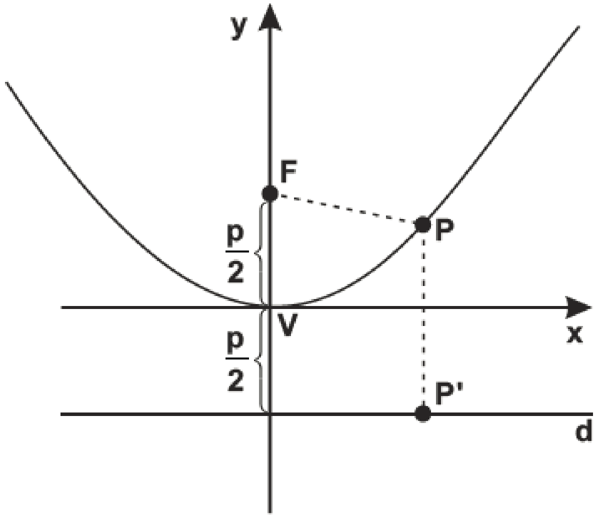
Elementos da Parábola

- Foco: ponto F;
- Diretriz: reta d;
- Eixo ou reta focal: reta e;
- Vértice: ponto de interseção da parábola com o eixo.



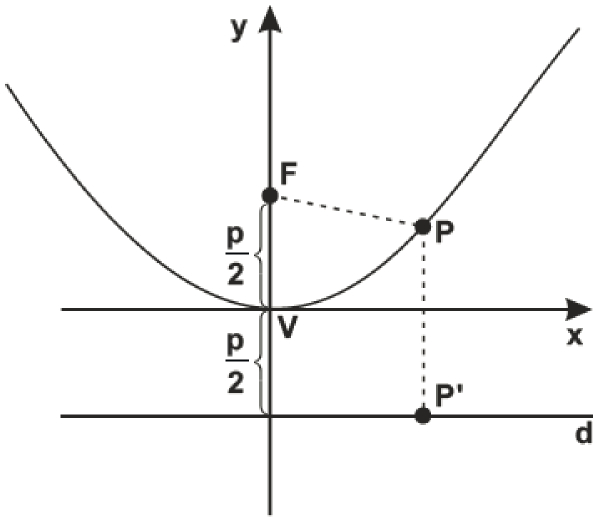
Equação da parábola com vértice V(0,0)

Caso 1: V(0,0) e eixo sobre o eixo y:



Equação da parábola com vértice V(0,0)

Caso 1: V(0,0) e eixo sobre o eixo y:



Temos a equação: $x^2 = \pm 2py,$

onde p é o parâmetro que dá a distância entre o foco F e a diretriz d.

Obs: O sinal da equação depende da posição do foco:

i) Se o foco está acima do vértice, a parábola tem concavidade para cima e sua equação é:

$$x^2 = 2py.$$

ii) Se o foco está abaixo do vértice, a parábola tem concavidade para baixo e sua equação é:

$$x^2 = -2py.$$

Equação da parábola com vértice V(0,0)

Ex. 1: Determine o foco e a equação da diretriz da parábola $x^2 = 8y$.

Equação da parábola com vértice V(0,0)

Ex. 2: Determine a equação da parábolas

a) Com foco em $F(0,1)$ e $V(0,0)$.

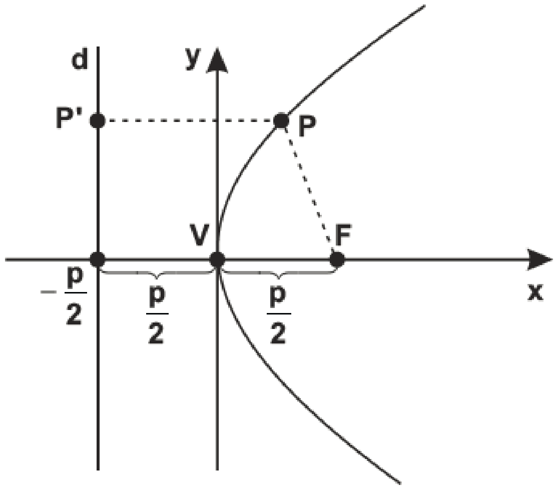
b) Com diretriz $d: y = 3$ e $F(0, -3)$.

c) Vértice $V(0,0)$ e passa pelo ponto $P(-2,5)$.

Equação da parábola com vértice V(0,0)

Caso 2: V(0,0) e eixo sobre o eixo x:

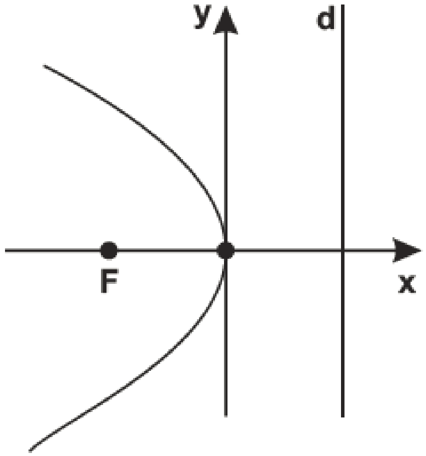
Temos a equação: $y^2 = \pm 2px$



Obs: Novamente, o sinal da equação depende da posição do foco:

i) Se o foco está à direita do vértice, a parábola tem concavidade para direita e sua equação é:

$$y^2 = 2px.$$



ii) Se o foco está à esquerda do vértice, a parábola tem concavidade para esquerda e sua equação é:

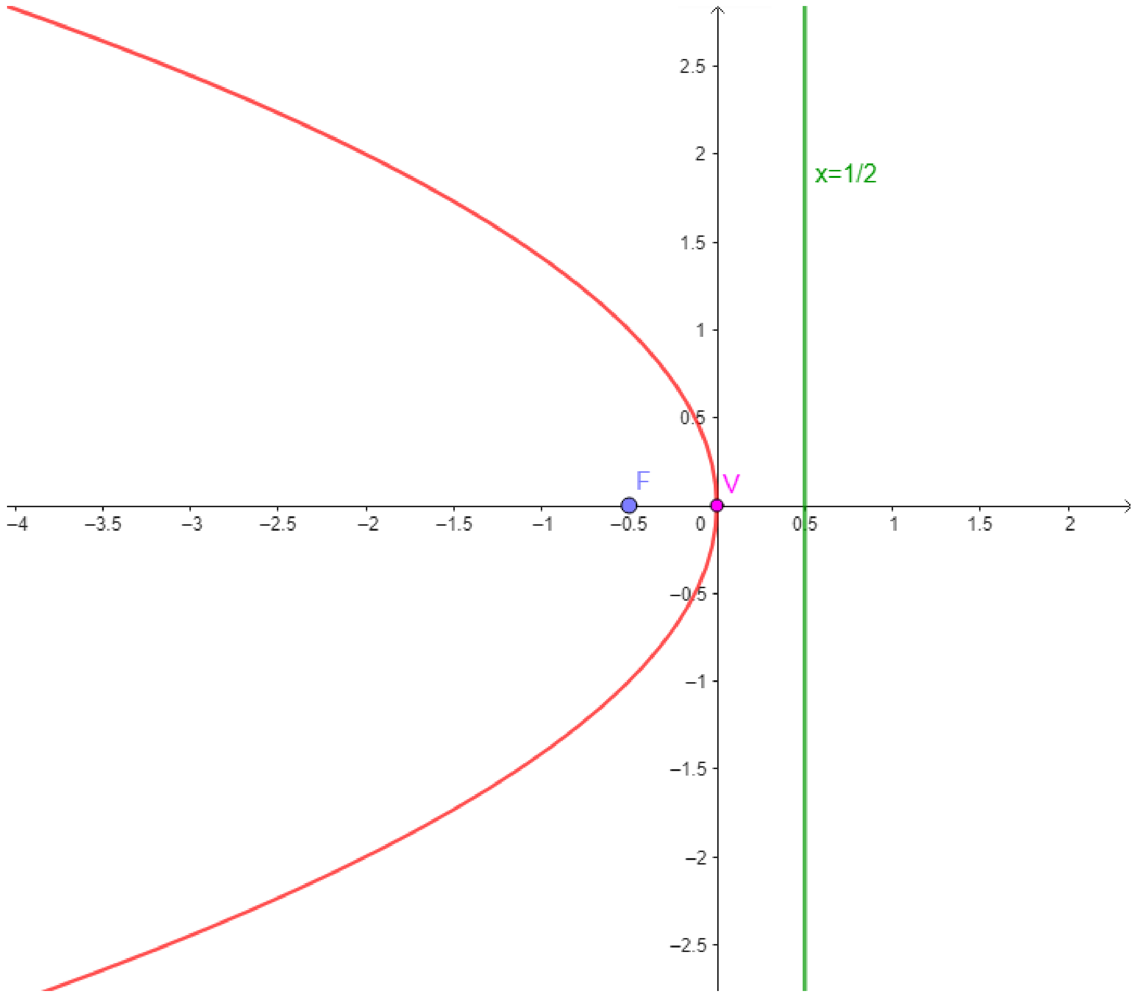
$$y^2 = -2px.$$

Equação da parábola com vértice V(0,0)

Ex. 3: Determine o foco e a equação da diretriz da parábola $y^2 = -2x$.

Equação da parábola com vértice V(0,0)

Ex. 3: Determine o foco e a equação da diretriz da parábola $y^2 = -2x$.



Equação da parábola com vértice V(0,0)

Ex. 4: Determine a equação e represente geometricamente a parábola

a) Com diretriz $d: x = 5$ e $V(0,0)$.

b) Com $V(0,0)$ e $F(-4,0)$.

Equação da parábola com vértice V(0,0)

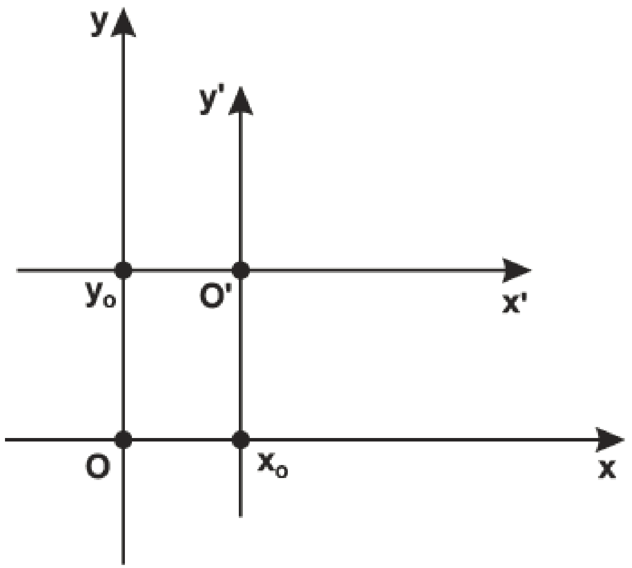
Ex. 5: Determine o foco, a diretriz, o eixo e o vértice das parábolas:

a) $y = -\frac{x^2}{12}$.

b) $y^2 - x = 0$.

Translação de eixos

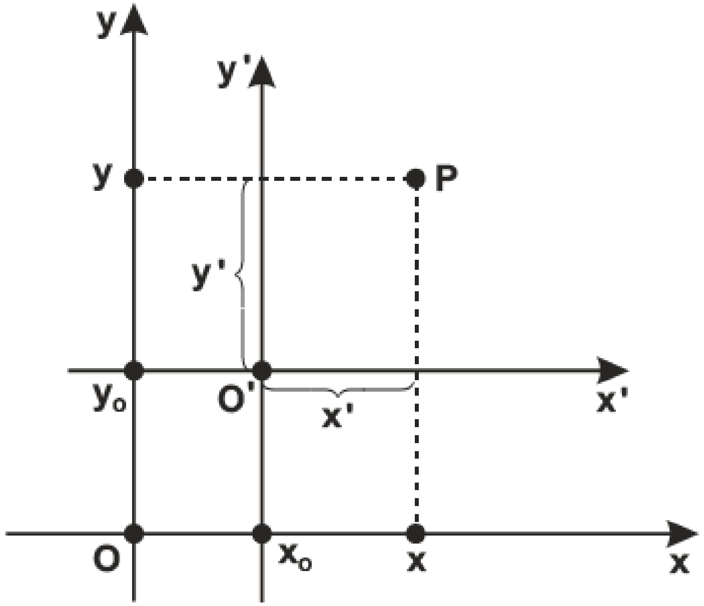
No plano cartesiano xy considere um ponto $O' = (x_0, y_0)$. Introduza um **novo** sistema $x'y'$ tal que O' seja a nova origem e o eixo x' tenha a mesma direção e sentido de x e y' tenha a mesma direção e sentido de y.



Dizemos que o **novo** sistema $x'y'$ com origem O' foi obtido por uma **translação** do **antigo** sistema xy. Em ambos os sistemas se conservam as unidades de medida.

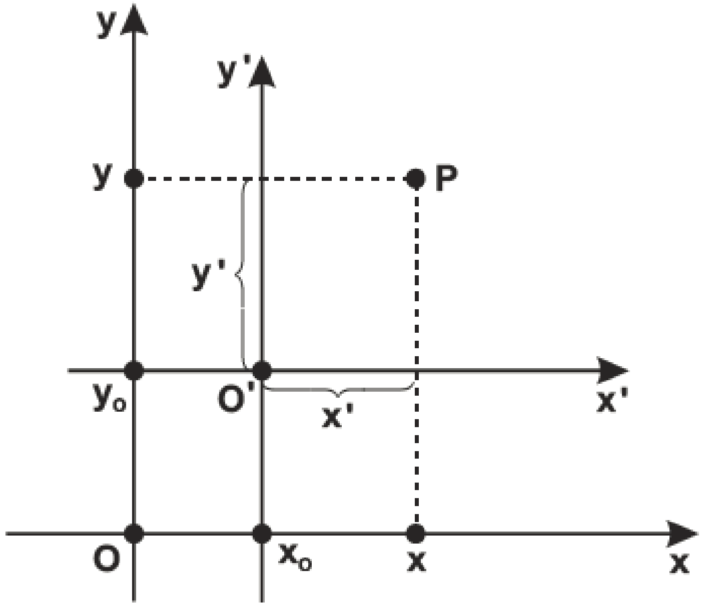
Translação de eixos

Um ponto P do plano tem coordenadas (x, y) em relação ao sistema xy e (x', y') em relação ao sistema $x'y'$.



Translação de eixos

Um ponto P do plano tem coordenadas (x, y) em relação ao sistema xy e (x', y') em relação ao sistema $x'y'$.

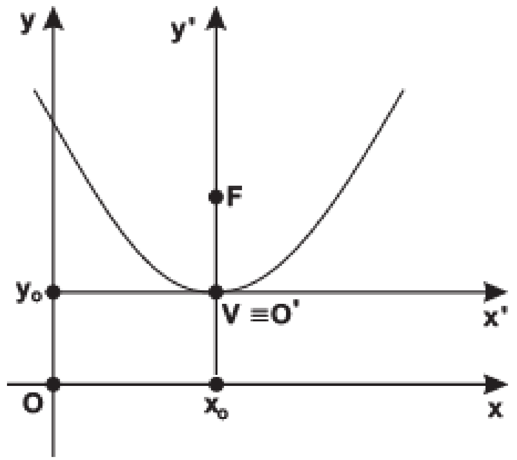


Obtemos facilmente da figura as **fórmulas de translação**: $\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$.

Equação da parábola com $V(x_0, y_0)$

Caso 1: eixo de simetria é paralelo ao eixo y (parábola para cima ou para baixo)

Através de uma translação de eixos, obtemos um novo sistema $x'y'$, cuja origem O' coincide com o vértice $V(x_0, y_0)$.



$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

A equação da parábola no novo sistema $x'y'$ é:

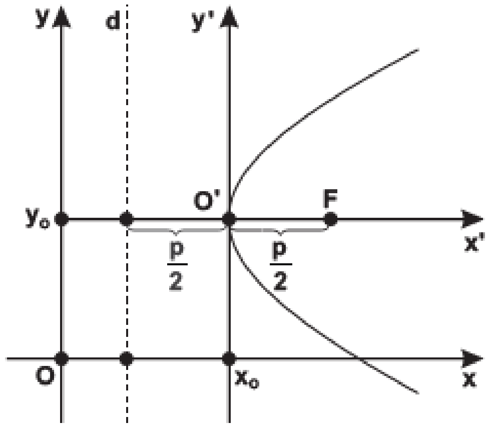
$$(x')^2 = \pm 2p(y'),$$

$$\Rightarrow \quad (x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0),$$

Equação da parábola com $V(x_0, y_0)$

Caso 2: eixo de simetria é paralelo ao eixo x. (parábola para a direita ou esquerda)

Através de uma translação de eixos, obtemos um novo sistema $x'O'y'$, cuja origem O' coincide com o vértice $V(x_0, y_0)$.



$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

A equação da parábola no novo sistema $x'O'y'$ é:

$$(y')^2 = \pm 2p(x'),$$

$$\Rightarrow \quad (y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0),$$

Equação na forma explícita

Podemos ainda escrever a equação da parábola na forma explícita:

- Caso 1: parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo y

$$y = ax^2 + bx + c$$

- Caso 2: parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo x

$$x = ay^2 + by + c.$$

Equação da parábola com $V(x_0, y_0)$

Exemplo 6: Determine a equação padrão da parábola e identifique seus elementos:

$a)\quad x^2 - 6x - 4y + 17 = 0$

Solução:

Equação da parábola com $V(x_0, y_0)$

Exemplo 6: Determine a equação padrão da parábola e identifique seus elementos:

b) $y^2 + 6y - 8x + 1 = 0$

Solução: Exercício.

Equação da parábola com $V(x_0, y_0)$

Exemplo 6: Determine a equação padrão da parábola e identifique seus elementos:

c) $y = 4x - x^2$

Solução: Exercício.

Equação da parábola com $V(x_0, y_0)$

Exemplo 6: Determine a equação padrão da parábola e identifique seus elementos:

d) $x + \frac{3y^2}{4} - 9y = 0$

Solução:

Equação da parábola com $V(x_0, y_0)$

Exemplo 7: Determine a(s) equação(ões) da(s) parábola(s) que contém os pontos $\mathrm{A}(0,-3), B(-3,0)$ e $\mathrm{C}(2,5)$.

Solução: