Sequências Numéricas: É uma sucessão de infinitos números reais, organizados em uma determinada ordem: $\{u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_n, \dots\}$ em que:

- $u_n \in \mathbb{R}$ é o termo geral da sequência.
- $n \in \mathbb{N}^*$ é o índice da sequência.

Dizemos que uma sequência é convergente se existir $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} u_n = L$, caso contrário u_n é divergente.

Séries Numéricas: Uma série numérica é a soma dos infinitos termos de uma sequência numérica $u_n : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, denotada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n + \dots$$

Se a sequência de somas parciais for convergente, ou seja, existir S tal que $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ dizemos que a série converge para S e denotamos: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ caso contrário, a sequência S_n for divergente dizemos que a série é divergente.

Propriedades de Séries

1) Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ são séries convergentes, digamos para S e T, então $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + Ky_n)$ é convergente para todo $K \in \mathbb{R}$. Além disso converge para $S + KT$.

2) Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + y_n)$ é divergente.

3) Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ são divergentes, então $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + y_n)$ pode convergir ou divergir.

4) Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, então $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Critério do Termo Geral
Se $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é divergente

⚠ Caso tenhamos $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, a série pode convergir ou divergir

Séries Geométricas: Uma série geométrica é tal que $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \dots = \dfrac{a}{1-q}$ se $|q| < 1$ e é divergente se $|q| \geq 1$

↳ $S_n = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$ 　 $a \to$ primeiro termo da sequência; $q \to$ razão

Critério da Integral para convergência de Séries Numéricas
Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série de termos positivos ($u_n \geq 0$) e decrescentes ($u_{n+1} \leq u_n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$). Considere $f: [1, +\infty)$ uma função contínua, positiva e decrescente tal que $f(n) = u_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. $I = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

I) Se I diverge, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ também diverge.
II) Se I converge, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ também converge.

⚠ O critério da integral não permite encontrar o valor para o qual a série converge.

Série harmônica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é harmônica e divergente

Séries hiper-harmonicas: Uma p-série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leq 1$

Critério da Comparação: Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ séries tais que $0 \leq u_n \leq y_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

I) Se $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ também converge.
II) Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge então $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ também diverge.

Teste da Razão (ou critério de D'Alembert)
Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série tal que $u_n \geq 0$ e considere $L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

I) Se $0 \leq L < 1$ então série converge.
II) Se $L > 1$ então a serie diverge.
III) Se $L = 1$, nada pode ser afirmado sobre a série

Teste da Razão (ou critério de Cauchy)
Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série tal que $u_n \geq 0$ e considere $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$

I) Se $0 \leq L < 1$ então série converge.
II) Se $L > 1$ então a serie diverge.
III) Se $L = 1$, nada pode ser afirmado sobre a série

Teste Leibnitz (exclusivo para Alternadas): Sejam

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$$

séries alternadas tais que:
$u_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$; $u_{n+1} \leq u_n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ e $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
então ambas as alternadas convergem

Séries de termos com sinais Quaisquers
Teorema: Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série de termos com sinais quaisquers se: $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ for convergente então $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ também converge.

Convergência Absoluta e Condicional
Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma de termos com sinais quaisquers. Dizemos que a série é:

- absolutamente convergente quando $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ é convergente
- Condicionalmente convergente quando $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ é divergente e $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente.
- Divergente, quando $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ e $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é divergem

Séries de Funções: São séries cujos termos gerais dependem de uma variável real x, ou seja, são da forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

Ao estudarmos séries de funções, a questão consiste em determinar para quais valores de x a série converge, tal conjunto é chamado de Intervalo de convergência.

Séries de Potências

Quando $u_n(x) = c_n(x-a)^n$ a série de funções é chamada de Séries de Potências:

$$\sum_{n=0} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots +$$

em que $a \in \mathbb{R}$ é dito centro da Série de Potências e c_n dito como coeficientes da série.

Integrais Imediatas

1. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1;$
5. $\int \operatorname{sen}(u)\,du = -\cos(u) + c;$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c;$
6. $\int \cos(u)\,du = \operatorname{sen}(u) + c;$
3. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
7. $\int \sec^2(u)\,du = tg(u) + c;$
4. $\int e^u\,du = e^u + c$
8. $\int \operatorname{cossec}^2(u)\,du = -\operatorname{cotg}(u) + c;$
9. $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + c;$
10. $\int \sec(u)\,du = \ln|\sec(u) + tg(u)| + c;$

Relações Úteis

- $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $tg^2\theta + 1 = \sec^2\theta$
- $1 + \operatorname{cotg}^2\theta = \operatorname{cossec}^2\theta$
- $\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$
- $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2\theta$
- $\operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \operatorname{sen} b \cos a$
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Integrais Por Substituição trigonométrica

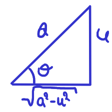
- Quando temos $(a^2-u^2)^{n/2}$, $(a^2+u^2)^{n/2}$ ou $(u^2-a^2)^{n/2}$, $n \in \mathbb{N}$ e $a \neq 0$. Usamos $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ou $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

I O integrando contém a expressão $(a^2-u^2)^{n/2}$:

- $u = a\operatorname{sen}\theta \rightarrow du = a\cos\theta\,d\theta$:

$$(a^2-u^2)^{n/2} = (a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta)^{n/2} = [a^2(1-\operatorname{sen}^2\theta)]^{n/2} \Rightarrow$$
$$= (a^2\cos^2\theta)^{n/2} = a^n\cos^n\theta$$

Como $\operatorname{sen}\theta = u/a$, então $\theta = \operatorname{arcsen}(u/a)$

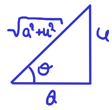


II O integrando contém a expressão $(a^2+u^2)^{n/2}$:

- $u = a\,tg\theta \rightarrow du = a\sec^2\theta\,d\theta$:

$$(a^2+u^2)^{n/2} = (a^2 + a^2 tg^2\theta)^{n/2} = (a^2(1+tg^2\theta))^{n/2} = (a^2\sec^2\theta)^{n/2} \Rightarrow$$
$$= a^n\sec^n\theta$$

Como $tg\theta = u/a$ então $\theta = \operatorname{arctg}(u/a)$



11. $\int \operatorname{cossec}(u)\,du = \ln|\operatorname{cossec}(u) - \operatorname{cotg}| + c;$

Regras de Derivação: seja $K \in \mathbb{R}$, $u = u(x)$ e $v = v(x)$:

1. $(K)' = 0$
2. $(u^n)' = n u^{n-1} u'$
3. $(Kv)' = Kv'$
4. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
5. $(u \cdot v)' = uv' + u' \cdot v$
6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$
7. $(a^u)' = u' \cdot a^u \ln(a)$
8. $(e^u)' = u' e^u$
9. $(\operatorname{sen}(u))' = u'\cos(u)$
10. $(\cos(u))' = -u'\operatorname{sen}(u)$
11. $(tg(u))' = u'\sec^2(u)$
12. $(\operatorname{cotg}(u))' = -u'\operatorname{cossec}^2(u)$
13. $(\sec(u))' = u'\sec(u).tg(u)$
14. $(\operatorname{cossec}(u))' = -u'\operatorname{cossec}(u)\operatorname{cotg}(u)$
15. $(\operatorname{senh}(u))' = u'\cosh(u)$
16. $(\cosh(u))' = u'\operatorname{senh}(u)$
17. $(tgh(u))' = u'\operatorname{sech}^2(u)$
18. $(\operatorname{cotgh}(u))' = -u'\operatorname{cossech}^2(u)$
19. $(\operatorname{sech}(u))' = -u'\operatorname{sech}(u).tgh(u)$
20. $(\operatorname{cossech}(u))' = -u'\operatorname{cossech}(u).\operatorname{cotg}(u)$
21. $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$
22. $(\log_K u)' = \frac{u'}{u}\log_K e$
23. $(\operatorname{arcsen}(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
24. $(\arccos(u))' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
25. $(\operatorname{arctg}(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$
26. $(\operatorname{arccotg}(u))' = -\frac{u'}{1+u^2}$
27. $(\operatorname{arsec}(u))' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$
28. $(\operatorname{arccsc}(u))' = -\frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

III O integrando contém a expressão $(u^2-a^2)^{n/2}$:

$u = a\sec\theta \rightarrow du = a\sec\theta\,tg\theta\,d\theta$

$$(u^2-a^2)^{n/2} = (a^2\sec^2\theta - a^2)^{n/2} = (a^2(\sec^2\theta - 1))^{n/2} = a^n tg^n\theta$$

Como $\sec\theta = u/a$ então $\theta = \operatorname{arcsec}(u/a)$