



**UDESC**  
UNIVERSIDADE  
DO ESTADO DE  
SANTA CATARINA

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS (CCT)

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA (DMAT)

GRUPO COLABORATIVO DE ENSINO DE  
ÁLGEBRA LINEAR\*

## SEGUNDA LISTA DE EXERCÍCIOS DE ALI-001\*\*

### ESPAÇOS VETORIAIS

#### Questões:

1. Seja  $V = \mathbb{R}^2$  o conjunto de todos os pares ordenados de números reais, munido das operações de adição (+) e multiplicação por escalar (.) **usuais**, definidas por:

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b), \quad \alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y).$$

Verifique se os seguintes subconjuntos de  $V$  são fechados para as operações de adição e/ou de multiplicação por escalar:

- a)  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$ .
- b)  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0\}$ .
- c)  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \cdot y \leq 0\}$
- d)  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \cdot y = 0\}$
- e)  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x + 3y \geq 0\}$
- f)  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x + 3y = 0\}$
- g)  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x + 3y = 1\}$
- h)  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = |x|\}$
- i)  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x^2\}$ .
- j)  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = e^x\}$ .
- k)  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$

2. Seja  $V = M(2,2)$  o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem  $2 \times 2$ , munido das operações **usuais** de adição entre matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar. Verifique se os seguintes subconjuntos de  $V$  são fechados para as operações de adição e/ou de multiplicação por escalar:

- a)  $W = \{A \in M(2,2); A \text{ é invertível}\}$ .
- b)  $W = \{A \in M(2,2); A^2 = A\}$ .
- c)  $W = \{A \in M(2,2); A \cdot A^T = 3A\}$ .
- d)  $W = \{A \in M(2,2); A^T + 2A = I\}$ , em que  $I$  é a matriz identidade de ordem  $2 \times 2$ .

\* Professores participantes do Grupo Colaborativo no semestre 2023/2: Graciela Moro, Katiani da Conceição Loureiro e Marnei Luis Mandler.

\*\* Este é um material de acesso livre distribuído sob os termos da licença Creative Commons BY-SA 4.0 2.

- e)  $W = \{A \in M(2,2); A^T + A = O\}$ , em que  $O$  é a matriz nula de ordem  $2 \times 2$ .
- f)  $W = \{A \in M(2,2); AB = BA\}$ , em que  $B \in M(2,2)$  é uma matriz fixada.
- g)  $W = \{A \in M(2,2); A^T \cdot C = -C \cdot A\}$ , em que  $C \in M(2,2)$  é uma matriz fixada.
- h)  $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2); a + b + c + d \geq 0 \right\}$
- i)  $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2); 2a - b + 3d = 0 \right\}$
- j)  $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2); a = 2b - 3c \text{ e } d = -5b + 7c \right\}$
- k)  $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in M(2,2); a, b \in \mathbb{R} \right\}$

3. Seja  $V = \mathbb{R}^2$  o conjunto de todos os pares ordenados de números reais e considere as operações de adição (+) e multiplicação por escalar (.) definidas em  $V$  como:

$$(x, y) + (s, t) = (x + s + 1, y + t - 2),$$

$$\alpha \cdot (x, y) = (\alpha x + \alpha - 1, \alpha y - 2\alpha + 2).$$

- a) Calcule  $u + v$  e  $\alpha \cdot u$  para  $u = (-2, 3)$ ,  $v = (1, -2)$  e  $\alpha = 2$ .
- b) Encontre o elemento  $\vec{0} \in V$  tal que  $u + \vec{0} = u$ , para todo  $u \in V$ .
- c) Dado  $u = (x, y) \in V$ , determine o elemento  $-u$ .
- d) Mostre que  $u + (-u) = -u + u = \vec{0}$  é válido para todo  $u \in V$ .
- e) Verifique se  $V$  é ou não um espaço vetorial com as operações de (+) e (.) dadas acima.

4. Seja  $V = \mathbb{R}^2$  o conjunto de todos os pares ordenados de números reais e considere as operações de adição (+) e multiplicação por escalar (.) definidas em  $V$  como

$$(x, y) + (s, t) = (x + s, 0) \quad \text{e} \quad \alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, 0).$$

Com essas operações,  $V$  é um espaço vetorial? Caso não seja, indique quais axiomas não são satisfeitos.

5. Seja  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$  o conjunto de todos os pares ordenados de números reais cujas abscissas são sempre positivas e considere as operações de adição (+) e multiplicação por escalar (.) definidas em  $V$  como

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y \cdot b) \quad \text{e} \quad \alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, y^\alpha).$$

Responda aos itens abaixo:

- a) Verifique se  $V$  é fechado para as operações acima definidas.
- b) Encontre o elemento  $\vec{0}_V \in V$  tal que  $u + \vec{0}_V = u$ , para todo  $u \in V$ .
- c) Dado  $u = (x, y) \in V$ , determine o elemento  $-u \in V$  tal que  $u + (-u) = \vec{0}_V$ .
- d) Verifique se  $V$  é ou não um espaço vetorial com as operações de (+) e (.) dadas acima. Caso não seja, indique quais axiomas não são satisfeitos.

6. Seja  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x < 0 \text{ e } y < 0\}$  o conjunto de todos os pares ordenados de números reais cujas coordenadas são ambas sempre negativas e considere as operações de adição (+) e multiplicação por escalar (.) definidas em  $V$  como

$$(x, y) + (a, b) = (-xa, -yb) \quad \text{e} \quad \alpha \cdot (x, y) = ((-1)^{\alpha+1}x^\alpha, (-1)^{\alpha+1}y^\alpha).$$

Responda aos itens abaixo:

- Verifique se  $V$  é fechado para as operações acima definidas.
- Encontre o elemento  $\vec{0}_V \in V$  tal que  $u + \vec{0}_V = u$ , para todo  $u \in V$ .
- Dado  $u = (x, y) \in V$ , determine o elemento  $-u \in V$  tal que  $u + (-u) = \vec{0}_V$ .
- Mostre que  $1 \cdot u = u$ , para todo  $u \in V$ .
- Verifique se  $V$  é ou não um espaço vetorial com as operações de (+) e (.) dadas acima. Caso não seja, indique quais axiomas não são satisfeitos.

7. Verifique se o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a um, com coeficientes reais, denotado por  $P_1 = \{a + bx; a, b \in \mathbb{R}\}$ , munido das operações de adição e multiplicação por escalar definidas por:

$$p(x) + q(x) = (a + bx) + (c + dx) = (a + d) + (b + c)x, \\ \alpha(a + bx) = (\alpha a) + (\alpha b)x$$

é ou não um espaço vetorial. Caso não seja, indique quais axiomas não são satisfeitos.

8. Em  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ e } y > 0\}$ , considere as operações **não usuais** de adição e multiplicação por escalar definidas por

$$(x, y) + (a, b) = \left(7xa, \frac{1}{2}yb\right) \quad k(x, y) = (x^k, y^k).$$

- Verifique se existe elemento neutro aditivo em  $V$ , isto é, se existe  $\vec{0}_V \in V$  tal que  $u + \vec{0}_V = u, \forall u \in V$ .
- Dado  $u = (x, y) \in V$ , verifique se existe um elemento oposto aditivo para  $u$ , ou seja, se existe  $-u \in V$  tal que  $u + (-u) = \vec{0}_V$ . Caso exista tal oposto, exiba-o.
- Verifique se é válida ou não a propriedade  $k(u + v) = ku + kv$  para todos  $u, v \in V, k \in \mathbb{R}$ .
- Verifique se é válida ou não a propriedade  $(k_1 + k_2)u = k_1u + k_2u$  para todos  $u \in V, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ .
- Verifique se o conjunto  $W = \{(x, y) \in V; y = 98x^2\}$  é fechado ou não para as operações de adição e/ou de multiplicação por escalar **não usuais** definidas acima.

9. Em cada um dos itens abaixo, verifique se o subconjunto  $W$  é um subespaço do espaço vetorial  $V$  dado, considerando as operações usuais de adição e multiplicação em  $V$ :

- $V = \mathbb{R}^3$  e  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y - z = 0\}$ .
- $V = \mathbb{R}^3$  e  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 7x - 5y - 9z \geq 0\}$ .
- $V = \mathbb{R}^3$  e  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 1\}$ .

- d)  $V = P_2 = \{a + bx + cx^2; a, b, c \in \mathbb{R}\}$  e  $W = \{a + bx + cx^2 \in P_2; a = -9c \text{ e } b = 7c\}$ .
- e)  $V = P_n$  (o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a  $n$ ) e  $W = \{p \in P_n; p(-1) = -p(1)\}$ .
- f)  $V = P_n$  (o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a  $n$ ) e  $W = \{p \in P_n; p(6) = p(2)p(3)\}$ .
- g)  $V = \mathbb{R}^3$  e  $W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = 0 \right\}$ .
- h)  $V = M(3,1)$  e  $W = \{X \in M(3,1); AX = 0\}$ , em que  $A$  é uma matriz de ordem  $3 \times 3$  fixada.
- i)  $V = M(3,1)$  e  $W = \{X \in M(3,1); AX = B\}$ , em que  $A$  é uma matriz de ordem  $3 \times 3$  fixada e  $B$  é uma matriz não nula de ordem  $3 \times 1$  fixada.
- j)  $V = M(2,2)$  e  $W = \{X \in M(2,2); \det(X) = 0\}$ .
- k)  $V = M(2,2)$  e  $W = \{A \in M(2,2); A \text{ é uma matriz antissimétrica}\}$ .
- l)  $V = M(2,2)$  e  $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2); b = a \text{ e } d = -a + 6c \right\}$ .

10. Em cada item, represente  $W$  algebricamente e a seguir verifique se  $W$  é um subespaço vetorial do espaço vetorial  $V$  dado, considerando as operações usuais nele definido.

- a)  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $W$  é o conjunto dos pares ordenados pertencentes à curva  $y = x^3$ .
- b)  $V = M(2,2)$ ;  $W$  é o conjunto de todas as matrizes simétricas de ordem  $2 \times 2$ .
- c)  $V = F(\mathbb{R})$  (o conjunto de todas as funções reais de uma variável real);  $W$  é o conjunto das funções reais pares.
- d)  $V = F(\mathbb{R})$ ;  $W$  é o conjunto dos polinômios de grau exatamente igual a dois.

11. Seja  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ , com as operações de adição (+) e multiplicação por escalar (.) definidas em  $V$  por

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y \cdot b) \quad \text{e} \quad \alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, y^\alpha).$$

Verifique se os subconjuntos abaixo são ou não subespaços vetoriais de  $V$ :

- a)  $W = \{(x, y) \in V; y = e^{-x}\}$
- b)  $W = \{(x, y) \in V; y = |x|\}$
- c)  $W = \{(x, y) \in V; y = 5x\}$
- d)  $W = \{(x, y) \in V; y = x^2\}$
- e)  $W = \{(x, y) \in V; x = \ln(y)\}$

12. Em  $V = \mathbb{R}^3$ , munido com as operações usuais, determine o valor de  $k \in \mathbb{R}$  para o qual o elemento  $v = (k, -105, -k)$  é escrito como uma combinação linear de  $v_1 = (3, 2, -6)$  e  $v_2 = (4, 7, 17)$ . A seguir, exiba tal combinação linear.

13. Em  $V = M(2,2)$ , com as operações usuais, verifique se  $B = \begin{bmatrix} 13 & -19 \\ 17 & -5 \end{bmatrix}$  e  $C = \begin{bmatrix} -39 & 57 \\ -11 & 18 \end{bmatrix}$  podem ser escritas como uma combinação linear de  $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  e  $A_4 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ . Em caso positivo, exiba todas as combinações lineares possíveis e indique, em cada caso, se alguma das matrizes  $A_i$  pode ser descartada, sem causar prejuízo à respectiva combinação linear.

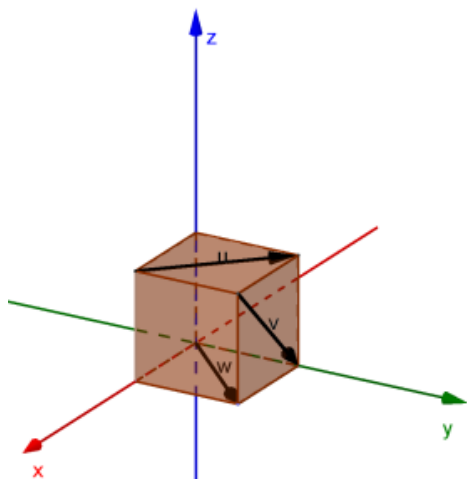
14. Em  $V = M(2,2)$ , munido com as operações usuais, mostre que qualquer matriz simétrica pode ser escrita como combinação linear de  $A_1 = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$  e  $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ .

15. Em  $V = P_3$ , munido com as operações usuais, considere os elementos  $p_1(x) = 1 + x - x^2 + x^3$ ,  $p_2(x) = 1 - 2x + 3x^3$ ,  $p_3(x) = -1 + 2x^2 - x^3$  e  $p_4(x) = 3 - x - 3x^2 + 5x^3$ . Verifique se os elementos  $p(x) = 5 + 7x - 9x^2 + 2x^3$  e  $q(x) = 6 - 4x - x^2 + 8x^3$  podem ser escritos como combinação linear de  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  e  $p_4$ . Em caso positivo, determine tais combinações lineares.

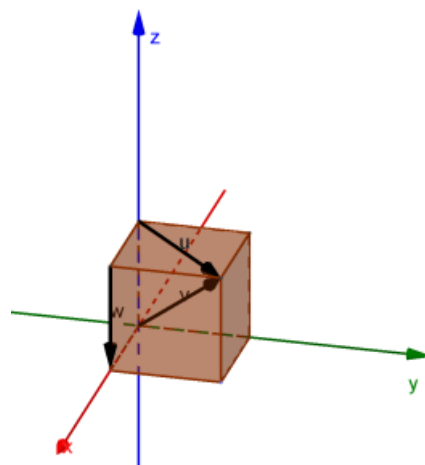
16. Em um espaço vetorial  $V$  genérico, verifique se  $u$  e  $v$  são combinações lineares de  $v_1, v_2, v_3 \in V$ , então  $w = -5u + 8v$  também é uma combinação linear de  $v_1, v_2, v_3$ .

17. Determine se os elementos  $u, v, w$  de  $\mathbb{R}^3$  exibidos nas figuras abaixo são linearmente dependentes ou linearmente independentes. Explique por que.

a)



b)



18. Verifique se o conjunto  $\beta = \{(1, 2, 3), (1, 3, 1), (0, 3, 1), (1, 4, 5)\}$  é LI ou LD.

19. Dados os elementos  $v_1 = (2, -1, 3)$ ,  $v_2 = (-1, 0, -2)$  e  $v_3 = (2, -3, 1)$ , verifique se  $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$  é LI ou LD. Caso seja LD, escreva um dos elementos como uma combinação linear dos demais.

20. Dado o conjunto  $\beta = \{(1, 1, 3), (1, 2, 1), (0, 1, 3), (1, 4, 5)\}$ , extraia um subconjunto LI de  $\beta$ .

21. Determine se as colunas da matriz  $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & -7 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$  formam um conjunto linearmente

dependente ou independente. A seguir, determine o número de soluções do sistema homogêneo  $AX = 0$ . Existe alguma relação entre a dependência ou independência linear das colunas da matriz  $A$  e o número de soluções de um sistema homogêneo?

22. Seja  $\beta = \{u, v, w\}$  um subconjunto LI de um espaço vetorial  $V$ . Verifique se os subconjuntos abaixo são LI ou LD:

- a)  $\alpha = \{u + v - 3w, u + 3v - w, v + w\}$ .
- b)  $\alpha = \{u - 2v + 5w, 3u - 7v - 8w, 2u - 3v + 33w\}$ .
- c)  $\alpha = \{u + 3v - 4w, -2u - 5v - w, 5u - v + 125w\}$ .
- d)  $\alpha = \{\vec{0}, u, v, w\}$ .

23. Em  $V = M(2,2)$ , com as operações usuais, determine se os elementos  $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  e  $A_4 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$  são LI ou LD.

24. Em  $V = P_3$ , munido das operações usuais, determine se os elementos  $p_1(x) = 1 + x - x^2 + x^3$ ,  $p_2(x) = 1 - 2x + 3x^3$ ,  $p_3(x) = -1 + 2x^2 - x^3$  e  $p_4(x) = 3 - x - 3x^2 + 5x^3$  são LI ou LD.

25. Considere o subespaço vetorial  $H = \{(x, x, z); x, z \in \mathbb{R}\}$  para responder aos itens abaixo:

- a) interprete geometricamente o conjunto  $H$ .
- b) determine um conjunto de geradores para  $H$ .
- c) verifique se o subespaço vetorial  $H$  é gerado pelos elementos  $(2, 2, 0)$  e  $(-1, 1, 0)$ .

26. Verifique se as igualdades abaixo são verdadeiras ou falsas:

- a)  $\mathbb{R}^3 = \text{ger}\{(1, 2, 3), (-1, -1, 0), (2, 1, -1)\}$ .
- b)  $P_2 = \text{ger}\{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ .

27. Determine o subespaço de  $V = M(2,2)$  que é gerado por  $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  e  $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

28. Considere o subespaço vetorial de  $P_3$  dado por

$$W = \{a + bx + cx^2 + dx^3; c + 3d = 0 \text{ e } a + b - 7d = 0\}$$

- a) Verifique se  $W$  é um subespaço vetorial de  $P_3$ , considerando as operações usuais.
- b) Encontre os geradores de  $W$ .

29. Considere o subespaço  $S$  de  $\mathbb{R}^4$  dado por  $S = \text{ger}\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (-2, 2, 1, 1), (1, 0, 0, 0)\}$
- O elemento  $v = (2, -3, 2, 2) \in S$ ? Justifique sua resposta.
  - Determine a condição algébrica que deve ser satisfeita para que  $v = (x, y, z, t) \in S$ .
  - Encontre uma base e a dimensão para  $S$ .
  - $S = \mathbb{R}^4$ ? Por quê?
30. Encontre os geradores para os subespaços vetoriais de  $M(3,1)$  que são formados por todas as soluções dos seguintes sistemas lineares homogêneos:
- $$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x - y + 5z = 0 \\ 3x - 4y - 7z = 0 \\ -2x + 9y + 14z = 0 \\ 5x - 3y + 6z = 0 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ -x - 2y + 6z = 0 \\ 4x - y - 59z = 0 \end{cases} \end{array}$$
31. Sejam  $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2); a + b + c = 0 \right\}$  e  $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2); b + 2d = 0 \right\}$  dois subespaços vetoriais de  $M(2,2)$ . Determine os geradores para  $U, W$  e  $U \cap W$ .
32. Para quais valores de  $k \in \mathbb{R}$  os elementos  $\{(1, 2, 0, k), (0, -1, k, 1), (0, 2, 1, 0), (1, 0, 2, 3k)\}$  geram um subespaço tridimensional em  $\mathbb{R}^4$ ?
33. Determine a interseção entre os subespaços  $U = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3; a + b - c + 3d = 0\}$  e  $W = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3; b - 2c + 3d = 0\}$ .
34. Determine uma base e a dimensão para o subespaço
- $$W = \{(x, y, z, w, t) \in \mathbb{R}^5; x - 5z + 2w = 0, y + 2z - 3t = 0, 4x + 10y - 7w = 0\}.$$
35. Seja  $W$  o subespaço vetorial de  $M(2,2)$  dado por
- $$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2); a + 6d = 0 \text{ e } c - 2a - 5b = 0 \right\}.$$
- Determine uma base e a dimensão de  $W$ .
  - Verifique se o conjunto  $\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 24 & -2 \end{bmatrix} \right\}$  também é uma base para  $W$ .
36. Considere  $W$  o subespaço vetorial de  $P_3$  dado por
- $$W = \text{ger}\{1 - 2x^2, 3 + x, 1 - x + x^3, 4 - x + 2x^2 + 2x^3\}.$$
- Determine a condição algébrica do subespaço gerado  $W$ .
  - Exiba uma base e determine a dimensão de  $W$ .

37. Exiba:

- a) um contraexemplo que comprove que a união de dois subespaços vetoriais de um mesmo espaço vetorial não é, necessariamente, um subespaço vetorial.
- b) dois subespaços  $W_1$  e  $W_2$  de  $\mathbb{R}^3$  tais que  $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$ . A seguir, analise se essa soma é direta.

38. Sejam  $U$  e  $W$  subespaços de  $\mathbb{R}^4$  de dimensão 2 e 3, respectivamente. Mostre que a dimensão de  $U \cap W$  é pelo menos igual a 1. O que ocorre se a dimensão de  $U \cap W$  for 2? Essa dimensão pode ser igual a 3? Justifique suas respostas.

39. Sejam  $U$  e  $W$  subespaços de  $P_9$  de dimensões iguais a 7 e 6, respectivamente. Mostre que  $U$  e  $W$  possuem, obrigatoriamente, pelo menos um subespaço tridimensional em comum.

40. Seja  $B \in M(n, n)$  uma matriz não nula fixada e considere  $W = \{A \in M(n, n); A^T + AB = 0\}$ .

- a) Mostre que  $W$  é subespaço de  $M(n, n)$ .
- b) Considerando  $n = 2$  e  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ , determine uma base e a dimensão de  $W$ .

41. Em  $V = \mathbb{R}^3$ , munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, considere os seguintes subespaços vetoriais:

$$U = \text{ger}\{(1, -2, 0), (1, 1, 1)\} \quad \text{e} \quad W = \text{ger}\{(0, 3, 1), (-1, 1, 2)\}.$$

Determine:

- a) a condição algébrica para que  $u = (x, y, z)$  pertença a  $U$ .
- b) a condição algébrica para que  $u = (x, y, z)$  pertença a  $W$ .
- c) uma base e a dimensão para  $U \cap W$  e  $U + W$ .
- d)  $U + W = \mathbb{R}^3$ ? Essa soma é direta?

42. Em  $V = M(2, 2)$ , munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, considere o subespaço vetorial  $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2, 2); a + b = 0 \text{ e } c + d = 0 \right\}$ .

- a) Determine uma base e indique a dimensão de  $S$ .
- b) Construa uma base para  $M(2, 2)$  que contenha a base de  $S$  obtida no item anterior.

43. Em  $V = \mathbb{R}^4$ , munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, considere os seguintes subespaços vetoriais:

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; -6x - 2y + 3z + t = 0\}$$

$$W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; 3x + y - 5t = 0 \text{ e } x + 5y - 3z = 0\}.$$

Determine uma base e a dimensão para:

- a)  $W_1$ .
- b)  $W_2$ .
- c)  $W_1 \cap W_2$ .
- d)  $W_1 + W_2$ .



44. Em  $V = M(2,2)$ , munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, considere os seguintes subconjuntos:

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2) ; b = c \text{ e } a = -b \right\} \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2) ; b = d \right\}$$

a) Verifique se  $W_1$  e  $W_2$  são subespaços vetoriais de  $M(2,2)$ .

b) Determine uma base e a dimensão para:

i)  $W_1$ .

ii)  $W_2$ .

iii)  $W_1 \cap W_2$ .

iv)  $W_1 + W_2$ .

45. Em  $V = P_3$ , munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, considere os seguintes subespaços vetoriais:

$$W_1 = \{p \in P_3; p(-1) + 2p(1) = 0\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{p \in P_3; p(2) = p(0)\}.$$

a) Determine uma condição algébrica para que  $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W_1$ .

b) Determine uma condição algébrica para que  $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W_2$ .

c) Determine uma base e a dimensão para  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_1 \cap W_2$  e  $W_1 + W_2$ .

46. Em  $V = P_3$ , munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, considere os seguintes subespaços vetoriais

$$W_1 = \{p(x) \in P_3; p(0) + p(-1) = 0\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_3; b + 3c - 4d = 0\}.$$

Determine uma base e a dimensão para: a)  $W_1$       b)  $W_2$       c)  $W_1 \cap W_2$       d)  $W_1 + W_2$ .

47. Em  $V = \mathbb{R}^5$ , munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, considere os seguintes subespaços vetoriais:

$$W_1 = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5; -x + z + w = 0, \quad x + w = 0\}$$

$$W_2 = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5; -y + z + t = 0\}$$

$$W_3 = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5; -2x + t + 2w = 0\}.$$

a) Determine uma base e a dimensão para  $W_1 \cap W_2 \cap W_3$ .

b) Determine uma base e a dimensão para  $W_1 + W_3$ .

c)  $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^5$ ? Essa soma é direta?

48. Em  $V = P_3$ , munido das operações usuais de adição e de multiplicação por escalar, considere os seguintes subespaços vetoriais  $W = \{p \in P_3; p(0) = 0\}$  e

$$U = \text{ger}\{1 + 2x + x^2, -1 + 2x^2 + 3x^3, -1 + 4x + 8x^2 + 9x^3\}$$

a) Determine a condição algébrica para que  $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$  pertença a  $U$ .

b) Exiba uma base e a dimensão para:

i)  $U$

ii)  $W$

iii)  $U \cap W$

iv)  $U + W$

49. Em  $V = M(2,2)$ , munido das operações usuais de adição e multiplicação por escalar, considere os subespaços

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2); a - 3b + 5c + 4d = 0 \quad \text{e} \quad 3a - 8b + 2c - 7d = 0 \right\}$$

e 
$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2); -2a + 5b + 4c + d = 0 \right\}.$$

Determine uma base e a dimensão para:

- a)  $W_1$ .      b)  $W_2$ .      c)  $W_1 \cap W_2$ .      d)  $W_1 + W_2$ .

50. Considere os subespaços vetoriais de  $M(2,2)$  dados por  $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2); a + d = 0 \right\}$  e

$$W = \text{ger} \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

- a) Determine uma condição algébrica para que  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  pertença a  $W$ .  
b) Exiba uma base e a dimensão para:    i)  $U$ .      ii)  $W$ .      iii)  $U \cap W$ .      iv)  $U + W$ .

51. Sejam  $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ ,  $\beta_1 = \{(-1, 1), (1, 1)\}$ ,  $\beta_2 = \{(\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1)\}$  e  $\beta_3 = \{(2, 0), (0, 2)\}$  bases ordenadas de  $\mathbb{R}^2$ .

a) Encontre a matrizes que efetuam a mudança:

- i) da base  $\beta_1$  para a base  $\beta$ .      ii) da base  $\beta$  para a base  $\beta_1$ .  
iii) da base  $\beta$  para a base  $\beta_2$ .      iv) da base  $\beta$  para a base  $\beta_3$ .

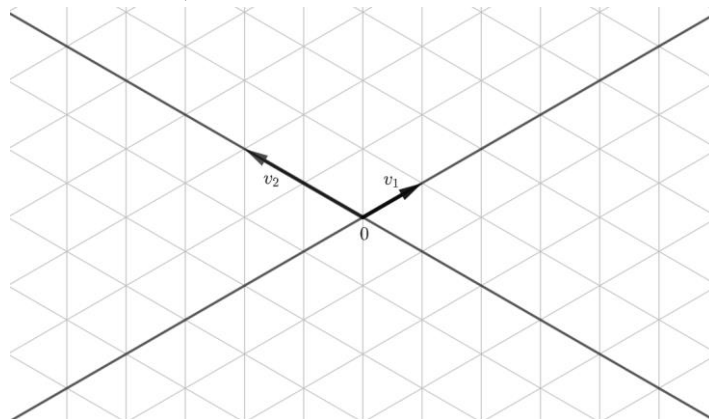
b) Determine as coordenadas do elemento  $v = (3, -2)$  em relação às bases  $\beta$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$ .

c) Se as coordenadas de um elemento  $u$  em relação à base  $\beta_1$  são dadas por  $[u]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ , determine as coordenadas de  $u$  em relação às bases:    i)  $\beta$ .      ii)  $\beta_2$ .      iii)  $\beta_3$ .

52. Sejam  $\alpha = \{u_1, u_2\}$  e  $\beta = \{v_1, v_2\}$  bases de  $\mathbb{R}^2$ , em que  $v_1 = -u_1 + 2u_2$  e  $v_2 = 3u_1 - 5u_2$ .

a) Determine a matriz mudança de base de  $\alpha$  para  $\beta$ .

b) Suponha que  $v, w \in \mathbb{R}^2$  sejam tais que  $[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$  e  $2w = 9u_1 - 17u_2$ . Encontre  $[v]_{\beta}$  e  $[w]_{\beta}$ , a seguir, represente os vetores  $v$ ,  $w$  e  $v + w$  no referencial dado abaixo:



53. Considere  $\alpha = \{v_1, v_2\}$  e  $\beta = \{-v_1 + 4v_2, 2v_1 - 7v_2\}$  duas bases ordenadas de  $\mathbb{R}^2$ .

a) Determine a matriz mudança de base de  $\beta$  para  $\alpha$ .

b) Determine a matriz mudança de base de  $\alpha$  para  $\beta$ .

c) Encontre as coordenadas, em relação às bases  $\alpha$  e  $\beta$ , dos vetores cujas extremidades são os vértices do quadrilátero  $CDEF$  exibido na Figura 1.

d) Represente geometricamente (no referencial dado na Figura 2), o triângulo de vértices  $K$ ,  $L$  e  $M$ , sabendo que as coordenadas, em relação à base  $\beta$ , dos vetores posição desses pontos são, respectivamente,  $[K]_\beta = \begin{bmatrix} -9 \\ -5 \end{bmatrix}$ ,  $[L]_\beta = \begin{bmatrix} 25 \\ 14 \end{bmatrix}$  e  $[M]_\beta = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$ .

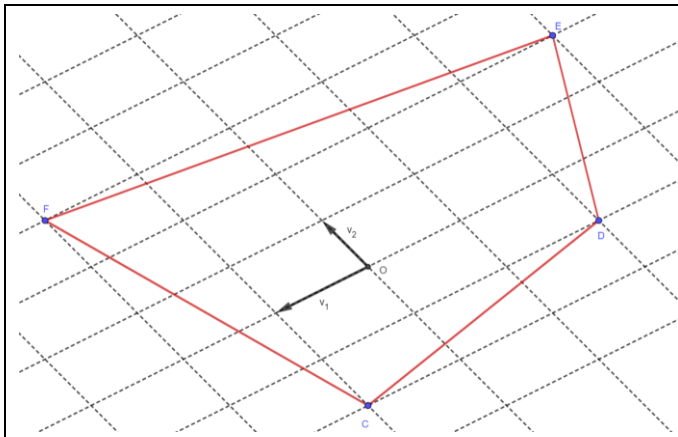


Figura 1: Quadrilátero  $CDEF$  do item (c).

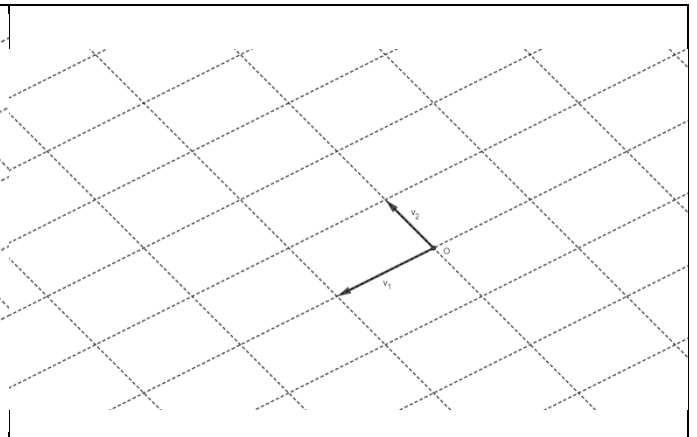


Figura 2: Referencial para o item (d).

54. Em  $P_4$ , considere as bases  $\alpha = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$  e  $\beta = \{2, 2x, 4x^2, 8x^3, 16x^4\}$ .

a) Determine a matriz mudança de base de  $\alpha$  para  $\beta$ .

b) Sejam  $[p]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$  e  $[q]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$ . Encontre  $[p]_\beta$  e  $[q]_\alpha$ .

55. Sejam  $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(2,2); d = 0 \right\}$  um subespaço vetorial de  $M(2,2)$ . Considere as bases  $\alpha$  e  $\beta$  para  $W$  dadas por

$$\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

a) Determine as matrizes mudança de base  $[I]_\beta^\alpha$  e  $[I]_\alpha^\beta$ .

b) Se  $[A]_\beta = \begin{bmatrix} \pi \\ e \\ 0 \end{bmatrix}$ , determine  $[A]_\alpha$ .

c) Se  $[B]_\alpha = \begin{bmatrix} 4 \\ -20 \\ 10 \end{bmatrix}$ , determine  $[B]_\beta$ .

56. Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  bases de  $\mathbb{R}^3$ . Determine a base  $\beta$  sabendo que  $\alpha = \{(1, -1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, -1)\}$  e que a matriz mudança de base de  $\alpha$  para  $\beta$  é dada por

$$[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

57. Seja  $\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$  uma base para um subespaço vetorial de  $M(2, 2)$  e  $\beta$  outra base para esse mesmo subespaço tal que

$$[I]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Determine a base  $\beta$ .

b) Se  $[A]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ , determine  $[A]_{\alpha}$ .

58. Sejam  $V$  um espaço vetorial qualquer, munido das operações usuais de adição e multiplicação por escalar, e  $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$  uma base de  $V$ . Considere os elementos  $u_1 = v_1 + v_2$ ,  $u_2 = 2v_1 + v_2 - v_3$  e  $u_3 = -v_2$ .

a) Determine a matriz  $[I]_{\alpha}^{\alpha}$ .

b) Mostre que  $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$  também é uma base para  $V$ .

c) Determine a matriz mudança de base de  $\beta$  para  $\alpha$ .

d) Encontre as coordenadas do elemento  $w = u_1 + u_2 - u_3$  em relação à base  $\alpha$ .

59. Em  $V = \mathbb{R}^3$  considere as bases  $\beta = \{(1, 2, 3), (0, -1, 2), (-1, 0, 5)\}$  e  $\alpha = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ .

a) Determine a matriz  $[I]_{\alpha}^{\beta}$ .

b) Se  $[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ , determine  $[v]_{\alpha}$ .

c) Determine a matriz  $[I]_{\beta}^{\alpha}$ .

d) Se  $[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ , determine  $[v]_{\beta}$ .

60. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta com argumentos consistentes:

a) A interseção entre dois subespaços vetoriais nunca é vazia.

b) A matriz  $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  pertence ao subespaço  $W = \text{ger} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ .

c) Se  $\{u, v, w\}$  é LI, então  $\{u - v, v - w, u - w\}$  é LD.

d) O subespaço  $W = \text{ger}\{(1, 2, 0), (2, 4, 0)\}$  é um plano em  $\mathbb{R}^3$  que passa pela origem.

e) Em  $V = P_2$ , o elemento  $p(x) = 7 - 9x + 52x^2$  pode ser escrito como uma combinação linear de  $p_1(x) = 1 - 3x + 4x^2$  e  $p_2(x) = 2 - 5x + 10x^2$ .

f) Em  $V = \mathbb{R}^3$ , o conjunto  $\beta = \{(1, 2, 0), (3, 5, -1), (-1, 4, 6)\}$  é linearmente independente.

g) Se  $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$  é uma base de um espaço vetorial  $V$ , então o conjunto

$$\alpha = \{v_1 + v_3, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$$

também é uma base para  $V$ .

h) O subespaço  $W = \{p(x) \in P_3; p(-3) + p(2) = 0\}$  é gerado pelos elementos  $p_1(x) = 1 + 2x$ ;  $p_2(x) = 13x + x^2$  e  $p_3(x) = x^3 - 19x$ .

i) O conjunto  $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$  é sempre uma base para o subespaço gerado  $W = \text{ger}\{v_1, v_2, v_3\}$ .

j) O conjunto  $\beta = \{2, x^2, x + x^2\}$  é uma base para  $P_2$ .

k) Seja  $\alpha = \{2, 1 + x, x + x^2, x^2 + x^3\}$  uma base de  $P_3$ . A matriz de coordenadas do elemento

$$p(x) = 3 + x - x^2 - x^3, \text{ em relação à base } \alpha, \text{ é dada por } [p]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

l) Se  $\alpha$  e  $\beta$  são bases de um espaço vetorial  $V$  qualquer então  $\det([I]_\beta^\alpha \cdot [I]_\alpha^\beta) = 1$ .