Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Funções reais de várias variáveis reais

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 do dia 21 de outubro de 2024.

UDESC

Introdução

- Sabemos que uma função $f: D \to Y$ é qualquer correspondência que a cada elemento $x \in D$ associa um único elemento $f(x) \in Y$.
- Até o presente momento (em CDI-I e CDI-2) estudamos somente funções reais de uma única variável real, ou seja, funções em que o domínio e o contradomínio eram ambos iguais à reta real ($D = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Y} = \mathbb{R}$) ou então subconjuntos (em geral, intervalos fechados) da reta real.
- Agora, vamos começar a generalizar os conceitos de limites, derivadas e integrais para funções reais que dependem de duas ou mais variáveis.
- Com isso, vamos trabalhar com funções $f: D \to Y$ em que

$$D = \mathbb{R}^2 \quad \text{ou} \quad D = \mathbb{R}^3$$

ou, em geral, $D = \mathbb{R}^n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$; ou em subconjuntos desses espaços.

- No entanto, em CDI-2, ainda vamos manter como contradomínio sempre a reta real, isto é

$$\mathrm{Y} = \mathbb{R}.$$

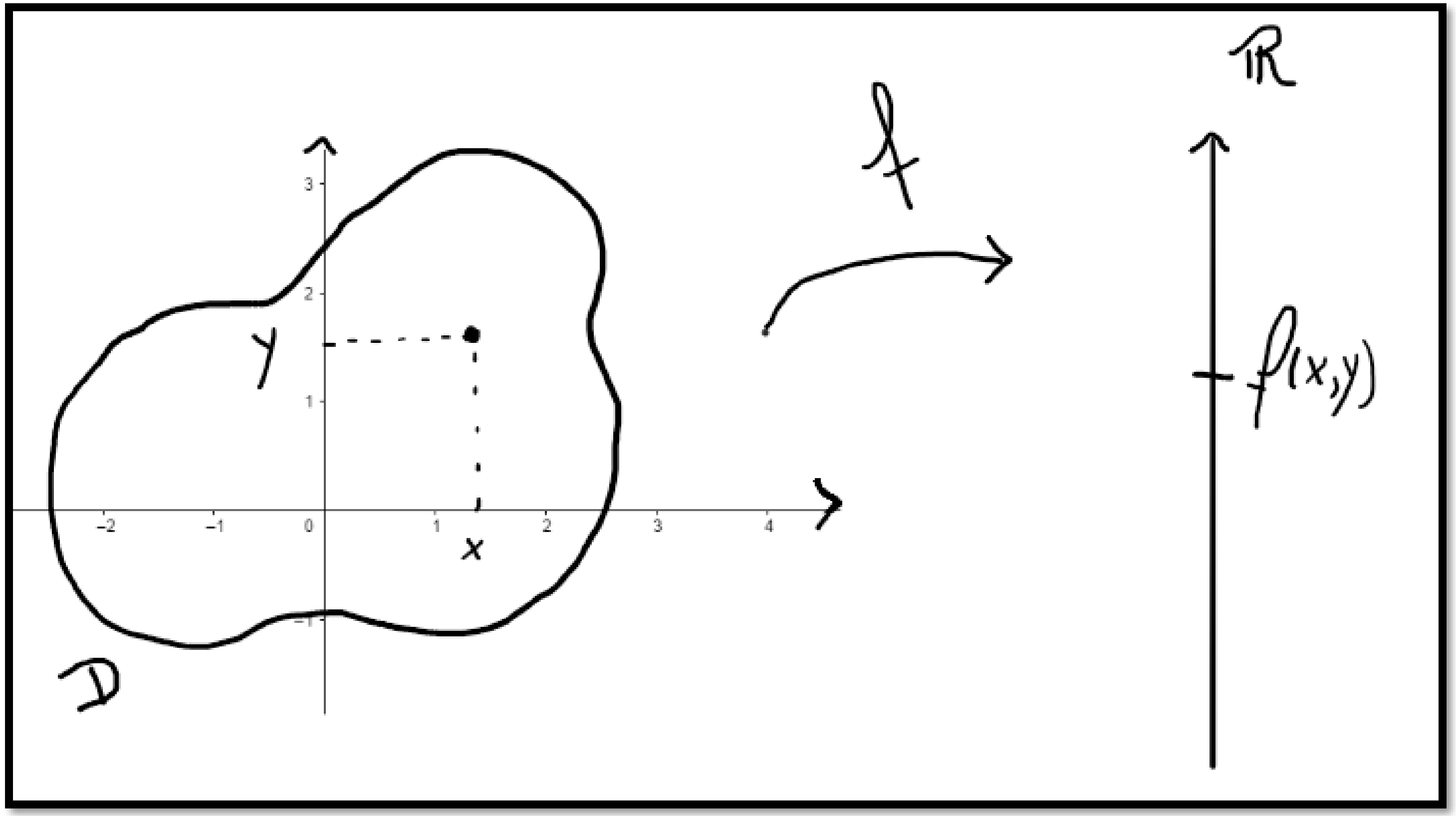
Funções reais de duas variáveis reais

Definição: Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e $(x, y) \in D$.

Uma função real de duas variáveis reais é uma correspondência f que a cada par ordenado $(x, y) \in D$ associa um único número $f(x, y) \in \mathbb{R}$.

Notação: $$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

Representação:



Nomenclatura: D é o domínio de f

$f(x, y)$ é a imagem de (x, y) por f

Funções reais de três ou mais variáveis reais

- De forma análoga, é possível definir uma função de três variáveis reais:

Definição: Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ e $(x, y, z) \in D$.

Uma função real de três variáveis reais é uma correspondência f que a cada tripla coordenada $(x, y, z) \in D$ associa um único número $f(x, y, z) \in \mathbb{R}$.

A generalização para uma função real de n variáveis reais é automática:

Definição: Sejam D um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in D$.

Uma função real de n variáveis reais é uma correspondência f que a cada *n-upla* coordenada $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in D$ associa um único número $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$.

OBS: Todos os conceitos que veremos a partir desse ponto poderão ser aplicados, com alguma adaptação, para uma função real de n variáveis reais.

No entanto, como nosso interesse consiste em manter a interpretação geométrica dos conceitos (e não é possível representar geometricamente $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 4$), vamos nos dedicar essencialmente a funções de duas e/ou três variáveis.

Domínio de uma função

Obter o domínio de uma função (de duas ou mais variáveis) consiste em determinar o conjunto de todos os pontos no qual f está definida.

Para fazer isso, procedemos como em CDI-I, utilizando as condições de existência para as funções.

O interessante será a representação geométrica dos domínios!

Exercício 1) Determine algébrica e geometricamente o domínio das seguintes funções:

a) $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sqrt{25 - 9x^2 - 4y^2} + \ln(2y - 4x^2)$.

b) $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^3) + \frac{\sqrt{3y - x}}{\sqrt{2x + y}}$.

c) $f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = e^{5x - 3y - 2z} - \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}$.

Gráficos de Funções reais de duas variáveis reais

Definição: Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função real de n variáveis reais.
Define-se o gráfico de f como o subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ formando por todos os pontos da forma

$$\left(x_1, x_2, x_3 \dots x_n, f(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)\right),$$

com $(x_1, x_2, x_3 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$.

- Note que, quando $n = 1$, o gráfico de $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, formado por todos os pontos da forma

$$\left(x, f(x)\right) \in \mathbb{R}^2.$$

ou seja, pelos pontos da forma (x, y) em que $y = f(x)$, que representa

uma curva em $\mathbb{R}^2$.

- Quando $n = 2$, o gráfico de $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, formado por todos os pontos da forma

$$\left(x, y, f(x, y)\right) \in \mathbb{R}^3.$$

ou seja, pelos pontos da forma (x, y, z) em que $z = f(x, y)$, que representa

uma superfície em $\mathbb{R}^3$.

Gráficos de Funções reais de duas variáveis reais

- Pelo mesmo raciocínio, quando $n = 3$, o gráfico de $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, formado por todos os pontos da forma $\big(x, y, z, f(x, y, z)\big) \in \mathbb{R}^4$, ou seja, pelos pontos da forma (x, y, z, w), em que $w = f(x, y, z)$.
- Porém, como esse conjunto está contido em $\mathbb{R}^4$, já não é mais possível representá-lo geometricamente.
- O mesmo ocorre para $n \geq 4$. O gráfico de $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pode ser representado apenas algebricamente.
- Portanto, somente é possível representar geometricamente o gráfico de funções reais de uma ou de duas variáveis reais!
- Para traçar o gráfico de uma função de duas variáveis reais, precisamos usar dois eixos (do x e do y) para representar o domínio e um terceiro eixo (do z) para representar as imagens, que denotamos por $z = f(x, y)$.

Exemplos

Exercício 2) Represente geometricamente o gráfico de $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por :

a) $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

c) $f(x,y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$

d) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$

e) $f(x,y) = 12 - 3x - 4y$

f) $f(x,y) = y^2 - 2x^2$

Domínio de uma função

Obter o domínio de uma função (de duas ou mais variáveis) consiste em determinar o conjunto de todos os pontos no qual f está definida.

Para fazer isso, procedemos como em CDI-I, utilizando as condições de existência para as funções. O interessante será a representação geométrica dos domínios!

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1) Determine algébrica e geometricamente o domínio das seguintes funções:

a) $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln(y-x^2)}$.

Solução: Pelas condições de existência da raiz quadrada, do logaritmo e do quociente, temos que

$$(x,y) \in D \iff \begin{cases} 4-x^2-y^2 \geq 0 \\ y-x^2>0 \\ \ln(y-x^2) \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4-x^2-y^2 \geq 0 \\ y-x^2>0 \\ y-x^2 \neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2 \leq 4 \\ y > x^2 \\ y \neq x^2+1 \end{cases}$$

Portanto, algebricamente, obtemos que

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\ x^2+y^2 \leq 4 \text{ e } x^2 < y \neq x^2+1\}.$$

Domínio

Para representar geometricamente o domínio encontrado, teremos que interpretar graficamente as inequações obtidas.

A inequação $x^2+y^2 \leq 4$ é satisfeita por todos os pontos do plano cuja distância até a origem é menor ou igual a 2. Portanto, tais pontos estão no interior (devido ao sinal $<$) ou sobre (devido ao sinal $=$) uma circunferência de raio 2, centrada na origem.

Como os pontos dessa circunferência pertencem ao domínio desejado, a representaremos com um traço contínuo.

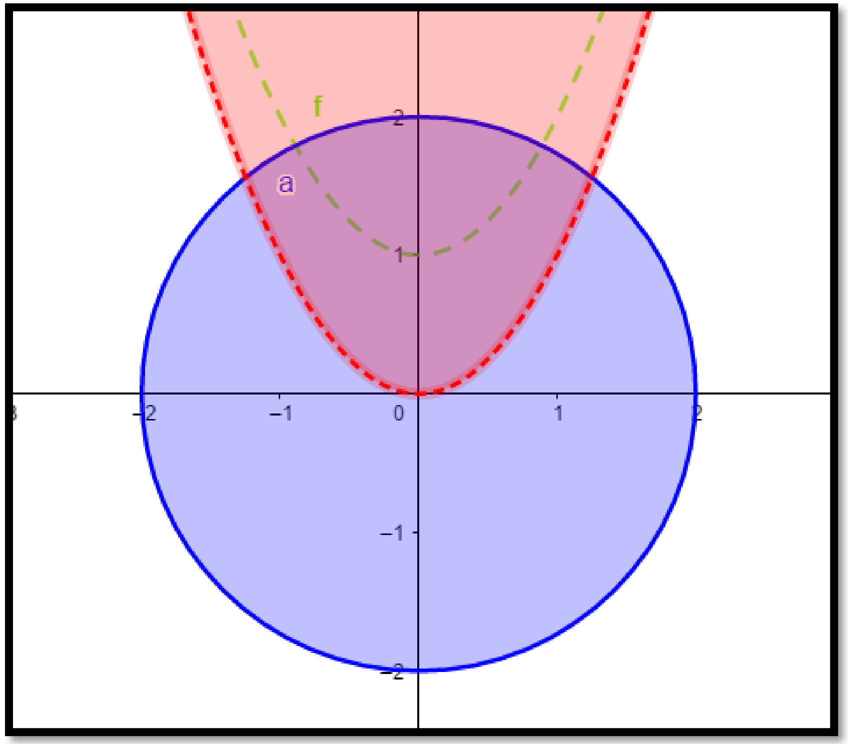
A inequação $y > x^2$ é satisfeita por todos os pontos do plano que estão situados acima (devido ao sinal $>$) da parábola $y = x^2$.

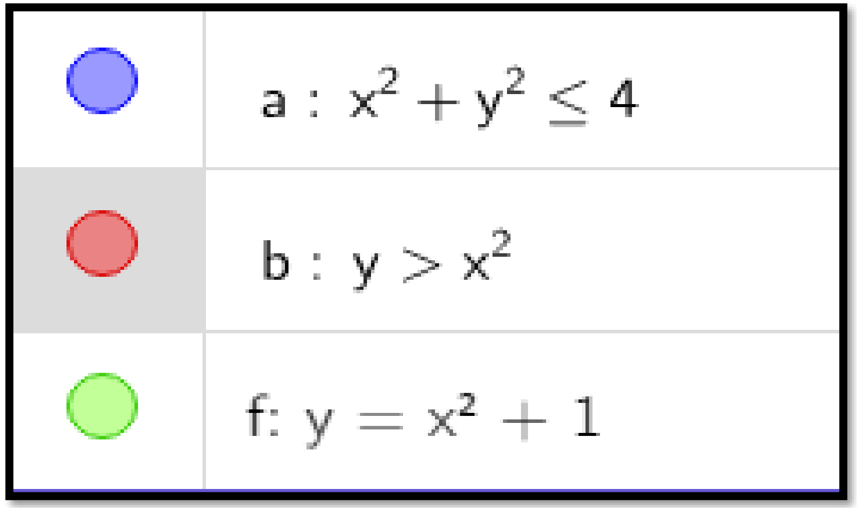
Note que os pontos da própria parábola não pertencem ao domínio desejado, por isso a representaremos com um traço pontilhado.

Já a expressão $y \neq x^2 + 1$ é satisfeita por todos os pontos que NÃO estão sobre a parábola $y = x^2 + 1$. Para indicar isso graficamente, usaremos o traço pontilhado para essa parábola.

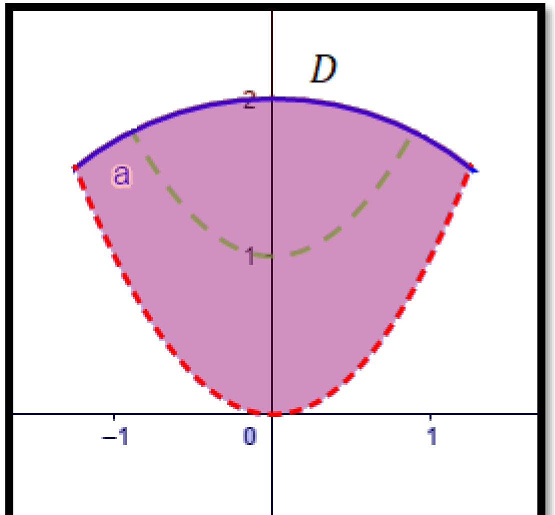
Por fim, note que as três condições acima precisam ser satisfeitas simultaneamente:

Representação geométrica do Exemplo 1a





Fazendo a interseção entre as regiões, encontramos o domínio desejado:



Representação geométrica final do domínio da função do Exemplo 1(a).

Observações

- Note que os pontos que estão sobre a parte tracejada da figura não pertencem ao domínio. É uma situação análoga a um intervalo aberto da reta real, $\mathrm{I} =]a, b[$, cujos extremos a e b não pertencem ao conjunto e são representados por uma 'bola aberta".
- Portanto, a parte pontilhada na representação geométrica significa que o conjunto D é "aberto" na porção das parábolas.
- Com o mesmo raciocínio, o traçado contínuo representa que D é "fechado" na porção da circunferência, ou seja, os pontos da circunferência pertencem ao domínio D.
- Portanto, é importante analisar se as igualdades são válidas ou não para decidir se o domínio D é aberto ou fechado em cada curva que delimitam D.
- Ainda, note que os pontos de interseção entre as parábolas e a circunferência NÃO pertencem ao domínio D!
- Com a interpretação geométrica do domínio D, podemos representá-lo algebricamente de uma forma diferente, indicando qual a variação independente para x e qual a variação dependente para y. Para fazer isso, encontramos a interseção entre a parábola inferior e a circunferência (faça isso como exercício) e obtemos:

Observações:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} < x < \sqrt{\frac{-1+\sqrt{17}}{2}} \;,\; x^2 < y \leq \sqrt{4 - x^2} \;,\; y \neq x^2 + 1\right\}.$$

- Perceba a importância e o significado das desigualdades estritas na representação acima!
- Pela análise gráfica, é possível ver que, por exemplo, o ponto $\left(0, \frac{3}{2}\right) \in D$. Portanto, podemos encontrar facilmente a imagem desse ponto por f, dada por

$$f\left(0, \frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{4 - 0^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}}{\ln\left(\frac{3}{2} - 0^2\right)} = \frac{\sqrt{7}}{2\,(\ln 3 - \ln 2)} \in \mathbb{R}.$$

- Da mesma forma, é possível verificar que o ponto $(1,1) \notin D$. Portanto, f não está definida em tal ponto. Ainda que tentássemos obter a imagem por f desse ponto obteríamos que

$$f(1,1) = \frac{\sqrt{4 - 1^2 - 1^2}}{\ln(1 - 1^2)} = \frac{\sqrt{2}}{\ln(0)} \notin \mathbb{R}.$$

Exemplos

b) $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sqrt{3y - x} + \frac{\cos(xy)}{\sqrt{2x-y}}$.

Solução: A função cosseno não nos impõe nenhuma restrição. Pelas condições de existência da raiz quadrada e do quociente, temos que

$$(x, y) \in D \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3y - x \geq 0 \\ 2x - y > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y \geq \dfrac{x}{3} \\ y < 2x \end{cases}.$$

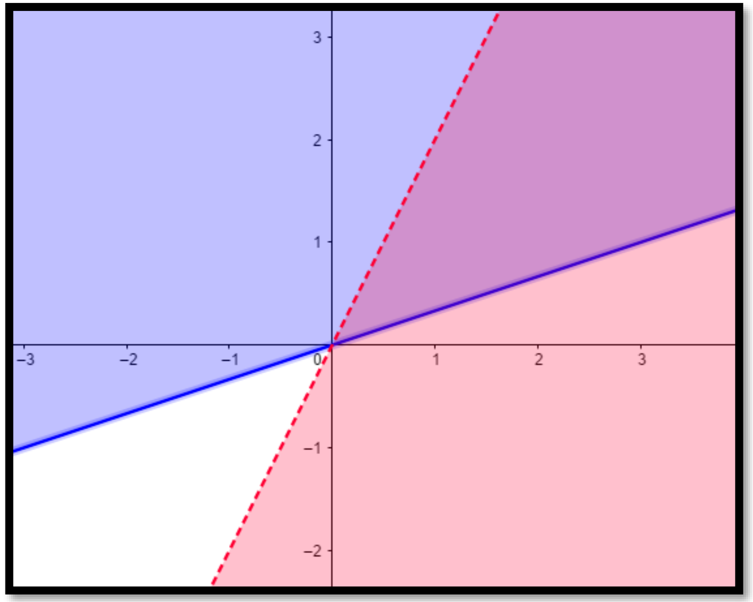
Portanto, algebricamente, obtemos que

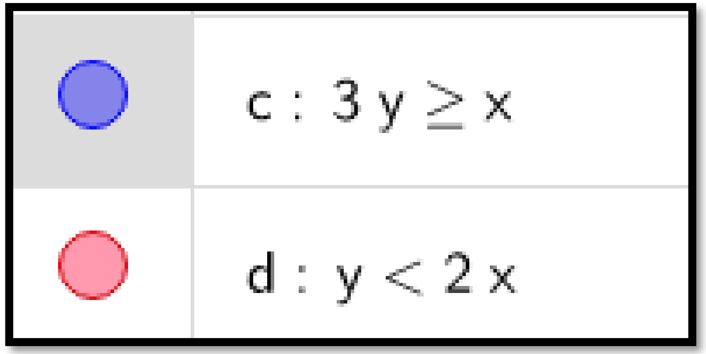
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{x}{3} \leq y < 2x\right\}.$$

Para representar D geometricamente, note que os pontos desejados estão situados sobre ou acima da reta $y = \dfrac{x}{3}$ e simultaneamente abaixo (e somente abaixo) da reta $y = 2x$.

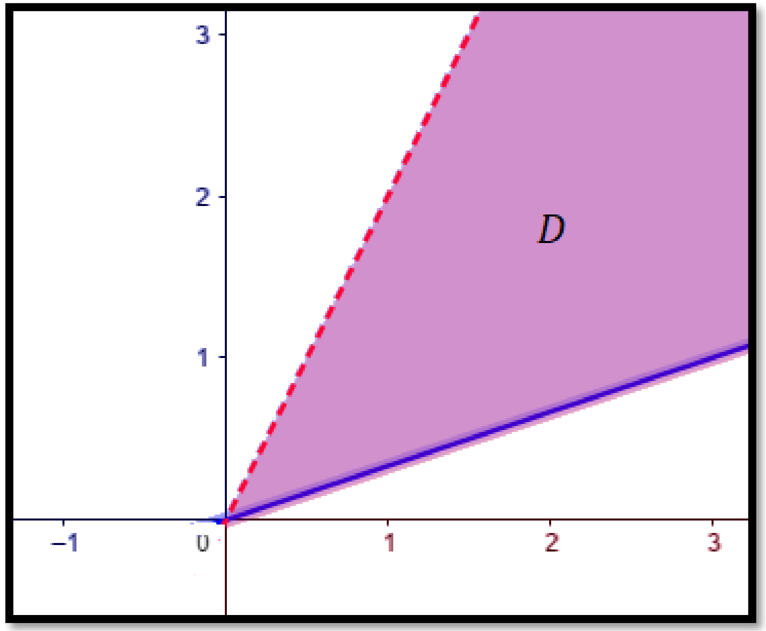
Portanto, a primeira reta é desenhada com traço contínuo e a segunda, com traço pontilhado:

Representação geométrica do Exemplo 1b





Fazendo a interseção entre as regiões, encontramos o domínio desejado:



Representação geométrica final do domínio da função do Exemplo 1(b).

Veja que, nesse exemplo, o domínio é ilimitado!

Exemplos

c) $f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = \frac{e^{xyz} + \text{sen}(x+y-z)}{\sqrt{36-4x^2-9y^2-z^2}}$.

Solução: Os termos com exponencial e seno não nos impõem nenhuma restrição. Pelas condições de existência da raiz quadrada e do quociente, temos que

$$(x,y,z) \in D \quad \Leftrightarrow \quad 36 - 4x^2 - 9y^2 - z^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 + 9y^2 + z^2 < 36.$$

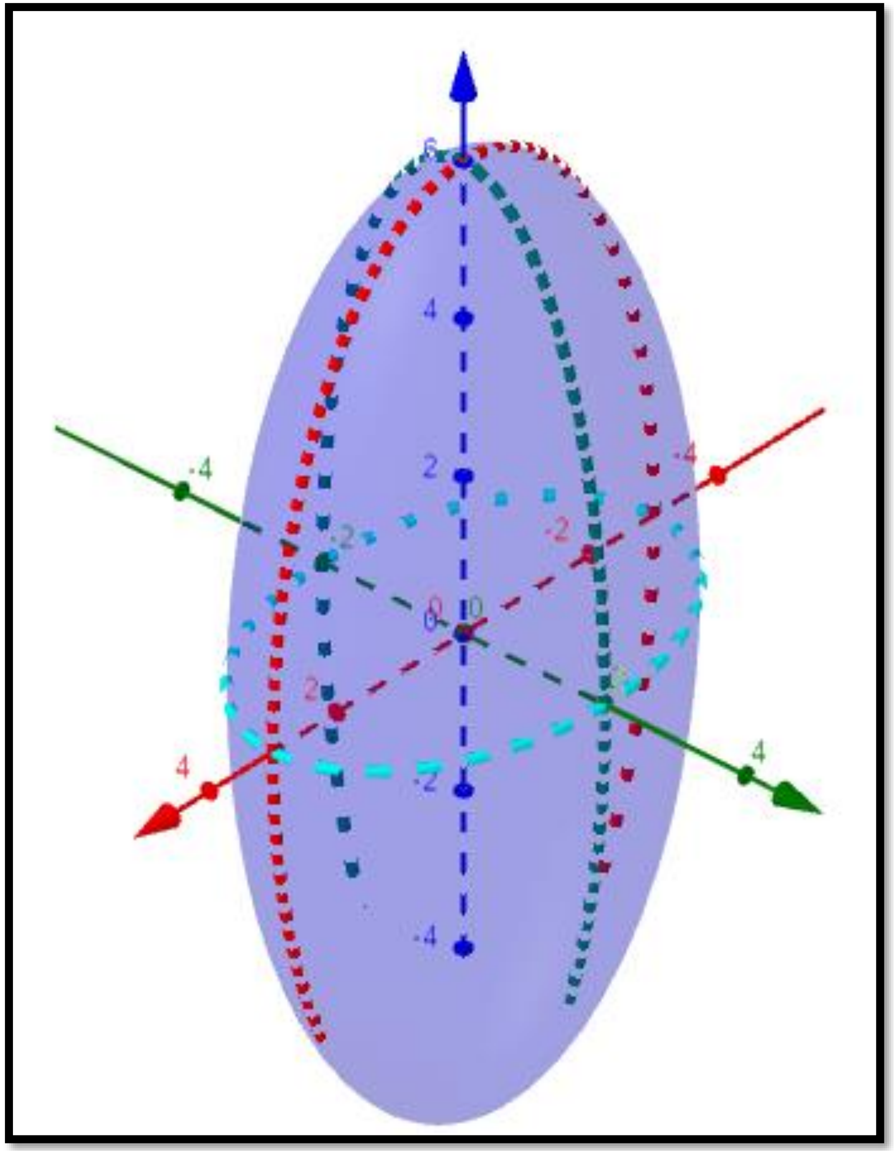
Portanto, algebricamente, obtemos que

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, 4x^2 + 9y^2 + z^2 < 36\}.$$

Para representar D geometricamente, note que os pontos desejados estão situados somente no interior da superfície $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$, que é um elipsoide de equação

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} = 1.$$

Exemplo 1c:



- Imagine que o elipsoide representado acima é todo pontilhado em sua borda!
- Nesse exemplo, o domínio de f é aberto e limitado!

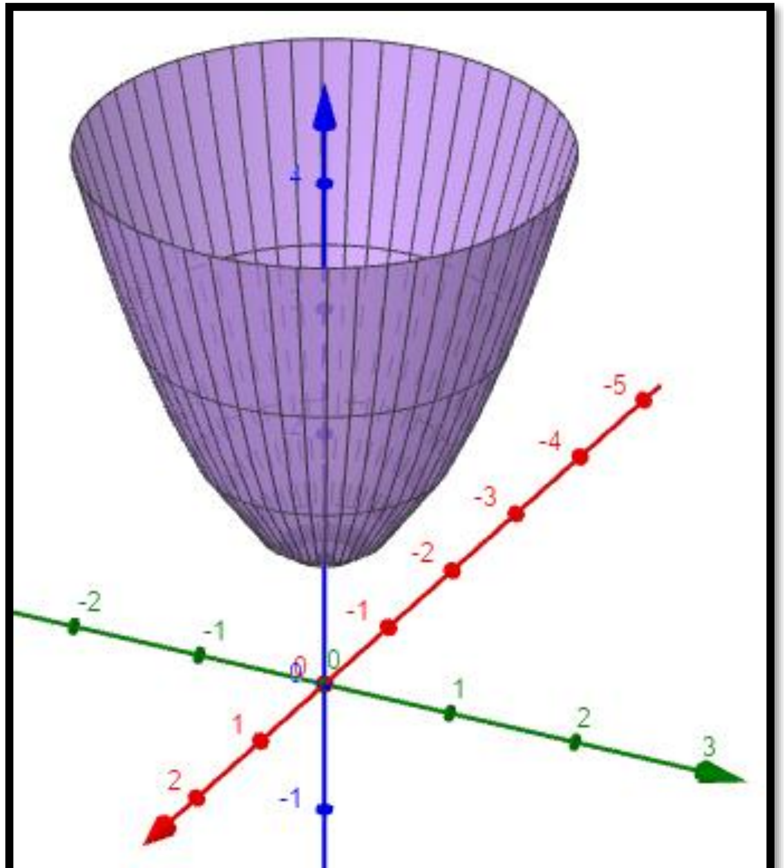
Exemplos

Exemplo 2) Represente geometricamente o gráfico de:

a) $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$.

Solução: Para traçar o gráfico, fazemos $z = f(x, y)$ e obtemos $z = x^2 + y^2 + 1$, que sabemos (por GAN) que é a equação de um paraboloide circular, com concavidade voltada para cima e vértice em $(0,0,1)$.

Portanto, geometricamente o gráfico de f é dado por:



Do ponto de vista algébrico, o gráfico de f é o conjunto

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2;\ z = x^2 + y^2 + 1\}$$

$$= \{(x, y, x^2 + y^2 + 1);\ x, y \in \mathbb{R}\}.$$

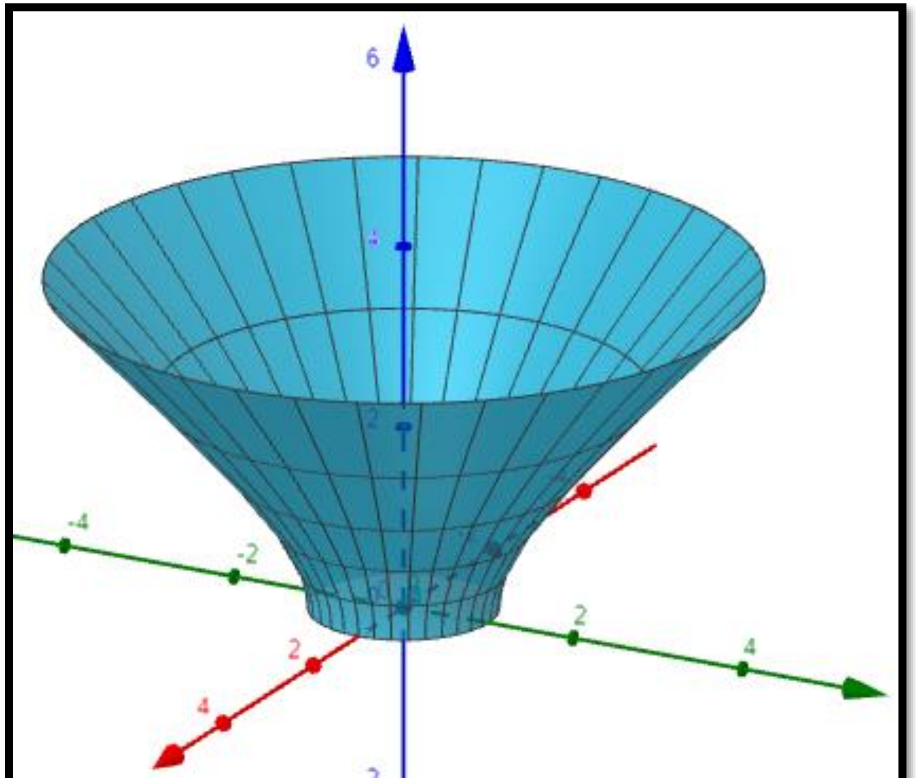
Exemplos

b) $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

Solução: Para traçar o gráfico, fazemos $z = f(x, y)$ e obtemos $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

Manipulando a equação, obtemos que $z^2 = x^2 + y^2 - 1$, ou seja, $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, que sabemos (por GAN) que é a equação de um hiperboloide de uma folha.

No entanto, com temos inicialmente que $z \geq 0$, devemos representar somente a porção do hiperboloide que está situado acima do plano xy:



Do ponto de vista algébrico, o gráfico de f é o conjunto

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2;\ \ z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\}$$

$$= \left\{\left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\right);\ \ x, y \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercício e exemplo

Exercício: Encontre o domínio da função dada no exemplo anterior. Represente geometricamente esse domínio e, a seguir, identifique se ele está presente no gráfico anterior. Por fim, reflita sobre qual a relação geométrica existe entre o domínio e o gráfico de uma função.

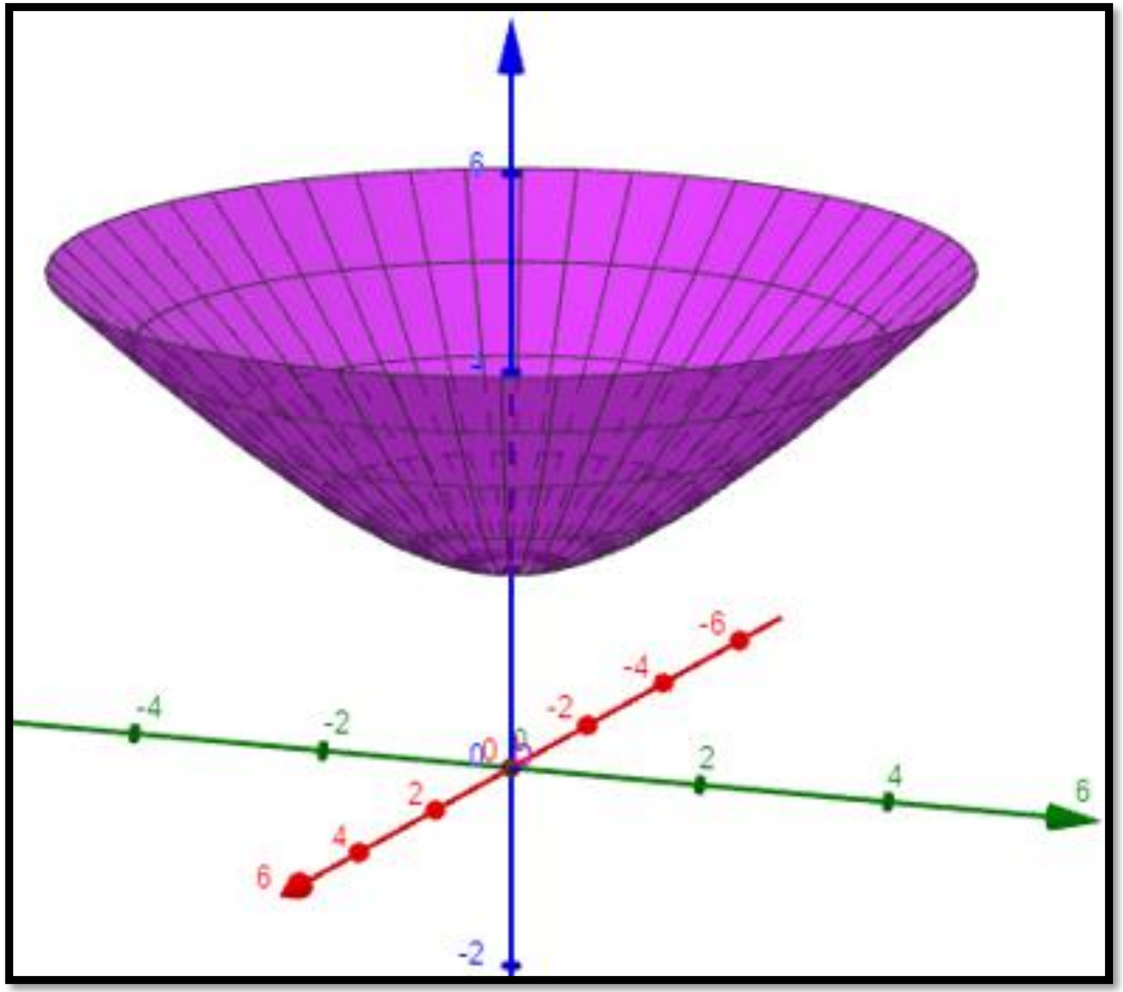
c) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$.

Solução: Para traçar o gráfico, fazemos $z = f(x, y)$ e obtemos $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$. Manipulando a equação, obtemos que $z^2 = 4 + x^2 + y^2$, ou seja, $-x^2 - y^2 + z^2 = 4$, que sabemos (por GAN) que é a equação de um hiperboloide de duas folhas.

No entanto, como temos da equação inicial que $z \geq 0$, devemos representar somente a folha do hiperboloide que está situado acima do plano xy.

Exemplo

Portanto, o gráfico de f é dado por:



Do ponto de vista algébrico, o gráfico de f é o conjunto

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2;\ \ z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}\}$$

$$= \left\{\left(x, y, \sqrt{4 + x^2 + y^2}\right);\ \ x, y \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercício: Encontre o domínio da função do exemplo anterior.

Represente geometricamente o domínio e, identifique sua presença no gráfico acima.

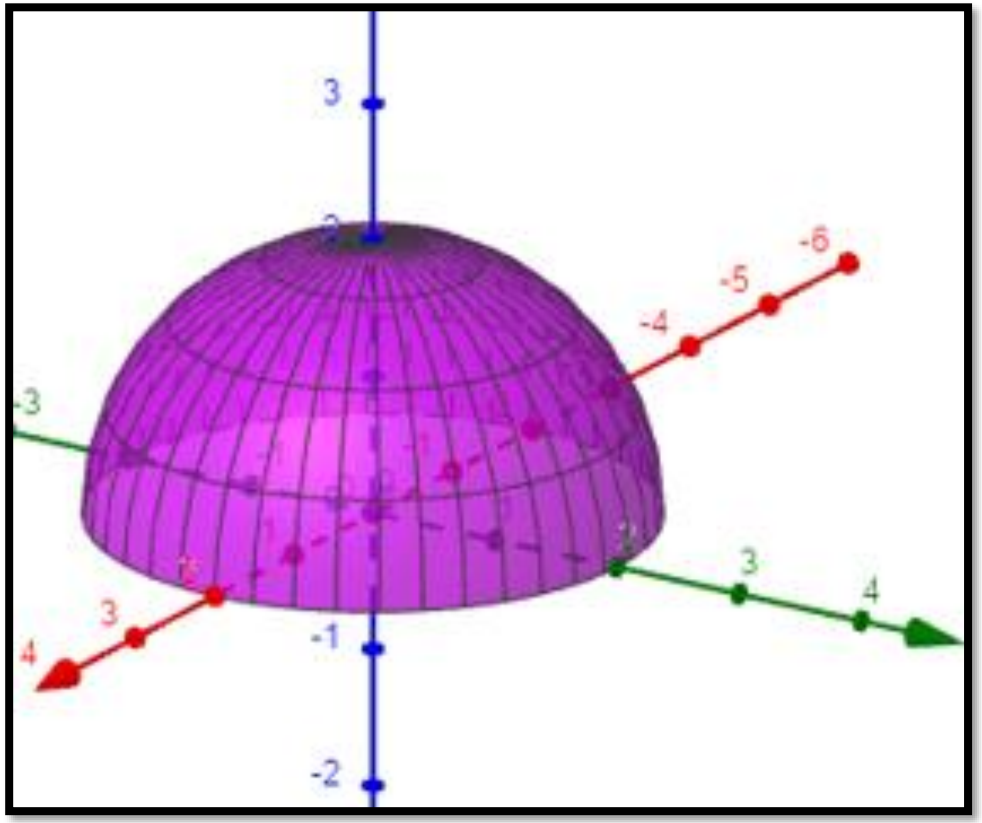
Exemplo

d) $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Solução: Para traçar o gráfico, fazemos $z = f(x, y)$ e obtemos $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Manipulando a equação, obtemos que $z^2 = 4 - x^2 - y^2$, ou seja, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, que é a equação de uma esfera de raio 2, com centro na origem.

No entanto, como temos que $z \geq 0$, representamos somente o seu hemisfério superior:



Do ponto de vista algébrico, o gráfico de f é o conjunto

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2;\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$$
$$= \left\{\left(x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right);\ x, y \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercício: Encontre o domínio da função do item d. Represente-o geometricamente e identifique sua presença no gráfico da função.

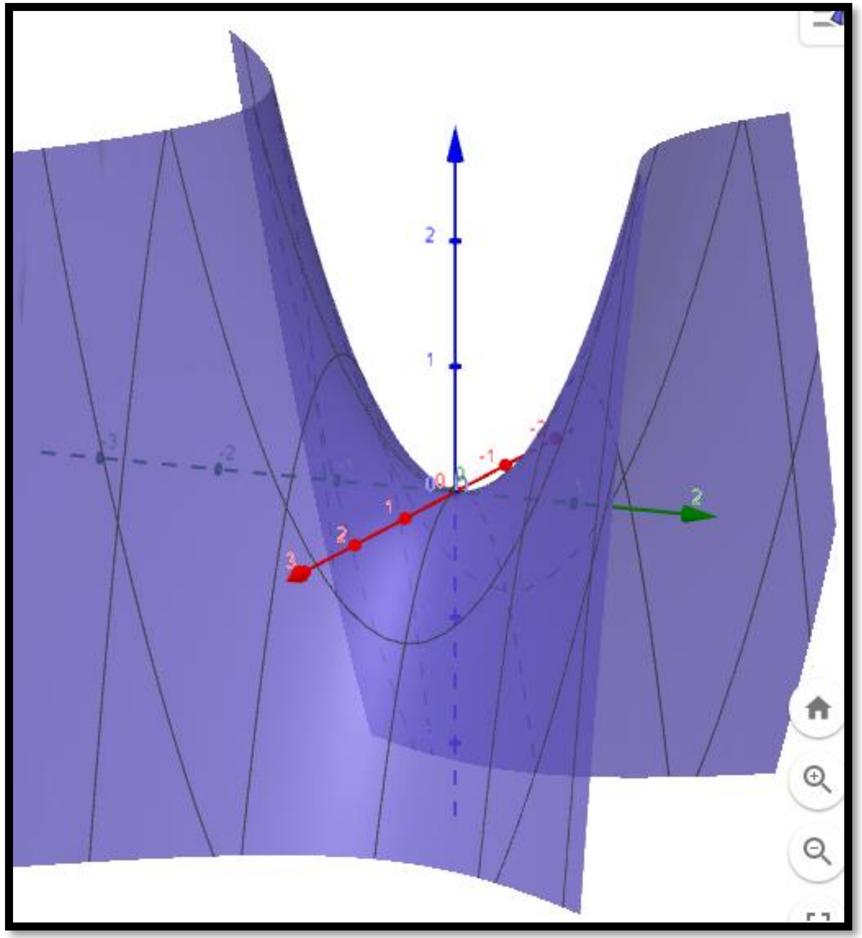
Exemplo

e) $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = -x^2 + y^2$.

Solução: Para traçar o gráfico, fazemos $z = f(x,y)$ e obtemos $z = -x^2 + y^2$.

Não é preciso manipular a equação para perceber que ela é um paraboloide hiperbólico (ou uma sela de cavalo), com vértice na origem, sem nenhuma restrição para z.

Portanto, o gráfico de f é dado por:



Do ponto de vista algébrico, o gráfico de f é o conjunto

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2;\ \ z = -x^2 + y^2\}$$
$$= \{(x,y,-x^2+y^2);\ \ x,y \in \mathbb{R}\}.$$

Opcional: Dica para traçar o gráfico de uma função de duas variáveis

- Nem sempre é simples traçar o gráfico de uma função de duas variáveis.
- O fizemos geralmente para funções relativamente simples, que recaem em superfícies que já conhecidas, como as superfícies quádricas e as superfícies cilíndricas estudadas em GAN.
- Outro procedimento que pode auxiliar é seguir os seguintes passos, :

1) Determinar o domínio da função.

2) Determinar a interseção da superfície com os eixos coordenados.

3) Determinar a interseção da superfície com os planos coordenados (fazendo $z = 0$, $y = 0$ e $x = 0$.

4) Traçar as "curvas de nível" da superfície, ou seja, representar a curva obtida com a interseção entre a superfície e um plano $z = k$, onde k é uma constante.

5) Se necessário, representar as curvas de nível obtidas com $x = k$ e/ou $y = k$.

Exercícios

1) Determine (algébrica e geometricamente) o domínio das funções dadas por:

$$a)\ f(x,y) = \frac{x^3 + y^4 + xy - 7}{2 - \sqrt{x^2 - 4y}}$$

$$b)\ f(x,y) = \sqrt{\frac{x + y + 1}{y + x^2}}$$

$$c)\ f(x,y,z) = \ln(25 - x^2 - y^2 + z^2)$$

2) Represente geometricamente o gráfico das funções:

a) $f(x,y) = 6 - 2x - 3y$

b) $f(x,y) = 2 - \sqrt{4x^2 + 4y^2}$

c) $f(x,y) = 1 + \sqrt{3x^2 + 3y^2}$

$$d)\ f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Da Lista 3: Exercícios 1, 2, 3, 4.