Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Integrais Triplas
em coordenadas cilíndricas e esféricas

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 do dia 02 de dezembro de 2024.

UDESC

Exercício

Exercício 1) Escreva, em coordenadas cartesianas, a integral tripla que permite calcular a massa do sólido que é simultaneamente interior às superfícies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{e} \quad z = \sqrt{3x^2 + 3y^2},$$

sabendo que a densidade de massa é dada por $f(x, y, z) = z^2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Coordenadas Cilíndricas

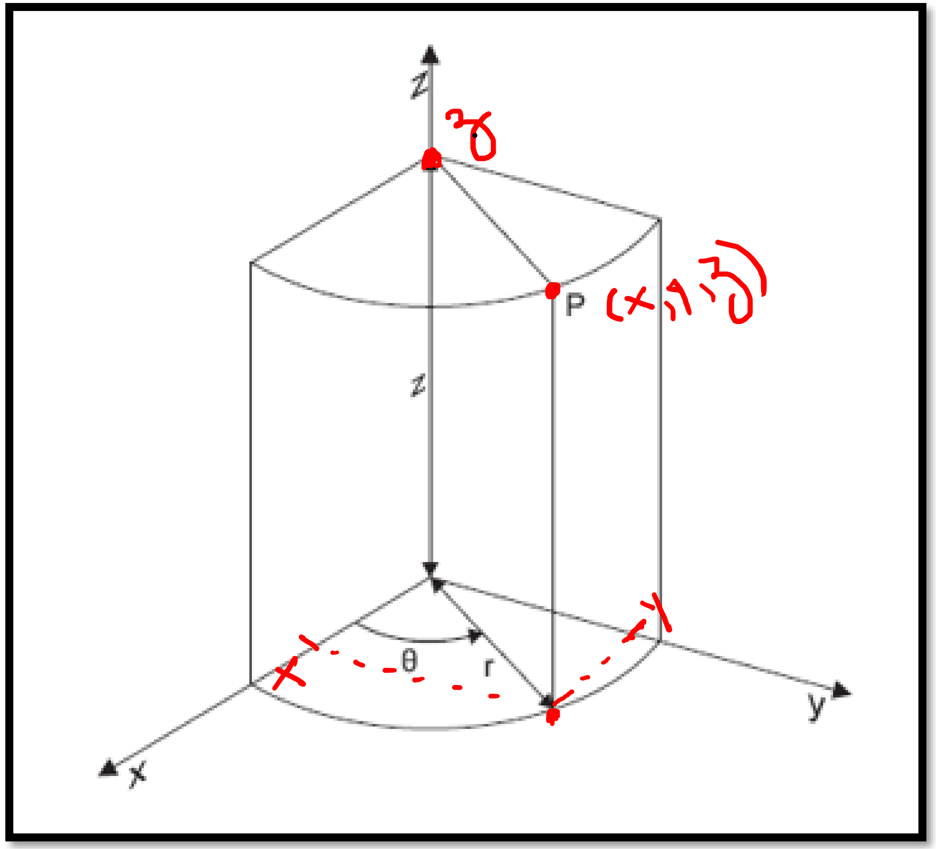
O sistema de coordenadas cilíndricas utiliza o raio polar r, o ângulo polar θ e a altura z para representar um ponto $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

É definido pelas relações:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\text{sen}(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arc\tan\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

Geometricamente:

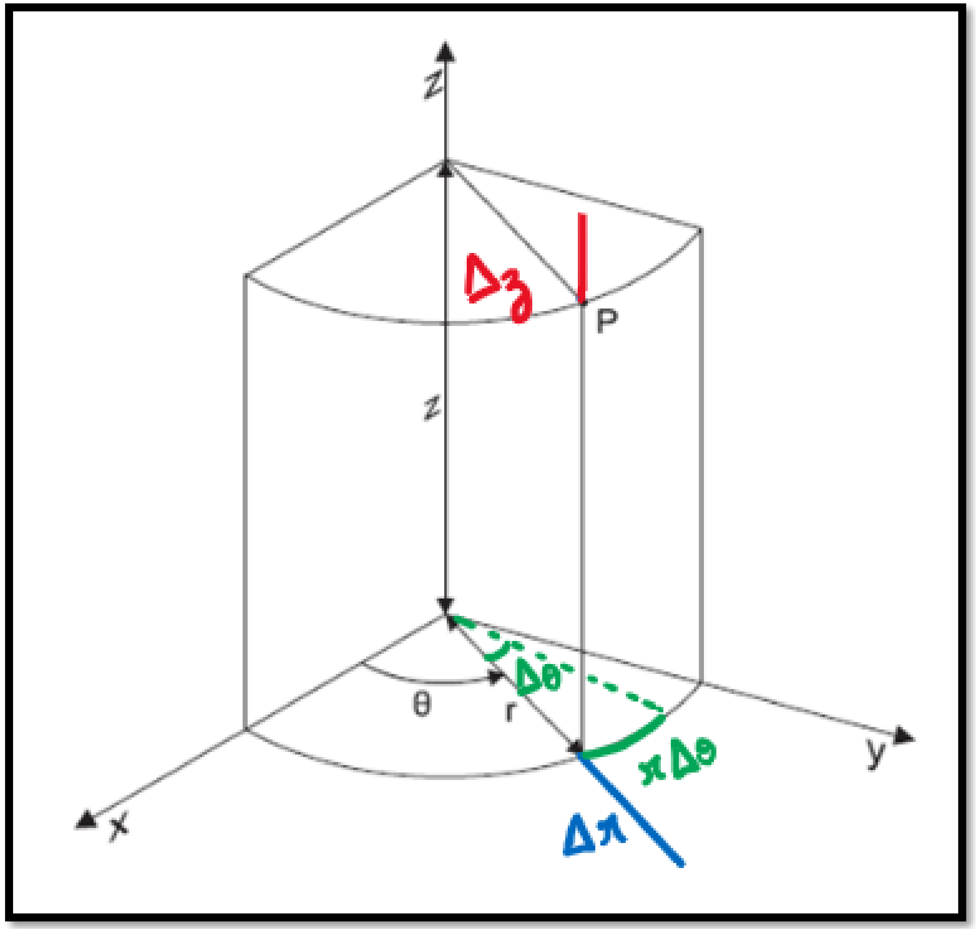


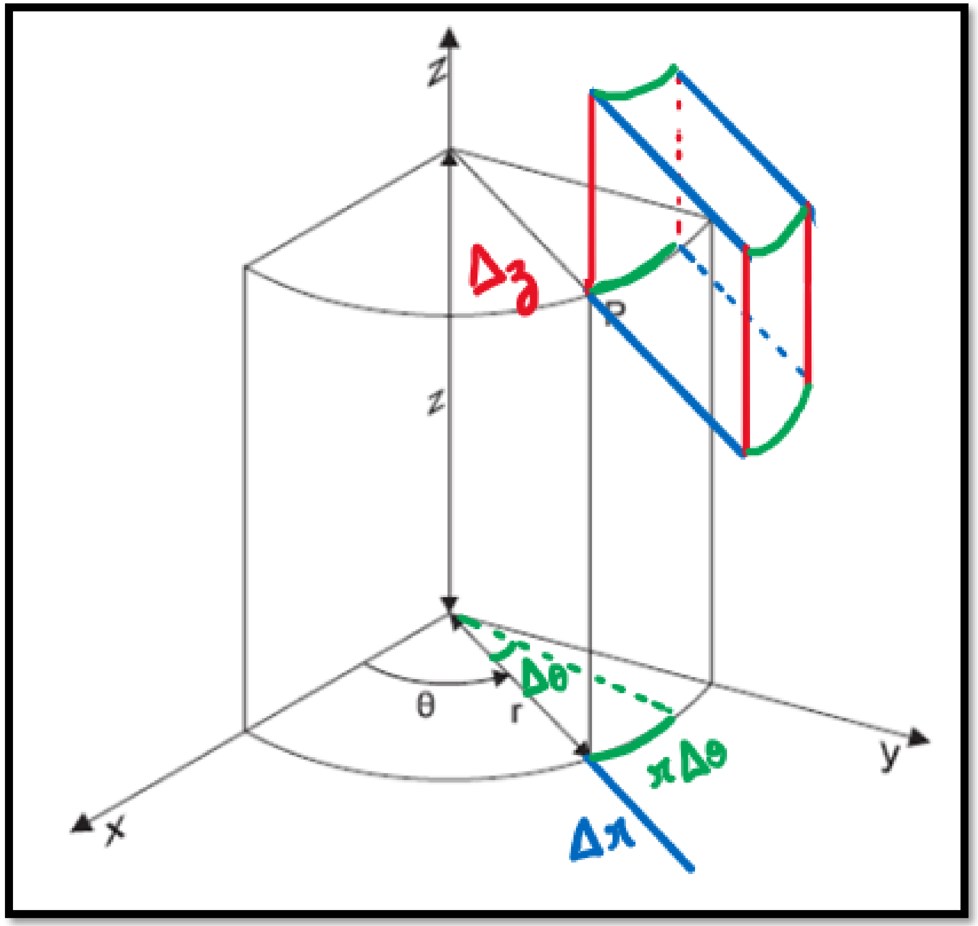
Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas

A utilização de coordenadas cilíndricas pode simplificar algumas integrais triplas!

Para isso, precisamos identificar o elemento infinitesimal de volume em cilíndricas.

Em cartesianas, o elemento infinitesimal corresponde ao paralelepípedo de dimensões $\Delta x, \Delta y$ e Δz, obtido por meio do "fatiamento" do sólido S. Em cilíndricas, fatiamos o sólido por meio de incrementos Δz (na altura), Δr (no raio) e $\Delta\theta$ (no ângulo), de acordo com as figuras:





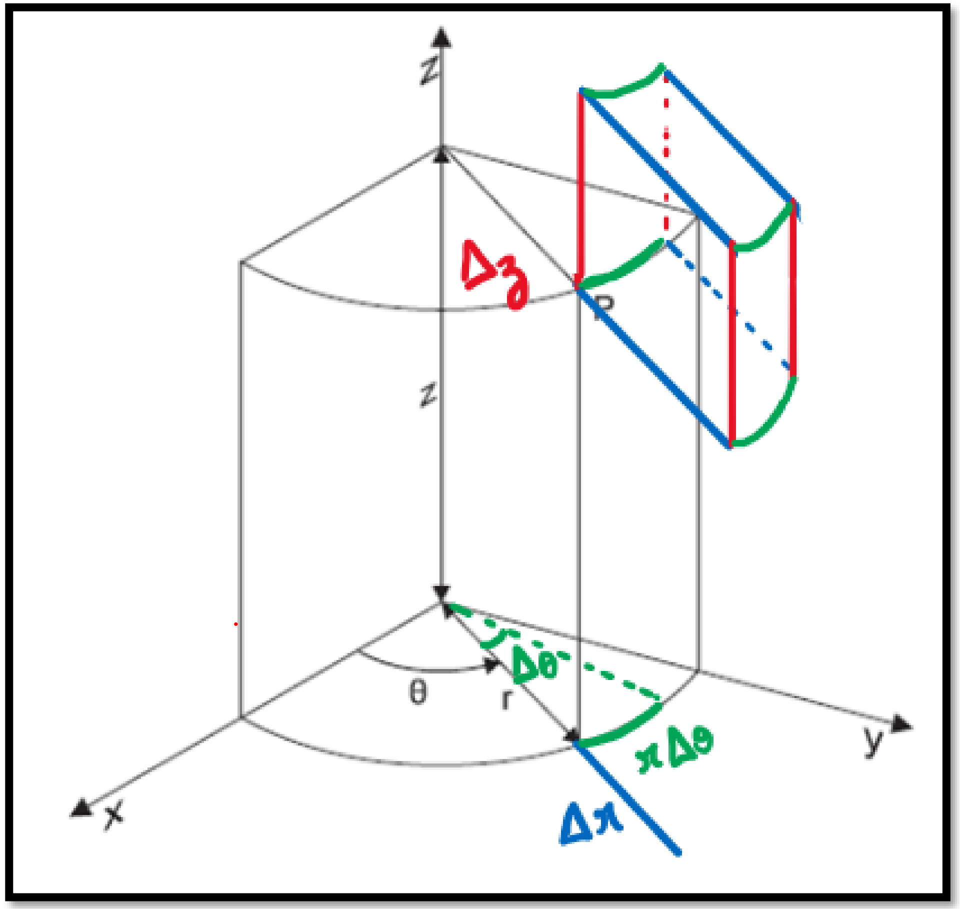
Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas

Dessa forma, o elemento infinitesimal de volume em cilíndricas (representado em vermelho, azul e verde) pode ser aproximado por um paralelepípedo cujas dimensões são

$$\Delta z, \quad \Delta r \text{ e } \quad r\Delta\theta.$$

Portanto

$$\Delta V \approx (\Delta z).(\Delta r).(r\Delta\theta).$$



Para melhorar a aproximação, basta fazer Δz, Δr e $\Delta\theta$ tenderem a zero (e ao mesmo tempo, tornar o fatiamento cada vez mais infinitesimal.

Com isso, obtemos que

$$dV = r dz dr d\theta.$$

Como $dA = r dr d\theta$ é o elemento de área da base em coordenadas polares, obtemos que, em cilíndricas:

$$dV = dz dA.$$

Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas

Com isso, podemos definir uma integral tripla em coordenadas cilíndricas:

Definição: Seja S um sólido tridimensional descrito algebricamente, em coordenadas cilíndricas por

$$S = \{(\theta, r, z) \in \mathbb{R}^3;\ \alpha \leq \theta \leq \beta\ ,\ r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)\ \ e\ \ z_1(r,\theta) \leq z \leq z_2(r,\theta)\}.$$

Para uma função contínua $f: S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ define-se a integral tripla de f sobre S por

$$\iiint_S f(x,y,z).\,dV = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos(\theta), r\mathrm{sen}(\theta), z)\ r.\,dzdrd\theta$$

Observações:

- Em cilíndricas, utiliza-se somente uma única ordem de integração: $dzdrd\theta$.
- Por isso, z sempre é a variável totalmente dependente, r é a variável parcialmente dependente e θ é variável independente.
- Portanto, a limitação de z sempre deve ser a primeira a ser obtida, analisando o sólido S em $\mathbb{R}^3$, da mesma forma que em cartesianas. Feito isso, efetua-se a projeção do sólido S no plano xy e determina-se a limitação de r e θ, da mesma forma como em polares.
- Do diferencial de volume, como $r \neq 0$, obtemos:

$$\boxed{r dzdrd\theta = dV = dzdydx \quad \Rightarrow} \quad \boxed{dzdrd\theta = \frac{1}{r} dzdydx = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dzdydx}$$

Exercício

Exercício 2) Escreva, em coordenadas cilíndricas, a integral tripla que permite calcular a massa do sólido que é simultaneamente interior às superfícies

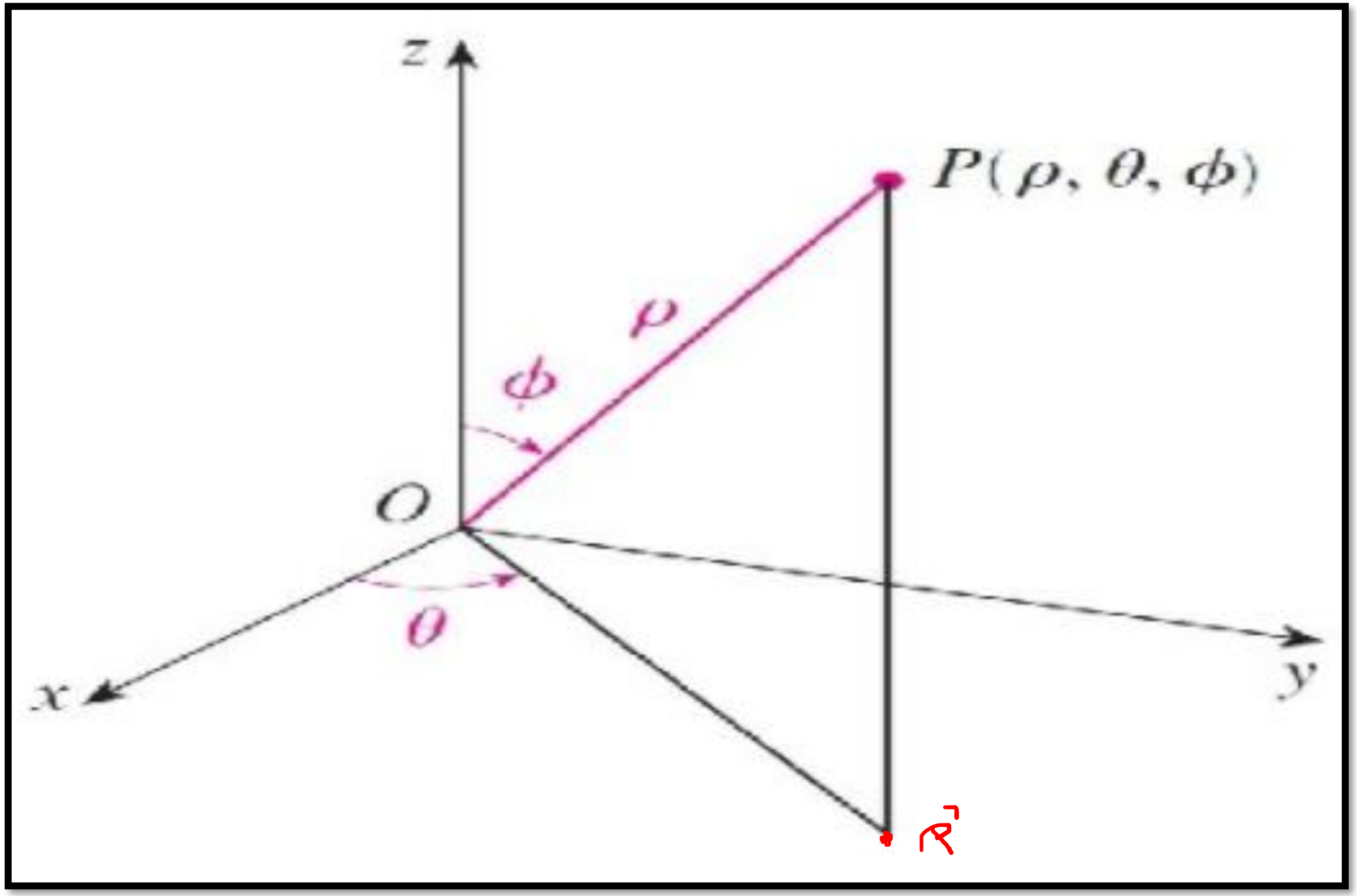
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{e} \quad z = \sqrt{3x^2 + 3y^2},$$

sabendo que a densidade de massa é dada por $f(x, y, z) = z^2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Coordenadas Esféricas

O sistema de coordenadas esféricas utiliza o raio esférico ρ, o ângulo vertical (ou azimutal) ϕ e o ângulo polar θ para representar um ponto $P \in \mathbb{R}^3$:

Geometricamente:



$$\rho = \left|\overrightarrow{0P}\right| \geq 0$$

$$\phi = \hat{a}ng(\vec{0}_{z^+}, \hat{O}P),$$

$$\theta = \hat{a}ng(\vec{0}_{x^+}, \hat{O}P')$$

Variação Máxima

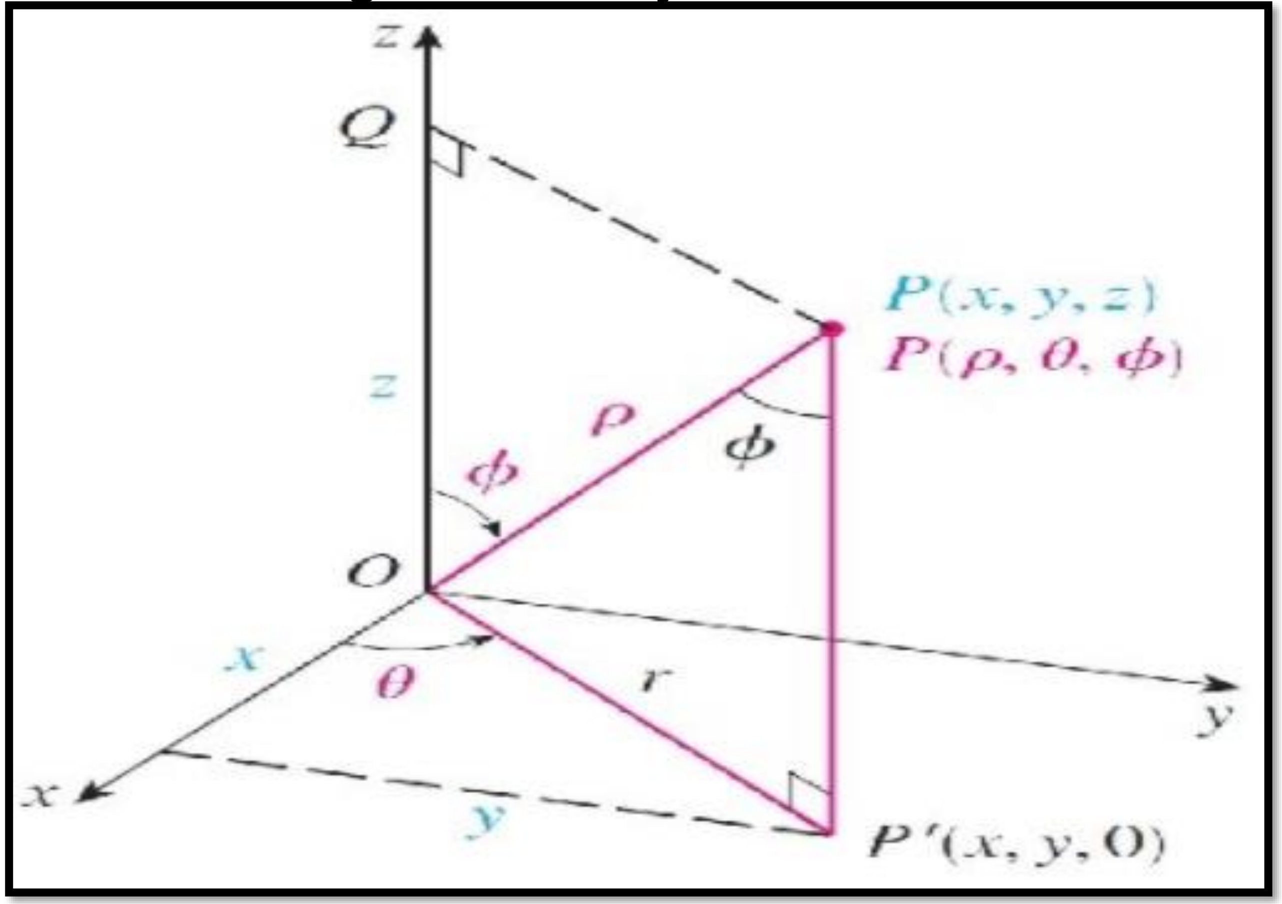
$$\rho \in [0, +\infty)$$

$$\phi \in [0, \pi]$$

$$\theta \in [0,2\pi]$$

Coordenadas Esféricas

Projetando P nos eixos coordenados, e usando a trigonometria dos triângulos retângulos, obtemos as seguintes relações entre o sistema esférico e o sistema cartesiano:



$$\cos(\phi) = \frac{z}{\rho} \quad \Rightarrow \quad z = \rho\cos(\phi)$$

$$\mathrm{sen}(\phi) = \frac{r}{\rho} \quad \Rightarrow \quad r = \rho\,\mathrm{sen}(\phi)$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad x = r\cos(\theta) = \rho\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\theta)$$

$$\mathrm{sen}(\theta) = \frac{y}{r} \quad \Rightarrow \quad y = r\,\mathrm{sen}(\theta) = \rho\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$\rho^2 = r^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\mathrm{tg}(\theta) = \frac{y}{x}$$

$$\mathrm{tg}(\phi) = \frac{r}{z} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad \Rightarrow \quad \phi = \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$$

$$\theta = \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Relações entre Esféricas e Cartesianas

Portanto, o sistema esférico é definido pelas seguintes relações:

$$\begin{cases} x = \rho\,\mathrm{sen}(\phi)\cos(\theta) \\ y = \rho\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z = \rho\cos(\phi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \phi = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right) \\ \theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Note que $r = \rho\,\mathrm{sen}(\phi)$.

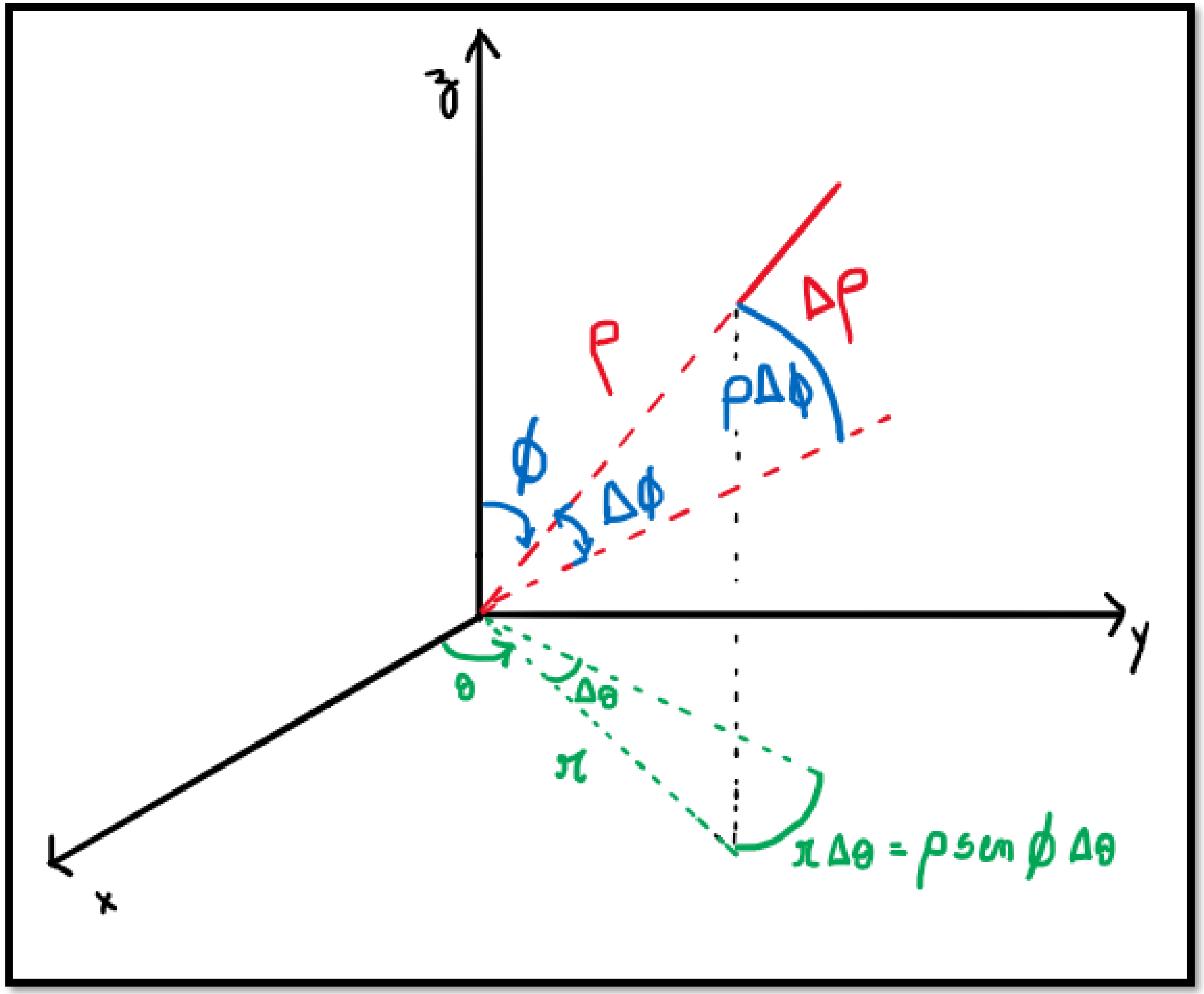
Para utilizar coordenadas esféricas em uma integral tripla, precisamos identificar a expressão para o elemento infinitesimal de volume (dV) nesse sistema de coordenadas.

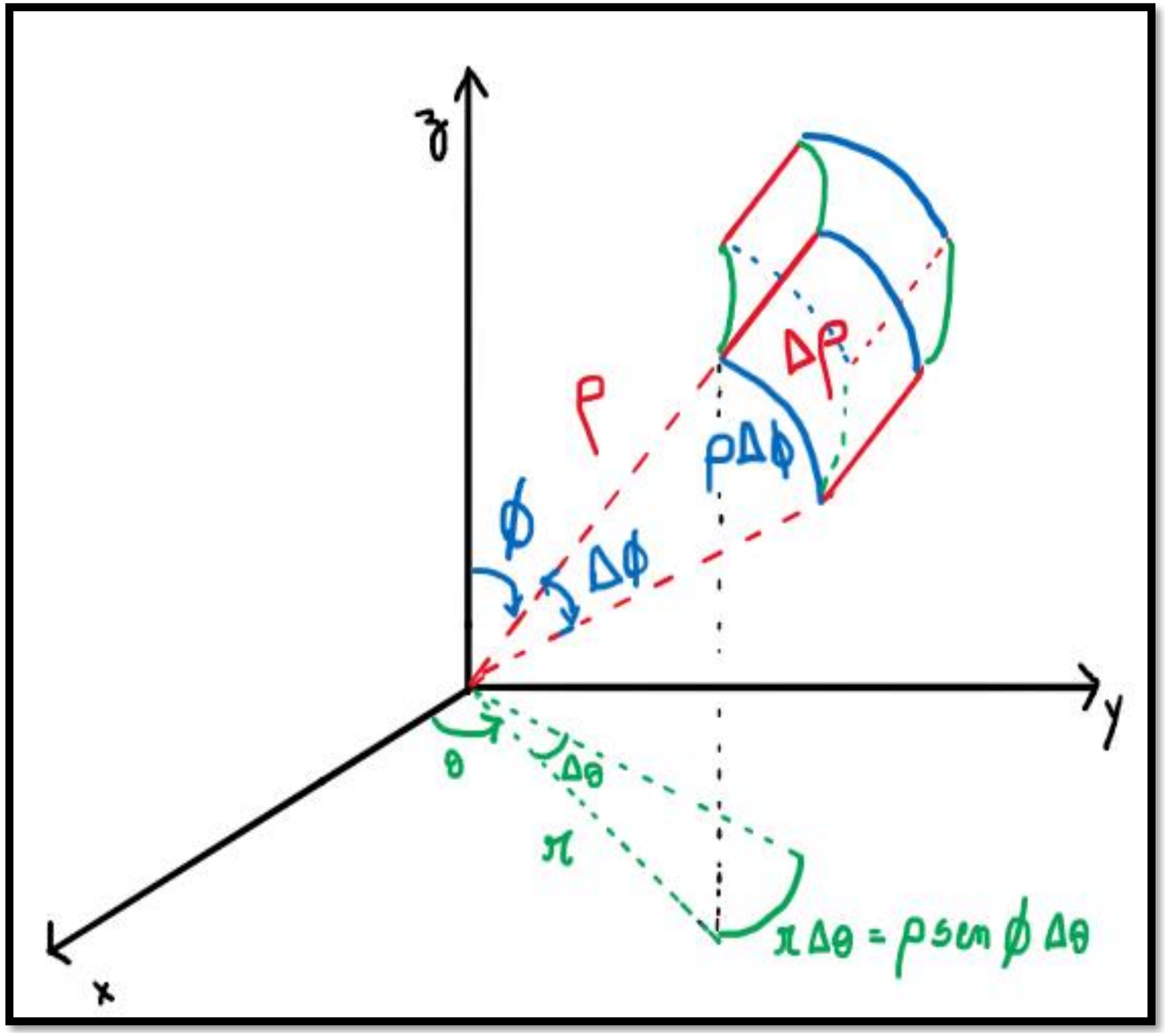
Para isso, precisamos "fatiar" um sólido por meio de incrementos

- $\Delta\rho$ (no raio esférico),
- $\Delta\phi$ (no ângulo azimutal)
- $\Delta\theta$ (no ângulo polar).

Elemento Infinitesimal de Volume em Esféricas

Geometricamente:





O elemento infinitesimal de volume em esféricas (representado em vermelho, azul e verde) pode ser aproximado por um paralelepípedo cujas dimensões são

$$\Delta\rho, \quad \rho\Delta\phi \quad \text{e} \quad \rho\,\text{sen}(\phi)\Delta\theta.$$

Elemento Infinitesimal de Volume em Esféricas

Portanto

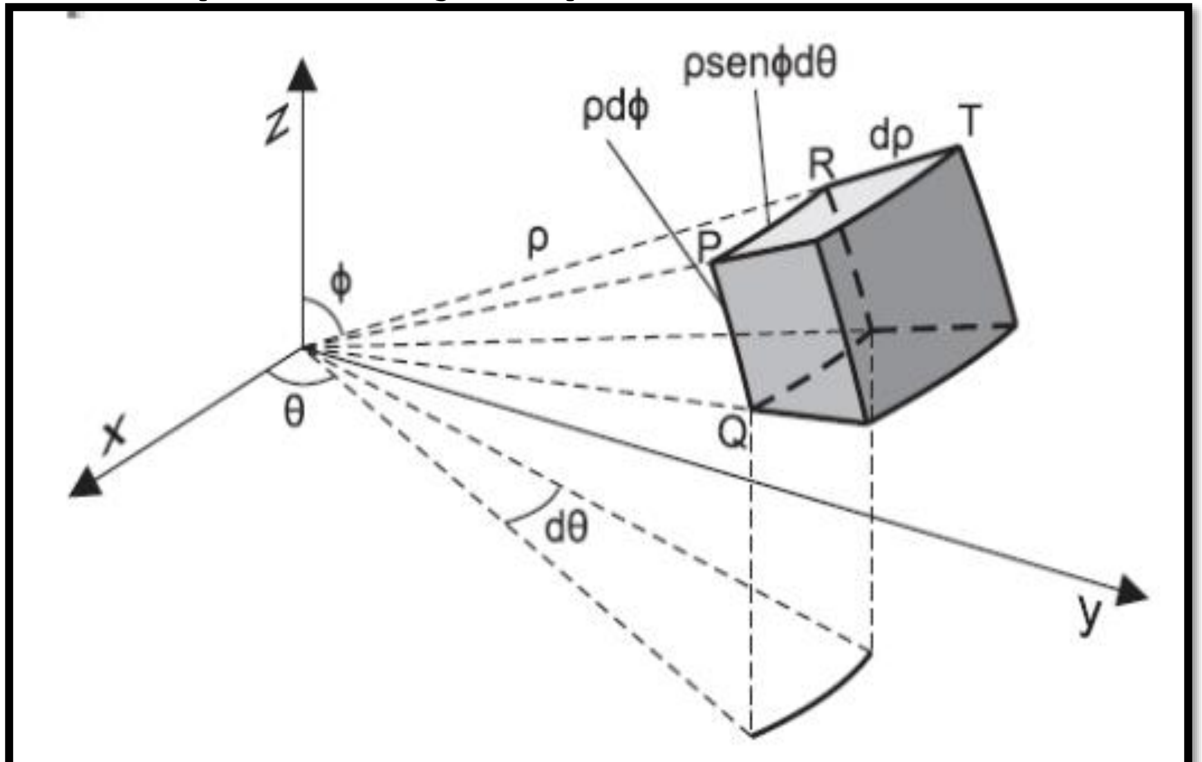
$$\Delta V \approx (\Delta\rho).(\rho\text{sen}(\phi)\Delta\theta).(\rho\Delta\phi) = \rho^2\text{sen}(\phi)\,\Delta\rho.\Delta\phi.\Delta\theta.$$

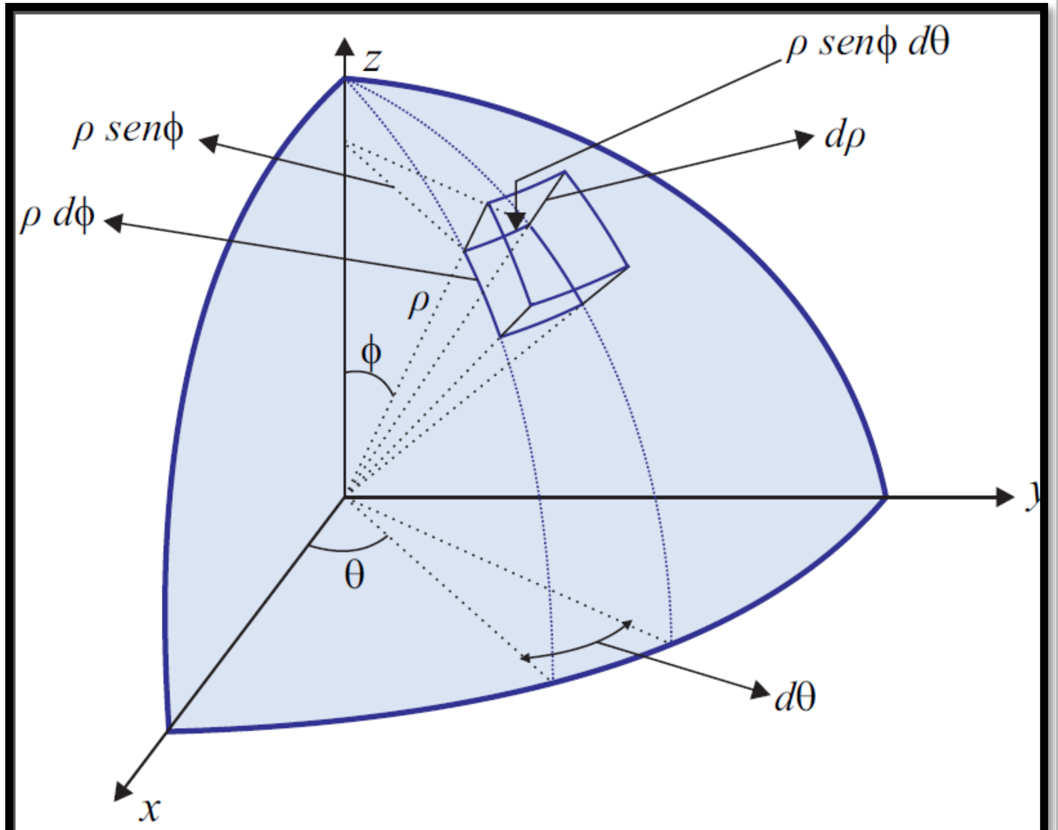
Para melhorar a aproximação, basta tomar $\Delta\rho$, $\Delta\phi$ e $\Delta\theta$ tendendo a zero (e ao mesmo tempo, tornar o fatiamento cada vez mais infinitesimal.

Com isso, obtemos que

$$dV = \rho^2\text{sen}(\phi)d\rho d\phi d\theta.$$

Outras representações para ΔV :





Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas

Com isso, podemos definir uma integral tripla em coordenadas esféricas:

Definição: Seja S um sólido tridimensional descrito algebricamente, em coordenadas esféricas por

$$S = \{(\theta, \phi, \rho\ ) \in \mathbb{R}^3;\ \alpha \leq \theta \leq \beta\ ,\ \ \phi_1(\theta) \leq \phi \leq \phi_2(\theta)\ \ e\ \ \rho_1(\theta,\phi) \leq \rho\ \leq \rho_2(\theta,\phi)\}.$$

Para um função contínua $f: S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ define-se a integral tripla de f sobre S por

$$\iiint_S f.dV = \int_\alpha^\beta \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} \int_{\rho_1(\theta,\phi)}^{\rho_2(\theta,\phi)} f(\rho \mathrm{sen}(\phi)\cos(\theta), \rho \mathrm{sen}(\phi)\mathrm{sen}(\theta), \rho cos(\phi)).\, \rho^2 \mathrm{sen}(\phi) d\rho d\phi d\theta$$

Observações:

- Em esféricas, utiliza-se somente uma única ordem de integração: $d\rho d\phi d\theta$.
- Por isso, ρ sempre é a variável totalmente dependente, enquanto ϕ é sempre a variável parcialmente dependente e θ é sempre a variável independente.
- Portanto, a limitação de ρ sempre deve ser a primeira a ser obtida, analisando o sólido S em $\mathbb{R}^3$, com **referencial na origem** do sistema esférico.
- Após, analisa-se a variação de ϕ, com referencial a partir do eixo $z - positivo$.
- Por fim, determina-se a limitação de θ, da mesma forma como em polares.

Exercício

Exercício 3) Escreva, em coordenadas esféricas, a integral tripla que permite calcular a massa do sólido que é simultaneamente interior às superfícies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{e} \quad z = \sqrt{3x^2 + 3y^2},$$

sabendo que a densidade de massa é dada por $f(x, y, z) = z^2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Exercício 4) Calcule a massa do sólido usando uma das integrais obtidas nos exercícios anteriores.

Exercício

Exercício 5) Escreva, em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas, as integrais que calculam a massa do sólido que é simultaneamente interior às superfícies

$$z = 3x^2 + 3y^2 \quad \text{e} \quad 3x^2 + 3y^2 + z^2 = 12,$$

sabendo que sua densidade é dada por $f(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemplo

Exemplo 1) Escreva, em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas, as integrais triplas que permitem calcular a massa do sólido que é simultaneamente interior às superfícies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \text{e} \quad z = \sqrt{3x^2 + 3y^2},$$

sabendo que a densidade de massa é dada por $f(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

A seguir, escolha uma das integrais para calcular o valor numérico da massa do sólido.

Solução: Vamos representar geometricamente o sólido S cuja massa é desejada.

Para tal, iniciamos com a identificação das superfícies envolvidas.

Veja que

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

é uma esfera de raio 2 e centro na origem. Para

$$z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$$

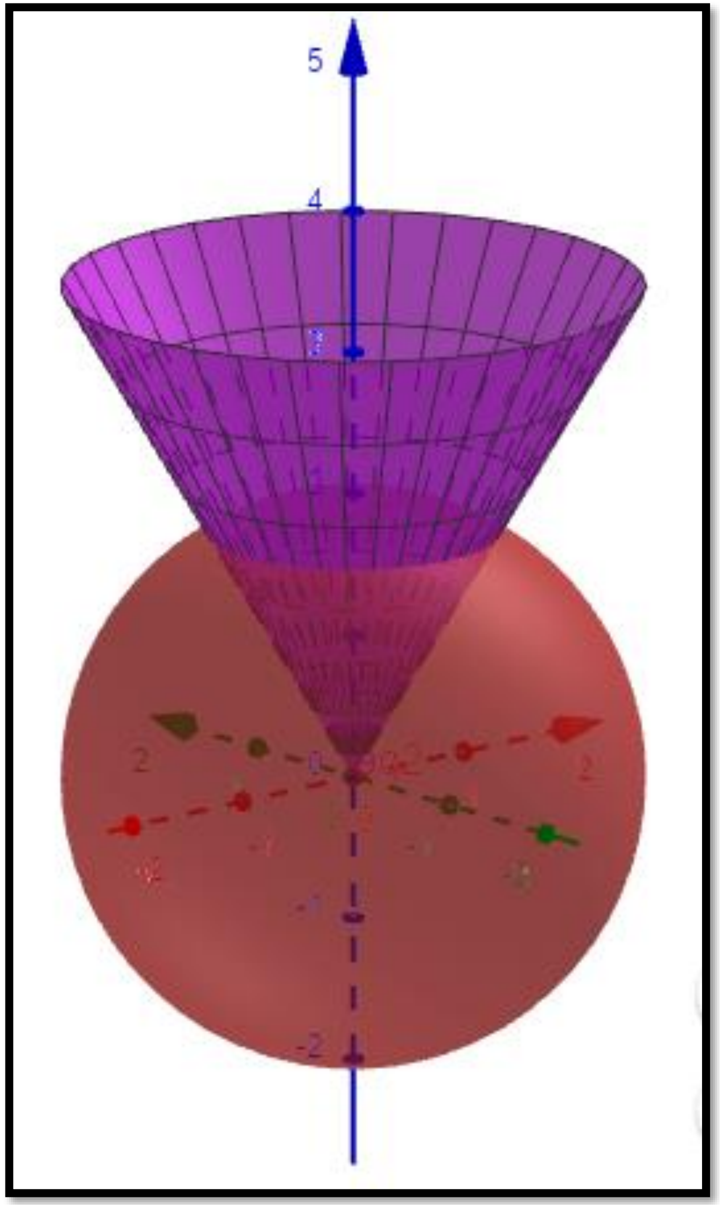
podemos manipular algebricamente a equação da superfície como:

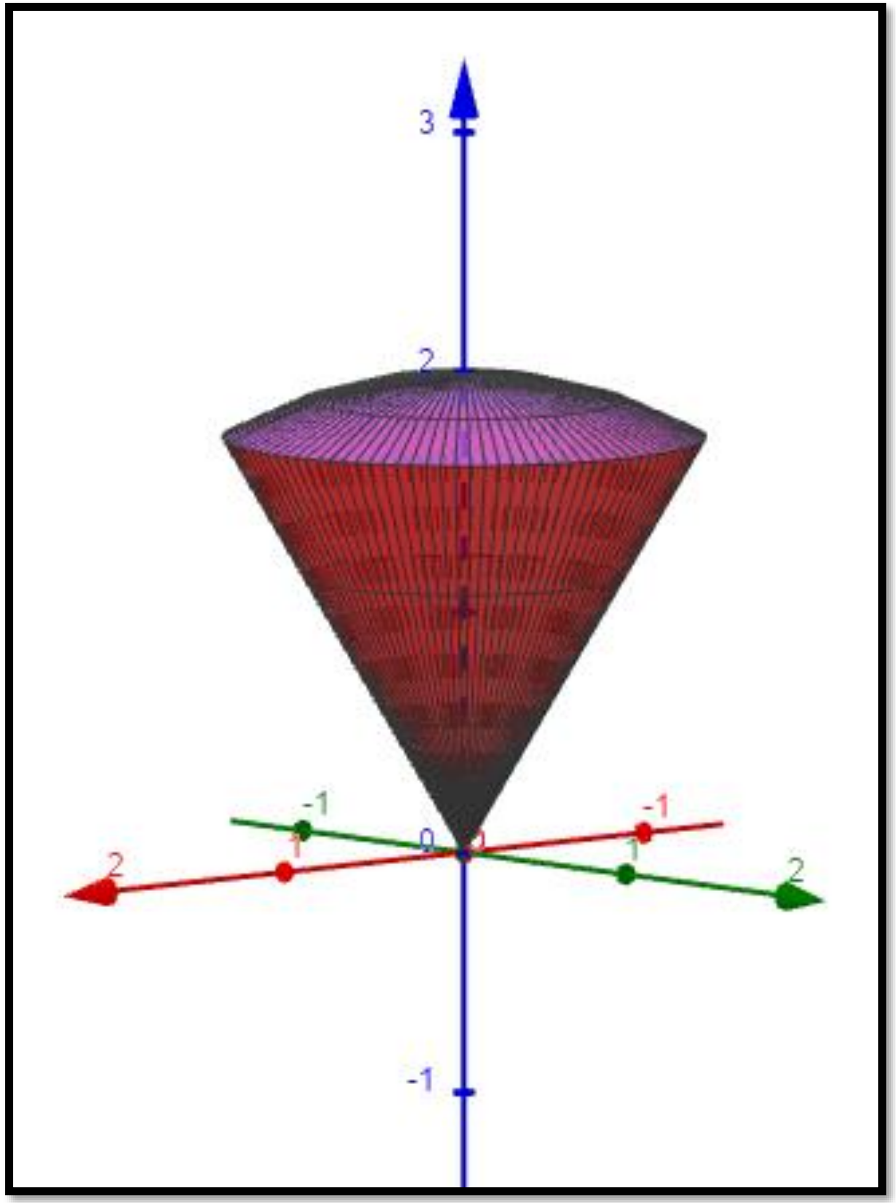
$$z^2 = 3x^2 + 3y^2 \qquad \Rightarrow \qquad 3x^2 + 3y^2 - z^2 = 0$$

e obtemos a parte superior (pois $z \geq 0$) de um cone de duas folhas, com vértice na origem.

Exemplo

Representando o sólido S (simultaneamente interior a ambas as superfícies),obtemos:





Veja que S é delimitado inferiormente pelo cone e superiormente pelo hemisfério superior da esfera.

Com isso, a limitação de z como variável totalmente dependente é dada por
$z \in [\text{cone}, +\text{esfera}]$.

Exemplo

Isolando z na equação da esfera, obtemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad z^2 = 4 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

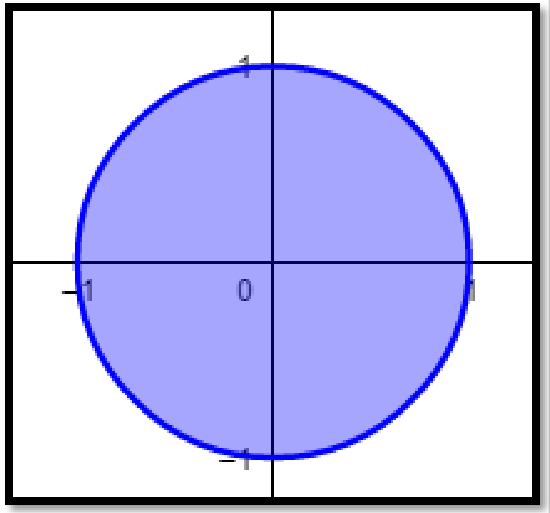
Em cartesianas: Tomando z como a variável totalmente dependente, temos que

$$z \in \left[\sqrt{3x^2 + 3y^2}, \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right].$$

A projeção sobre o plano xy é obtida com a interseção entre as superfícies:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = \sqrt{3x^2 + 3y^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z^2 = 3x^2 + 3y^2 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + (3x^2 + 3y^2) = 4$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{3}$$



Com isso, a projeção no plano xy é dada por $x^2 + y^2 = 1$:
Tomando x como variável totalmente independente:

$$x \in [-1,1] \quad \text{e} \quad y \in \left[-\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2}\right].$$

Portanto, em coordenadas cartesianas, a massa do sólido é dada por

$$M(S) = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{3x^2+3y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dz\, dy dx.$$

Exemplo

Em cilíndricas: Precisamos transformar as superfícies, a projeção e a densidade para coordenadas cilíndricas. Fazendo isso, temos:

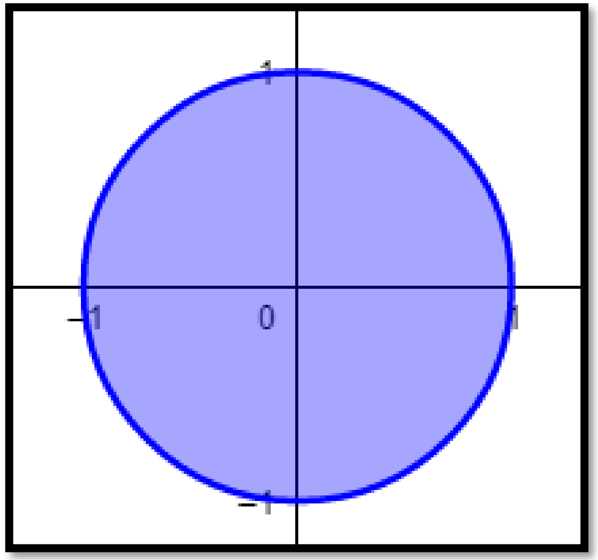
Para o cone: $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2} = \sqrt{3(x^2 + y^2)} = \sqrt{3}.\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3}.r$

Para a esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow \ r^2 + z^2 = 4 \ \Rightarrow \ z^2 = 4 - r^2 \ \Rightarrow z = +\sqrt{4 - r^2}$

Assim a variação para z é $z \in \left[\sqrt{3}\,r\,, \sqrt{4 - r^2}\right]$.

Para a projeção sobre o plano xy:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad r = 1.$$



Assim: $\theta \in [0, 2\pi]$ e $r \in [0,1]$.

A densidade em cilíndricas é

$$f = z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z\sqrt{r^2 + z^2}.$$

Portanto, em coordenadas cilíndricas, a massa do sólido é dada por

$$M(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\sqrt{3}\,r}^{\sqrt{4-r^2}} z\sqrt{r^2 + z^2}\ r dz\, dr d\theta.$$

Exemplo

Resolvendo a integral em cilíndricas:

Substituição simples:
$u = r^2 + z^2$
$du = 2zdz$

$$M(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\sqrt{3}\,r}^{\sqrt{4-r^2}} z\sqrt{r^2+z^2}\, r dz\, drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{4r^2}^{4} \sqrt{u}\ \ r\ \frac{du}{2} drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{2}{3}\ \frac{u^{3/2}}{2}\bigg|_{u=4r^2}^{u=4} rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{3}\left(4^{3/2} - (4r^2)^{3/2}\right) rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{3}(8-8r^3)rdrd\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{(8r-8r^4)}{3} drd\theta = \int_0^{2\pi} \frac{8r^2}{6} - \frac{8r^5}{15}\bigg|_{r=0}^{r=1} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{4}{3} - \frac{8}{15} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{4}{5} d\theta = \frac{4}{5}\theta\bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{8}{5}\pi \quad unidades\ de\ massa.$$

Exemplo

Em esféricas: Precisamos transformar as superfícies, a projeção e a densidade para coordenadas esféricas.
Fazendo isso, temos:

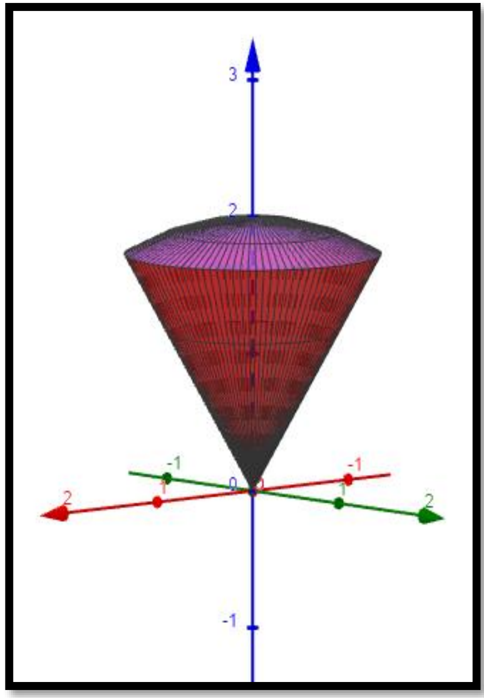
Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \rho = 2$

Cone: $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2} = \sqrt{3}.r \quad \Rightarrow \quad \rho\cos(\phi) = \sqrt{3}\,\rho\sin(\phi)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\text{sen}(\phi)}{\cos(\phi)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \tan(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{6}$$

Interpretando geometricamente o sólido, obtemos os limitantes:

$$\rho \in [0,2] \qquad \phi \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$



A transformação da densidade é

$$f = z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho\cos(\phi)\,\rho = \rho^2\cos(\phi).$$

O diferencial de volume é

$$dV = \rho^2 \text{sen}(\phi) d\rho d\phi d\theta.$$

Exemplo

Portanto, a massa do sólido é dada, em esféricas, por

$$M(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{2} \rho^2\cos(\phi)\,.\,\rho^2\mathrm{sen}(\phi)\,d\rho\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{2} \rho^4\cos(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi)\,d\rho\, d\phi\, d\theta$$

Resolvendo, em esféricas:

$$M(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{5}\rho^5\cos(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi)\Big|_{\rho=0}^{\rho=2} d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{32\cos(\phi)\,\mathrm{sen}(\phi)}{5}\,d\phi\, d\theta \quad = \int_0^{2\pi} \frac{32\mathrm{sen}^2(\phi)}{5.2}\Big|_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{6}} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{16}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^2 d\theta \quad = \frac{4}{5}\,.\,\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{8\pi}{5} \quad \textit{unidades de massa}.$$

Exemplo

Exemplo 2) Escreva em coordenadas cilíndricas, a(s) integral(is) que permite(m) calcular o volume do sólido situado simultaneamente no interior de

$$4x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36 \quad \text{e} \quad 2x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 1.$$

A seguir, calcule o volume do sólido.

Solução: Identificando as superfícies:

$$4x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

é um elipsoide e

$$2x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{1/2} + \frac{y^2}{1/2} - \frac{z^2}{1/4} = 1$$

é um hiperboloide de uma folha.

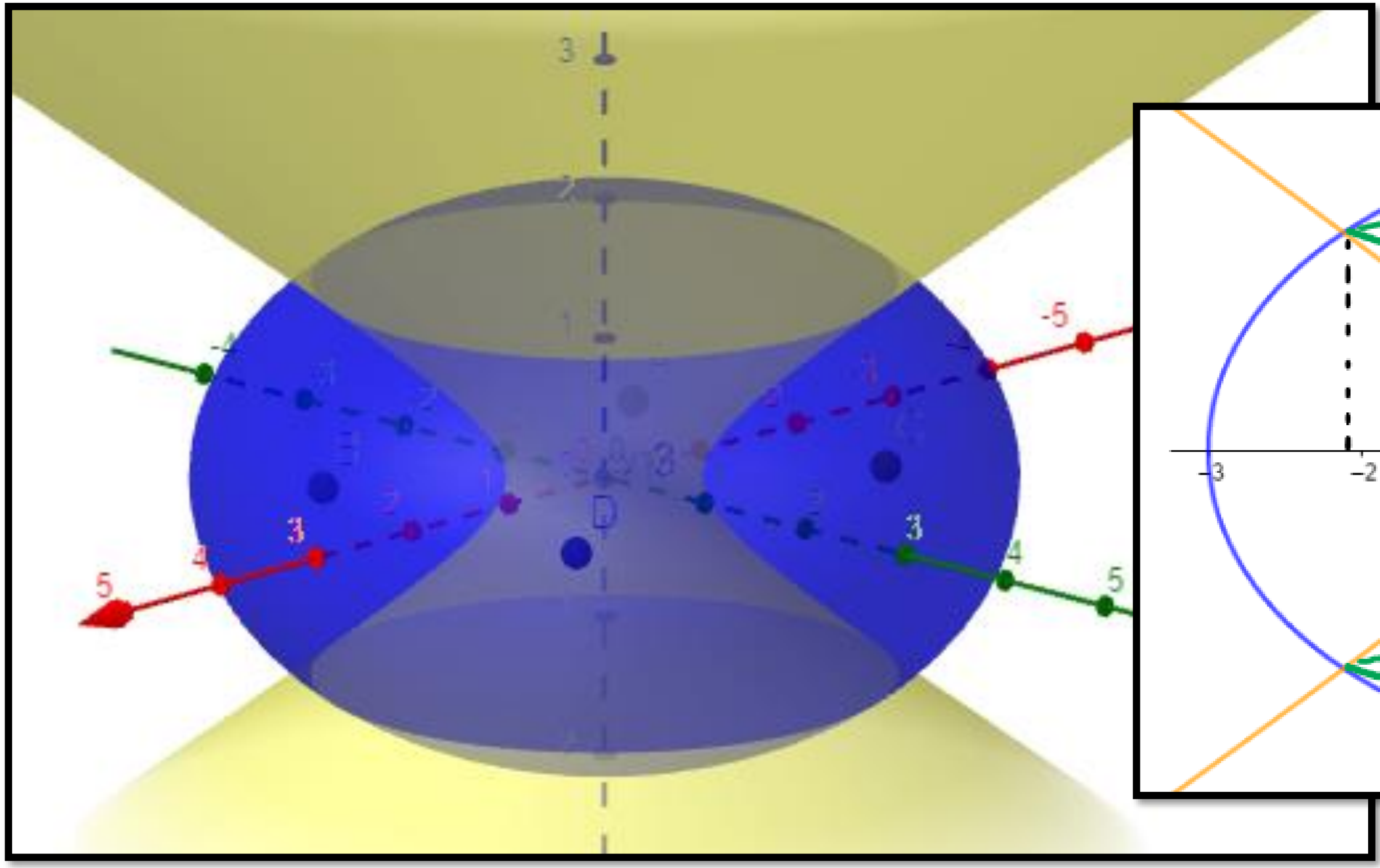
A intersecção entre as superfícies (fazendo a primeira equação menos o dobro da segunda) é dada por

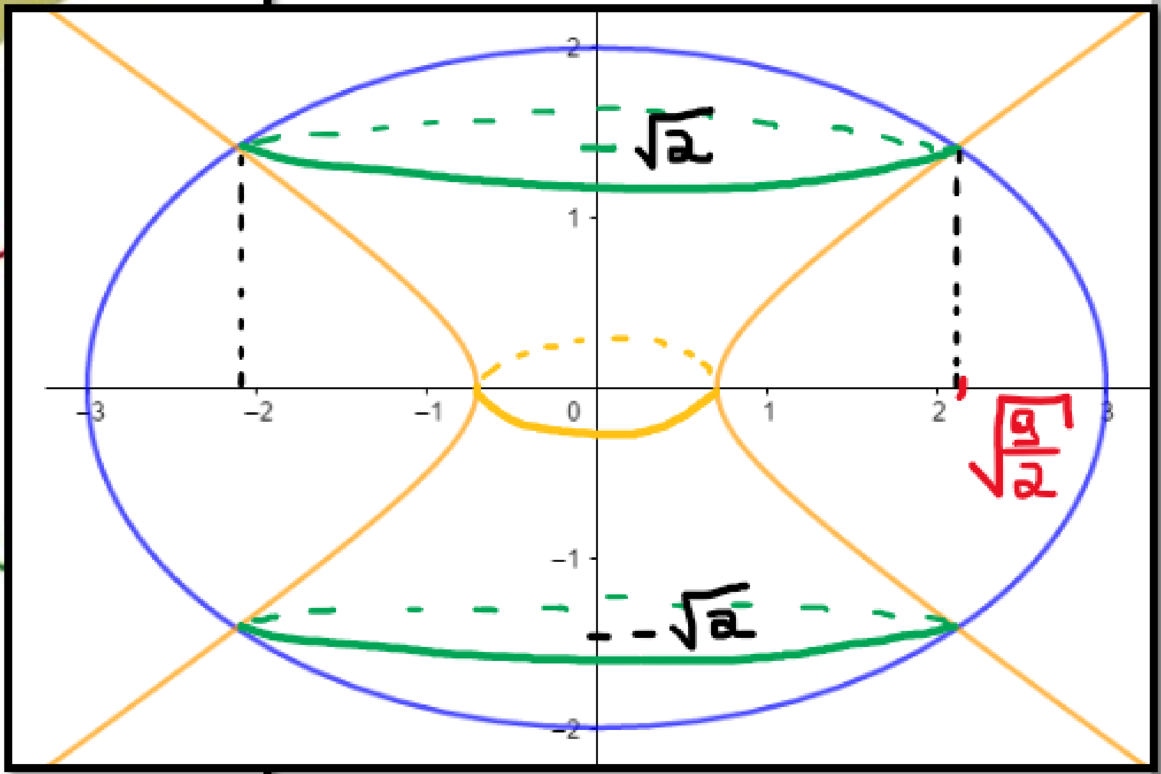
$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36 \\ 2x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ 17z^2 = 34 \end{cases} \Rightarrow \quad z^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 + 2y^2 - 4.2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{9}{2}$$

Exemplo

Representando geometricamente, obtemos:





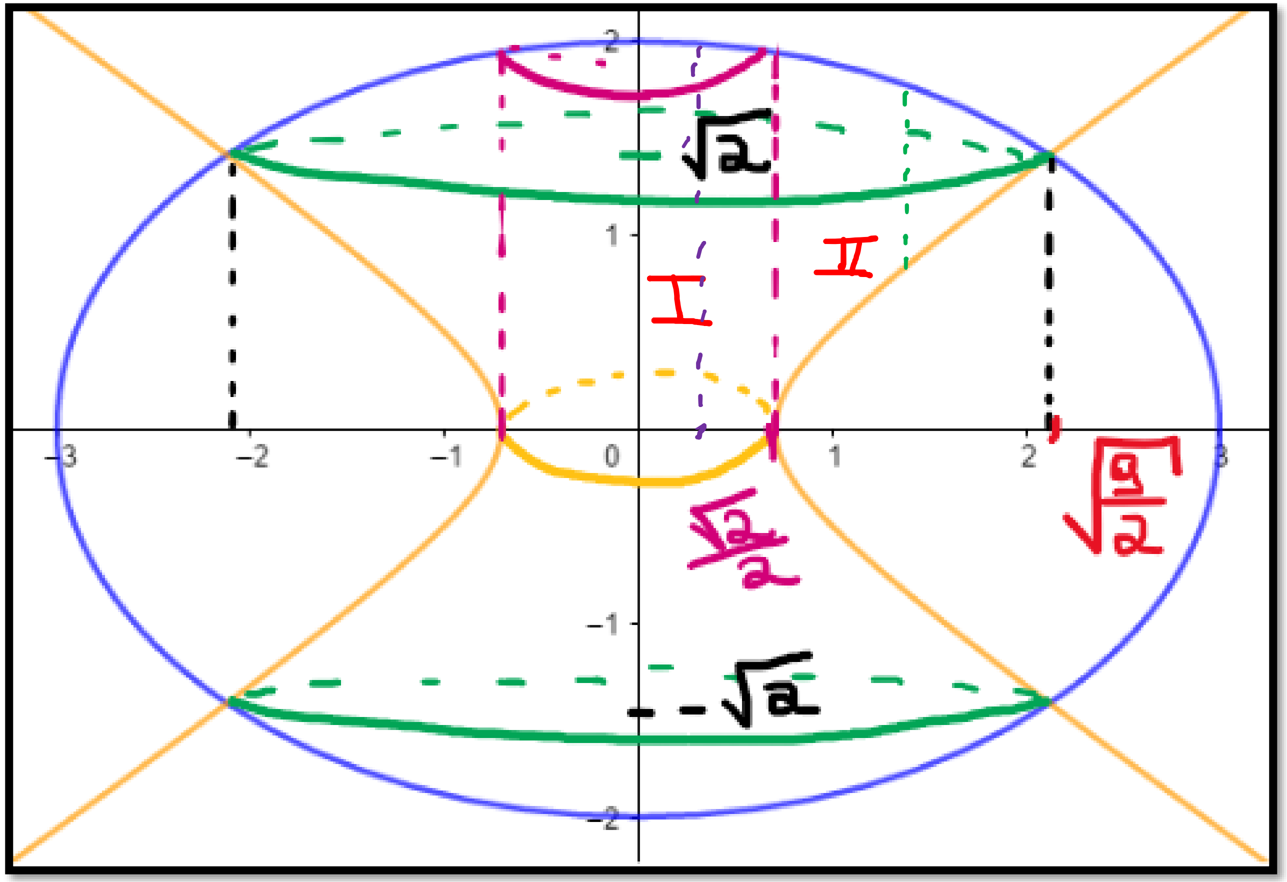
Note que o sólido é simétrico em relação a todos os planos coordenados.

Usaremos simetria em 2 partes e analisaremos a porção do sólido situado acima do plano xy:

Exemplo

Veja que há uma troca de limitação para qualquer uma das variáveis que for tomada como totalmente dependente.

Usando a simetria em duas vezes e analisando a porção situada acima do plano xy obtemos que



Parte I (miolo cilíndrico): z varia do plano xy ao elipsoide.

Parte II (rebarba externa ao cilindro): z varia do hiperboloide ao elipsoide.

Exemplo

Transformando as equações para cilíndricas, obtemos:

Elipsoide:

$$4x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36 \;\Rightarrow\; 4r^2 + 9z^2 = 36 \;\Rightarrow\; z^2 = \frac{36 - 4r^2}{9} \;\Rightarrow\; z = \frac{+\sqrt{36 - 4r^2}}{3}$$

Hiperboloide:

$$2x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 1 \Rightarrow \; 2r^2 - 4z^2 = 1 \;\Rightarrow\; z^2 = \frac{2r^2 - 1}{4} \;\Rightarrow\; z = \frac{+\sqrt{2r^2 - 1}}{2}$$

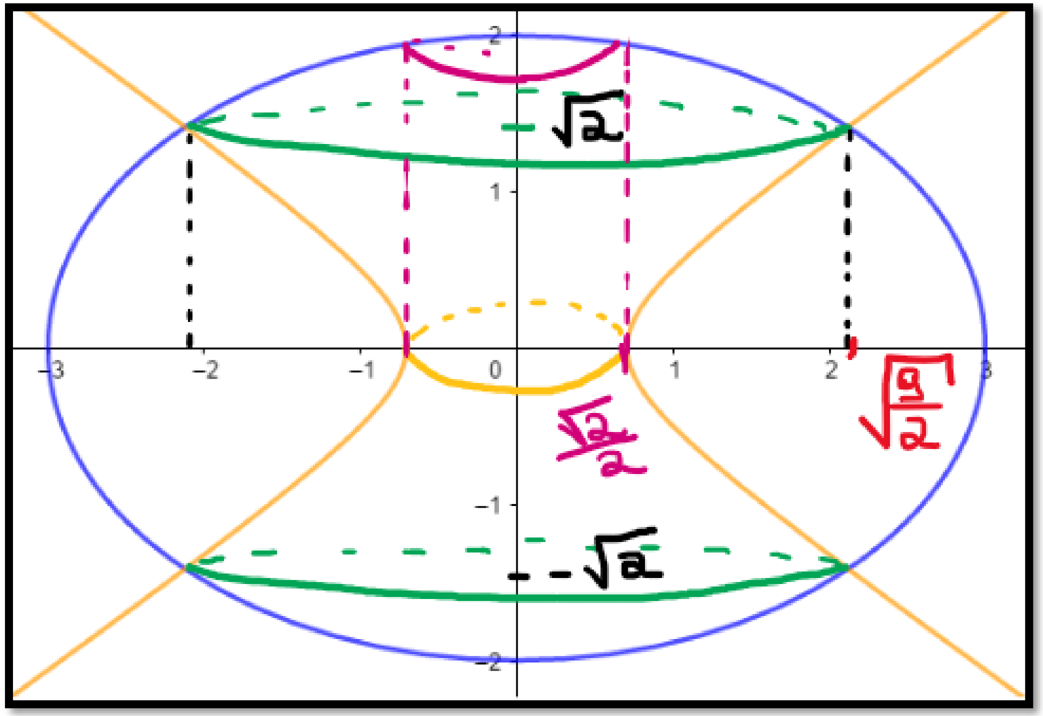
Assim, tomando z como variável totalmente dependente, temos que:

Parte I:

$$z \in \left[0, \frac{\sqrt{36 - 4r^2}}{3}\right].$$

Parte II:

$$z \in \left[\frac{\sqrt{2r^2 - 1}}{2}, \frac{\sqrt{36 - 4r^2}}{3}\right].$$

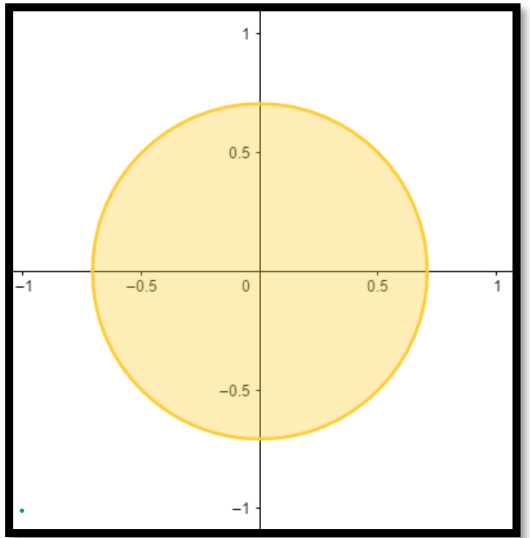


Exemplo

As projeções no plano xy são dadas por:

Para a parte I: Interna a $2x^2 + 2y^2 = 1$ (a porção do hiperboloide)

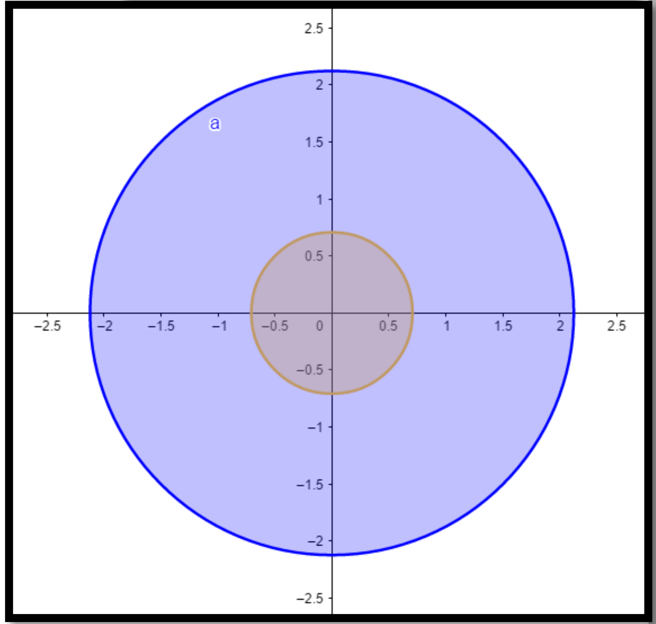
$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow r^2 = \frac{1}{2}.$$



Logo

$$\theta \in [0, 2\pi] \quad \text{e} \quad r \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Para a parte II: Externa a $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ e interna a $x^2 + y^2 = \frac{9}{2}$:



Logo

$$\theta \in [0, 2\pi] \quad \text{e} \quad r \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right].$$

Como é desejado o volume do sólido, integramos a função constante igual a 1.

Portanto, pela simetria, obtemos que

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_0^{\frac{\sqrt{36-4r^2}}{3}} 1.rdzdrd\theta + 2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\int_{\frac{\sqrt{2r^2-1}}{2}}^{\frac{\sqrt{36-4r^2}}{3}} 1.rdzdrd\theta$$

Exemplo

Resolvendo a integral em cilíndricas:

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_0^{\frac{\sqrt{36-4r^2}}{3}} 1\,.\,rdzdrd\theta + 2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\int_{\frac{\sqrt{2r^2-1}}{2}}^{\frac{\sqrt{36-4r^2}}{3}} 1\,.\,rdzdrd\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} r.z\Big|_{z=0}^{z=\frac{\sqrt{36-4r^2}}{3}} drd\theta + 2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} r.z\Big|_{z=\frac{\sqrt{2r^2-1}}{2}}^{z=\frac{\sqrt{36-4r^2}}{3}} drd\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{r.\sqrt{36-4r^2}}{3} drd\theta + 2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \frac{r.\sqrt{36-4r^2}}{3} - \frac{r.\sqrt{2r^2-1}}{2} drd\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{r.\sqrt{36-4r^2}}{3} drd\theta + 2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \frac{r.\sqrt{36-4r^2}}{3} drd\theta$$

$$-2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \frac{r.\sqrt{2r^2-1}}{2} drd\theta$$

Exemplo

Utilizando propriedades de integral (pois o limitante superior da primeira integral é igual ao limitante inferior da segunda integral) obtemos que:

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \frac{r.\sqrt{36-4r^2}}{3}\,drd\theta - 2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \frac{r.\sqrt{2r^2-1}}{2}\,drd\theta$$

Substituição simples:
$u = 36 - 4r^2$
$du = -8rdr$

Substituição simples:
$v = 2r^2 - 1$
$dv = 4rdr$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_{36}^{18} \frac{-\sqrt{u}}{24}\,dud\theta - 2\int_0^{2\pi}\int_0^{8} \frac{\sqrt{v}}{8}\,dvd\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_{36}^{18} \frac{-\sqrt{u}}{24}\,dud\theta - 2\int_0^{2\pi}\int_0^{8} \frac{\sqrt{v}}{8}\,dvd\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} -\frac{2}{3}.\frac{u^{3/2}}{24}\Bigg|_{u=36}^{u=18} d\theta - 2\int_0^{2\pi} \frac{2}{3}.\frac{v^{3/2}}{8}\Bigg|_{v=0}^{v=8} d\theta$$

Exemplo

Portanto:

$$V = 2\int_0^{2\pi} -\frac{1}{36}.\left(18^{3/2} - 36^{3/2}\right) d\theta - 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{12}.\left(8^{3/2} - 0\right) d\theta$$

$$= -\frac{1}{18}.(18\sqrt{18} - 216)\theta\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{6}.(8\sqrt{8})\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{9}.(18\sqrt{18} - 216)\pi - \frac{1}{3}.(8\sqrt{8})\pi = (-2\sqrt{18} + 24)\pi - \frac{8\sqrt{8}}{3}\pi$$

$$= \left(24 - 6\sqrt{2} - \frac{16\sqrt{2}}{3}\right)\pi$$

$$= \left(24 - \frac{34\sqrt{2}}{3}\right)\pi \quad \text{unidades de volume.}$$

Exemplo

Exemplo 3) Escreva as integrais triplas, em coordenas cartesianas, cilíndricas e esféricas, que permitem calcular o volume do sólido situado simultaneamente no interior de

$$9x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 25 \quad \text{e} \quad -x^2 - y^2 + z^2 = 1.$$

A seguir, utilize uma das expressões obtidas para calcular o volume do sólido.

Solução: Identificando as superfícies:

$$9x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 25 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x^2}{25/9} + \frac{y^2}{25/9} + \frac{z^2}{25/4} = 1$$

é um elipsoide e

$$-x^2 - y^2 + z^2 = 1$$

é um hiperboloide de duas folhas.

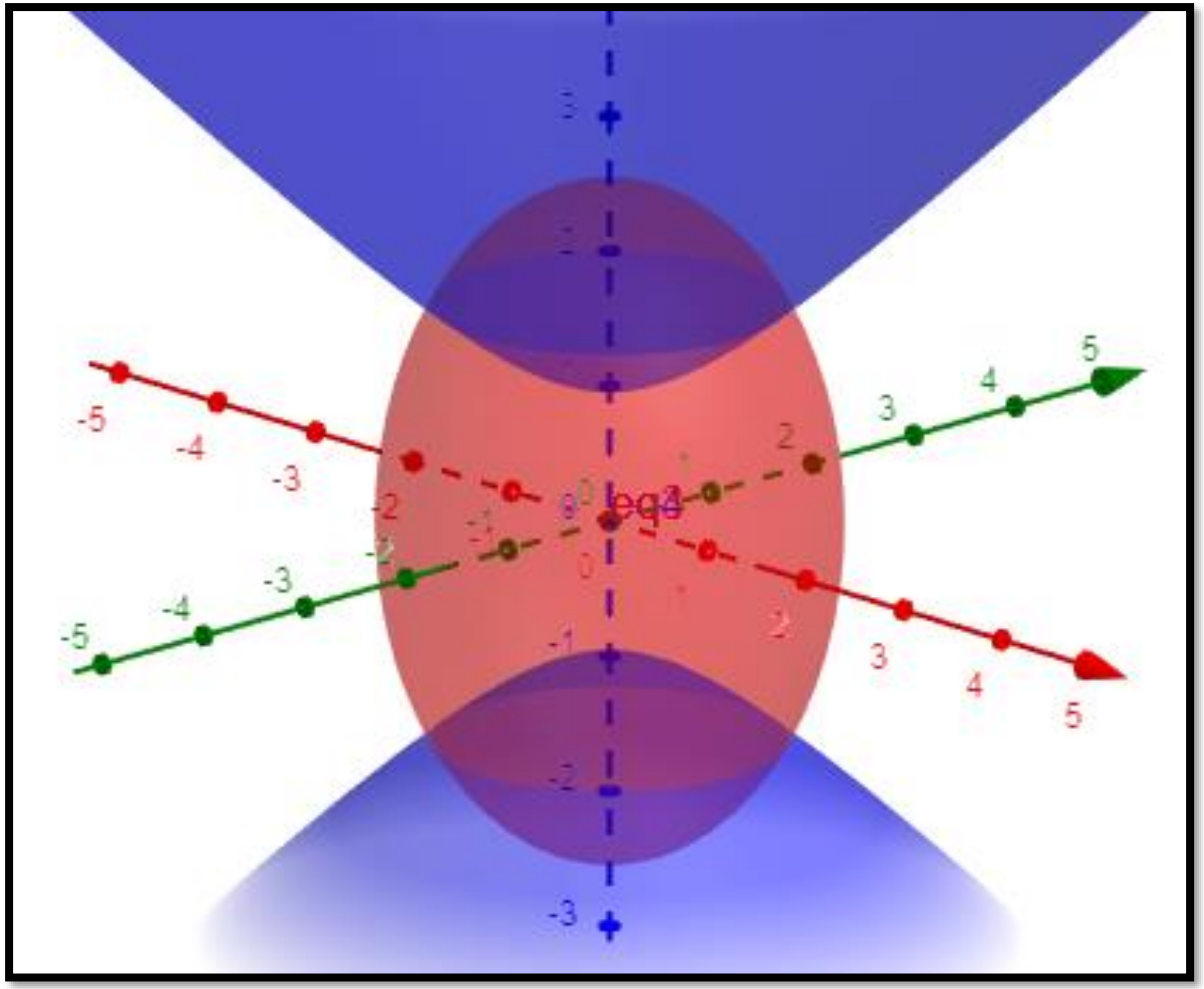
A intersecção entre as superfícies (fazendo a primeira equação mais nove vezes a segunda) é dada por

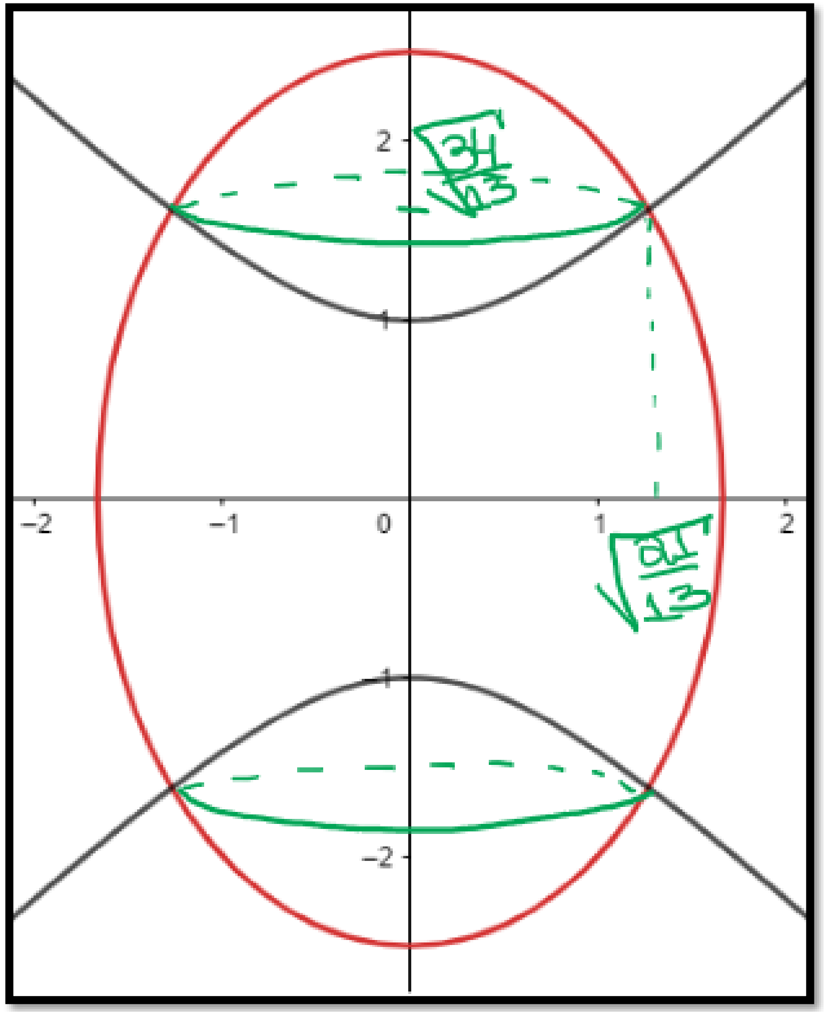
$$\begin{cases} 9x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 25 \\ -x^2 - y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \\ 13z^2 = 34 \end{cases} \Rightarrow \quad z^2 = \frac{34}{13} \quad \Rightarrow \quad z = \pm\sqrt{\frac{34}{13}}$$

$$\Rightarrow -(x^2 + y^2) = 1 - z^2 = 1 - \frac{34}{13} = \frac{-21}{13} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + y^2 = \frac{21}{13}$$

Exemplo

Representando geometricamente, obtemos:





O sólido é simétrico em relação a todos os planos coordenados.

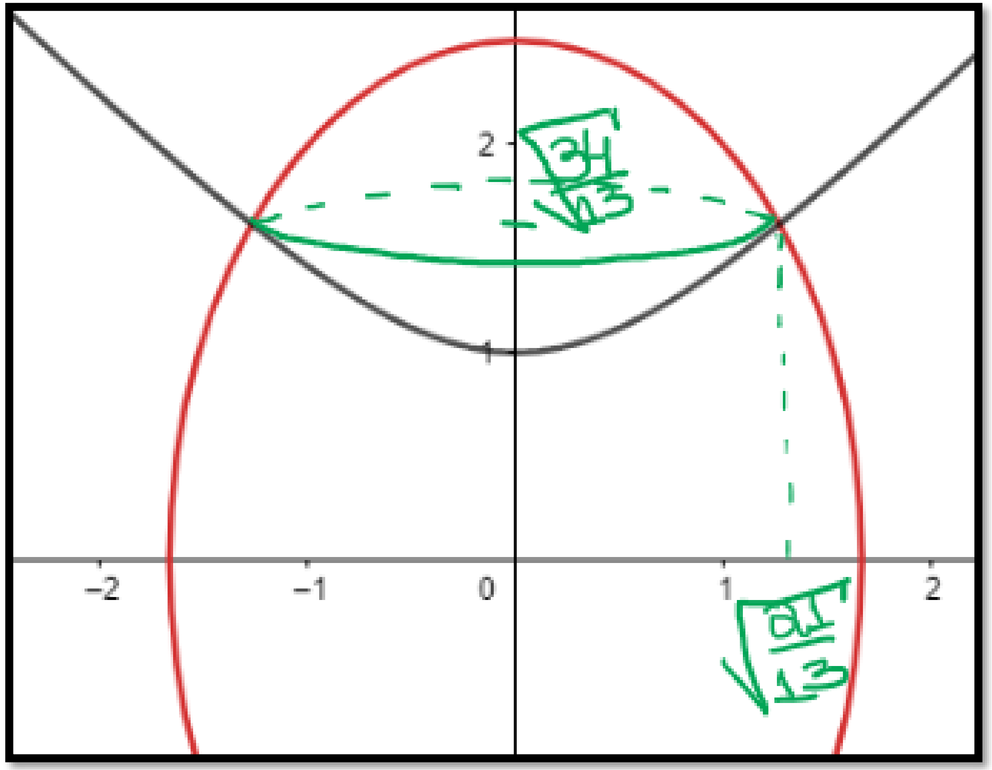
Como desejamos obter o volume, podemos usar simetria em 2 partes, considerando a porção do sólido situada acima do plano xy.

Exemplo

A superfície inferior é o hiperboloide e a superior é o elipsoide.

Para a montagem em cartesianas e cilíndricas, tomamos z como variável totalmente dependente, como não ocorre troca de limitação:

$$z \in [hiperboloide, elipsoide].$$



Em cartesianas:

Para o hiperboloide:

$$-x^2 - y^2 + z^2 = 1$$

$$z^2 = 1 + x^2 + y^2$$

$$z = +\sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

Para o elipsoide:

$$9x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 25$$

$$4z^2 = 25 - 9x^2 - 9y^2$$

$$z = \frac{+\sqrt{25 - 9x^2 - 9y^2}}{2}$$

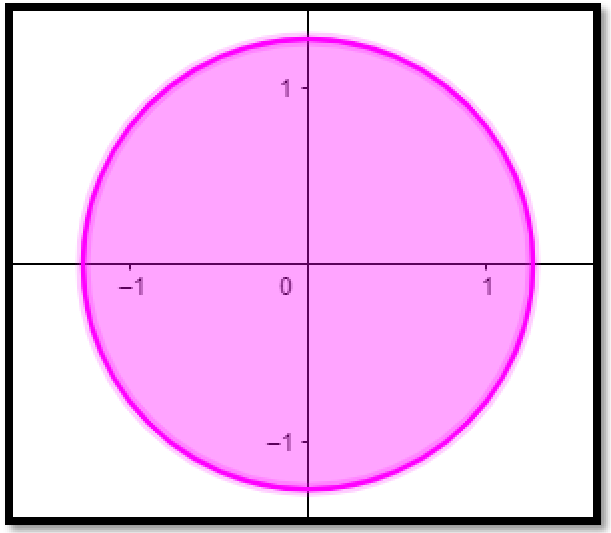
Portanto

$$z \in \left[+\sqrt{1 + x^2 + y^2}, \frac{+\sqrt{25 - 9x^2 - 9y^2}}{2}\right].$$

Exemplo

A projeção no plano xy é dada por

$$x^2 + y^2 = \frac{21}{13}$$



Logo

$$x \in \left[-\sqrt{\frac{21}{13}}, \sqrt{\frac{21}{13}}\right] \quad \text{e} \quad y \in \left[-\sqrt{\frac{21}{13} - x^2}, \sqrt{\frac{21}{13} - x^2}\right]$$

E assim

$$V = 2\int_{-\sqrt{\frac{21}{13}}}^{\sqrt{\frac{21}{13}}} \int_{-\sqrt{\frac{21}{13}-x^2}}^{\sqrt{\frac{21}{13}-x^2}} \int_{\sqrt{1+x^2+y^2}}^{\frac{\sqrt{25-9x^2-9y^2}}{2}} 1\, dzdydx.$$

Em cilíndricas, temos que

$$z \in \left[+\sqrt{1+x^2+y^2}, \frac{+\sqrt{25-9(x^2+y^2)}}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad z \in \left[\sqrt{1+r^2}, \frac{\sqrt{25-9r^2}}{2}\right]$$

E ainda:

$$\theta \in [0, 2\pi] \quad \text{e} \quad r \in \left[0, \sqrt{\frac{21}{13}}\right]$$

Logo

$$V = 2\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{21}{13}}} \int_{\sqrt{1+r^2}}^{\frac{\sqrt{25-9r^2}}{2}} 1\,.\,r dzdrd\theta$$

Exemplo

Em esféricas: Transformando as equações, temos:

Hiperboloide:

$$-x^2 - y^2 + z^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad -r^2 + z^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad -\rho^2 \mathrm{sen}^2(\phi) + \rho^2 \cos^2(\phi) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \rho^2(-\mathrm{sen}^2(\phi) + \cos^2(\phi)) = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = \frac{1}{-\mathrm{sen}^2(\phi) + \cos^2(\phi)}$$

E então
$$\rho = \frac{1}{\sqrt{-\mathrm{sen}^2(\phi) + \cos^2(\phi)}}$$

Elipsoide:

$$9x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad 9r^2 + 4z^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad 9\rho^2 \mathrm{sen}^2(\phi) + 4\rho^2 \cos^2(\phi) = 25$$

$$\Rightarrow \quad \rho^2(9\mathrm{sen}^2(\phi) + 4\cos^2(\phi)) = 25 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = \frac{25}{9\mathrm{sen}^2(\phi) + 4\cos^2(\phi)}$$

E então
$$\rho = \frac{5}{\sqrt{9\mathrm{sen}^2(\phi) + 4\cos^2(\phi)}}$$

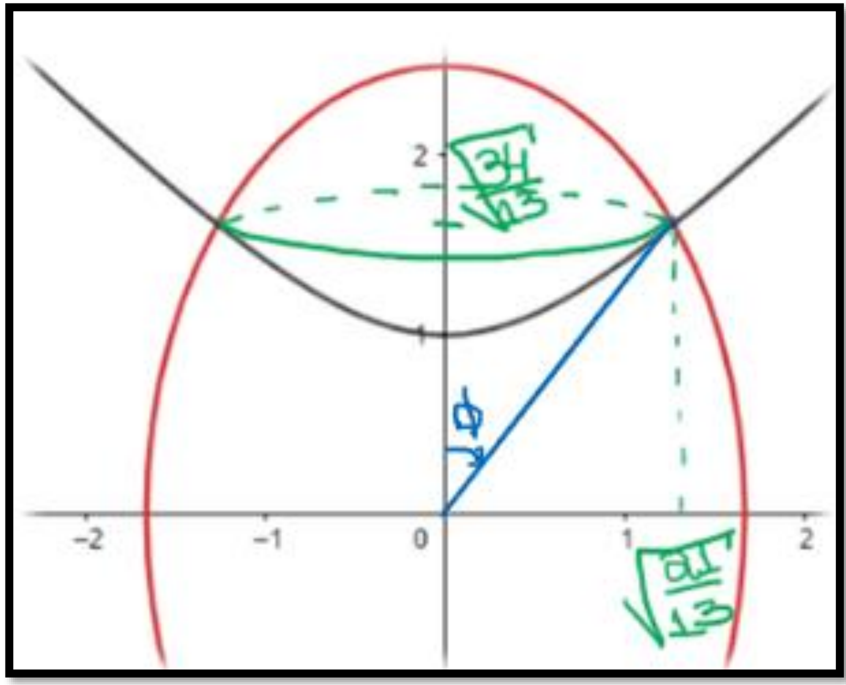
Exemplo

Interpretando o sólido: Em coordenadas esféricas o referencial consiste na origem do sistema.

Para esse sólido, não há troca na limitação da variável totalmente dependente ρ.

Com isso

$$\rho \in \left[\frac{1}{\sqrt{-\text{sen}^2(\phi)+\cos^2(\phi)}}, \frac{5}{\sqrt{9\text{sen}^2(\phi)+4\cos^2(\phi)}}\right]$$



Para determinar a variação de z veja que o sólido varia do eixo z (em que $\phi = 0$) até a interseção, dada por

$$\text{tg}(\phi) = \frac{r}{z} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \frac{\sqrt{\frac{21}{13}}}{\sqrt{\frac{34}{13}}} = \sqrt{\frac{21}{34}}$$

Portanto,

$$\phi \in \left[0, \text{arctg}\sqrt{\frac{21}{34}}\right] \quad \text{e} \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad \text{(mesmo que em cilíndricas)}$$

Exemplo

Portanto, o volume em coordenadas esféricas, é dado por

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\text{arctg}\sqrt{\frac{21}{34}}}\int_{\frac{1}{\sqrt{-\text{sen}^2(\phi)+\cos^2(\phi)}}}^{\frac{5}{\sqrt{9\text{sen}^2(\phi)+4\cos^2(\phi)}}} 1.\ \rho^2\sin(\phi)d\rho d\phi d\theta$$

Nesse caso, a integral em esféricas parece não ser a mais apropriada para calcularmos o volume. Vamos resolver a integral em cilíndricas:

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{21}{13}}}\int_{\sqrt{1+r^2}}^{\frac{\sqrt{25-9r^2}}{2}} 1.rdzdrd\theta \ = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{21}{13}}} r.z\Big|_{z=\sqrt{1+r^2}}^{z=\frac{\sqrt{25-9r^2}}{2}} drd\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{21}{13}}} \frac{r\sqrt{25-9r^2}}{2} - r\sqrt{1+r^2}\,drd\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{21}{13}}} \frac{r\sqrt{25-9r^2}}{2}drd\theta - 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{21}{13}}} r\sqrt{1+r^2}\,drd\theta$$

Exemplo

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{21}{13}}} \frac{\sqrt{25-9r^2}}{2} r\, drd\theta - 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\frac{21}{13}}} r\sqrt{1+r^2}\, drd\theta$$

Substituição simples:
$u = 25 - 9r^2$
$du = -18rdr$

Substituição simples:
$v = 1 + r^2$
$dv = 2rdr$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_{25}^{\frac{136}{13}} \frac{-\sqrt{u}}{2.18} dud\theta - 2\int_0^{2\pi}\int_1^{\frac{34}{13}} \frac{\sqrt{v}}{2} dvd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{25}^{\frac{136}{13}} \frac{-\sqrt{u}}{18} dud\theta - \int_0^{2\pi}\int_1^{\frac{34}{13}} \sqrt{v}\, dvd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{2}{3}.\frac{u^{3/2}}{18}\Bigg|_{u=25}^{u=\frac{136}{13}} d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}.v^{3/2}\Bigg|_{v=1}^{v=\frac{34}{13}} d\theta$$

Exemplo

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{2}{3}.\frac{u^{3/2}}{18}\Bigg|_{u=25}^{u=\frac{136}{13}} d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}.v^{3/2}\Bigg|_{v=1}^{v=\frac{34}{13}} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{27}.\left(\frac{136}{13}^{3/2} - 25^{3/2}\right) d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}.\left(\frac{34}{13}^{3/2} - 1^{3/2}\right) d\theta$$

$$= -\frac{1}{27}.\left(\frac{136}{13}\sqrt{\frac{136}{13}} - 125\right)\theta\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{2}{3}.\left(\frac{34}{13}\sqrt{\frac{34}{13}} - 1\right)\theta\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{27}.\left(\frac{136}{13}\sqrt{\frac{136}{13}} - 125\right)2\pi - \frac{2}{3}.\left(\frac{34}{13}\sqrt{\frac{34}{13}} - 1\right).2\pi$$

$$= \left(\frac{125}{27} - \frac{136}{351}\sqrt{\frac{136}{13}} - \frac{68}{39}\sqrt{\frac{34}{13}} + \frac{2}{3}\right)2\pi = \left(\frac{143}{27} - \frac{136}{351}\sqrt{\frac{136}{13}} - \frac{68}{39}\sqrt{\frac{34}{13}}\right)2\pi \ \ unid.volume$$

Exemplo

Exemplo 4) Transforme a intregral

$$M = \int_0^{\pi}\int_0^1\int_{2r^2}^{3-r} r^7\left(cos^6(\theta) + sin^6(\theta)\right) dzdrd\theta$$

para coordenadas cartesianas e para coordenadas esféricas.

Solução: Interpretando os limitantes, como $z \in [2r^2, 3-r]$, a superfície inferior é dada por

$$z = 2r^2 = 2(x^2+y^2) = 2x^2 + 2y^2$$

que consiste num paraboloide com vértice na origem e concavidade voltada pra cima.
A superfície superior é

$$z = 3 - r = 3 - \sqrt{x^2+y^2}$$

pois $z = 3 - r \leq 3$

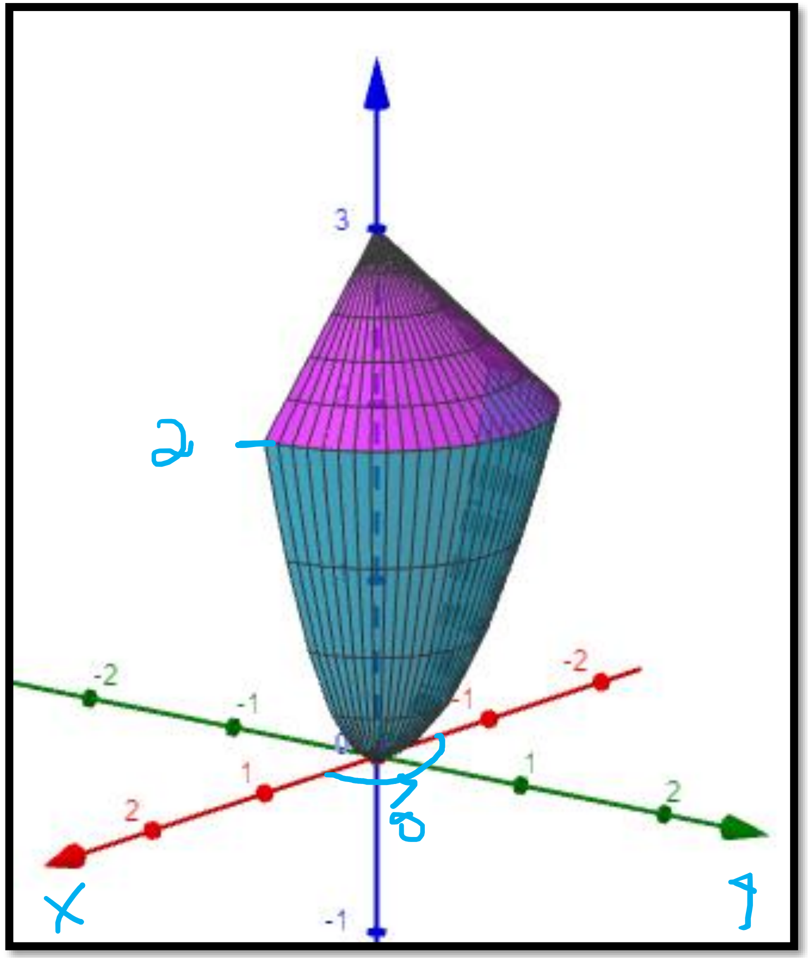
que consiste na parte do semicone $(z-3)^2 = x^2 + y^2$ que está situado abaixo de $z = 3$.

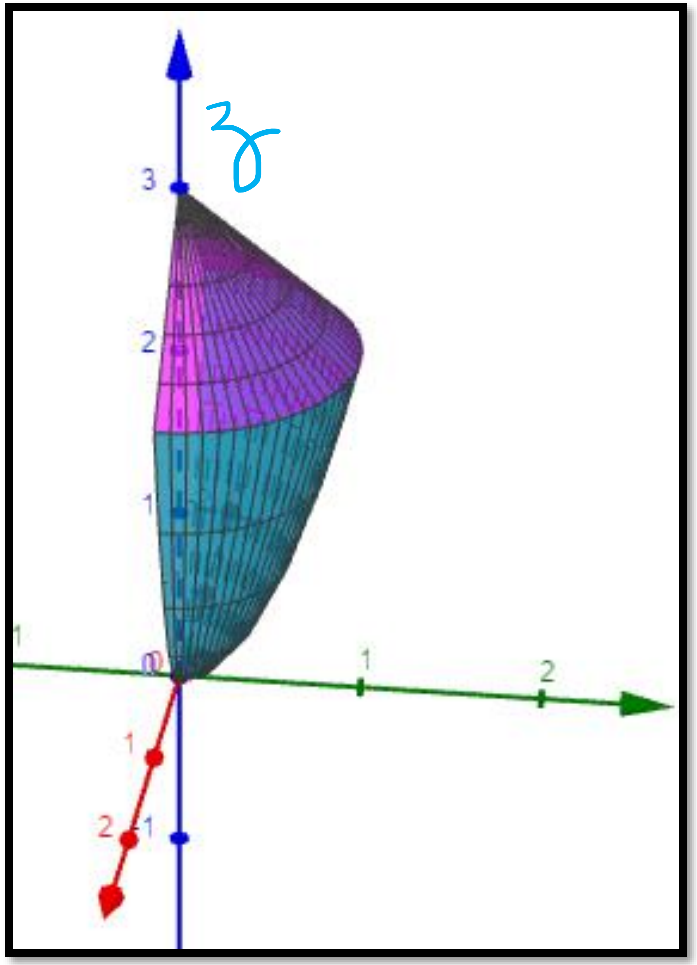
Ainda, $r \in [0,1]$ significa que a projeção no plano xy varia da origem $(r = 0)$ até a circunferência $r = 1 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1.$

E $\theta \in [0, \pi]$ significa que a projeção está situada somente no primeiro e no segundo quadrantes do plano xy.

Exemplo

Assim, temos o seguinte sólido:





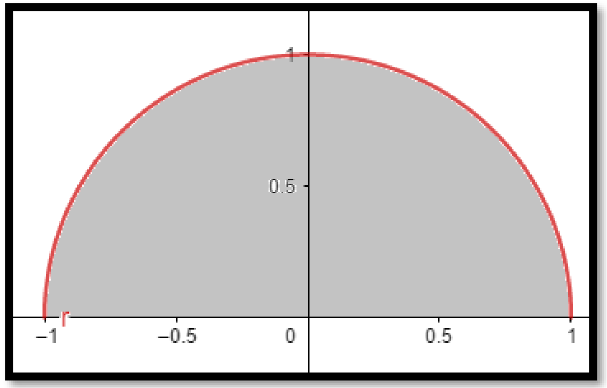
Na interseção entre as superfícies, temos:

$$2r^2 = z = 3 - r \quad \Rightarrow \quad 2r^2 + r - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 1 \quad \text{e} \quad z = 2.$$

Note que desprezamos a solução $r = -3/2$ pois o raio cilíndrico sempre é positivo.

Exemplo

A projeção sobre o plano xy é dada pela porção de $x^2 + y^2 = 1$ que está situada no primeiro e segundo quadrantes:



Tomando x como variável independente, obtemos que

$$x \in [-1, 1] \quad \text{e} \quad y \in \left[0, \sqrt{1 - x^2}\right].$$

Transformando o integrando (lembrando que $rdzdrd\theta = dV = dzdydx$ temos que

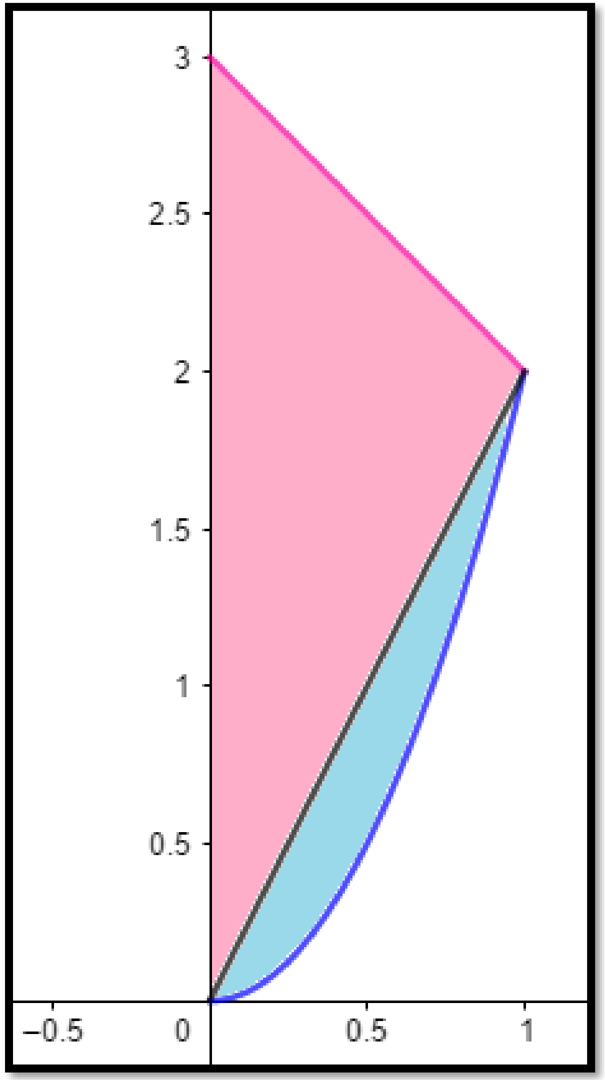
$$\begin{aligned} r^7\left(cos^6(\theta) + sin^6(\theta)\right)dzdrd\theta &= r^6\left(cos^6(\theta) + sin^6(\theta)\right)rdzdrd\theta \\ &= \left(r^6cos^6(\theta) + r^6sin^6(\theta)\right) rdzdrd\theta \\ &= (x^6 + y^6)dzdydx \end{aligned}$$

Assim, em coordenadas cartesianas:

$$M = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{2x^2+2y^2}^{3-\sqrt{x^2+y^2}}(x^6 + y^6)dzdydx\,.$$

Exemplo

Em esféricas, veja que há troca de limitação para o raio ρ, pois efetuando cortes radiais (partindo da origem) é possível sair no Cone (parte em rosa) ou no paraboloide (parte em azul). Assim:



Parte 1: $\rho \in [origem, cone]$

Parte 2: $\rho \in [origem, paraboloide]$

Transformando para esféricas:

Cone: $z = 3 - r \quad \Rightarrow \quad \rho\cos(\phi) = 3 - \rho\mathrm{sen}(\phi)$

$$\Rightarrow \quad \rho(\cos(\phi) + \sin(\phi)) = 3$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{3}{\cos(\phi) + \mathrm{sen}(\phi)}$$

Portanto, para a Parte 1:

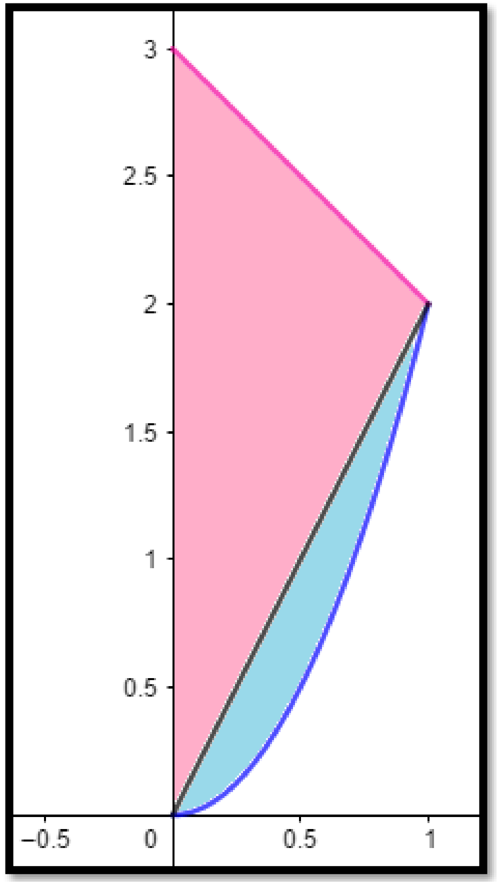
$$\rho \in \left[0, \ \frac{3}{\cos(\phi) + \mathrm{sen}(\phi)}\right]$$

Exemplos

Paraboloide:

$$z = 2r^2 \qquad \Rightarrow \qquad \rho\cos(\phi) = 2\rho^2\mathrm{sen}^2(\phi)$$

$$\Rightarrow \qquad \rho = \frac{\cos(\phi)}{2\mathrm{sen}^2(\phi)}$$



Portanto, para a Parte 2:

$$\rho \in \left[0, \frac{\cos(\phi)}{2\mathrm{sen}^2(\phi)}\right].$$

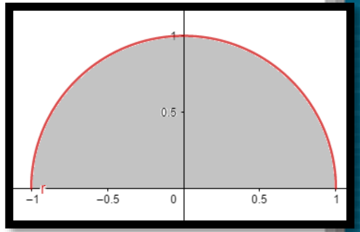
A troca de limitação ocorre na interseção, dada por ϕ:

$$\tan(\phi) = \frac{r}{z} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \phi = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

Portanto:

Parte 1: $\phi \in \left[0, \arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right]$. Parte 2: $\phi \in \left[\arctan\left(\frac{1}{2}\right), \frac{\pi}{2}.\right]$

Em ambas as partes: $\theta \in [0, \pi]$ pois a projeção sobre xy está no 1º e 2º Quadr.



Exemplos

Transformando o integrando (lembrando que $rdzdrd\theta = dV$ temos que

$$r^7\left(\cos^6(\theta) + \mathrm{sen}^6(\theta)\right)dzdrd\theta = r^6\left(cos^6(\theta) + \mathrm{sen}^6(\theta)\right)rdzdrd\theta$$

$$= r^6\ \left(cos^6(\theta) + \mathrm{sen}^6(\theta)\right)\ dV$$

E como $r = \rho\,\mathrm{sen}(\phi)$ e $dV = \rho^2\,\mathrm{sen}(\phi)\,d\rho d\phi d\theta$ obtemos que

$$r^7\left(cos^6(\theta) + \mathrm{sen}^6(\theta)\right)dzdrd\theta = \rho^6\mathrm{sen}^6(\phi)\left(cos^6(\theta) + \mathrm{sen}^6(\theta)\right)\rho^2\,\mathrm{sen}(\phi)\,d\rho d\phi d\theta$$

$$= \rho^8\mathrm{sen}^7(\phi)\left(cos^6(\theta) + \mathrm{sen}^6(\theta)\right)d\rho d\phi d\theta$$

$$= \rho^8\mathrm{sen}^7(\phi)\left(cos^6(\theta) + \mathrm{sen}^6(\theta)\right)d\rho d\phi d\theta.$$

Portanto a massa, em coordenadas esféricas, é dada por

$$M = \int_0^{\pi}\int_0^{\arctan\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{3}{\cos(\phi)+\mathrm{sen}(\phi)}} \rho^8\mathrm{sen}^7(\phi)\left(cos^6(\theta) + \mathrm{sen}^6(\theta)\right)d\rho d\phi d\theta$$

$$+ \int_0^{\pi}\int_{\arctan\left(\frac{1}{2}\right)}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\cos(\phi)}{2\mathrm{sen}^2(\phi)}} \rho^8\mathrm{sen}^7(\phi)\left(cos^6(\theta) + \mathrm{sen}^6(\theta)\right)d\rho d\phi d\theta$$

Exemplo

Exemplo 5) Represente geometricamente o sólido cuja massa é calculada por

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_{\sec(\phi)}^{2\cos(\phi)} \rho^2 \, d\rho d\phi d\theta$$

A seguir, transforme a expressão para coordenadas cilíndricas.

Solução: Como $\rho \in [\sec(\phi), 2\cos(\phi)]$, o raio interno é

$$\rho = \sec(\phi) = \frac{1}{\cos(\phi)} \quad \Rightarrow \quad \rho\cos(\phi) = 1 \quad \Rightarrow \quad z = 1 \quad (plano)$$

E o raio superior é

$$\rho = 2\cos(\phi) \quad \Rightarrow \quad \rho\rho = 2\rho\cos(\phi) \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = 2z \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2z$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

uma esfera de raio 1 e centro em $(0,0,1)$.

Como $\phi \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ o sólido se estende do eixo z $(\phi = 0)$ até a superfície

$$\phi = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{3}{9} z^2 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 3y^2 = z^2 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$$

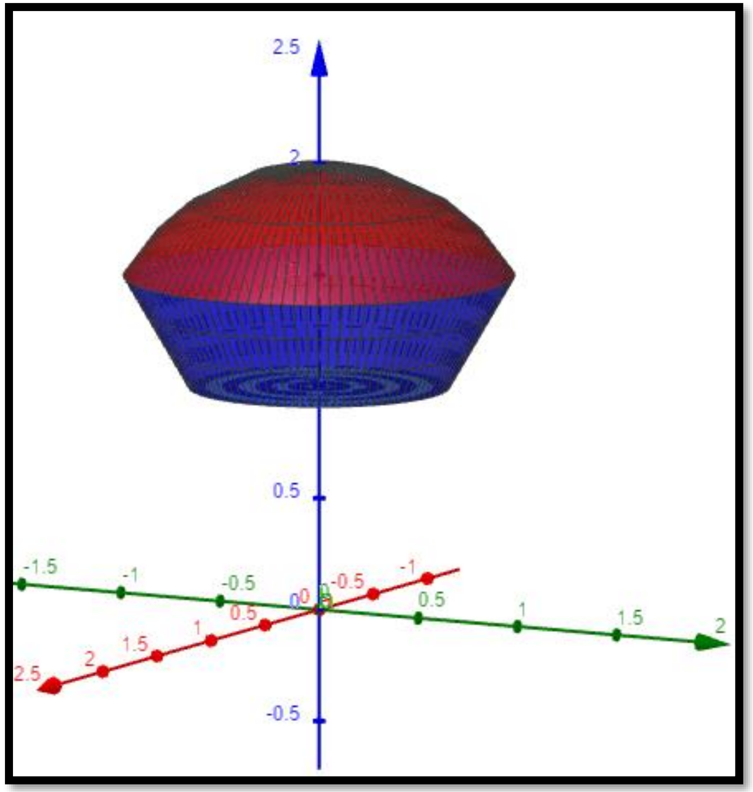
Exemplo

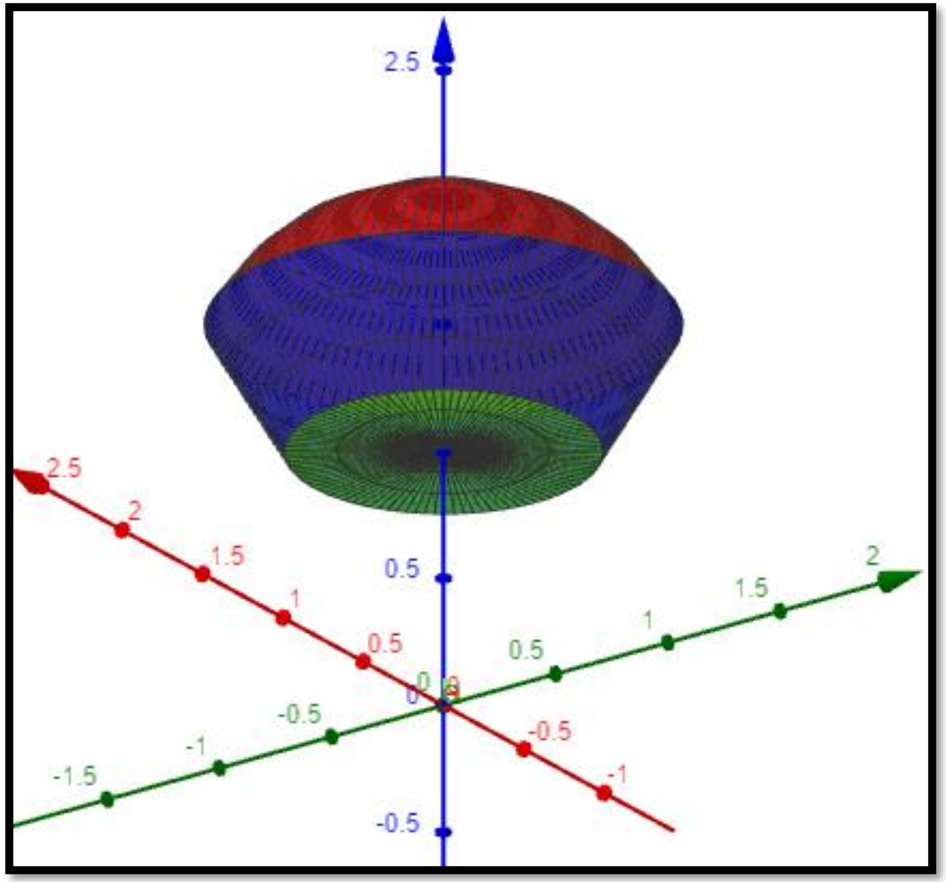
que representa um semicone.

Por fim, $\theta \in [0,2\pi]$ indica que a projeção do sólido sobre o plano xy ocupa os quatro quadrantes.

Com isso, o sólido é delimitado superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, inferiormente pelo plano $z = 1$ e lateralmente pelo semicone $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$.

Geometricamente, obtemos:





Exemplo

A interseções entre superfícies é dada por:

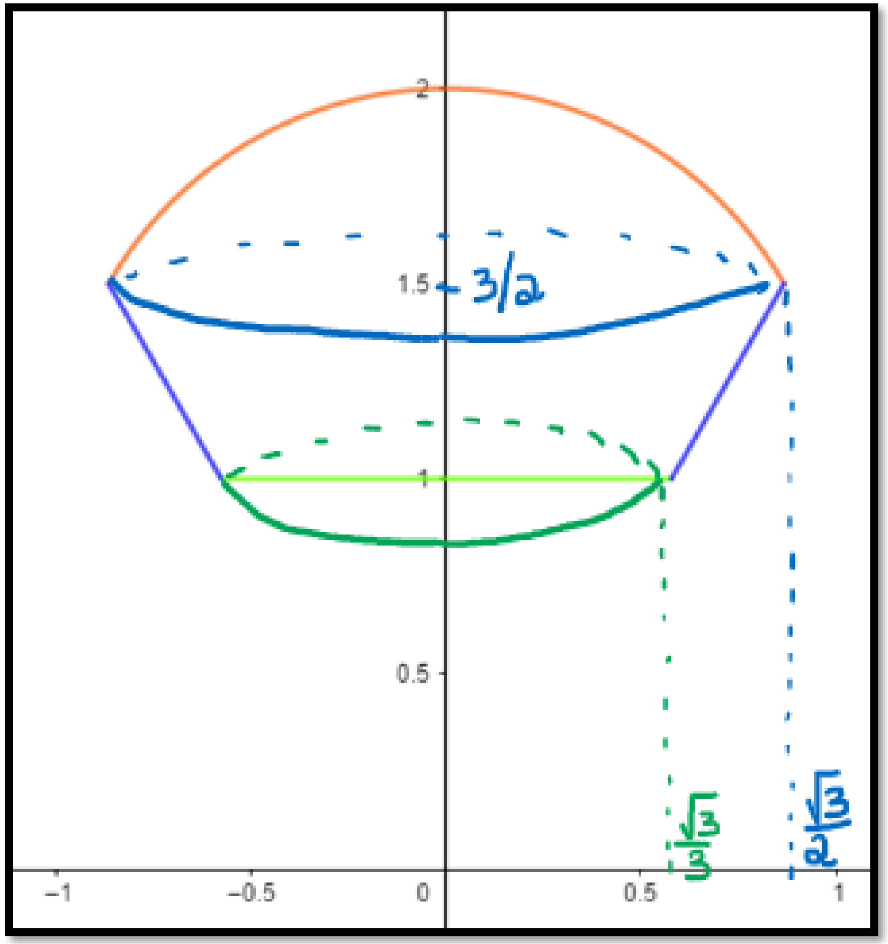
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2z \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2=z^2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{3} \\ z=1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2z \\ 3x^2+3y^2=z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}z^2+z^2=2z \\ x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4z^2=6z \\ x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\frac{3}{2} \\ x^2+y^2=\frac{3}{4} \end{cases}$$



Vista frontal do sólido

Exemplo

Transformando as superfícies para cilíndricas.

Esfera:

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (z-1)^2 = 1 - r^2 \Rightarrow \quad z = 1 \pm \sqrt{1-r^2}$$

como temos $z \geq 0$, tomamos $z = 1 + \sqrt{1-r^2}$.

Semicone:

$$\text{z} = \sqrt{3x^2 + 3y^2} \qquad \Rightarrow \qquad z = \sqrt{3}.\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3}\, r$$

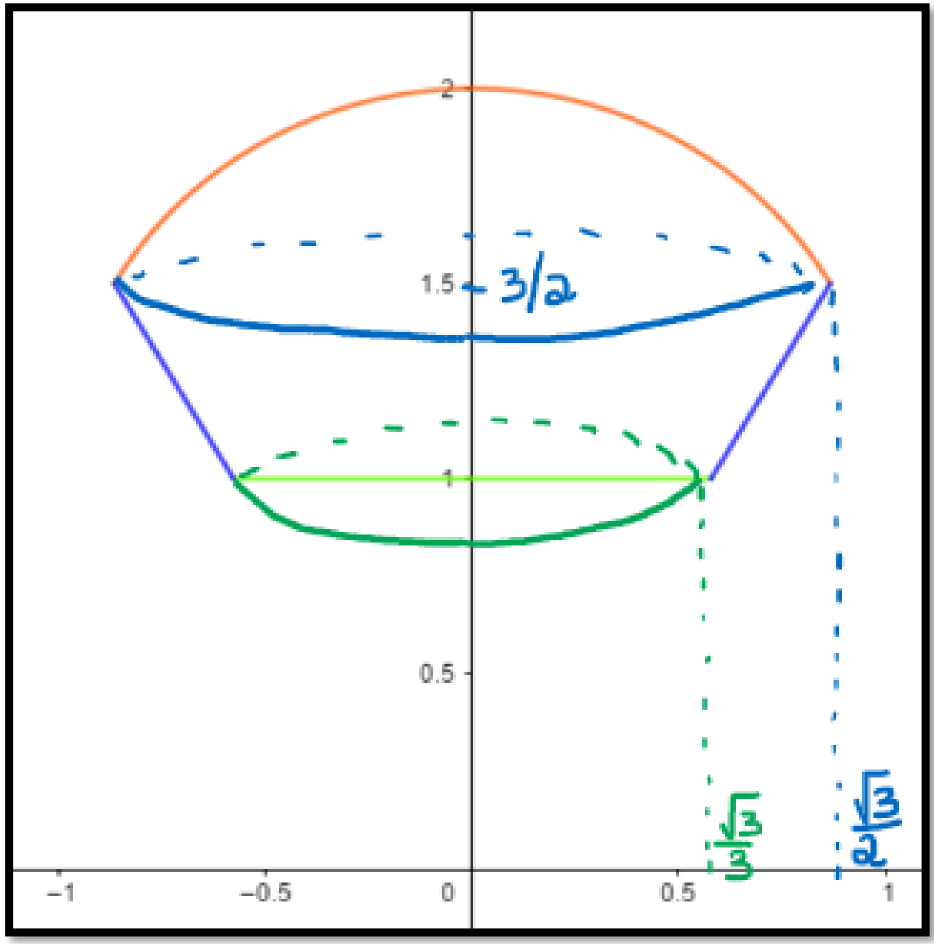
Plano $z = 1$ não há o que transformar.

Tomando z como totalmente dependente,

precisamos dividir em duas integrais:

Parte 1: $z \in \left[1, 1 + \sqrt{1-r^2}\right]$.

Parte 2: $z \in \left[\sqrt{3}\, r\,, 1 + \sqrt{1-r^2}\right]$



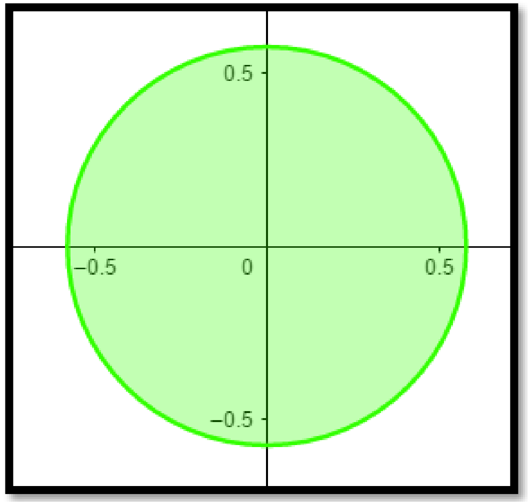
Exemplo

Projeções no plano xy:

Parte 1: $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$

Logo:

$$\theta \in [0, 2\pi], \qquad r \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

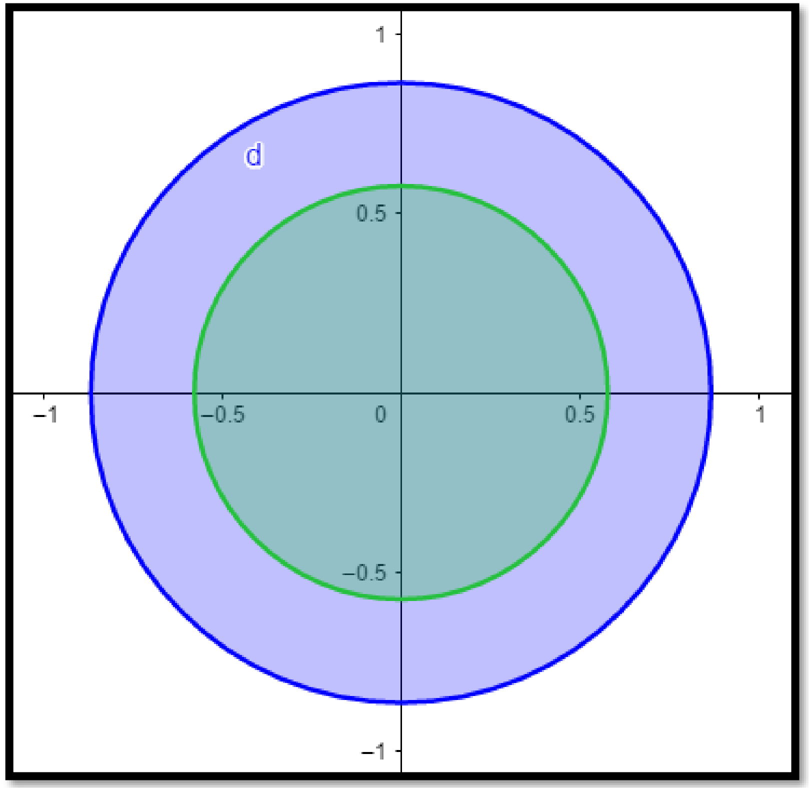


Parte 2: Interna a $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$

e externa a $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$

Logo:

$$\theta \in [0, 2\pi], \qquad r \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$



Exemplo

Para transformar a densidade e o diferencial de volume de esféricas para cilíndricas, primeiro o transformamos para cartesianas:

$$f\,dV = \rho^2 d\rho d\phi d\theta = \frac{\rho^2 \operatorname{sen}(\phi)}{\sin(\phi)} d\rho d\phi d\theta = \frac{dzdydx}{\frac{r}{\rho}} = \frac{\rho}{r} dzdydx$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{r} dzdydx = \frac{\sqrt{r^2+z^2}}{r} r dzdrd\theta = \sqrt{r^2+z^2}\, dzdrd\theta$$

Finalmente, obtemos que

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \int_1^{1+\sqrt{1-r^2}} \sqrt{r^2+z^2}\, dzdrd\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{\sqrt{3}\,r}^{1+\sqrt{1-r^2}} \sqrt{r^2+z^2}\, dzdrd\theta$$