Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Exemplos de Somas de Riemann e Integral Definida

Extensão para função continua, positiva e decrescente.

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 de 14 de agosto de 2024.

Revisão – Somas de Riemann

Na última aula, estudamos a definição de Soma Superior, Soma Inferior e Integral Definida.

Vimos que, se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ for contínua, positiva e crescente, então:

$$\overline{S}(f_{crec}^{+}) = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\,,$$

$$\underline{S}(f_{crec}^{+}) = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x,$$

em que
$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \qquad x_i = a + i\Delta x, \qquad f(x_i) = \max_{[x_{i-1},\, x_i]} f \quad \text{e} \quad f(x_{i-1}) = \min_{[x_{i-1},\, x_i]} f$$

Também discutimos a definição e a notação para a Integral Definida:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \overline{S}(f) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

ou

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x\,.$$

Exemplo

Exercício 1: Considere $f: [-1, 2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = -x^2 + 4x + 7.$$

Determine a Soma Superior e a Soma Inferior de f.

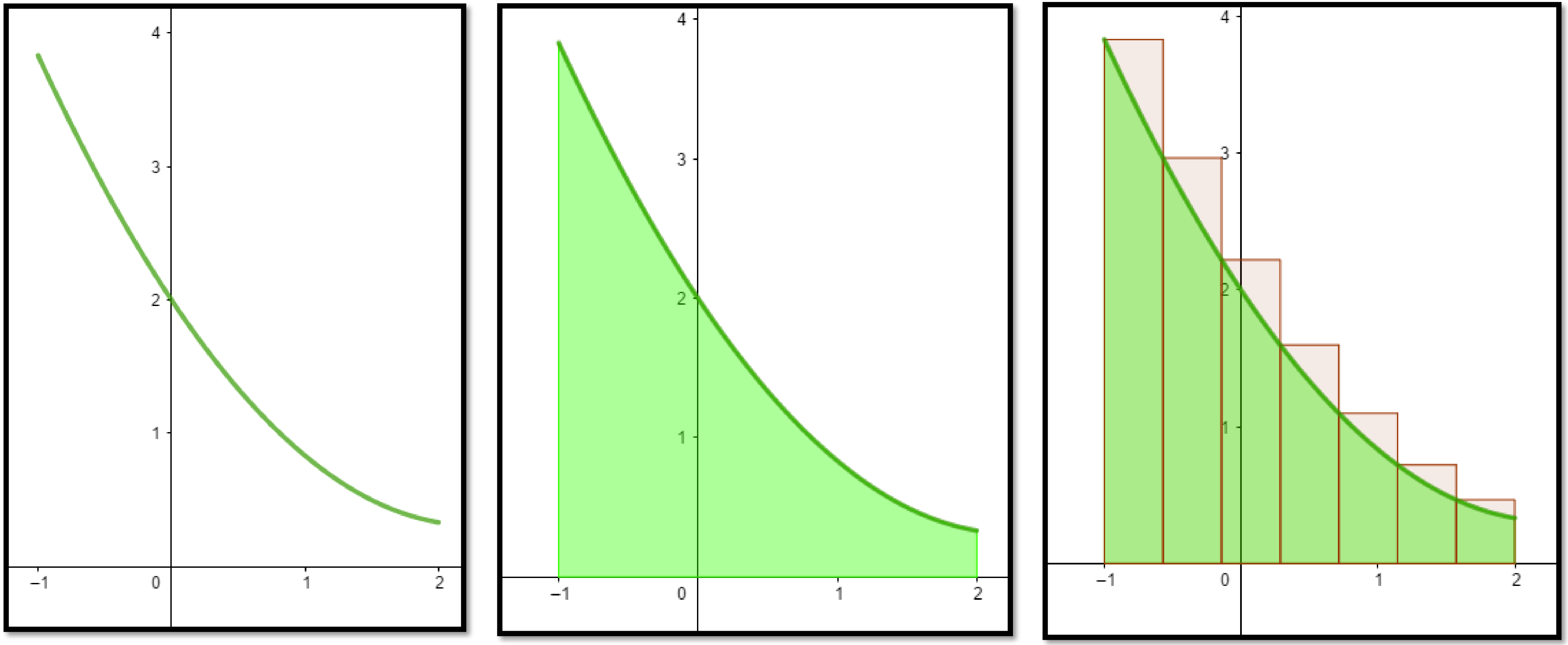
Em seguida, utilize uma das expressões obtidas para calcular, pela definição, o valor de

$$I = \int_{-1}^{2} (-x^2 + 4x + 7)dx\,.$$

Solução: O exercício será resolvido durante a aula.

E se f for positiva e decrescente?

O que muda caso $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ seja uma função contínua, positiva e decrescente?



Nesse caso, mantemos a base dos retângulos e os pontos da partição.

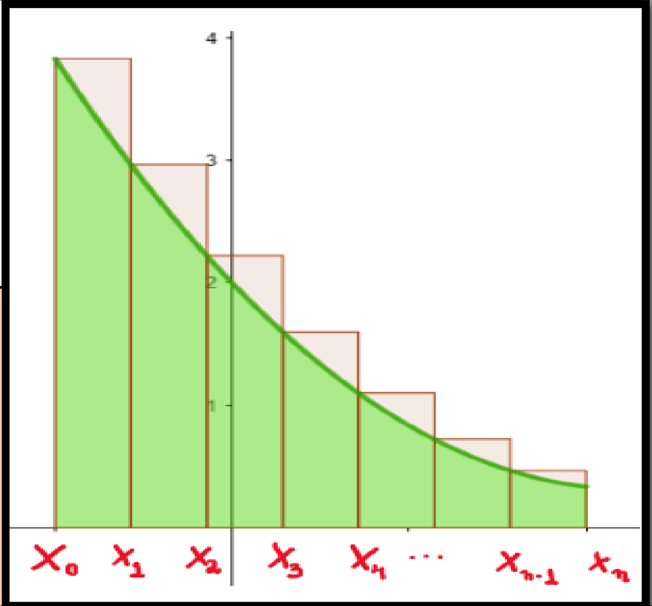
Somente precisamos adaptar as respectivas alturas dos retângulos circunscritos e inscritos.

Somas Superior e Inferior de Função Positiva decrescente

No caso em que f é decrescente, os seus valores máximos locais são sempre atingidos no extremo à esquerda de cada subintervalo.

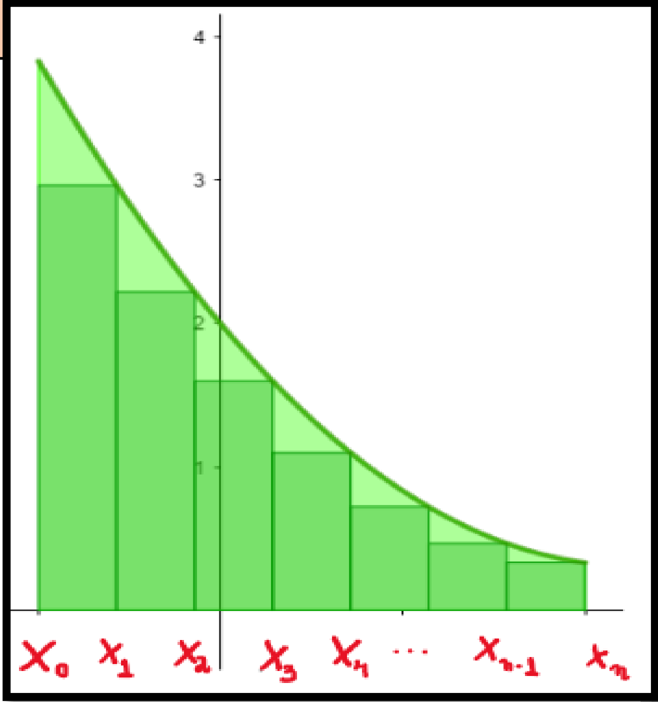
Com isso, sua Soma Superior é dada por:

$$\overline{S}\left(f^{+}_{decresc}\right) = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \underline{S}\left(f^{+}_{cresc}\right).$$



E a sua Soma Inferior é tal que:

$$\underline{S}\left(f^{+}_{decresc}\right) = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \overline{S}\left(f^{+}_{cresc}\right).$$

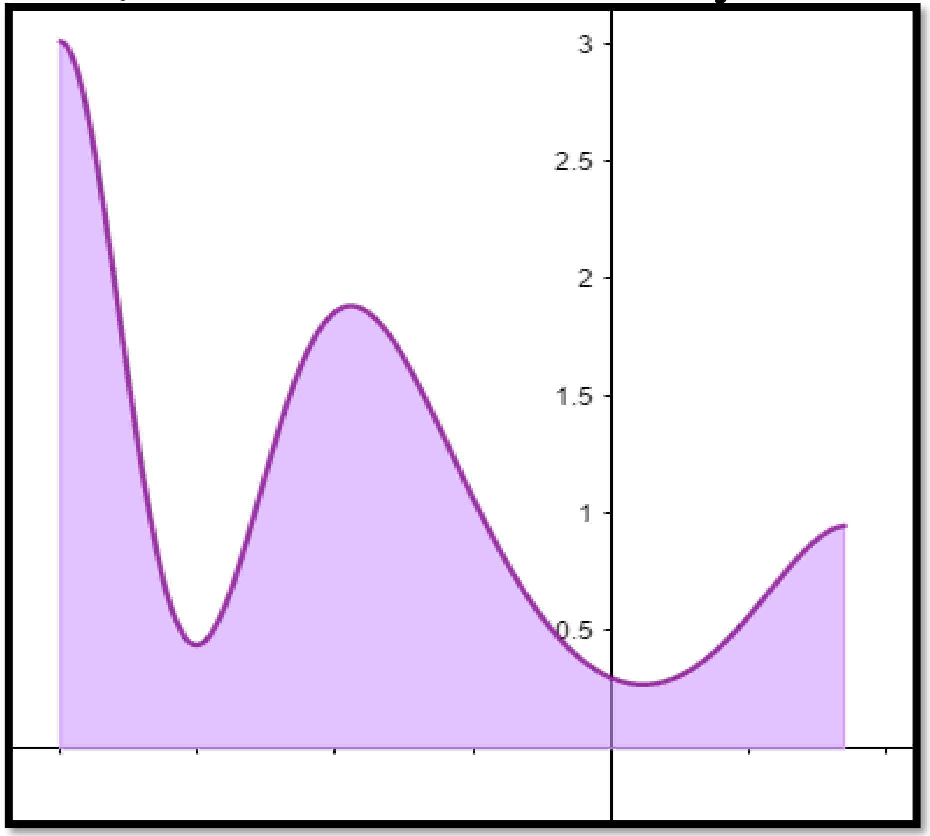


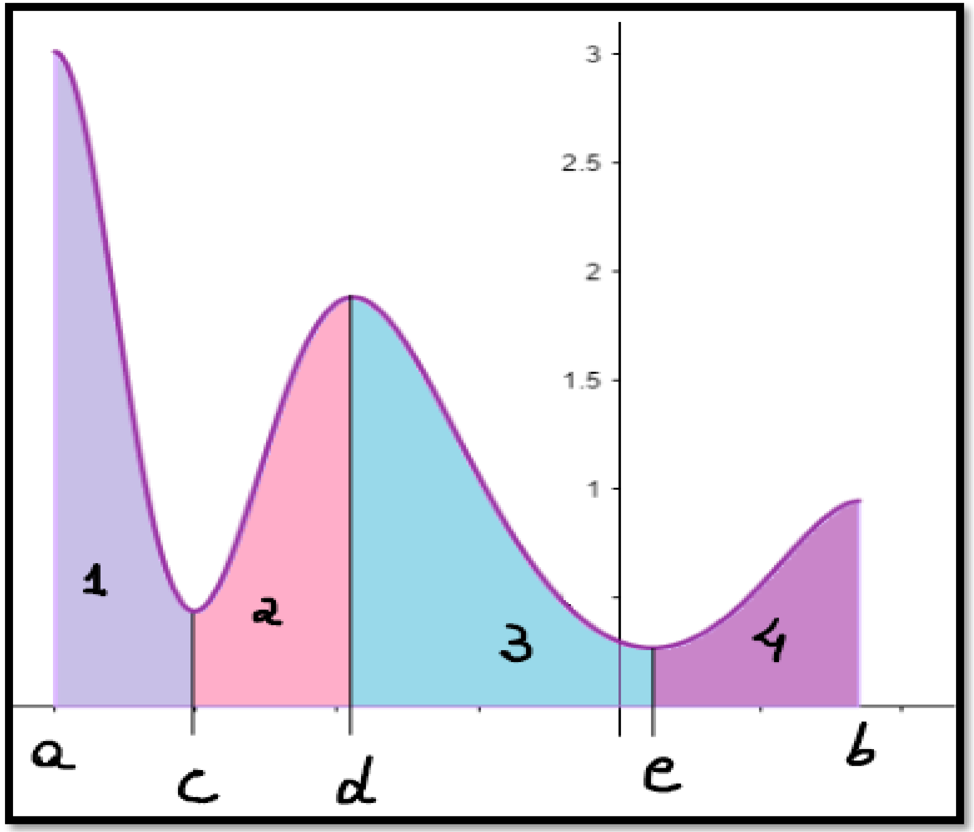
pois seus valores mínimos locais são atingidos sempre no extremo à direita de cada subintervalo da partição.

E se f não for nem crescente nem decrescente?

Para o caso geral de uma função contínua e positiva:

Basta dividir a região em sub-regiões, de acordo com o comportamento de crescimento/decrescimento da função.





$$\overline{S}(f^+) = \overline{S_1}(f^+_{decresc}) + \overline{S_2}(f^+_{cresc}) + \overline{S_3}(f^+_{decresc}) + \overline{S_4}(f^+_{cresc})$$

e

$$\underline{S}(f^+) = \underline{S_1}(f^+_{decresc}) + \underline{S_2}(f^+_{cresc}) + \underline{S_3}(f^+_{decresc}) + \underline{S_4}(f^+_{cresc}).$$

Exemplo

Exercício 2: Considere $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Determine a Soma Superior de f.

Em seguida, utilize a expressão obtida para determinar, por definição, o valor de

$$I = \int_0^2 (x^2 - 5x + 6)dx\,.$$

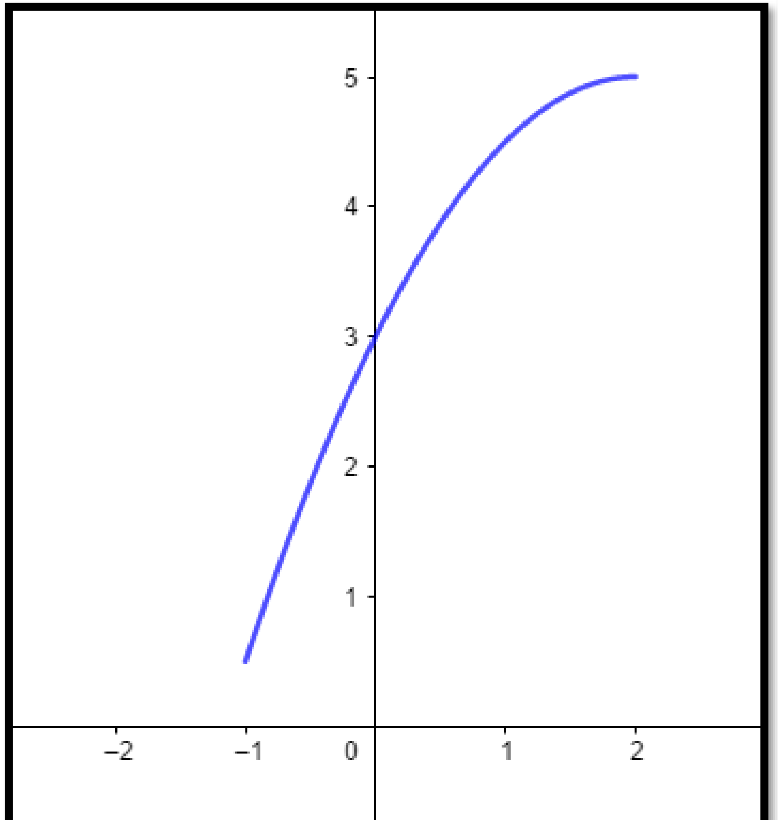
Solução: O exercício será resolvido durante a aula.

Exemplo Resolvido

Exemplo 1: Determine a Soma Superior e a Soma Inferior de $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$ para $x \in [-1,2]$. Em seguida, utilize as expressões obtidas para determinar o valor de

$$I = \int_{-1}^{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3\right) dx\,.$$

Solução: Iniciamos com a representação gráfica de f, para determinarmos seu comportamento de crescimento/decrescimento no intervalo de $x \in [-1,2]$:



Analisando o gráfico, vemos que f é positiva e crescente em todo o intervalo $[-1,2]$.

Definimos a base de cada um dos n retângulos por

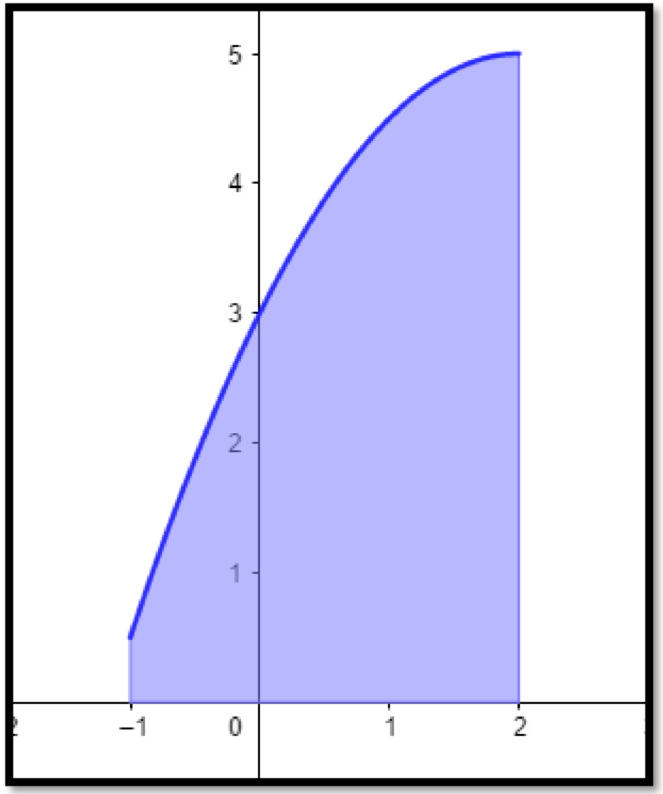
$$\Delta x = \frac{2-(-1)}{n} = \frac{3}{n}.$$

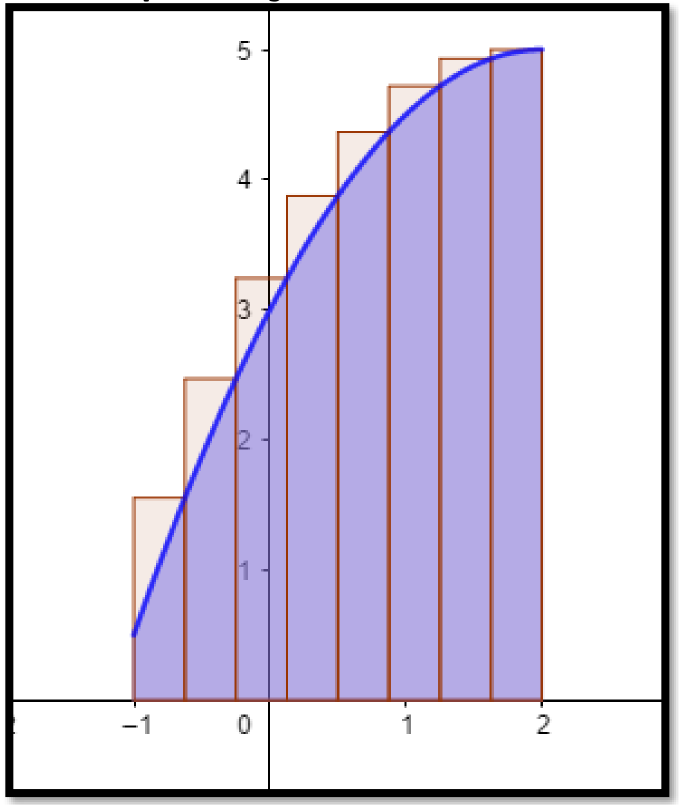
E tomamos os pontos auxiliares

$$x_0 = -1, \qquad x_1 = -1 + \Delta x, \qquad x_2 = -1 + 2\Delta x,$$
$$x_3 = -1 + 3\Delta x, \qquad \dots \qquad x_n = -1 + n\Delta x.$$

Exemplo

Para a Soma Superior, devemos usar retângulos circunscritos, cujas alturas devem ser tomadas no ponto de máximo de f em cada subintervalo da partição.





Como f é crescente no intervalo dado, os pontos de máximo ocorrem à direita de cada subintervalo. Assim, a Soma Superior de f é dada por

$$\overline{S}(f) = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

$$= [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_n)]\Delta x.$$

Exemplo Resolvido

Substituindo os pontos auxiliares e aplicando a lei da função, obtemos:

$$\overline{S}(f) = [f(-1+\Delta x) + f(-1+2\Delta x) + f(-1+3\Delta x) + \cdots + f(-1+n\Delta x)].\Delta x$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2}(-1+\Delta x)^2 + 2(-1+\Delta x) + 3\right) + \left(-\frac{1}{2}(-1+2\Delta x)^2 + 2(-1+2\Delta x) + 3\right)\right.$$
$$+ \left(-\frac{1}{2}(-1+3\Delta x)^2 + 2(-1+3\Delta x) + 3\right) + \cdots$$
$$\left.+ \left(-\frac{1}{2}(-1+n\Delta x)^2 + 2(-1+n\Delta x) + 3\right)\right].\Delta x$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2}(1-2\Delta x+(\Delta x)^2) + 2\Delta x + 1\right) + \left(-\frac{1}{2}(1-4\Delta x+2^2(\Delta x)^2) + 4\Delta x + 1\right)\right.$$
$$+ \left(-\frac{1}{2}(1-6\Delta x+3^2(\Delta x)^2) + 6\Delta x + 1\right) + \cdots$$
$$\left.+ \left(-\frac{1}{2}(1-2n\Delta x+n^2(\Delta x)^2) + 2n\Delta x + 1\right)\right].\Delta x$$

Exemplo Resolvido

Efetuando as operações algébricas, obtemos que

$$\overline{S}(f) = \left[\left(-\frac{1}{2} + \Delta x - \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + 2\Delta x + 1\right) + \left(-\frac{1}{2} + 2\Delta x - \frac{1}{2}2^2(\Delta x)^2 + 4\Delta x + 1\right)\right.$$
$$\left. + \left(-\frac{1}{2} + 3\Delta x - \frac{1}{2}3^2(\Delta x)^2 + 6\Delta x + 1\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{2} + n\Delta x - \frac{1}{2}n^2(\Delta x)^2 + 2n\Delta x + 1\right)\right].\Delta x$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2} + 3\Delta x - \frac{1}{2}(\Delta x)^2\right) + \left(\frac{1}{2} + 6\Delta x - \frac{1}{2}2^2(\Delta x)^2\right) + \left(\frac{1}{2} + 9\Delta x - \frac{1}{2}3^2(\Delta x)^2\right) + \cdots\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{2} + 3n\Delta x - \frac{1}{2}n^2(\Delta x)^2\right)\right].\Delta x$$

$$= \left[\frac{1}{2}n + 3\Delta x.(1 + 2 + 3 + \cdots + n) - \frac{1}{2}(\Delta x)^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)\right].\Delta x$$

Expressões Úteis:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Exemplo Resolvido

Utilizando as expressões anteriores, com $k = n$:

$$\overline{S}(f) = \left[\frac{1}{2}n + 3\Delta x.(1+2+3+\cdots+n) - \frac{1}{2}(\Delta x)^2(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\right].\Delta x$$

$$= \left[\frac{1}{2}n + 3\Delta x\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2}(\Delta x)^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right].\Delta x$$

$$= \left[\frac{1}{2}n + 3.\frac{3}{n}.\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2}.\left(\frac{3}{n}\right)^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right].\frac{3}{n}$$

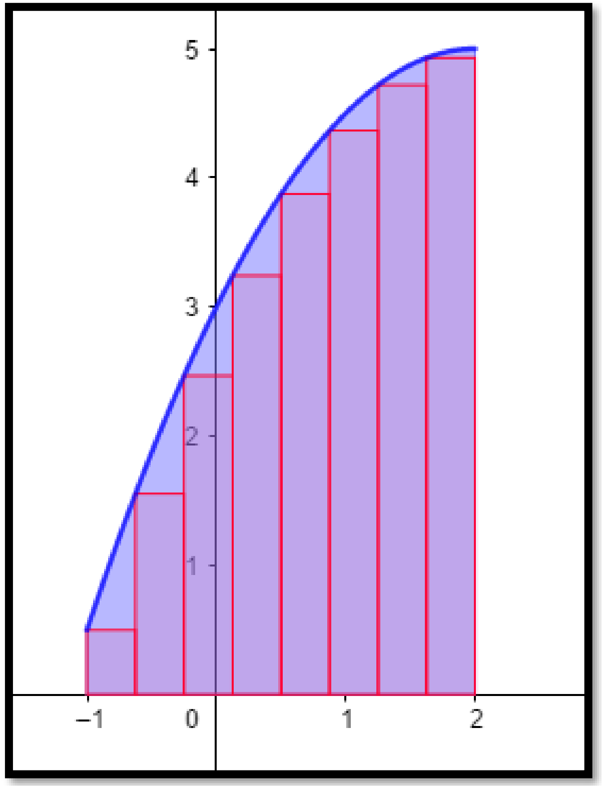
$$= \left[\frac{1}{2}n + 9.\frac{(n+1)}{2} - \frac{9}{2n^2}\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}\right].\frac{3}{n}$$

$$= \left[\frac{1}{2}n + \frac{9}{2}n + \frac{9}{2} - \frac{3}{2n}\frac{(2n^2+3n+1)}{2}\right].\frac{3}{n}$$

$$= \left[5n + \frac{9}{2} - \frac{3}{2}n - \frac{9}{4} - \frac{3}{4n}\right].\frac{3}{n} = \left[\frac{7}{2}n + \frac{9}{4} - \frac{3}{4n}\right].\frac{3}{n} = \frac{21}{2} + \frac{27}{4n} - \frac{9}{4n^2}.$$

Exemplo Resolvido

Para a Soma Inferior, devemos usar retângulos inscritos, cujas alturas devem ser tomadas nos pontos de mínimo de f em cada subintervalo da partição.



Como f é crescente no intervalo dado, os pontos de mínimo ocorrem à esquerda de cada subintervalo. Assim, a Soma Inferior de f é dada por

$$\underline{S}(f) = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$

$$= [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})]\Delta x.$$

Exemplo Resolvido

Substituindo os pontos auxiliares e aplicando a lei da função, obtemos:

$$\underline{S}(f) = [f(-1) + f(-1+\Delta x) + f(-1+2\Delta x) + \cdots + f(-1+(n-1)\Delta x)].\Delta x$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2}(-1)^2 + 2(-1) + 3\right) + \left(-\frac{1}{2}(-1+\Delta x)^2 + 2(-1+\Delta x) + 3\right)\right.$$
$$+ \left(-\frac{1}{2}(-1+2\Delta x)^2 + 2(-1+2\Delta x) + 3\right) + \left(-\frac{1}{2}(-1+3\Delta x)^2 + 2(-1+3\Delta x) + 3\right)$$
$$\left. + \cdots + \left(-\frac{1}{2}(-1+(n-1)\Delta x)^2 + 2(-1+(n-1)\Delta x) + 3\right)\right].\Delta x$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2} - 2 + 3\right) + \left(-\frac{1}{2}(1 - 2\Delta x + (\Delta x)^2) + 2\Delta x + 1\right)\right.$$
$$+ \left(-\frac{1}{2}(1 - 4\Delta x + 2^2(\Delta x)^2) + 4\Delta x + 1\right) + \left(-\frac{1}{2}(1 - 6\Delta x + 3^2(\Delta x)^2) + 6\Delta x + 1\right)$$
$$\left. + \cdots + \left(-\frac{1}{2}(1 - 2(n-1)\Delta x + (n-1)^2(\Delta x)^2) + 2(n-1)\Delta x + 1\right)\right].\Delta x$$

Exemplo Resolvido

Efetuando as operações algébricas:

$$\underline{S}(f) = \left[\left(-\frac{1}{2}+1\right)+\left(-\frac{1}{2}+\Delta x-\frac{1}{2}(\Delta x)^2+2\Delta x+1\right)+\left(-\frac{1}{2}+2\Delta x-\frac{1}{2}2^2(\Delta x)^2+4\Delta x+1\right)\right.$$
$$+\left(-\frac{1}{2}+3\Delta x-\frac{1}{2}3^2(\Delta x)^2+6\Delta x+1\right)+\cdots$$
$$\left.+\left(-\frac{1}{2}+(n-1)\Delta x-\frac{1}{2}(n-1)^2(\Delta x)^2+2(n-1)\Delta x+1\right)\right].\Delta x$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+3\Delta x-\frac{1}{2}(\Delta x)^2\right)+\left(\frac{1}{2}+6\Delta x-\frac{1}{2}2^2(\Delta x)^2\right)+\left(\frac{1}{2}+9\Delta x-\frac{1}{2}3^2(\Delta x)^2\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{2}+3(n-1)\Delta x-\frac{1}{2}(n-1)^2(\Delta x)^2\right)\right].\Delta x$$

$$= \left[\frac{1}{2}n+3\Delta x.(1+2+3+\cdots+(n-1))-\frac{1}{2}(\Delta x)^2(1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2)\right].\Delta x$$

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2} \qquad 1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Exemplo Resolvido

Utilizando as expressões, com $k = n - 1$, obtemos:

$$\underline{S}(f) = \left[\frac{1}{2}n + 3\Delta x.\left(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\right) - \frac{1}{2}(\Delta x)^2\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2\right)\right].\Delta x$$

$$= \left[\frac{1}{2}n + 3\Delta x\frac{(n-1)(n-1+1)}{2} - \frac{1}{2}(\Delta x)^2\frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6}\right].\Delta x$$

$$= \left[\frac{1}{2}n + 3.\frac{3}{n}.\frac{(n-1)n}{2} - \frac{1}{2}.\left(\frac{3}{n}\right)^2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right].\frac{3}{n}$$

$$= \left[\frac{1}{2}n + 9.\frac{(n-1)}{2} - \frac{9}{2n^2}\frac{n(2n^2-3n+1)}{6}\right].\frac{3}{n}$$

$$= \left[\frac{1}{2}n + \frac{9}{2}n - \frac{9}{2} - \frac{3}{2n}\frac{(2n^2-3n+1)}{2}\right].\frac{3}{n}$$

$$= \left[5n - \frac{9}{2} - \frac{3}{2}n + \frac{9}{4} - \frac{3}{4n}\right].\frac{3}{n} = \left[\frac{7}{2}n - \frac{9}{4} - \frac{3}{4n}\right].\frac{3}{n} = \frac{21}{2} - \frac{27}{4n} - \frac{9}{4n^2}$$

Exemplo Resolvido

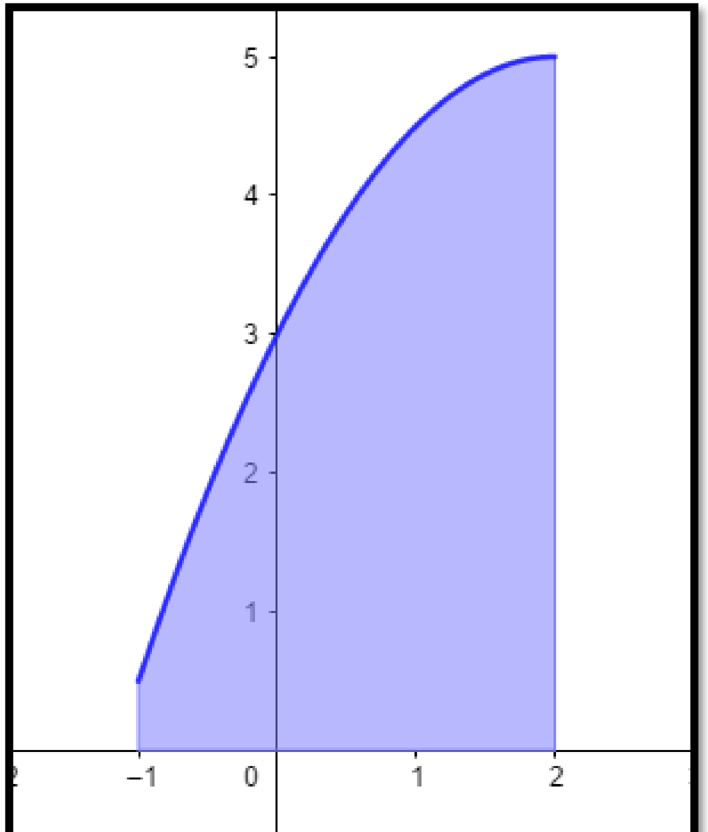
Portanto:

$$\overline{S}(f) = \frac{21}{2} + \frac{27}{4n} - \frac{9}{4n^2} \qquad \text{e} \qquad \underline{S}(f) = \frac{21}{2} - \frac{27}{4n} - \frac{9}{4n^2}$$

e com isso, podemos calcular a integral definida:

$$I = \int_{-1}^{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 \right) dx = \lim_{n \to +\infty} \overline{S}(f) = \lim_{n \to +\infty} \frac{21}{2} + \frac{27}{4n} - \frac{9}{4n^2}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{21}{2} + \frac{27}{4n} - \frac{9}{4n^2} = \frac{21}{2} + 0 - 0 = \frac{21}{2}.$$



Interpretação Geométrica: Como $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$ é positiva e continua em $[-1,2]$, a área da região situada abaixo do gráfico de f e acima do eixo x é igual a

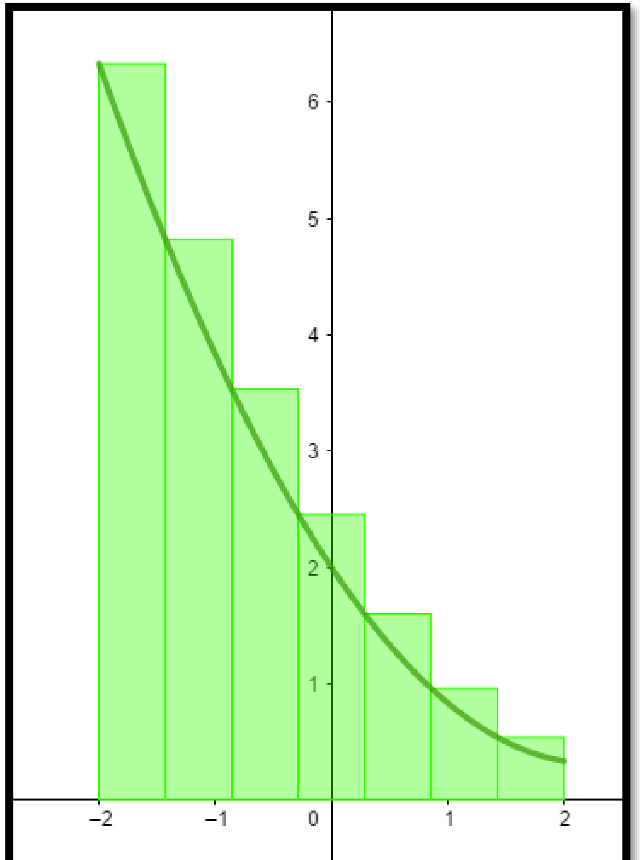
$$\frac{21}{2} \; unidades\ de\ área.$$

Exemplo Resolvido

Exemplo 2: Utilize Soma Superior para calcular o valor da integral definida

$$I = \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + 2 \right) dx.$$

Solução: Iniciamos com a representação gráfica de $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$ com $x \in [-2,2]$, para determinar o seu comportamento de crescimento ou decrescimento:



O gráfico de f permite identificar que no intervalo considerado, f é decrescente e, por isso, os pontos de máximo ocorrem à esquerda de cada subintervalo da partição.

Definimos a base de cada um dos n retângulos circunscritos por

$$\Delta x = \frac{2 - (-2)}{n} = \frac{4}{n}.$$

E tomamos os pontos auxiliares

$$x_0 = -2, \quad x_1 = -2 + \Delta x, \quad x_2 = -2 + 2\Delta x,$$
$$x_3 = -2 + 3\Delta x, \quad \dots \quad x_n = -2 + n\Delta x.$$

Portanto, a Soma Superior desejada é dada por

$$\overline{S}(f) = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$

$$= [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})]\Delta x$$

$$= [f(-2) + f(-2+\Delta x) + f(-2+2\Delta x) + \cdots + f(-2+(n-1)\Delta x)].\Delta x$$

$$= \left[\left(\frac{1}{3}(-2)^2 - \frac{3}{2}(-2) + 2\right) + \left(\frac{1}{3}(-2+\Delta x)^2 - \frac{3}{2}(-2+\Delta x) + 2\right)\right.$$

$$+ \left(\frac{1}{3}(-2+2\Delta x)^2 - \frac{3}{2}(-2+2\Delta x) + 2\right) + \cdots$$

$$\left. + \left(\frac{1}{3}(-2+(n-1)\Delta x)^2 - \frac{3}{2}(-2+(n-1)\Delta x) + 2\right)\right].\Delta x$$

$$= \left[\left(\frac{4}{3} + 3 + 2\right) + \left(\frac{1}{3}(4 - 4\Delta x + (\Delta x)^2) + 3 - \frac{3}{2}\Delta x + 2\right)\right.$$

$$+ \left(\frac{1}{3}(4 - 8\Delta x + 2^2(\Delta x)^2) + 3 - \frac{3}{2}.2\Delta x + 2\right) + \cdots$$

$$\left. + \left(\frac{1}{3}(4 - 4(n-1)\Delta x + (n-1)^2(\Delta x)^2) + 3 - \frac{3}{2}(n-1)\Delta x + 2\right)\right].\Delta x$$

Exemplo Resolvido

Fazendo os cálculos:

$$= \left[\left(\frac{19}{3}\right) + \left(\frac{19}{3} - \frac{17}{6}\Delta x + \frac{1}{3}(\Delta x)^2\right) + \left(\frac{19}{3} - \frac{17}{6}.2\Delta x + \frac{1}{3}2^2(\Delta x)^2\right) + \cdots\right.$$

$$\left. + \left(\frac{19}{3} - \frac{17}{6}(n-1)\Delta x + \frac{1}{3}(n-1)^2(\Delta x)^2\right)\right].\Delta x$$

$$= \left[\frac{19}{3}n - \frac{17}{6}\Delta x(1 + 2 + \cdots + (n-1)) + \frac{1}{3}(\Delta x)^2(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2)\right].\Delta x$$

$$= \left[\frac{19}{3}n - \frac{17}{6}.\frac{4}{n}.\frac{(n-1)n}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{n}\right)^2\left(\frac{(n-1).n.(2n-1)}{6}\right)\right].\frac{4}{n}$$

$$= \left[\frac{19}{3}n - \frac{17}{3}.(n-1) + \frac{16}{3n}\left(\frac{2n^2 - 3n + 1}{6}\right)\right].\frac{4}{n}$$

$$= \left[\frac{19}{3}n - \frac{17}{3}n + \frac{17}{3} + \frac{16}{9}n - \frac{8}{3} + \frac{8}{9n}\right].\frac{4}{n} = \left[\frac{22}{9}n + 3 + \frac{8}{9n}\right].\frac{4}{n} = \frac{88}{9} + \frac{12}{n} + \frac{32}{9n^2}.$$

Exemplo Resolvido e Exercícios Propostos

Portanto, como a integral definida é dada pelo limite das Somas Superiores, obtemos que

$$I = \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + 2 \right) dx = \lim_{n \to +\infty} \overline{S}(f)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{88}{9} + \frac{12}{n} + \frac{32}{9n^2} = \frac{88}{9} + 0 + 0 = \frac{88}{9}.$$

Exercício Proposto: Utilize Somas Inferiores para calcular o valor das integrais definidas:

$a)\ \ I = \int_{-1}^{1} (3x^2 - 2x + 1)dx$ $\qquad$ $b)\ \ I = \int_{2}^{6} \left(\frac{1}{4}x^2 - x + 3 \right) dx$

Da lista 1: Podem ser resolvidos os exercícios 1, 2, 3, 4.