Eulerianos
Gabarito

- Quais dos seguintes grafos são Eulerianos ou semi-Eulerianos?
- (i) Grafo completo K5;
  (ii) Grafo completo bipartite K2,3;
  (iii) Grafo cube; (iv) Grafo octaedro;
  (v) Grafo de Petersen.

  Responda:
  (i) Para quais valores de n o Kn é Euleriano?
  (ii) Quais são os grafos completos bipartites que são Eulerianos?
  (iii) Para quais valores de n o grafo roda Wn é Euleriano?
  (iv) Para quais valores de k, o k-cube Qk é Euleriano?

Respostas Completas

- Quais dos seguintes grafos são Eulerianos ou semi-Eulerianos?
- (i) Grafo completo K5; R: Para Todo Kn onde n é ímpar, é Euleriano. Se N for par, Grafo Kn será Semi-Euleriano.
  (ii) Grafo completo bipartite K2,3; Seja o Ki,j o grafo completo bipartido. Se i for igual a 2 e se j for par o grafo Ki,j será Euleriano, se j for ímpar, o Grafo Ki,j será Semi-Euleriano. Para todo e qualquer valor onde i > 2. o Grafo será Euleriano Somente se i e j forem pares.
  (iii) Grafo cube; Considerando o Grafo Qk. Onde Q3 é o Grafo cubo, Para todo Qk se k for ímpar o grafo Qk não será Euleriano nem Semi-Euleriano. Se k for par, o Grafo Qk sempre será Euleriano.
  (iv) Grafo octaedro; Um grafo octaedro é um grafo regular de grau 4, onde cada vértice está conectado a quatro outros vértices. Assim, ele é Euleriano, pois todos os vértices têm grau par.
  (v) Grafo de Petersen. Não é Euleriano nem semi-Euleriano, pois todos os vértices têm grau ímpar

Respostas Simplificadas

- Quais dos seguintes grafos são Eulerianos ou semi-Eulerianos?
- (i) Grafo completo K5; R: Euleriano

  (ii) Grafo completo bipartite K2,3; R: Semi-Euleriano

  (iii) Grafo cube; R: O grafo cubo Q3, não é Euleriano nem Semi-Euleriano

  (iv) Grafo octaedro; R: Euleriano

  (v) Grafo de Petersen. R: Nem Euleriano, Nem Semi-Euleriano

  Responda:
  (i) Para quais valores de n o Kn é Euleriano? Valores ímpares

  (ii) Quais são os grafos completos bipartites que são Eulerianos? Todos os grafos completos bipartite Km,n onde m e n são pares.

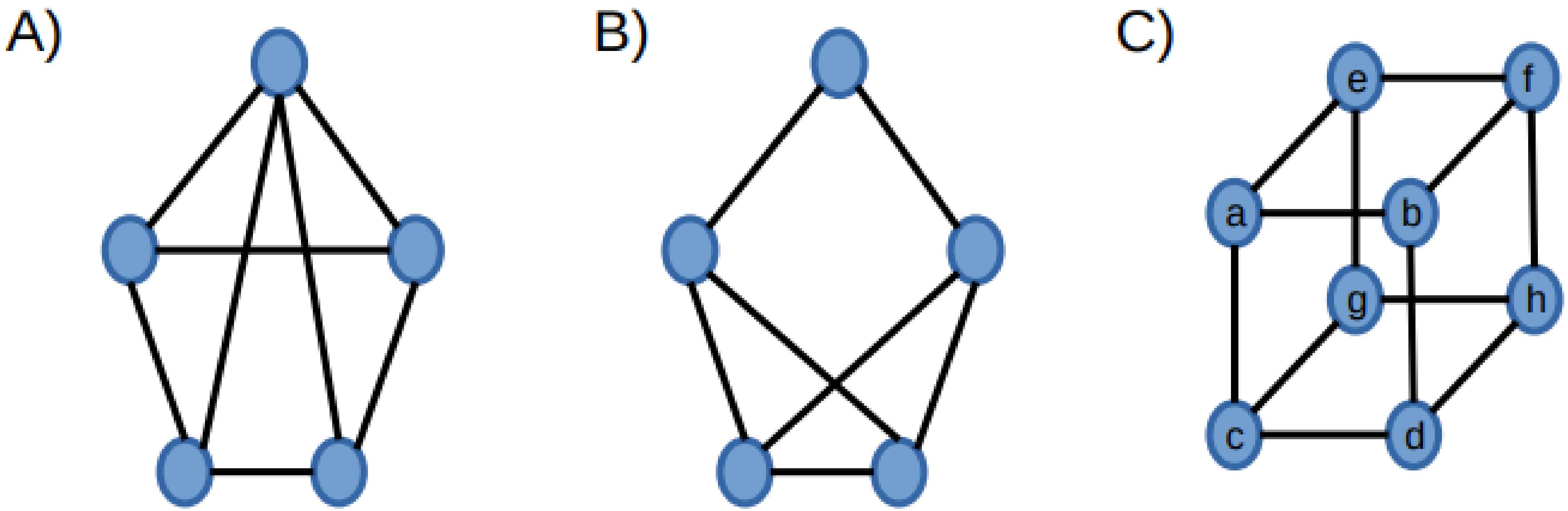
  (iii) Para quais valores de n o grafo roda Wn é Euleriano? Para Nenhum.

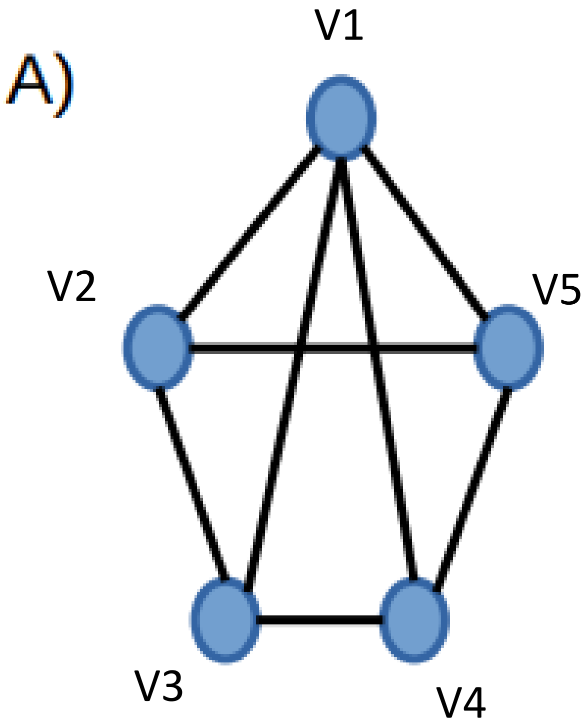
  (iv) Para quais valores de k, o k-cube Qk é Euleriano? Para os valores onde k é par.

Hamiltonianos
Gabarito

Para cada grafo abaixo, qual atende ao:
Teorema de Dirac;
Teorema de Ore

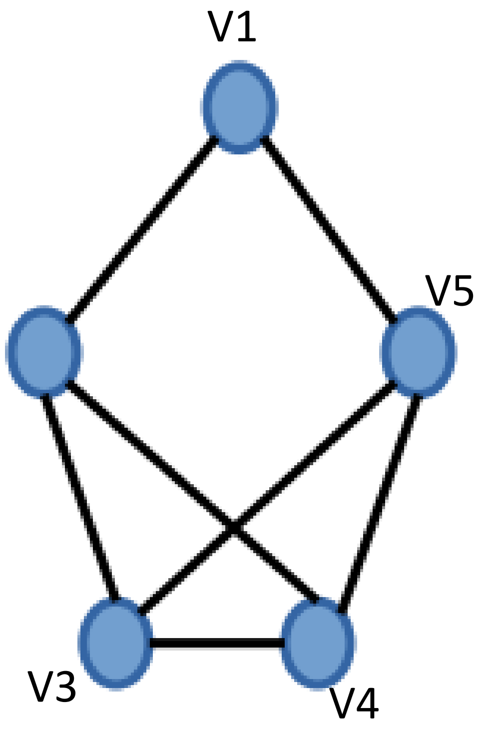
Qual possui ciclo hamiltoniano, enuncie tal ciclo?





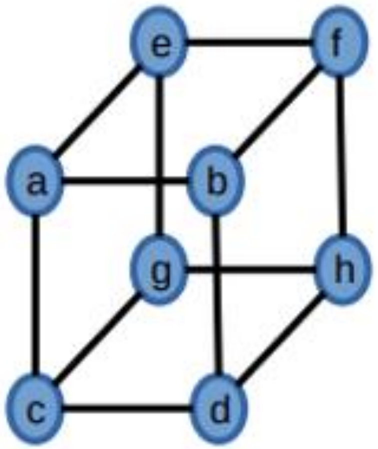
- Numero de vértices N = 5
- Vértice com menor grau é V2, V3, V4 e V5
- Deg(v2) = 3
- Pelo teorema de dirac:
- deg(v) ≥ n/2
- Então:
- 3 >= 5/2
- 3 >= 2,5
- Assim, pelo Teorema de Dirac, o grafo de A possui um ciclo Hamiltoniano, podendo ser: v1 -> v2 -> v3 -> v4 -> v5 -> v1.
- Este grafo também atende ao teorema de Ore, verifique.

B)



- Pelo Teorema de Ore:
- Se deg(v) + deg(w) ≥ n para todo par de vértices distintos v e w pertencentes a G e não adjacentes, então G possui um ciclo hamiltoniano.
- N = 5
- Deg(v1) + deg(v3) >= 5
  2 + 3 >= 5
- Deg(v1) + deg(V4) >= 5
  2 + 3 >= 5
- Deg(v2) + deg(v5) >= 5
  3 + 3 >= 5
- Assim, pelo Teorema de Ore, Esse grafo possui um ciclo Hamiltoniano, podendo ser:
- V1 -> V2 -> V3 -> v4 -> V5 -> v1

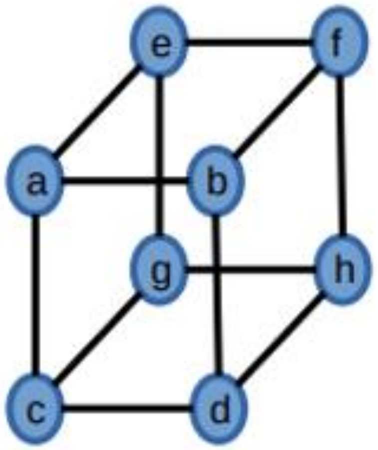
C)



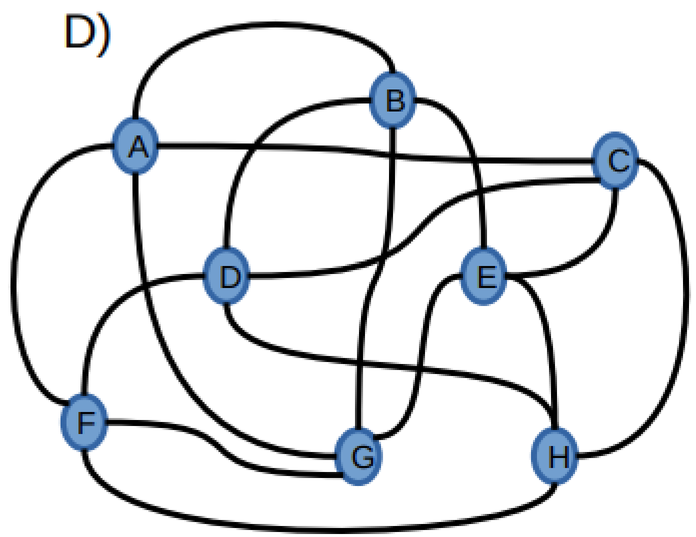
- Pelo Teorema de Dirac:
- Todos os vértices possuem grau igual a 3.
- Seja v um vértice qualquer.
- Deg(v) = 3
- N = 8
- 3 >= 8/2 -> 3 >= 4
- Não. Assim, nada podemos afirmar.
- Pelo teorema de Ore:
- Considerando v e w dois vértices quaisquer, visto que todos os vértices possuem o mesmo grau.
- Deg(v) + Deg(w) >= n
- 3 + 3 >= 8

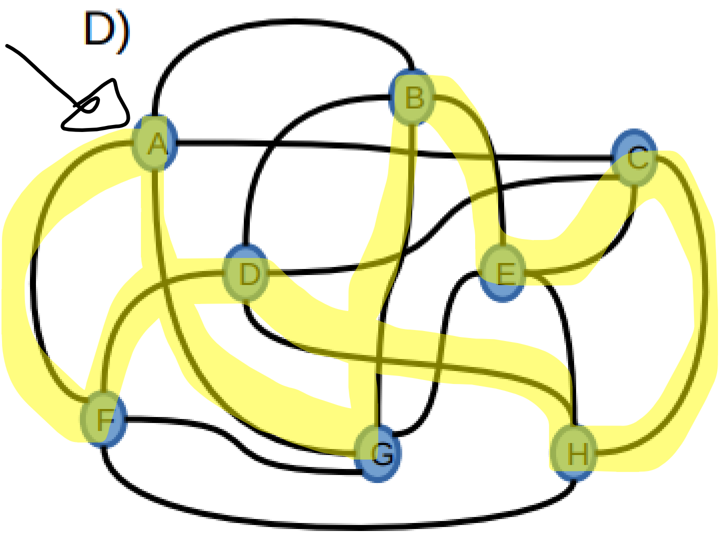
  Não, assim, nada podemos afirmar.

C)



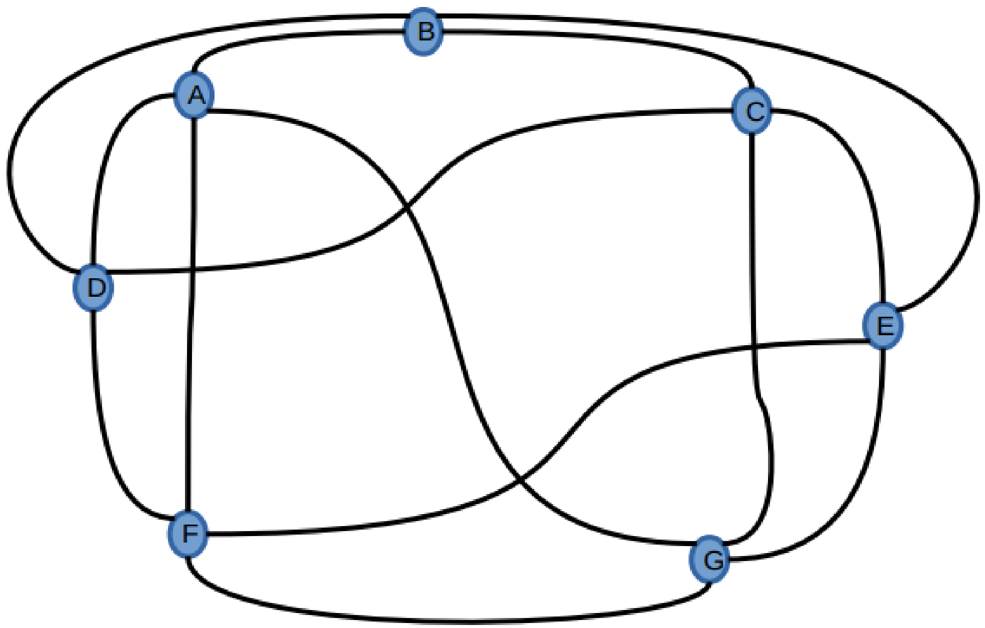
- Porém, apesar da condição suficiente dos teoremas de Ore e Dirac falharem, não podemos afirmar, a partir desses teoremas se existe ou não um ciclo hamiltoniano.
- Porém, Existe sim um ciclo hamiltoniano nesse grafo. Tente realizar o exercício de encontrar um ciclo hamiltoniano nesse grafo.



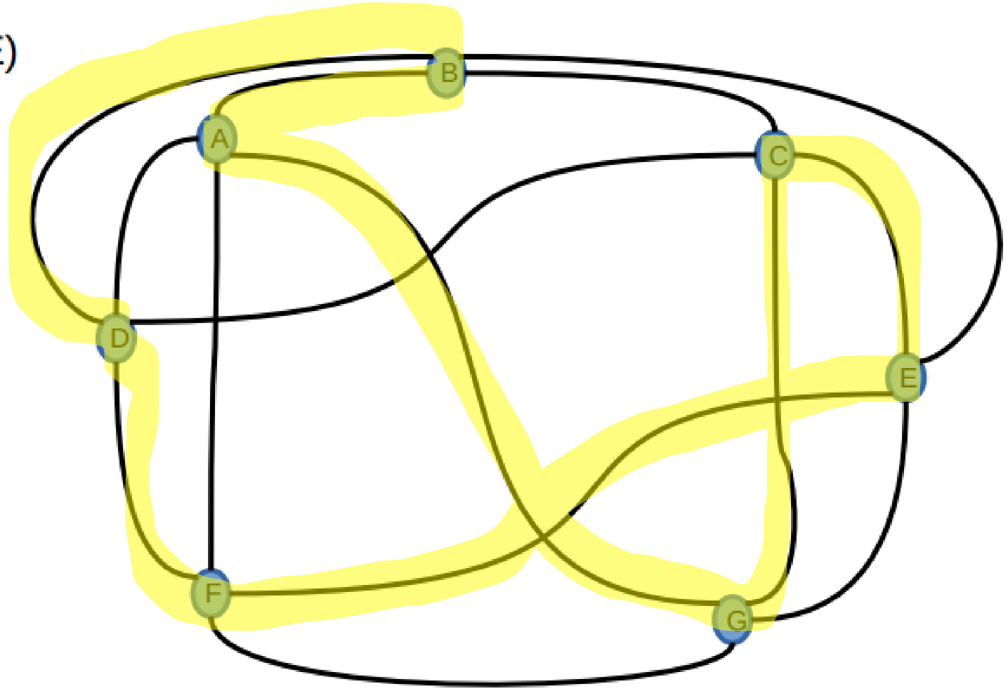


- Todos os vértices desse grafo possuem graus iguais (grau igual a 4).
- N = 8
- Pelo teorema de Dirac:
- Seja um vértice v qualquer no grafo.
- Deg(v) = 4
- Deg(v) >= N/2
- 4 >= 8/2
- 4 >= 8
- Sim, assim, o grafo possui um ciclo hamiltoniano, podendo ser:
  A -> G -> B -> E -> C -> H -> D -> F -> A

E)

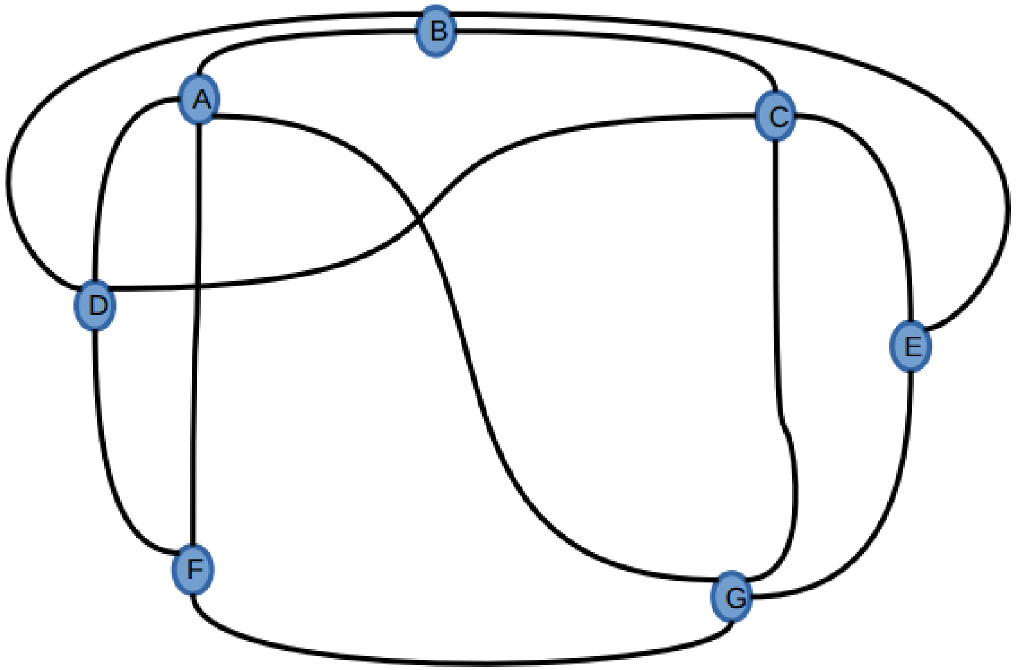


E)



- Grafo com graus iguais. Grau 4. (grafo regular).
- N = 7
- Pelo teorema de Ore, sendo v e w vértices quaisquer em G.
- Deg(v) + deg(w) >= N
- 4 + 4 >= 7
  8 >= 7
- Sim, assim, o grafo possui um ciclo hamiltoniano, podendo ser:
- A -> G -> C -> E -> F - > D -> B -> A

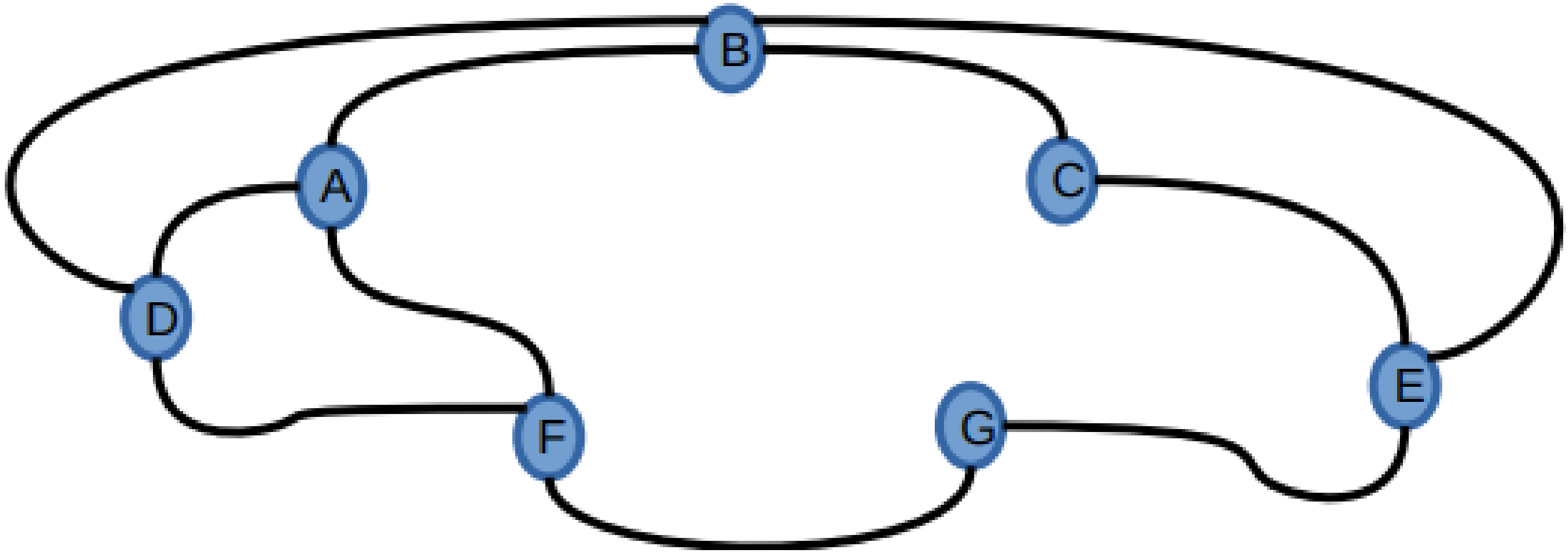
F)



- Pelo Teorema de Ore:
- N = 7
- deg(A) + deg(E) ≥ n -> 4 + 3 ≥ 8 Não.
- Como encontramos pelo menos um caso, é suficiente para a falha do teorema de Ore, assim nada podemos afirmar.
- Pelo Teorema de Dirac:
- Vértice com menor grau: F e E.
- Deg(F ou E) ≥ N/2
- 3 ≥ 7/2 Não.
- Assim, nada podemos afirmar.
- Porém, existe sim um Caminho hamiltoniano nesse grafo. Tente realizar o exercício de encontrar um ciclo hamiltoniano nesse grafo.

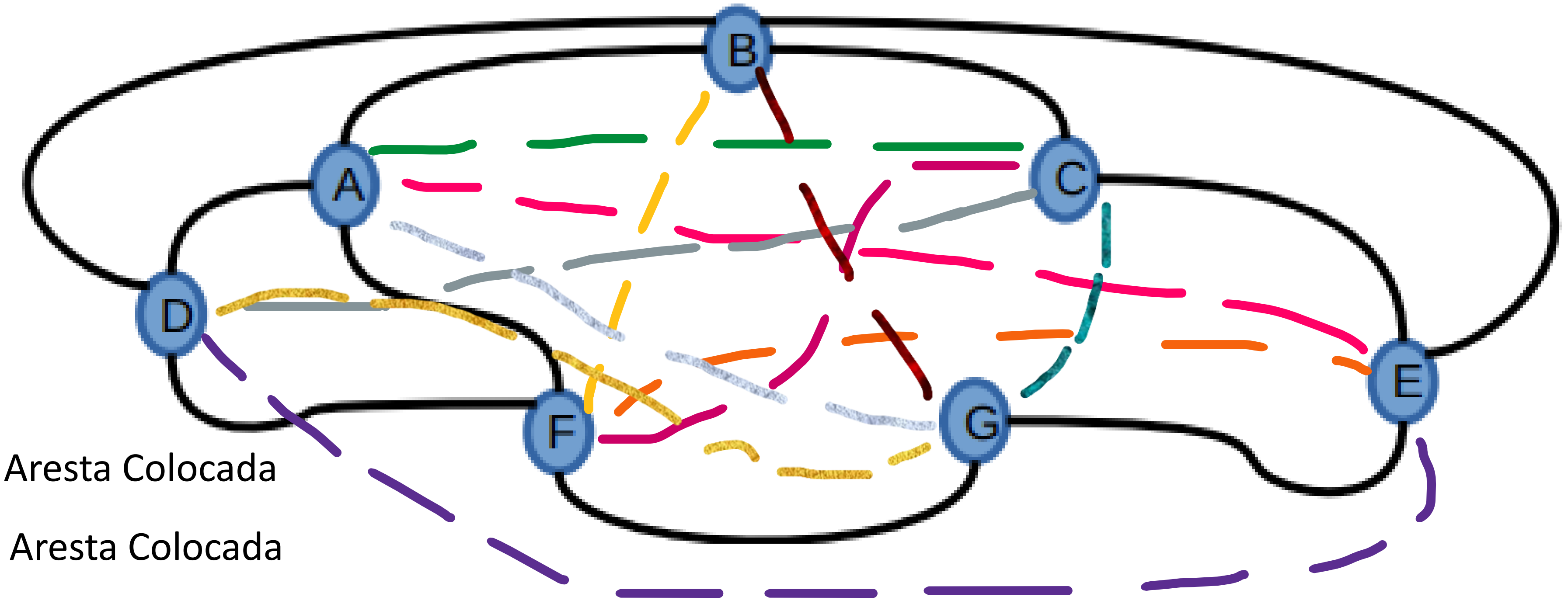
Verifique que o grafo abaixo satisfaz o teorema de Bondy-Chvátal, mas não os de Dirac e Ore.

H)



todo par v, w | d(v) + d(w) >= n **N = 7**

H)



A
B
G

Primeira Aresta Colocada

Segunda Aresta Colocada

Terceira Aresta Colocada

Quarta Aresta Colocada

Quinta Aresta Colocada

Sexta Aresta Colocada

Sétima Aresta Colocada

Oitava Aresta Colocada

Nona Aresta Colocada

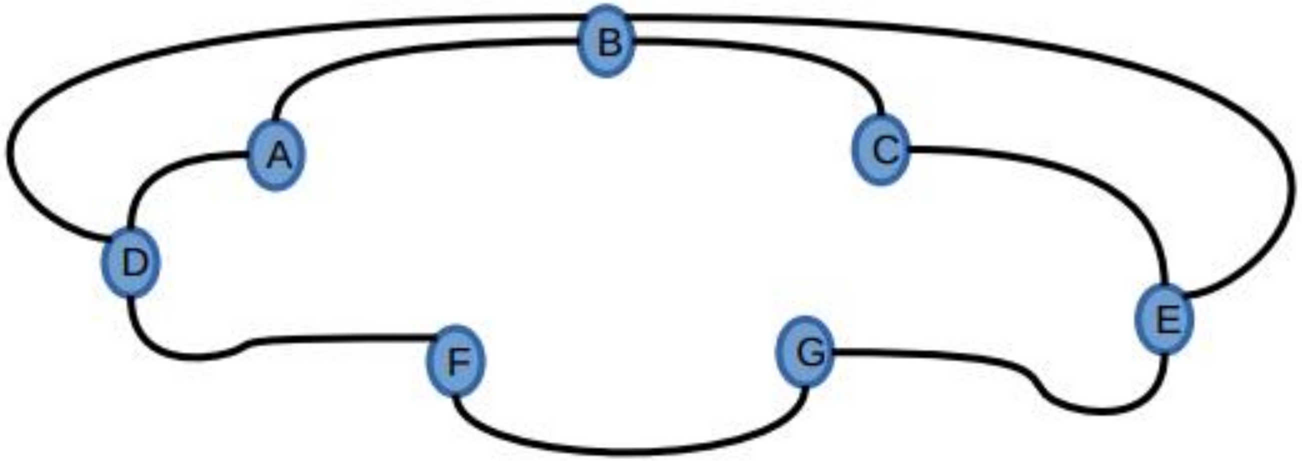
Décima Aresta Colocada

Décima Primeira Aresta Colocada

- Pelo teorema de (Bondy e Chvátal), foi possível observar que o grafo da questão H é hamiltoniano, pois, conseguimos chegar num grafo completo K7, e sabendo que “grafos completos com n>=3 vértices são hamiltonianos” o grafo da questão H é hamiltoniano.
- Também observe que:
- O grafo original, sem inserção de arestas, possuía 10 arestas, assim, para que se tornasse um grafo completo K7 (7 é o número de vértices do grafo) era necessário que tivesse (n*(n-1))/2 arestas, nesse caso 21 arestas, como já possuía 10, e inserimos 12 arestas, ficamos com 21, o que era esperado.
- Assim, o fecho do Grafo H (ϕ(H)) obtido através do teorema de Bondy e Chvátal satisfaz ϕ(H) = Kn

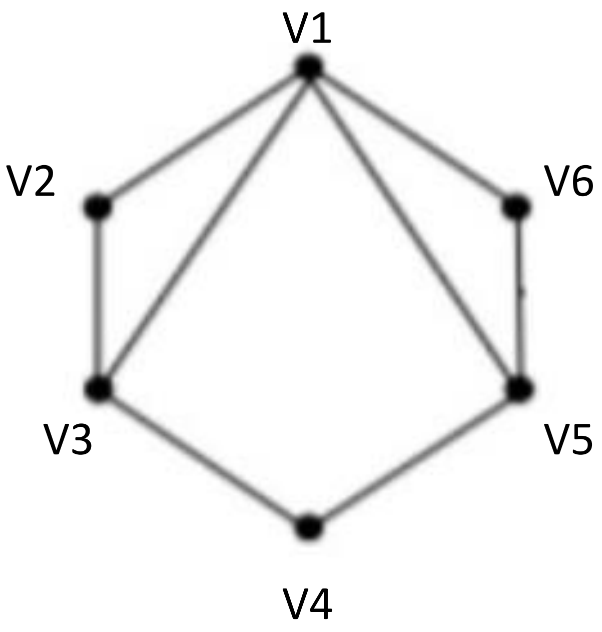
Aplique o procedimento de parar o processo de construção do fecho assim que o grafo obtido satisfaça, por exemplo, o teorema de Ore (ou Dirac ou Bondy e Chvátal)

I)



Resposta: Não é possível aplicar o procedimento de construção do fecho neste grafo pois o grau máximo do grafo é o vértice B que possui grau 4. Assim, para aplicar o procedimento de construção do fecho, seria necessário somá-lo com outro vértice de grau 3, para atender o requisito mínimo (a todo par v, w | d(v) + d(w) >= n, onde v e w são não adjacentes). Porém os únicos vértices que possuem grau 3 no grafo I acima são os vértices {D,E} e ambos são adjacentes à B. Assim, não é possível aplicar o procedimento de construção do fecho nesse grafo e consequentemente não é possível verificar se há um ciclo hamiltoniano nele a partir do teorema de Ore, Dirac ou Bondy e Chvátal.

J)



Para o grafo abaixo, responda justificando:

a) Ele é euleriano? Porquê? R: Não. O grafo abaixo é Semi-Euleriano, pois possui apenas dois vértices com grau ímpar e o restante com grau par.

b) Ele é hamiltoniano? Porquê? O grafo é Hamiltoniano, pois possui um ciclo que passa por todos os vértices.

c) Mostre que via os teoremas de Ore e Dirac não podemos provar que o grafo é hamiltoniano.

Pelo teorema de Dirac:

Grau mínimo: 2

N = 6

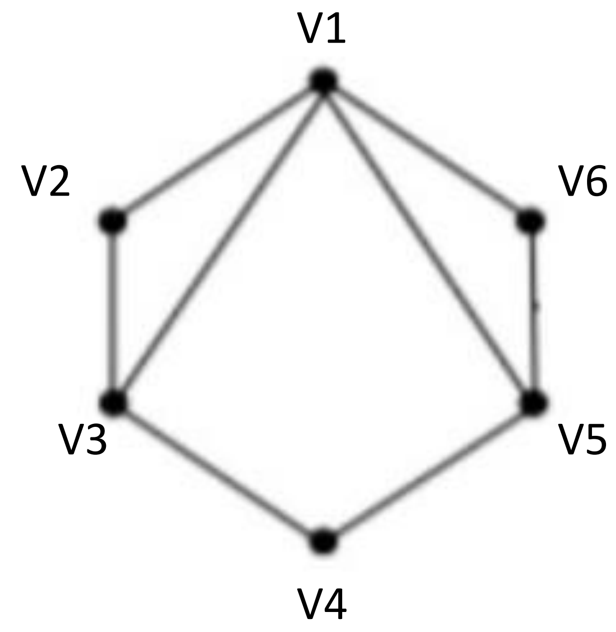
deg(V2) >= n/2

2 >= 6/2

2 >= 3 Não.

Assim, aplicando o teorema de dirac no vértice que possui o grau mínimo (uma condição que se fosse satisfeita, satisfaria também para os vértices com graus maiores), podemos observar que, a partir do Teorema de Dirac, nada podemos afirmar (se possui um ciclo hamiltoniano ou não).

J)



c) Mostre que via os teoremas de Ore e Dirac não podemos provar que o grafo é hamiltoniano.

Pelo Teorema de Ore:

deg(v) + deg(w) ≥ n para todo par de vértices distintos v e w pertencentes a G e não adjacentes.

N = 6

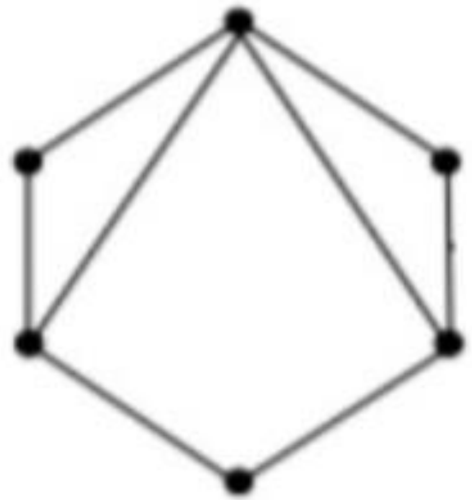
Deg(v1) + deg (v4) >= 6 -> 4 + 2 >= 6 OK

Deg (v2) + deg(v4) >= 6 -> 2 + 2 >= 6 NÃO.

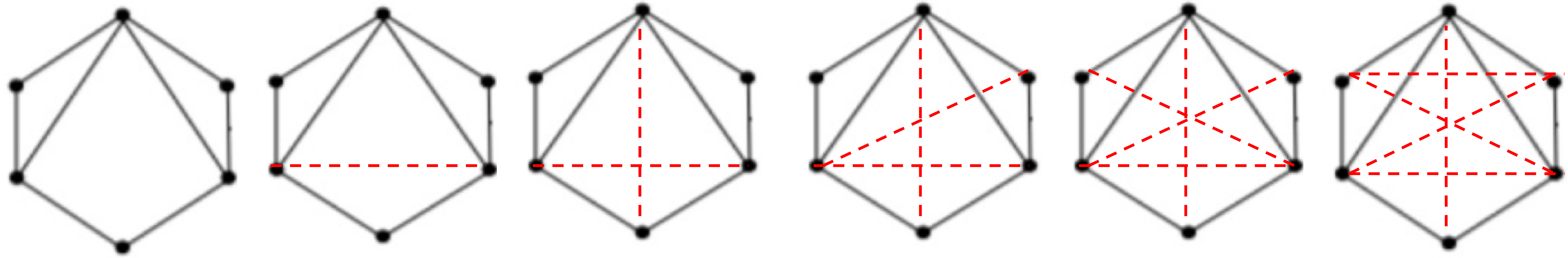
Assim, pelo teorema de Ore, nada podemos afirmar (se possui um ciclo hamiltoniano ou não).

Assim, observamos que via os teoremas de Ore e Dirac, não podemos provas que o grafo é hamiltoniano.

J)



d) Mostre que via o teorema de Bondy-Chvátal é possível mostrar que o grafo é hamiltoniano.



G $\quad\quad$ ➔ $\quad\quad$ ➔ $\quad\quad$ ➔ $\quad\quad$ ➔ $\quad\quad$ ϕ(G)

Se ϕ(G) = Kn, então G será hamilltoniano. Como **ϕ(G)** é o grafo completo K5, então ele é hamiltoniano.