LMA0001 – Lógica Matemática
Aula 01
Lógica Aristotélica

Karina Girardi Roggia
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

2020

Lógica?

Começamos com uma pergunta:

- O que é lógica?

Lógica?

Começamos com uma pergunta:

- O que é lógica?

Algumas propostas para a definição de lógica:

- análise de métodos de raciocínio
- estudo do pensamento correto e verdadeiro
- regras para a verificação da verdade ou falsidade de um pensamento

Note que nenhuma das definições anteriores, contudo, é definitiva.

O que a lógica estuda?

Considere os seguintes argumentos:

- Todo homem é mortal. Sócrates é um homem. Logo, Sócrates é mortal.
- Todo cão late. Totó é um cão. Portanto, Totó late.

O que a lógica estuda?

Considere os seguintes argumentos:

- Todo homem é mortal. Sócrates é um homem. Logo, Sócrates é mortal.
- Todo cão late. Totó é um cão. Portanto, Totó late.

Do ponto de vista da lógica, ambos os argumentos tem a mesma **estrutura** ou **forma**:

Se X então Y. Sei que X. Logo, Y.

A lógica, enquanto disciplina, estuda tais estruturas, visando identificar os argumentos que são válidos, e o que são incorretos.

Lógica clássica

- Aristóteles (384 BC - 322 BC) foi um filósofo e matemático grego. Estudou sob Platão e foi tutor de Alexandre o Grande.
- **Organon** (ferramenta): coletânea de seis livros de Aristóteles representando a base da **Lógica Aristotélica**, também conhecida por **Lógica Clássica**.
- Para Aristóteles, os dois argumentos anteriores são exemplos de **deduções**, ou **silogismos**.

Definição de dedução (segundo Aristóteles):

> *Uma dedução é um discurso no qual, ao se assumir certos fatos, um novo fato é necessariamente verdadeiro por força da verdade dos fatos assumidos.*

Nomenclatura:

- Os fatos assumidos são chamados de **premissas**.
- O novo fato é chamado de **conclusão**.

Lógica clássica

Nomenclatura:

- Os fatos assumidos são chamados de **premissas**.
- O novo fato é chamado de **conclusão**.

Um aspecto central disto é o termo **necessariamente verdadeiro**.

Nomenclatura:

- Os fatos assumidos são chamados de **premissas**.
- O novo fato é chamado de **conclusão**.

Um aspecto central disto é o termo **necessariamente verdadeiro**.

Um argumento é uma **dedução válida** se a verdade da conclusão é forçada pela verdade das premissas.

Caso contrário, a argumentação é **inválida**.

Quais deduções são válidas?

1. Anita Garibaldi nasceu em Laguna. Anita Garibaldi foi uma revolucionária. Logo, Anita Garibaldi é catarinense.

Quais deduções são válidas?

1. Anita Garibaldi nasceu em Laguna. Anita Garibaldi foi uma revolucionária. Logo, Anita Garibaldi é catarinense.
2. A lua é feita de queijo verde. Queijo verde é feito de erva-mate e leite. Logo, a lua é feita de erva-mate e leite.

Quais deduções são válidas?

1. Anita Garibaldi nasceu em Laguna. Anita Garibaldi foi uma revolucionária. Logo, Anita Garibaldi é catarinense.
2. A lua é feita de queijo verde. Queijo verde é feito de erva-mate e leite. Logo, a lua é feita de erva-mate e leite.
3. Anita Garibaldi nasceu em Laguna. Quem nasce em Laguna é catarinense. Logo, Anita Garibaldi é catarinense.

Quais deduções são válidas?

1. Anita Garibaldi nasceu em Laguna. Anita Garibaldi foi uma revolucionária. Logo, Anita Garibaldi é catarinense.
2. A lua é feita de queijo verde. Queijo verde é feito de erva-mate e leite. Logo, a lua é feita de erva-mate e leite.
3. Anita Garibaldi nasceu em Laguna. Quem nasce em Laguna é catarinense. Logo, Anita Garibaldi é catarinense.
4. O Internacional é melhor que o Grêmio. O Grêmio é melhor que o Internacional. Logo, eu como chocolate na lua.

Respostas

1. não é uma dedução válida, pois o fato de que todo mundo que nasce em Laguna é catarinense não está explicitamente apresentado. Note que a conclusão é verdadeira, mas não o é por **força** da verdade das premissas.
2. é uma dedução válida. Note que, apesar das premissas e conclusão serem absurdas, a **estrutura** da dedução está correta.
3. é uma dedução válida. Neste caso, tanto as premissas quanto a conclusão são verdadeiras.
4. é uma dedução válida (para lógica proposicional). Como as premissas são simultaneamente excludentes, elas nunca serão ambas verdadeiras, e portanto a verdade da conclusão nunca será **forçada** pelas premissas. Nesses casos, podemos afirmar qualquer coisa, tanto falsa quanto verdadeira.

As frases passíveis de aparecer como premissas ou conclusões são chamadas **proposições**.

Uma proposição pode ser **verdadeira** ou **falsa**

Exemplos:

- O Brasil está localizado na ásia.
- A língua oficial dos EUA é o inglês.
- Formigas são insetos.
- Aranhas são insetos.

Sentenças **interrogativas**, **exclamativas** ou **imperativas** não servem como proposições.

Não é possível averiguar se são **verdadeiras** ou **falsas**.

Contra-Exemplos:

- Que horas são?
- Que dia frio!
- Venha ver o rio.

Sentenças **interrogativas**, **exclamativas** ou **imperativas** não servem como proposições.

Não é possível averiguar se são **verdadeiras** ou **falsas**.

Contra-Exemplos:

- Que horas são?
- Que dia frio!
- Venha ver o rio.
- Esta frase é falsa.

Proposições (Aristóteles)

Na lógica de Aristóteles, proposições tinham um formato bastante rígido:

- sempre dois **termos** (nomes): homens, João, cavalos, números, 3
- um predicado conectando os termos

Exemplos:

- João é um homem.
- Todo cavalo é animal.
- Alguns homens são violentos.

Esta rigidez não é encontrada na moderna **Lógica de Predicados** (da qual a lógica aristotélica é um subconjunto).

Termos (Aristóteles)

Termos (nomes) podiam ser

- particulares (elementos): João, 2, cerejeira
- gerais (conjuntos): homens, cavalos, números

Proposições podiam ser:

- **singulares**: um termo singular e um geral ("João é um homem"):
- **categóricas**: ("todos os homens são animais")

Quatro tipos (modos) de **proposições categóricas:**

(A) afirmação universal: Todo A é B
(E) negação universal: Nenhum A é B
(I) afirmação particular: Alguns A são B
(O) negação particular: Alguns A não são B

Princípios lógicos (Aristóteles)

Princípios da lógica aristotélica:

- Cada proposição (afirmativa ou negativa) possui uma proposição contrária (negação), que afirma o seu contrário.
- **Não-contradição:** uma proposição que é verdadeira não pode ser falsa, e vice-versa.
- **Princípio do terceiro excluído:** dada uma proposição qualquer, OU ela é verdadeira OU o seu contrário é verdadeiro.

Deduções (Aristóteles)

Duas premissas = 4 termos. Uma conclusão = 2 termos.

Cada uma das premissas contém um termo comum com a conclusão (termos maior e menor, respectivamente) e um termo comum com a outra premissa (termo médio)

Exemplo:

```
Todo animal é mortal.
(Premissa maior - contém o termo maior (mortal) e o termo médio (animal))

Todo homem é um animal.
(Premissa menor - contém o termo menor (homem) e o termo médio (animal))

-----------------------------------------------------------------------

Todo homem é mortal.
(Conclusão - contém o termo menor (homem) e o termo maior (mortal)).
```

Deduções válidas (Aristóteles)

Duas premissas e uma conclusão podem levar a **deduções inválidas** de acordo com o seu modo:

Por exemplo, a seguinte dedução **NÃO É VÁLIDA**

```
Alguns cachorros são animais malhados.  (I)
Alguns animais malhados têm chifres.  (I)
----------------------------------------
Alguns cachorros têm chifres. (I)
```

Lista de silogismos válidos

Testando todas as combinações de modos, Aristóteles descobriu o subconjunto das deduções válidas:

```
Figura 1  Figura 2   Figura 3   Figura 4
M-P       P-M        M-P        P-M    (primeira premissa)
S-M       S-M        M-S        M-S    (segunda  premissa)
---       ---        ---        ---
S-P       S-P        S-P        S-P    (conclusão)

COMBINAÇÕES VÁLIDAS DE MODOS:
Barbara   Cesare     Datisi     Calemes
Celarent  Camestres  Disamis    Dimatis
Darii     Festino    Ferison    Fresison
Ferio     Baroco     Bocardo    Calemos
Barbari   Cesaro     Felapton   Fesapo
Celaront  Camestros  Darapti    Bamalip
```

Nota: leia as três vogais em ordem: B**A**rb**A**r**A** = Todo M é P, Todo S é M, Logo, Todo S é P.

Utilização da lógica aristotélica

A lógica clássica (ou aristotélica) foi o paradigma dominante da lógica até aproximadamente 1600.

Caiu em desuso a partir da utilização de **métodos algébricos** ou **simbólicos** para o tratamento de sentenças lógicas **(lógica matemática)**.

A **lógica matemática** determina como descrever e manipular *raciocínios* seguindo regras mecânicas de transformação.

Nesta disciplina:

- lógica proposicional
- lógica de predicados (primeira ordem)

Utilização da lógica aristotélica

Apesar de não utilizarmos exatamente a mesma abordagem de Aristóteles, os princípios introduzidos por sua lógica foram readaptados e reintroduzidos nas lógicas modernas:

- Quantificadores (modos)
- Deduções (sistemas dedutivos)
- Princípios (não-contradição, terceiro excluído)
- Provas por contradição e contraposição

Como exemplo do que pode se obter através da lógica, gostaria de apresentar duas descobertas interessantes que utilizaram a lógica como ferramenta principal.

Note que foram feitas sem Google, computador ou quaisquer outros meios senão alguns fatos conhecidos, e raciocínio lógico.

São elas:

- A descoberta do diâmetro da Terra (Erastóstenes, +- 200AC)
- A irracionalidade de $\sqrt{2}$ (Pitágoras, +-500AC).

Erastóstenes descobriu o tamanho da Terra sem sair de Alexandria, usando somente a razão, geometria, matemática e alguns relatos de viajantes.

O diâmetro da terra

Erastóstenes descobriu o tamanho da Terra sem sair de Alexandria, usando somente a razão, geometria, matemática e alguns relatos de viajantes.

Ideia: ele leu um relato que havia um poço em Assão no qual, em um dia e hora específicos do ano, o sol iluminava o fundo do poço completamente.

O diâmetro da terra

Erastóstenes pôs um bastão sob o sol em Alexandria na mesma data/hora, e percebeu que o bastão deixava uma sombra.

O diâmetro da terra

Erastóstenes pôs um bastão sob o sol em Alexandria na mesma data/hora, e percebeu que o bastão deixava uma sombra.

Assumindo o fato da Terra ser redonda, e sabendo a distância entre Assão e Alexandria e o ângulo da sombra no bastão (1/50) do círculo, ele pode calcular, usando regra de três simples, o diâmetro da Terra.

O diâmetro da terra

Erastóstenes pôs um bastão sob o sol em Alexandria na mesma data/hora, e percebeu que o bastão deixava uma sombra.

Assumindo o fato da Terra ser redonda, e sabendo a distância entre Assão e Alexandria e o ângulo da sombra no bastão (1/50) do círculo, ele pode calcular, usando regra de três simples, o diâmetro da Terra.

O cálculo teve um erro de apenas 2% em relação à nossas medições atuais.

A irracionalidade de $\sqrt{2}$

Será que o número $\sqrt{2}$ pode ser representado por uma fração?

Será que o número $\sqrt{2}$ pode ser representado por uma fração?

Vá em frente e seja corajoso: existem a e b inteiros, tal que $\sqrt{2} = a/b$ onde ao menos um dos números (a ou b) é ímpar (fração simplificada).

A irracionalidade de $\sqrt{2}$

Será que o número $\sqrt{2}$ pode ser representado por uma fração?

Vá em frente e seja corajoso: existem a e b inteiros, tal que $\sqrt{2} = a/b$ onde ao menos um dos números (a ou b) é ímpar (fração simplificada).

$2 = a^2/b^2$

A irracionalidade de $\sqrt{2}$

Será que o número $\sqrt{2}$ pode ser representado por uma fração?

Vá em frente e seja corajoso: existem a e b inteiros, tal que $\sqrt{2} = a/b$ onde ao menos um dos números (a ou b) é ímpar (fração simplificada).

$2 = a^2/b^2$

$2 * b^2 = a^2$, logo a^2 é par, e logo a é par (o quadrado de pares é par).

Sabemos que a é par.

Sabemos que a é par.

Contudo, se a é par, então $a = 2 * k$ (para um k cujo valor não importa no momento).

Sabemos que a é par.

Contudo, se a é par, então $a = 2 * k$ (para um k cujo valor não importa no momento).

Então, $2 = (2 * k)^2 / b^2$, logo $2 = 4 * k^2 / b^2$, logo $b^2 = 2 * k^2$, logo b^2 é par, e portanto b é par.

Sabemos que a **é par**.

Contudo, se a é par, então $a = 2 * k$ (para um k cujo valor não importa no momento).

Então, $2 = (2 * k)^2 / b^2$, logo $2 = 4 * k^2 / b^2$, logo $b^2 = 2 * k^2$, logo b^2 é par, e portanto b é par.

Algum problema? **Contradição** com o fato de assumirmos que um dos dois números era ímpar. Descobrimos que ambos são pares!

Sobre a história da lógica, a lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas, em
ftp://ftp.cle.unicamp.br/pub/arquivos/educacional/ArtGT.pdf

Aristotle's logic, em
http://plato.stanford.edu/entries/aristotle-logic