Universidade do Estado de Santa Catarina
Centro de Ciências Tecnológicas - CCT
Departamento de Matemática

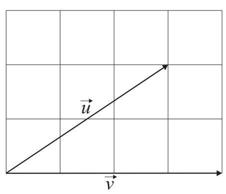
Lista 1: Vetores
Prof. Francielle Kuerten Boeing

1. Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da figura, mostrar num gráfico um representante do vetor:

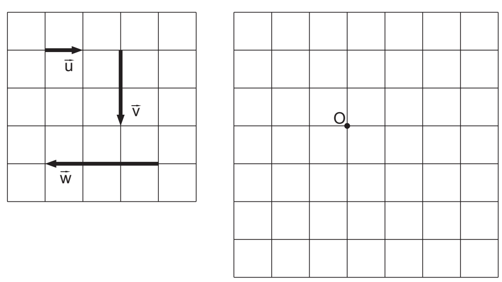
   (a) $\vec{u} - \vec{v}$

   (b) $\vec{v} - \vec{u}$

   (c) $\vec{u} + \dfrac{3}{4}\vec{v}$



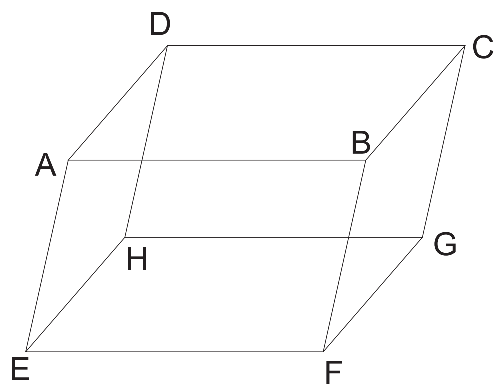
2. Represente o vetor $\vec{x} = -2\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} - \frac{2}{3}\vec{w}$ com origem no ponto O da figura abaixo, sendo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ como na figura.



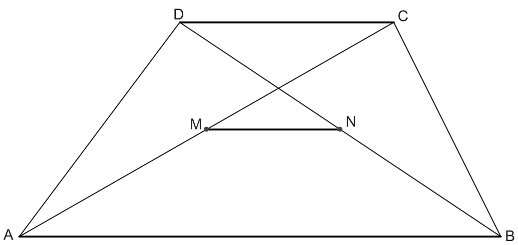
3. Com base no paralelepípedo representado a seguir, determine os seguintes vetores usando H como origem.

   (a) $FE + DB + DC$

   (b) $-BG + AB$

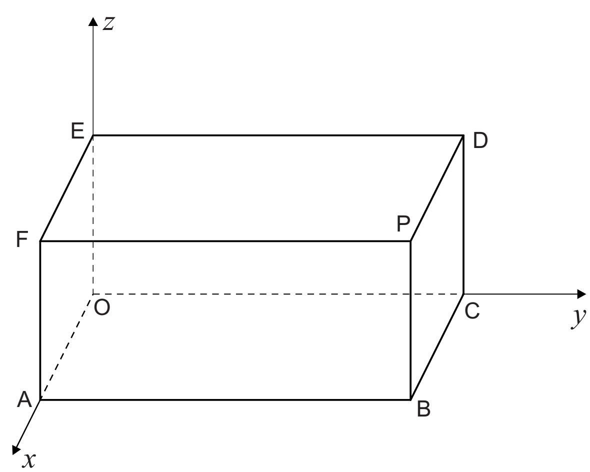


4. Sejam M e N os pontos médios das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente, do trapézio $ABCD$ representado na figura abaixo.



Sendo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DC}$ e $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$, escreva o vetor $\vec{u}$ como combinação linear de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

5. No paralelepípedo da figura abaixo tem-se que $P(2, 4, 3)$.



Determine:

(a) os pontos A, B, C, D, E, F e O.

(b) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EF}$.

(c) $\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{PB}$.

(d) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OE}$.

6. Determine a origem A do segmento que representa o vetor $\overrightarrow{u} = (2, 3, -1)$, sendo sua extremidade o ponto $B(0, 4, 2)$.

7. Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (3, -1)$ e $\overrightarrow{v} = (-1, 2)$, determine o vetor $\overrightarrow{w}$ tal que

(a) $4(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$;

(b) $3\overrightarrow{w} - (2\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}) = 2(4\overrightarrow{w} - 2\overrightarrow{u})$

8. Verificar se são colineares os pontos:

(a) $A(-1, -5, 0), B(2, 1, 3)$ e $C(-2, -7, -1)$;

(b) $A(2, 1, -1), B(3, -1, 0)$ e $C(1, 0, 4)$;

9. (a) Sabendo que a distância entre os pontos $A(3, 2, -1)$ e $B(6, m, -1)$ é 5, determine o valor de m.

(b) Determine o ponto do eixo das ordenadas equidistante dos pontos $A(1, -1, 3)$ e $B(2, 2, 1)$.

(c) Prove que o triângulo $A(1,2,0)$, $B(4,0,-1)$ e $C(2,-1,2)$ é equilátero.

(d) Determine os pontos do plano xz cuja distância ao ponto $A(1,1,0)$ é 2 e ao ponto $B(2,0,1)$ é 3.

(e) Determine o ponto P pertencente ao eixo z e equidista dos pontos $A(2,3,0)$ e $B(0,1,2)$.

10. Dados os vértices $A(9,-5,12)$ e $B(6,1,19)$ de um paralelogramo $ABCD$ e $P(4,-1,7)$ o ponto de interseção de suas diagonais, determine os vértices C e D.

11. Dados os vetores $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}$ expresse $\overrightarrow{w}$ como combinação linear de $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

12. Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de $60°$, determinar o ângulo formado pelos vetores $-\vec{u}$ e $2\vec{v}$.

13. Determine α para que o vetor $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{11}}{4}, -\frac{1}{2}, \alpha\right)$ seja unitário.

14. Prove que os pontos $A(5,1,5)$, $B(4,3,2)$ e $C(-3,-2,1)$ são vértices de um triângulo retângulo.

15. Calcule o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, sabendo-se que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ e $|\overrightarrow{u}| = 2$, $|\overrightarrow{v}| = 3$ e $|\overrightarrow{w}| = 4$.

16. Um jovem parte de um ponto A, caminha 100 metros para norte, até um ponto B; em seguida, orienta-se para o leste e caminha mais 50 metros do ponto B até um ponto C.

(a) Determine o módulo do deslocamento resultante.

(b) Encontre o ângulo formado pelo entre vetor que representa o deslocamento resultante e o vetor $\overrightarrow{AB}$.

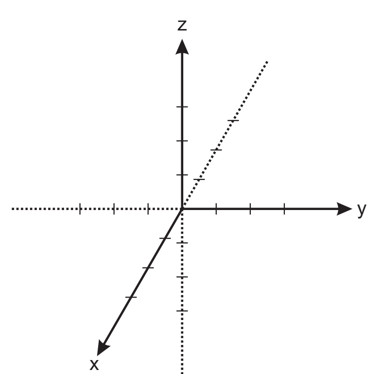
17. Encontre o vetor $\overrightarrow{w}$ de forma que $\overrightarrow{w}$ seja paralelo ao vetor $\overrightarrow{r} = (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$, sendo $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{v} = (1,3,-2)$, $|\overrightarrow{w}| = 6$ e $\overrightarrow{w}$ forme um ângulo agudo com o eixo das abscissas.

18. Dado o triângulo retângulo ABC com ângulo reto em B, determine a medida da projeção do cateto AB sobre a hipotenusa AC, sendo $A(0,0,2)$, $B(3,-2,8)$ e $C(-3,-5,10)$.

19. Considere os pontos $A(2,4,1)$, $B(3,3,5)$ e $C(2,1,3)$.

(a) O triângulo determinado pelos pontos ABC é retângulo? Justifique.

(b) Determine a área do triângulo ABC.



20. Calcule o valor de a para que o vetor $\overrightarrow{v} = \left(-28, 0, -\frac{7}{2}\right)$ seja mutuamente ortogonal aos vetores $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{i} + 5\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{u} = (a-1)\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$.

21. Os pontos $A(2, 1, -1)$, $B(-1, 3, 1)$ e $C(0, -1, 2)$ formam um triângulo.

   (a) Determine a projeção do lado AB sobre o lado CA.

   (b) Obtenha, se possível, o valor de c para que o vetor $\overrightarrow{v} = (3c + 4, -2, 9)$ seja colinear ao vetor projeção.

22. Calcule a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto $A(3, 2, 1)$ e uma diagonal de extremidades $B(1, 1, -1)$ e $C(0, 1, 2)$.

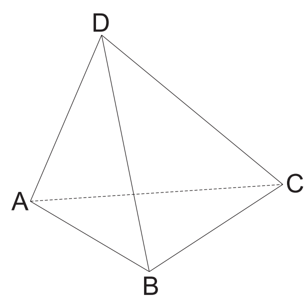
23. Determine o vetor unitário ortogonal aos vetores $\overrightarrow{u} = (2, 3, -1)$ e $\overrightarrow{v} = (1, 1, 2)$.

24. Verifique se os pontos $A(2, 1, 3)$, $B(3, 2, 4)$, $C(-1, -1, -1)$ e $D(0, 1, -1)$ são coplanares.

25. Determine o valor de k para que os seguintes vetores sejam coplanares: $\vec{a} = (2, k, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, k)$ e $\vec{c} = (3, 0, -3)$.

26. Calcule o volume de um paralelepípedo determinado pelos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, onde $\overrightarrow{u} = (-1, 2, 3)$, $\overrightarrow{v} = (2, -1, 3)$ e $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} \times (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$.

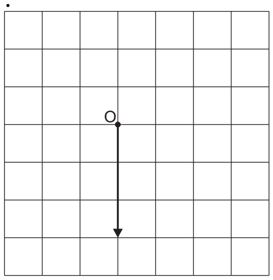
27. Considere o tetraedro $ABCD$, ilustrado a seguir, cujos vértices da base são: $A(2, 2, -1)$, $B(3, 2, 1)$ e $C(2, 1, 0)$. Calcular as coordenadas do vértice D, sobre o eixo x, de forma que o volume do tetraedro seja 8 unidades.



Respostas:

1.

2. .



3. (a) $\overrightarrow{HF}$; (b) $\overrightarrow{HB}$

4. $\vec{u} = \dfrac{\vec{a} - \vec{b}}{2}$

5. .
   (a) $A(2,0,0)$; $B(2,4,0)$; $C(0,4,0)$; $D(0,4,3)$; $E(0,0,3)$; $F(2,0,3)$; $O(0,0,0)$.
   (b) Zero, pois os vetores são ortogonais.
   (c) $-12\vec{i}$.
   (d) -24.

6. $A(-2,1,3)$

7. .
   (a) $\overrightarrow{w} = \left(-\frac{15}{2}, \frac{15}{2}\right)$
   (b) $\overrightarrow{w} = \left(\frac{17}{5}, -\frac{9}{5}\right)$

8. (a) Sim.
   (b) Não.

9. (a) $m = -2$ ou $m = 6$.
   (b) $\left(0, -\frac{1}{3}, 0\right)$
   (c) Basta verificar que $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$
   (d) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$
   (e) $P(0,0,-2)$

10. $C(-1,3,2)$ e $D(2,-3,-5)$.

11. $\vec{w} = -2\vec{u} + 6\vec{v}$

12. $120°$

13. $\alpha = \pm\dfrac{1}{4}$

14. Dica: verifique que um dos ângulos é reto.

15. $\approx 75{,}52°$

16. (a) 111,8m; (b) $\approx 26,56°$

17. $\vec{w} = (2, -4, 4)$

18. $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$

19. (a) Não (Justifique!); (b) $A = \dfrac{\sqrt{113}}{2}$u.a.

20. $a = \dfrac{1}{2}$

21. (a) $\left(-\dfrac{16}{17}, -\dfrac{16}{17}, \dfrac{24}{17}\right)$; (b) não existe c.

22. $A = \sqrt{74}$ u.a.

23. $\pm\left(\dfrac{7}{5\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{5\sqrt{3}}\right)$

24. Sim.

25. $k = -3$ ou $k = 2$

26. Os pontos são coplanares, logo não há paralelepípedo definido.

27. $D\left(\dfrac{51}{2}, 0, 0\right)$ ou $D\left(-\dfrac{45}{2}, 0, 0\right)$