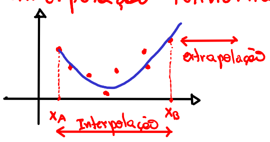
Interpolação Polinomial: método numérico usado para aproximar uma função ou um conjunto de dados por meio de um polinômio. $f(x_i) \approx P_n(x_i)$ → polinômio de grau n



função forma analítica

↳ Obter o polinômio interpolador significa obter os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$, para: $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots a_n x^n$

⚠ é necessário $n+1$ pontos para obter um polinômio de grau n

↳ como obter os coeficientes de $P_n(x)$?

I) Resolução de Sistemas Lineares

II) Método de Lagrange

III) Método de Newton

↳ **Resolução de Sistemas Lineares:** $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots a_n x^n$

↳ temos os pontos:

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	...	y_n

→ $f(x_i) = y_i$

↳ Sistema Linear:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 & (x_0, y_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 & (x_1, y_1) \\ \vdots \end{cases}$$

↳ Resolver Matriz Aumentada

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & x_0^1 & x_0^2 & \cdots & x_0^n & y_0 \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n & y_1 \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^n & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array}\right]$$

Ex: * $P_1(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0)$

* $P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$

* $P_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

Estimativa de Erro: $|E_n(x)| = |(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)| \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}$, onde:

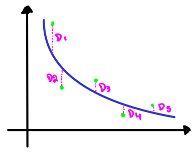
$\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}$ é substituído pela maior diferença dividida de ordem $n+1$,

Ajuste de curva: dados os conjuntos de pontos discretos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, $\tilde{y} = \tilde{f}(x) = \underbrace{\beta_0 g_0(x) + \beta_1 g_1(x) + \ldots + \beta_n g_n(x)}_{\text{função aproximação}}$

↳ **Modelo matemático linear:** pois os coeficientes β_i a serem determinados aparecem linearmente arranjados, embora as funções $g_i(x)$ possam ser não lineares.

↳ Como escolher adequadamente as funções auxiliares $g_i(x)$?

↳ Como determinar $\beta_i(x)$?



Distâncias = $D = \|\tilde{y}_i - y_i\|_2^2 = \cancel{\sqrt{(\tilde{y}_i - y_i)^2}}$ (calculado)

$D = (\tilde{y}_i - y_i)^2$

minimizar $\sum_{i=1}^{n} (\tilde{y}_i - y_i)^2$

$D = \sum_{i=1}^{n} [(\beta_0 g_0(x) + \beta_1 g_1(x) + \ldots + \beta_n g_n(x)) - y_i]^2$

$$\operatorname{Min} D(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n) = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{y}_i - y_i)^2$$

$$\operatorname{Min} D(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n) = \sum_{i=1}^{n} [\underbrace{(\beta_0 g_0(x) + \beta_1 g_1(x) + \ldots + \beta_n g_n(x))}_{\tilde{y}_i} - y_i]^2$$

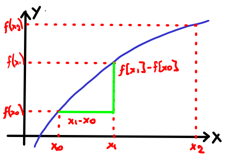
↳ **Método de Lagrange:** Dado um conjunto finito de pontos discretos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + \ldots + y_n L_n(x)$$

onde: $L_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^{n} \dfrac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} = \dfrac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_n)}$ p/ $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

↳ **Método de Newton:**

↳ Diferenças divididas: dados os pontos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ no intervalo $[a, b]$ e assumindo $y_i = f(x_i)$ temos:



$f[x_0] = f(x_0)$

$f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$

$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \dfrac{\frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} - \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$

↳ Tabela

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
x_0	$f[x_0]$		
		$f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$
		$f[x_1, x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$
		$f[x_2, x_3] = \dfrac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$	
x_3	$f[x_3]$		

↳ Formula de Newton: $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \cdot \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$

Considerando o produtório é 1 quando $k = 0$

↳ **Objetivo:** encontrar os pontos de mínimo da função $D(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n)$, para isso: $\dfrac{\partial D}{\partial \beta_i} = 0$

$$\frac{\partial D}{\partial \beta_0} = 2 \sum_{i=1}^{n} [(\beta_0 g_0(x_i) + \beta_1 g_1(x_i) + \ldots + \beta_n g_n(x_i)) - y_i] \cdot g_0(x_i)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \beta_1} = 2 \sum_{i=1}^{n} [(\beta_0 g_0(x_i) + \beta_1 g_1(x_i) + \ldots + \beta_n g_n(x_i)) - y_i] \cdot g_1(x_i)$$

$\vdots$

$$\begin{bmatrix} \sum g_0(x_i)^2 & \sum g_1(x_i) \cdot g_0(x_i) & \cdots & \sum g_n(x_i) g_0(x_i) \\ \sum g_0(x_i) \cdot g_1(x_i) & \sum g_1(x_i)^2 & \cdots & \sum g_n(x_i) g_1(x_i) \\ \sum g_0(x_i) \cdot g_2(x_i) & \sum g_1(x_i) \cdot g_2(x_i) & \cdots & \sum g_n(x_i) g_2(x_i) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum g_0(x_i) g_n(x_i) & \sum g_1(x_i) g_n(x_i) & \cdots & \sum g_n(x_i) g_n(x_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i g_0(x_i) \\ \sum y_i g_1(x_i) \\ \sum y_i g_2(x_i) \\ \vdots \\ \sum y_i g_n(x_i) \end{bmatrix}$$

↳ **Forma Matricial:** $A \cdot \beta = Y \Rightarrow \underbrace{A^T A}_{\text{matriz quadrada}} \beta = A^T Y$

Avaliação da qualidade do ajuste

↳ Coeficiente de correlação de Peterson: $R^2 = 1 - \dfrac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \tilde{f}(x_i))^2}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}$

$R^2 \in [0, 1]$

Ajuste não linear: $f(x) = \beta_0 e^{\beta_1 x}$ → linearização

↳ Exponencial de base e:

$y = a e^{bx}$

$\ln(y) = \ln(a e^{bx})$

$\ln(y) = \ln(a) + \ln(e^{bx})$

$\ln(y) = \ln(a) + bx$ → modelo linear

↳ **função hiperbólica:** $y = \dfrac{1}{a+bx} \Rightarrow \dfrac{1}{y} = a + bx$

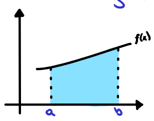
↳ **função potência:** $y = ax^b \Rightarrow \ln y = \ln(a \cdot x^b)$

$\ln y = \ln a + \ln x^b$

$\ln y = \ln a + b \ln(x)$

modelo linear

Integração Numérica: $I = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, e se $f(x) > 0 \ \forall x \in [a,b]$ então a integral fornece a área entre o gráfico da função e o eixo x.



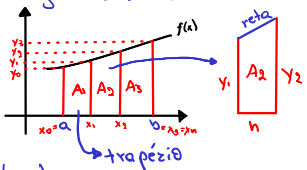
↳ **Objeções:**

I) a primitiva $F(x)$ é muito complexa ou impossível de ser determinada

II) Temos somente a tabela da função $f(x)$, o que compromete a determinação de $F(x)$

↳ **Método dos trapézios:** $I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b \overbrace{p(x)}\,dx$ polinômio interpolador

No método dos trapézios, esse polinômio interpolador tem grau 1 (uma reta).



$A_2 = \dfrac{(y_2+y_1) \cdot h}{2}$; $A_1 = \dfrac{(y_1+y_0)h}{2}$; $A_3 = \dfrac{(y_3+y_2)h}{2}$

$\int_a^b f(x)\,dx \approx A_1 + A_2 + A_3$

$\approx (y_0+y_1)\dfrac{h}{2} + (y_1+y_2)\dfrac{h}{2} + (y_2+y_3)\dfrac{h}{2}$

$h = \dfrac{b-a}{n}$

$I_n^T \approx \dfrac{h}{2} \cdot [y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n]$ //

↳ **Primeira regra de Simpson:** nesse caso, o polinômio interpolador tem grau 2. $I_n^{1/3} = \dfrac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$ //

↳ **Segunda regra de Simpson:** nesse caso, o polinômio interpolador tem grau 3. $I_{3/8}^T = \dfrac{3h}{8}[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + \ldots + 2y_{n-3} + 3y_{n-2} + 3y_{n-1} + y_n]$ //