LMA0001 – Lógica Matemática
Aula 14
Semântica da Lógica de Predicados

Karina Girardi Roggia
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

2021

Semântica

Na lógica proposicional, a semântica determina o valor-verdade de uma fórmula $A \in \mathfrak{F}$ qualquer com base em uma *valoração proposicional* $\mathcal{V}_0$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{F} \arrow[r, "\mathcal{V}"] & \{1, 0\} \\
\mathcal{P} \arrow[u, Rightarrow, "\text{indução e } \rightarrow, \wedge, \vee, \neg"] \arrow[ur, bend right, "\mathcal{V}_0"'] &
\end{tikzcd}
$$

Semântica

Na lógica de predicados, a semântica também determina o valor-verdade de uma fórmula $A \in \mathfrak{F}_{(\Sigma,\mathbf{Var})}$.

Contudo, precisamos agora também especificar uma *interpretação* $[-]^{\sigma}_{\mathcal{D}}$ para termos sobre um *domínio* D.

A partir de $[-]^{\sigma}_{\mathcal{D}}$ podemos determinar o valor-verdade de A.

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{F} \arrow[dr, bend left] & \\
\mathfrak{F}_0 \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r] & \{0,1\} \\
\mathbf{Term} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, "{[-]^{\sigma}_{\mathcal{D}}}"] & \mathrm{D} \\
(\Sigma, \mathbf{Var}) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[ur, bend right, "{\mathcal{D},\sigma}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Universo

O conjunto $\mathbb{D}$ representa o domínio de discurso da lógica em questão.

A única restrição sobre $\mathbb{D}$ é que ele *não pode ser vazio*.

Exemplos de domínio:

- o conjunto dos números naturais
- o conjunto de alunos de lógica da UDESC
- o conjunto $\{a, b, c\}$
- o conjunto $\{\bullet\}$

Estrutura

Uma estrutura $\mathcal{D}$ para assinatura Σ consiste em

- um conjunto D, chamado de domínio
- uma interpretação $\mathbf{Con}_D : \mathbf{Con} \to D$ que associa cada $c \in \mathbf{Con}$ a um elemento de D
- $\mathbf{Fun}_D$ associa cada $f^n \in \mathbf{Fun}$ a uma função $f_D : D^n \to D$
- $\mathbf{Pred}_D$ associa cada $P^n \in \mathbf{Pred}$ a uma função $P_D : D^n \to \{0, 1\}$

Observações:
• No que segue, cada função de predicado P_D será dada pelo conjunto dos elementos de D^n mapeados para 1.
• Geralmente usamos um "abuso de notação", escrevendo apenas D no lugar de $\mathcal{D}$, que indica o domínio equipado com todas as interpretações e funções da estrutura.

Estrutura: ex. 1

Considere a assinatura $\Sigma = (\{a, b\}, \{f^1, g^2\}, \{P^1, Q^2\})$

Domínio 1 $= \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Interpretação 1 $=$

- $\mathbf{Con}_D \Rightarrow a \mapsto 1,\ b \mapsto 3$
- $\mathbf{Fun}_D \Rightarrow f \mapsto (id(x) = x),$
  $$g \mapsto \left(igual(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ x = y \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \right)$$
- $\mathbf{Pred}_D \Rightarrow P \mapsto \{3, 4\},\ Q \mapsto \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

Estrutura: ex. 2

Considere a assinatura $\Sigma = (\{a, b\}, \{f^1, g^2\}, \{P^1, Q^2\})$

Domínio 1 $= \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Interpretação 2 $=$

- $\mathbf{Con}_D \Rightarrow a \mapsto 2,\ b \mapsto 4$
- $\mathbf{Fun}_D \Rightarrow f \mapsto (rev(x) = 4 - x)$,
  $g \mapsto (somamod(x, y) = (x + y)\%5)$
- $\mathbf{Pred}_D \Rightarrow P \mapsto \{1, 2, 4\},\ Q \mapsto \{(2, 2)\}$

Estrutura: ex. 3

Considere a assinatura $\Sigma = (\{a, b\}, \{f^1, g^2\}, \{P^1, Q^2\})$

Domínio 2 $= \{0\}$

Interpretação 1 $=$

- $\mathbf{Con}_D \Rightarrow a \mapsto 0,\ b \mapsto 0$
- $\mathbf{Fun}_D \Rightarrow f \mapsto id, \quad g \mapsto (g(x, y) = 0)$
- $\mathbf{Pred}_D \Rightarrow P \mapsto \{\},\ Q \mapsto \{(0, 0)\}$

Estrutura: ex. 4

Considere a assinatura $\Sigma = (\{a, b\}, \{f^1, g^2\}, \{P^1, Q^2\})$

Domínio 2 $= \{0\}$

Interpretação 2 $=$

- $\mathbf{Con}_D \Rightarrow a \mapsto 0,\ b \mapsto 0$
- $\mathbf{Fun}_D \Rightarrow f \mapsto id, \quad g \mapsto (g(x, y) = 0)$
- $\mathbf{Pred}_D \Rightarrow P \mapsto \{0\},\ Q \mapsto \{(0, 0)\}$

Estrutura: ex. 5

Considere a assinatura $\Sigma = (\{a, b\}, \{f^1, g^2\}, \{P^1, Q^2\})$

Domínio $\mathfrak{I} = \mathbb{N}$

Interpretação $\mathfrak{I} =$

- $\mathbf{Con}_D \Rightarrow a \mapsto 0,\ b \mapsto 0$
- $\mathbf{Fun}_D \Rightarrow f \mapsto (succ(x) = x + 1), \quad g \mapsto (+)$
- $\mathbf{Pred}_D \Rightarrow P \mapsto \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$,
  $Q \mapsto \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), \ldots, (1, 2), (1, 3), (1, 4), \ldots, (2, 3), \ldots\}$

Interpretação de termos

Uma estrutura $\mathcal{D}$ permite que calculemos um elemento de D para cada termo fechado $\mathrm{t} \in \mathbf{Term}$

Interpretação de termos

Uma estrutura $\mathcal{D}$ permite que calculemos um elemento de D para cada termo fechado $t \in \mathbf{Term}$

Para calcular em elemento de D associado a um termo aberto (com variáveis livres), precisamos de uma *atribuição de variáveis*, isto é, uma função

$$\sigma : \mathbf{Var} \to D$$

Interpretação de termos

Uma estrutura $\mathcal{D}$ permite que calculemos um elemento de D para cada termo fechado $t \in \mathbf{Term}$

Para calcular em elemento de D associado a um termo aberto (com variáveis livres), precisamos de uma *atribuição de variáveis*, isto é, uma função

$$\sigma : \mathbf{Var} \to D$$

A função $[-]^{\sigma}_{\mathcal{D}} : \mathbf{Term} \to D$ é definida como segue

- $[x]^{\sigma}_{\mathcal{D}} = \sigma(x)$, para $x \in \mathbf{Var}$
- $[c]^{\sigma}_{\mathcal{D}} = c_D$, para $c \in \mathbf{Con}$
- $[f(t_1, \ldots, t_k)]^{\sigma}_{\mathcal{D}} = f_D([t_1]^{\sigma}_{\mathcal{D}}, \ldots, [t_k]^{\sigma}_{\mathcal{D}})$, para $f \in \mathbf{Fun}$

Valoração de fórmulas

Vamos estender a valoração $[-]^{\sigma}_{\mathcal{D}} : \mathfrak{F} \to \{0, 1\}$ como segue:

$$
\begin{aligned}
[P(t_1, \ldots, t_k)]^{\sigma}_{\mathcal{D}} &= P_D([t_1]^{\sigma}_{\mathcal{D}}, \ldots, [t_k]^{\sigma}_{\mathcal{D}}) \\
[t_1 = t_2]^{\sigma}_{\mathcal{D}} &= \begin{cases} 1 & \text{se } [t_1]^{\sigma}_{\mathcal{D}} = [t_2]^{\sigma}_{\mathcal{D}} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\
[\neg A]^{\sigma}_{\mathcal{D}} &= \neg [A]^{\sigma}_{\mathcal{D}} \\
[A \star B]^{\sigma}_{\mathcal{D}} &= [A]^{\sigma}_{\mathcal{D}} \star [B]^{\sigma}_{\mathcal{D}} \text{ para } \star \in \{\wedge, \vee, \to\} \\
[\exists x.A]^{\sigma}_{\mathcal{D}} &= \begin{cases} 1 & \text{se existe } d \in D \text{ tal que } [A]^{\sigma[x \mapsto d]}_{\mathcal{D}} = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\
[\forall x.A]^{\sigma}_{\mathcal{D}} &= \begin{cases} 1 & \text{se para todo } d \in D \text{ tem-se } [A]^{\sigma[x \mapsto d]}_{\mathcal{D}} = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}
\end{aligned}
$$

onde $\sigma[x \mapsto d]$ denota a função que coincide com σ para todo $y \neq x$ e mapeia x em d.

Satisfazibilidade, Consequência, Validade

- Uma estrutura $\mathcal{D}$ **satisfaz** uma fórmula A se $[A]^{\sigma}_{\mathcal{D}} = 1$ para **toda** atribuição σ. Denotaremos por $\mathcal{D} \vDash A$
- Seja Γ um conjunto de fórmulas. Dizemos que A é consequência lógica de Γ, denotado por $\Gamma \vDash A$ se, para qualquer estrutura $\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{D} \vDash \gamma_i$ para toda $\gamma_i \in \Gamma$, então $\mathcal{D} \vDash A$.
- Uma fórmula é **válida** (denotado por $\vDash A$) se para toda estrutura $\mathcal{D}$ tem-se $\mathcal{D} \vDash A$.

Exemplo 1: assinatura

$\Sigma = (\mathbf{Con}, \mathbf{Fun}, \mathbf{Pred})$

$\mathbf{Con} = \{\mathtt{lisa}, \mathtt{bart}, \mathtt{maggie}, \mathtt{homer}, \mathtt{marge}, \mathtt{ajudantePN}\}$

$\mathbf{Fun} = \{\}$

$\mathbf{Pred} = \{\mathtt{Masc}^1, \mathtt{Fem}^1, \mathtt{Humano}^1, \mathtt{Inteligente}^1, \mathtt{Bebado}^1, \mathtt{Rico}^1, \mathtt{Filho}^2, \mathtt{Irmao}^2\}$

Exemplo 1: domínio

D = { , , , , ,  }

Exemplo 1: estrutura (1)

$\mathbf{Con}_{\mathrm{D}} = \{$ $\mathtt{bart} \mapsto$  ,

$\mathtt{homer} \mapsto$  ,

$\mathtt{lisa} \mapsto$  ,

$\mathtt{marge} \mapsto$  ,

$\mathtt{maggie} \mapsto$  ,

$\mathtt{ajudantePN} \mapsto$  $\}$

$\mathbf{Fun}_{\mathrm{D}} = \{\}$

Exemplo 1: estrutura (2)

Pred$_{\mathrm{D}}$ = { `Masc`^{1} $\mapsto$ { , ,  },

`Fem`^{1} $\mapsto$ { , ,  },

`Humano`^{1} $\mapsto$ { , , , ,  },

`Inteligente`^{1} $\mapsto$ { ,  },

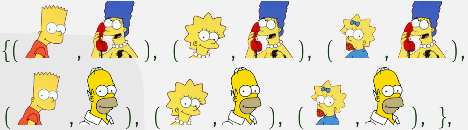
`Bebado`^{1} $\mapsto$ {  },

`Rico`^{1} $\mapsto$ {}

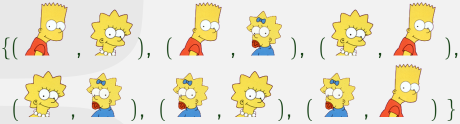
`...` }

$\mathbb{I}_{\textbf{Pred}} = \{ \quad \ldots$

$\texttt{Filho}^2 \mapsto$



$\texttt{Irmao}^2 \mapsto$



$\}$

Exemplo 1: fórmulas

Fórmulas fechadas não-quantificadas:

$\texttt{bart} = \texttt{lisa}$
$\texttt{Fem}(\texttt{lisa})$
$\texttt{Inteligente}(\texttt{homer}) \vee \texttt{Masc}(\texttt{homer})$
$\texttt{Humano}(\texttt{homer}) \wedge \neg\texttt{Rico}(\texttt{marge})$

Exemplo 1: fórmulas

Fórmulas fechadas não-quantificadas:

$\mathtt{bart} = \mathtt{lisa}$
$\mathtt{Fem}(\mathtt{lisa})$
$\mathtt{Inteligente}(\mathtt{homer}) \vee \mathtt{Masc}(\mathtt{homer})$
$\mathtt{Humano}(\mathtt{homer}) \wedge \neg\mathtt{Rico}(\mathtt{marge})$

Fórmulas fechadas quantificadas:

$\forall x.(\mathtt{Masc}(x) \rightarrow \mathtt{Humano}(x))$
$\forall x.(\mathtt{Humano}(x) \rightarrow \mathtt{Masc}(x))$
$\exists x.(\neg\mathtt{Bebado}(x) \wedge \mathtt{Fem}(x))$
$\forall x.(\exists y.(\mathtt{Filho}(y, x)) \rightarrow$
$\mathtt{Bebado}(x) \vee \mathtt{Fem}(x))$
$\forall x.\forall y.(\mathtt{Irmao}(x, y) \rightarrow \mathtt{Irmao}(y, x))$

Exemplo 1: fórmulas

Fórmulas fechadas não-quantificadas:

$\mathtt{bart} = \mathtt{lisa}$
$\mathtt{Fem}(\mathtt{lisa})$
$\mathtt{Inteligente}(\mathtt{homer}) \vee \mathtt{Masc}(\mathtt{homer})$
$\mathtt{Humano}(\mathtt{homer}) \wedge \neg\mathtt{Rico}(\mathtt{marge})$

Fórmulas fechadas quantificadas:

$\forall x.(\mathtt{Masc}(x) \rightarrow \mathtt{Humano}(x))$
$\forall x.(\mathtt{Humano}(x) \rightarrow \mathtt{Masc}(x))$
$\exists x.(\neg\mathtt{Bebado}(x) \wedge \mathtt{Fem}(x))$
$\forall x.(\exists y.(\mathtt{Filho}(y, x)) \rightarrow$
$\mathtt{Bebado}(x) \vee \mathtt{Fem}(x))$
$\forall x.\forall y.(\mathtt{Irmao}(x, y) \rightarrow \mathtt{Irmao}(y, x))$

Fórmulas abertas não-quantificadas:

$\mathtt{Filho}(\mathtt{bart}, z)$
$\mathtt{Masc}(y)$
$\neg\mathtt{Humano}(x) \rightarrow \neg(x = homer)$

Exemplo 1: fórmulas

Fórmulas fechadas não-quantificadas:

$\mathtt{bart} = \mathtt{lisa}$
$\mathtt{Fem}(\mathtt{lisa})$
$\mathtt{Inteligente}(\mathtt{homer}) \vee \mathtt{Masc}(\mathtt{homer})$
$\mathtt{Humano}(\mathtt{homer}) \wedge \neg\mathtt{Rico}(\mathtt{marge})$

Fórmulas abertas não-quantificadas:

$\mathtt{Filho}(\mathtt{bart}, z)$
$\mathtt{Masc}(y)$
$\neg\mathtt{Humano}(x) \to \neg(x = \mathtt{homer})$

Fórmulas fechadas quantificadas:

$\forall x.(\mathtt{Masc}(x) \to \mathtt{Humano}(x))$
$\forall x.(\mathtt{Humano}(x) \to \mathtt{Masc}(x))$
$\exists x.(\neg\mathtt{Bebado}(x) \wedge \mathtt{Fem}(x))$
$\forall x.(\exists y.(\mathtt{Filho}(y, x)) \to$
$\mathtt{Bebado}(x) \vee \mathtt{Fem}(x))$
$\forall x.\forall y.(\mathtt{Irmao}(x, y) \to \mathtt{Irmao}(y, x))$

Fórmulas abertas quantificadas:

$\forall x.(\mathtt{Humano}(x) \to \neg\mathtt{Rico}(z))$
$\exists x.\neg\mathtt{Bebado}(x) \vee \mathtt{Fem}(z)$

Exemplo 1: valor de fórmulas fechadas (1)

Sintaxe: `bart` $=$ `lisa`

Exemplo 1: valor de fórmulas fechadas (1)

Sintaxe:	`bart`	$=$	`lisa`	
	$\big\downarrow \mathbb{I}_{\textbf{Term}}$		$\big\downarrow \mathbb{I}_{\textbf{Term}}$	
Semântica:		$\neq$		**falso**

Exemplo 1: valor de fórmulas fechadas (2)

Sintaxe: `Fem` `(lisa)`

Exemplo 1: valor de fórmulas fechadas (2)

Sintaxe: `Fem` `(lisa)`

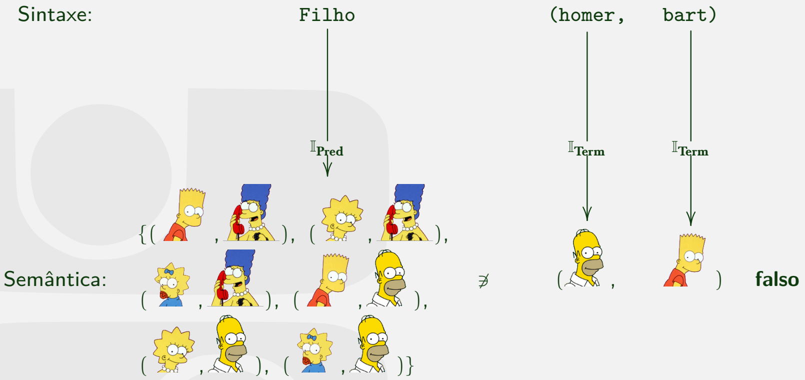
$\mathbb{I}_{\mathbf{Pred}}$ $\mathbb{I}_{\mathbf{Term}}$

Semântica: $\{$  $\}$ $\ni$  **verdadeiro**

Exemplo 1: valor de fórmulas fechadas (3)

Sintaxe: `Filho (homer, bart)`

Exemplo 1: valor de fórmulas fechadas (3)



Exemplo 1: valor de fórmulas fechadas (4)

Sintaxe	`Filho(homer,bart)`	$\wedge$	`Fem(lisa)`

Exemplo 1: valor de fórmulas fechadas (4)

Sintaxe	`Filho(homer,bart)`	$\wedge$	`Fem(lisa)`	
	$\Downarrow$		$\Downarrow$	
Semântica	**falso**	$\wedge$	**verdadeiro**	$=$ **falso**

Exemplo 1: valor de fórmulas fechadas (4)

Sintaxe	`Filho(homer,bart)`	$\wedge$	`Fem(lisa)`	
	$\Downarrow$		$\Downarrow$	
Semântica	**falso**	$\wedge$	**verdadeiro**	$=$ **falso**

Notação padrão

$$\mathcal{D} \not\models \texttt{Filho}(\texttt{homer}, \texttt{bart}) \wedge \texttt{Fem}(\texttt{lisa})$$

Exemplo 1: valor de fórmulas fechadas (5)

Com esta assinatura e sistema algébrico, temos como calcular todas as **fórmulas atômicas fechadas** e seus respectivos valores-verdade (em cinza falso, em preto verdadeiro)

```
Masc(bart),    Masc(homer),  Masc(lisa),  Masc(marge),  Masc(maggie),  Masc(ajudantePN),

Fem(bart),      Fem(homer),    Fem(lisa),    Fem(marge),    Fem(maggie),    Fem(ajudantePN),

Humano(bart), Humano(homer), Humano(lisa), Humano(marge), Humano(maggie), Humano(ajudantePN),

Inteligente(bart),   Inteligente(homer),   Inteligente(lisa),
Inteligente(marge),  Inteligente(maggie),  Inteligente(ajudantePN),

Bebado(bart), Bebado(homer), Bebado(lisa), Bebado(marge), Bebado(maggie), Bebado(ajudantePN),

Rico(bart),    Rico(homer),  Rico(lisa),  Rico(marge),  Rico(maggie),  Rico(ajudantePN),

bart=bart,      bart=homer,    bart=lisa,    bart=marge,    bart=maggie,    bart=ajudantePN,
homer=bart,    homer=homer,  homer=lisa,  homer=marge,  homer=maggie,  homer=ajudantePN,
lisa=bart,      lisa=homer,    lisa=lisa,    lisa=marge,    lisa=maggie,    lisa=ajudantePN,
marge=bart,    marge=homer,  marge=lisa,  marge=marge,  marge=maggie,  marge=ajudantePN,
maggie=bart,  maggie=homer, maggie=lisa, maggie=marge, maggie=maggie, maggie=ajudantePN,
ajudantePN=bart,   ajudantePN=homer,   ajudantePN=lisa,
ajudantePN=marge, ajudantePN=maggie,   ajudantePN=ajudantePN,

...
```

Exemplo 1: valor de fórmulas fechadas (6)

Com esta assinatura e sistema algébrico, temos como calcular todas as **fórmulas atômicas fechadas** e seus respectivos valores-verdade (em cinza falso, em preto verdadeiro)

```
...

Irmao(bart,bart),    Irmao(bart,homer),    Irmao(bart,lisa),
Irmao(bart,marge),   Irmao(bart,maggie),   Irmao(bart,ajudantePN),

Irmao(homer,bart),   Irmao(homer,homer),   Irmao(homer,lisa),
Irmao(homer,marge),  Irmao(homer,maggie),  Irmao(homer,ajudantePN),

Irmao(lisa,bart),    Irmao(lisa,homer),    Irmao(lisa,lisa),
Irmao(lisa,marge),   Irmao(lisa,maggie),   Irmao(lisa,ajudantePN),

Irmao(marge,bart),   Irmao(marge,homer),   Irmao(marge,lisa),
Irmao(marge,marge),  Irmao(marge,maggie),  Irmao(marge,ajudantePN),

Irmao(maggie,bart),  Irmao(maggie,homer),  Irmao(maggie,lisa),
Irmao(maggie,marge), Irmao(maggie,maggie), Irmao(maggie,ajudantePN),

Irmao(ajudantePN,bart),  Irmao(ajudantePN,homer),  Irmao(ajudantePN,lisa),
Irmao(ajudantePN,marge), Irmao(ajudantePN,maggie), Irmao(ajudantePN,ajudantePN),

...
```

Exemplo 1: valor de fórmulas fechadas (7)

Com esta assinatura e sistema algébrico, temos como calcular todas as **fórmulas atômicas fechadas** e seus respectivos valores-verdade (em cinza falso, em preto verdadeiro)

```
...

Filho(bart,bart),   Filho(bart,homer),   Filho(bart,lisa),
Filho(bart,marge),  Filho(bart,maggie),  Filho(bart,ajudantePN),

Filho(homer,bart),  Filho(homer,homer),  Filho(homer,lisa),
Filho(homer,marge), Filho(homer,maggie), Filho(homer,ajudantePN),

Filho(lisa,bart),   Filho(lisa,homer),   Filho(lisa,lisa),
Filho(lisa,marge),  Filho(lisa,maggie),  Filho(lisa,ajudantePN),

Filho(marge,bart),  Filho(marge,homer),  Filho(marge,lisa),
Filho(marge,marge), Filho(marge,maggie), Filho(marge,ajudantePN),

Filho(maggie,bart),  Filho(maggie,homer),  Filho(maggie,lisa),
Filho(maggie,marge), Filho(maggie,maggie), Filho(maggie,ajudantePN),

Filho(ajudantePN,bart),  Filho(ajudantePN,homer),  Filho(ajudantePN,lisa),
Filho(ajudantePN,marge), Filho(ajudantePN,maggie), Filho(ajudantePN,ajudantePN),
```

Exemplo 1: valor de fórmulas abertas

Fórmulas abertas como $\mathtt{Masc}(x)$ possuem *variáveis livres*.

Sem uma atribuição de variáveis, não há como atribuir valor verdade a esta fórmula.

Cada função $\sigma : \mathbf{Var} \to D$ é uma interpretação **diferente**.

$\sigma_1 =$

$x \mapsto$ 

$y \mapsto$ 

$z \mapsto$ 

$w \mapsto$ 

$\vdots$

$[\mathtt{Masc}(x)]^{\sigma_1}_{\mathcal{D}}$

$[\mathtt{Filho}(y, z)]^{\sigma_1}_{\mathcal{D}}$

$[\mathtt{Humano}(w)]^{\sigma_1}_{\mathcal{D}}$

Exemplo 1: valor de fórmulas abertas

Fórmulas abertas como $\mathtt{Masc}(x)$ possuem *variáveis livres*.

Sem uma atribuição de variáveis, não há como atribuir valor verdade a esta fórmula.

Cada função $\sigma : \mathbf{Var} \to D$ é uma interpretação **diferente**.

$\sigma_1 =$

x	$\mapsto$	
y	$\mapsto$	
z	$\mapsto$	
w	$\mapsto$	
	$\vdots$	

$[\mathtt{Masc}(x)]^{\sigma_1}_{\mathcal{D}}$	verdadeiro
$[\mathtt{Filho}(y, z)]^{\sigma_1}_{\mathcal{D}}$	falso
$[\mathtt{Humano}(w)]^{\sigma_1}_{\mathcal{D}}$	verdadeiro

Exemplo 1: valor de fórmulas abertas

Fórmulas abertas como $\texttt{Masc}(x)$ possuem *variáveis livres*.

Sem uma atribuição de variáveis, não há como atribuir valor verdade a esta fórmula.

Cada função $\sigma : \mathbf{Var} \to D$ é uma interpretação **diferente**.

$\sigma_2 =$

$x \mapsto$ 

$y \mapsto$ 

$z \mapsto$ 

$w \mapsto$ 

$\vdots$

$[\texttt{Masc}(x)]^{\sigma_2}_{\mathcal{D}}$

$[\texttt{Filho}(y, z)]^{\sigma_2}_{\mathcal{D}}$

$[\texttt{Humano}(w)]^{\sigma_2}_{\mathcal{D}}$

Exemplo 1: valor de fórmulas abertas

Fórmulas abertas como $\texttt{Masc}(x)$ possuem *variáveis livres*.

Sem uma atribuição de variáveis, não há como atribuir valor verdade a esta fórmula.

Cada função $\sigma : \mathbf{Var} \to D$ é uma interpretação **diferente**.

$\sigma_2 =$

$x \mapsto$ 

$y \mapsto$ 

$z \mapsto$ 

$w \mapsto$ 

$\vdots$

$[\texttt{Masc}(x)]^{\sigma_2}_{\mathcal{D}}$	falso
$[\texttt{Filho}(y, z)]^{\sigma_2}_{\mathcal{D}}$	verdadeiro
$[\texttt{Humano}(w)]^{\sigma_2}_{\mathcal{D}}$	falso

Exemplo 1: valor de fórmulas abertas

Fórmulas abertas como $\texttt{Masc}(x)$ possuem *variáveis livres*.

Sem uma atribuição de variáveis, não há como atribuir valor verdade a esta fórmula.

Cada função $\sigma : \mathbf{Var} \to D$ é uma interpretação **diferente**.

$\sigma_3 =$

$x \mapsto$ 

$y \mapsto$ 

$z \mapsto$ 

$w \mapsto$ 

$\vdots$

$[\texttt{Masc}(x)]^{\sigma_3}_{\mathcal{D}}$

$[\texttt{Filho}(y, z)]^{\sigma_3}_{\mathcal{D}}$

$[\texttt{Humano}(w)]^{\sigma_3}_{\mathcal{D}}$

Exemplo 1: valor de fórmulas abertas

Fórmulas abertas como $\mathtt{Masc}(x)$ possuem *variáveis livres*.

Sem uma atribuição de variáveis, não há como atribuir valor verdade a esta fórmula.

Cada função $\sigma : \mathbf{Var} \to D$ é uma interpretação **diferente**.

$\sigma_3 =$

$x \mapsto$ 

$y \mapsto$ 

$z \mapsto$ 

$w \mapsto$ 

$\vdots$

$[\mathtt{Masc}(x)]^{\sigma_3}_{\mathcal{D}}$	falso
$[\mathtt{Filho}(y, z)]^{\sigma_3}_{\mathcal{D}}$	falso
$[\mathtt{Humano}(w)]^{\sigma_3}_{\mathcal{D}}$	verdadeiro

Exemplo 1: valor de fórmulas quantificadas (1)

Uma interpretação intuitiva de fórmulas quantificadas existencialmente como

$$\exists x.\mathtt{Masc}(x)$$

é testar a fórmula aberta $\mathtt{Masc}(x)$ buscando **alguma substituição** para o x (tal como `homer`) que a faça verdadeira.

Exemplo 1: valor de fórmulas quantificadas (1)

Uma interpretação intuitiva de fórmulas quantificadas existencialmente como

$$\exists x.\mathtt{Masc}(x)$$

é testar a fórmula aberta $\mathtt{Masc}(x)$ buscando **alguma substituição** para o x (tal como `homer`) que a faça verdadeira.

Uma interpretação intuitiva de fórmulas quantificadas universalmente como

$$\forall x.\neg\mathtt{Rico}(x)$$

é testar a fórmula aberta $\neg\mathtt{Rico}(x)$ com *todas* as substituições possíveis para x e certificando que **todas elas** fazem a fórmula verdadeira.

Exemplo 1: valor de fórmulas quantificadas (2)

Considere a seguinte fórmula:

$$A = \forall x.\mathtt{Masc}(x)$$

Vamos agora fixar uma atribuição σ_1, como apresentado abaixo:

$\sigma_1 =$

$x \mapsto$ 

$y \mapsto$ 

$z \mapsto$ 

$w \mapsto$ 

$\vdots$

Considere a seguinte fórmula:

$$A = \forall x.\mathtt{Masc}(x)$$

Vamos agora fixar uma atribuição σ_1, como apresentado abaixo:

$\sigma_1 =$

$x \mapsto$ 

$y \mapsto$ 

$z \mapsto$ 

$w \mapsto$ 

$\vdots$

Para que $[A]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1} = 1$ deve-se ter

$$[\mathtt{Masc}(x)]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1[x \mapsto d]} = 1$$

para **todo** $d \in D$. (neste caso, temos que testar todos os valores de D para x)

Exemplo 1: valor de fórmulas quantificadas (2)

Considere a seguinte fórmula:

$$A = \forall x.\mathtt{Masc}(x)$$

Vamos agora fixar uma atribuição σ_1, como apresentado abaixo:

$\sigma_1 =$

$x \mapsto$ 

$y \mapsto$ 

$z \mapsto$ 

$w \mapsto$ 

$\vdots$

Para que $[A]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1} = 1$ deve-se ter

$$[\mathtt{Masc}(x)]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1[x \mapsto d]} = 1$$

para **todo** $d \in D$. (neste caso, temos que testar todos os valores de D para x)

Vamos testar: $[\mathtt{Masc}(x)]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1[x\mapsto}$  $]$ $\Rightarrow$ **verdadeiro**

Exemplo 1: valor de fórmulas quantificadas (2)

Considere a seguinte fórmula:

$$A = \forall x.\mathtt{Masc}(x)$$

Vamos agora fixar uma atribuição σ_1, como apresentado abaixo:

$\sigma_1 =$

$x \mapsto$ 

$y \mapsto$ 

$z \mapsto$ 

$w \mapsto$ 

$\vdots$

Para que $[A]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1} = 1$ deve-se ter

$$[\mathtt{Masc}(x)]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1[x \mapsto d]} = 1$$

para **todo** $d \in D$. (neste caso, temos que testar todos os valores de D para x)

Vamos testar: $[\mathtt{Masc}(x)]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1[x \mapsto$  $]} \Rightarrow$ **verdadeiro**

Exemplo 1: valor de fórmulas quantificadas (2)

Considere a seguinte fórmula:

$$A = \forall x.\mathtt{Masc}(x)$$

Vamos agora fixar uma atribuição σ_1, como apresentado abaixo:

$\sigma_1 =$

$x \mapsto$ 

$y \mapsto$ 

$z \mapsto$ 

$w \mapsto$ 

$\vdots$

Para que $[A]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1} = 1$ deve-se ter

$$[\mathtt{Masc}(x)]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1[x \mapsto d]} = 1$$

para **todo** $d \in D$. (neste caso, temos que testar todos os valores de D para x)

Vamos testar: $[\mathtt{Masc}(x)]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1[x \mapsto\ ]}$  $\Rightarrow$ **falso**

Exemplo 1: valor de fórmulas quantificadas (2)

Considere a seguinte fórmula:

$$A = \forall x.\mathtt{Masc}(x)$$

Vamos agora fixar uma atribuição σ_1, como apresentado abaixo:

$\sigma_1 =$

$x \mapsto$ 

$y \mapsto$ 

$z \mapsto$ 

$w \mapsto$ 

$\vdots$

Para que $[A]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1} = 1$ deve-se ter

$$[\mathtt{Masc}(x)]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1[x \mapsto d]} = 1$$

para **todo** $d \in D$. (neste caso, temos que testar todos os valores de D para x)

Logo, $[A]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1} = 0$

Exemplo 1: valor de fórmulas quantificadas (3)

Considere a seguinte fórmula: $A = \exists x.\texttt{Masc}(x)$

Neste caso, precisamos somente que haja algum mapeamento de x tal que $B = \texttt{Masc}(x)$ seja verdade.

Como $x \mapsto$  faz B verdadeiro, então temos que $[A]^{\sigma_1}_{\mathcal{D}} = 1$.

Exemplo 1: valor de fórmulas quantificadas (3)

Considere a seguinte fórmula: $A = \exists x.\mathtt{Masc}(x)$

Neste caso, precisamos somente que haja algum mapeamento de x tal que $B = \mathtt{Masc}(x)$ seja verdade.

Como $x \mapsto$  faz B verdadeiro, então temos que $[A]^{\sigma_1}_{\mathcal{D}} = 1$.
A argumentação acima mostra que A é válida sob qualquer atribuição de variáveis na estrutura. Portanto,

$$\mathcal{D} \models \exists x.\mathtt{Masc}(x)$$

Exemplo 1: valor de fórmulas quantificadas (4)

Considere a seguinte fórmula:

$$A = \forall y.(\texttt{Filho}(x, y) \vee \texttt{Inteligente}(y) \vee \texttt{Masc}(y))$$

Exemplo 1: valor de fórmulas quantificadas (4)

Considere a seguinte fórmula:

$$A = \forall y.(\mathtt{Filho}(x, y) \vee \mathtt{Inteligente}(y) \vee \mathtt{Masc}(y))$$

Esta fórmula é *aberta*, pois x ocorre livre.

Exemplo 1: valor de fórmulas quantificadas (4)

Considere a seguinte fórmula:

$$A = \forall y.(\texttt{Filho}(x, y) \vee \texttt{Inteligente}(y) \vee \texttt{Masc}(y))$$

Esta fórmula é *aberta*, pois x ocorre livre.

Considere $\sigma_1 = \{x \mapsto$  $, y \mapsto$  $, z \mapsto$  $, \ldots\}$

Exemplo 1: valor de fórmulas quantificadas (4)

Considere a seguinte fórmula:

$$A = \forall y.(\mathtt{Filho}(x, y) \vee \mathtt{Inteligente}(y) \vee \mathtt{Masc}(y))$$

Esta fórmula é *aberta*, pois x ocorre livre.

Considere $\sigma_1 = \{x \mapsto$  $, y \mapsto$  $, z \mapsto$  $, \ldots\}$

Para testarmos se $[A]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1} = 1$, temos que verificar se

$$B = \mathtt{Filho}(x, y) \vee \mathtt{Inteligente}(y) \vee \mathtt{Masc}(y)$$

é verdade em toda atribuição de variáveis na qual $\{x \mapsto$  $\}$.

Exemplo 1: valor de fórmulas quantificadas (5)

$$B = \texttt{Filho}(x, y) \vee \texttt{Inteligente}(y) \vee \texttt{Masc}(y)$$

Testando:

$x \mapsto$ 

$\sigma_1 =$

$y \mapsto$ 

$\vdots$

$$[B]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1} = 1$$

Exemplo 1: valor de fórmulas quantificadas (5)

$$B = \texttt{Filho}(x, y) \lor \texttt{Inteligente}(y) \lor \texttt{Masc}(y)$$

Testando:

$\sigma_1[y \mapsto$  $] =$

$x \mapsto$ 

$y \mapsto$ 

$\vdots$

$[B]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1[y \mapsto}$  $^{]} = 1$

Exemplo 1: valor de fórmulas quantificadas (5)

$$B = \texttt{Filho}(x, y) \lor \texttt{Inteligente}(y) \lor \texttt{Masc}(y)$$

Testando:

$\sigma_1[y \mapsto$  $] =$

$x \mapsto$ 

$y \mapsto$ 

$\vdots$

$$[B]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1[y \mapsto \,\cdot\,]} = 1$$

Exemplo 1: valor de fórmulas quantificadas (5)

$$B = \texttt{Filho}(x, y) \lor \texttt{Inteligente}(y) \lor \texttt{Masc}(y)$$

Testando:

$\sigma_1[y \mapsto$  $] =$

$x \mapsto$ 

$y \mapsto$ 

$\vdots$

$[B]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1[y \mapsto$  $]} = 1$

Exemplo 1: valor de fórmulas quantificadas (5)

$$B = \mathtt{Filho}(x, y) \vee \mathtt{Inteligente}(y) \vee \mathtt{Masc}(y)$$

Testando:

$\sigma_1[y \mapsto$  $] =$

$x \mapsto$ 

$y \mapsto$ 

$\vdots$

$[B]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1[y \mapsto}$  $^{]} = 1$

Exemplo 1: valor de fórmulas quantificadas (5)

$$B = \texttt{Filho}(x, y) \lor \texttt{Inteligente}(y) \lor \texttt{Masc}(y)$$

Testando:

$\sigma_1[y \mapsto$  $] =$

$x \mapsto$ 

$y \mapsto$ 

$\vdots$

$[B]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1[y \mapsto$  $]} = 1$

Exemplo 1: valor de fórmulas quantificadas (5)

$$B = \texttt{Filho}(x, y) \vee \texttt{Inteligente}(y) \vee \texttt{Masc}(y)$$

Testando:

$\sigma_1[y \mapsto$  $] =$

$x \mapsto$ 

$y \mapsto$ 

$\vdots$

$[B]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1[y \mapsto$  $]} = 1$

Portanto, isso conclui que $[A]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1}$.

Exemplo 1: valor de fórmulas quantificadas (5)

$$B = \texttt{Filho}(x, y) \lor \texttt{Inteligente}(y) \lor \texttt{Masc}(y)$$

Testando:

$\sigma_1[y \mapsto$  $] =$

$x \mapsto$ 

$y \mapsto$ 

$\vdots$

$[B]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1[y\mapsto$  $]} = 1$

Portanto, isso conclui que $[A]_{\mathcal{D}}^{\sigma_1}$.

Note: A **não é verdade** sob

$\sigma_5 = \{x \mapsto$ , $y \mapsto$ , $\ldots\}$