TEG

Gilmário B. Santos

gilmario.santos@udesc.br

http://www.joinville.udesc.br/portal/pagina/gilmario

Grafos Hamiltonianos

Prof. Cid C. de Souza / IC–UNICAMP

Heurísticas são algoritmos que geram soluções viáveis para quais não se pode dar garantias de qualidade. Ou seja, não se sabe o quão distante a solução gerada está de uma solução ótima (5%?, 10%?, 50%?, 100%?, ...).

Tipos de heurísticas:

- Construtivas: normalmente adotam estratégias gulosas para construir as soluções. Tipicamente são aplicadas a problemas onde é relativamente fácil (mais trivial) obter uma solução viável.

- Busca local: partem de uma solução inicial e, através de transformações bem definidas, visitam outras soluções até atingir um critério de parada pré-definido

Grafos Hamiltonianos

O clássico Problema do caixeiro viajante:

O problema do caixeiro viajante ou *Traveling Salesman Problem* (TSP), consiste em determinar um percurso em um roteiro de cidades, passando uma única vez em cada cidade e voltando à cidade de origem, com custo total mínimo.

Pesquisa exaustiva pelo ciclo hamiltoniano de menor custo em Kn:

- Um grafo completo de ordem n>=3 tem 1/2(n − 1)! ciclos de Hamilton candidatos a ciclos de peso mínimo;

- Mesmo para valores de n não muito grandes, este número continua a ser muito elevado. Ex.: n = 12 obtêm-se ½ * 11! = 19.958.400 ciclos hamiltonianos candidatos a ciclos de peso mínimo.

Assim, a pesquisa exaustiva tem um custo computacional muito elevado, exigindo um esforço computacional que cresce exponencialmente com a quantidade de vértices (n).

Alternativamente ao método de pesquisa exaustiva, é comum, na prática, a utilização de métodos heurísticos.

Grafos Hamiltonianos

O algoritmo Branch and Bound (Ramificação e Limitação) é uma técnica geral usada para resolver problemas de otimização combinatória, especialmente aqueles que envolvem variáveis inteiras ou discretas, onde a enumeração exaustiva de todas as soluções possíveis é computacionalmente inviável.

O princípio central do Branch and Bound é uma combinação inteligente de busca exaustiva (enumeração) com poda (eliminação de ramos não promissores), visando encontrar a solução ótima sem ter que explorar todas as possibilidades.

Um algoritmo de branch and bound fornece uma solução ótima para um problema NP-Difícil explorando todo o espaço de busca identificando possíveis candidatos a soluções.

Grafos Hamiltonianos

"Branch and Bound" e seus dois pilares:

1. Branching (Ramificação)

Divisão do Problema: O processo de branching envolve dividir o problema original em subproblemas menores. Isso é feito criando-se uma árvore de busca, onde cada nó representa um subproblema e as ramificações representam as decisões tomadas para criar esses subproblemas.

2. Bounding (Limitação)

Para cada subproblema (nó da árvore), é calculado um limite (bound) para o valor da função objetivo.

Para problemas de minimização, calcula-se um limite inferior (lower bound), que é o menor valor possível que a solução ótima desse subproblema poderia ter.

Grafos Hamiltonianos

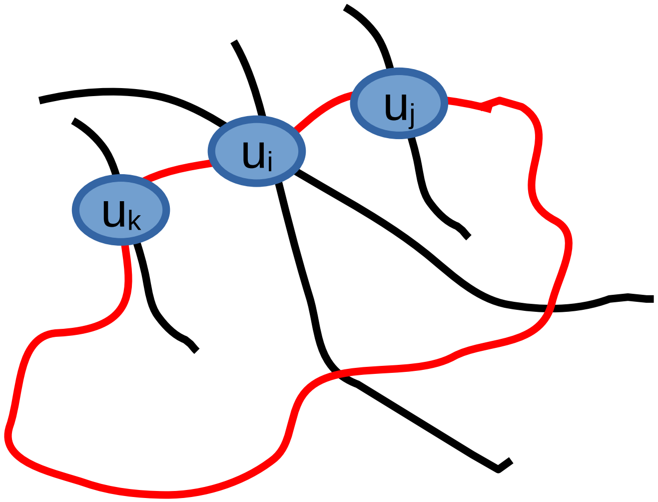
"Branch and Bound" para o TSP:

O desafio em um branch and bound é determinar um limite para a melhor solução possível.

Seja o grafo G(V,E) representando as cidades como vértices e estradas como arestas ponderadas

Seja T uma excursão por todas os vértices sem repetições e retornando ao vértice de partida.

O custo de T corresponde à soma dos custos de duas arestas adjacentes a cada vértice u ∈ V na excursão T.



Grafos Hamiltonianos

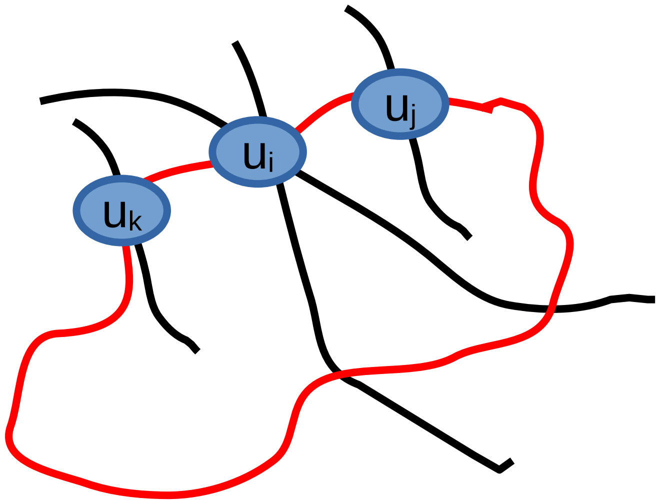
"Branch and Bound" para o TSP:

Para cada vértice u, se considerarmos suas duas arestas em T, e somarmos seus custos, a soma total para todos os vértices será o dobro do custo do percurso T (pois cada aresta ocorre duas vezes na soma).

Dessa forma o custo da excursão T será:

$$\text{custo(T)}=\left\lceil \frac{\sum_{i=1}^{|V|} S_i}{2} \right\rceil$$

S_i = soma do par de arestas adjacente a u_i em T.



Grafos Hamiltonianos

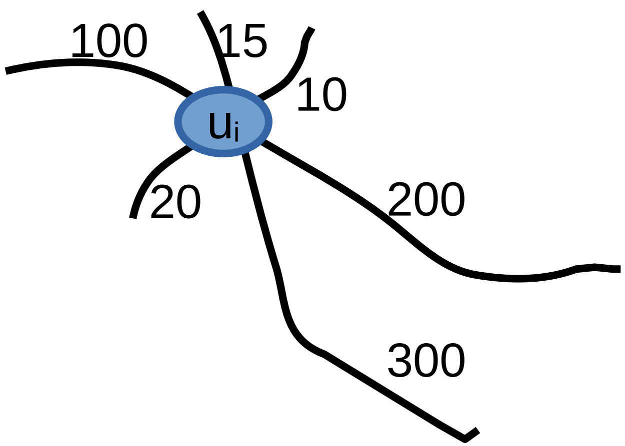
"Branch and Bound" para o TSP:

Seja u ∈ V na excursão T:

- A soma de duas arestas adjacentes ao vértice u

  será sempre maior ou igual

  à soma de duas arestas de menor custo adjacentes a u;



Ordene as arestas pelo repectivo peso:

A soma de quaisquer pares de arestas distintas será sempre maior ou igual à soma das duas arestas de menor peso (15+10=25)

Grafos Hamiltonianos

"Branch and Bound" para o TSP:

Seja $u \in V$:

- A soma de duas arestas adjacentes ao vértice u

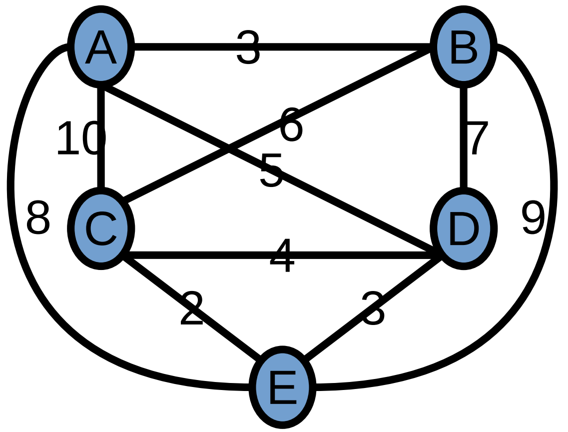
  será sempre maior ou igual

  à soma de duas arestas de menor custo adjacentes a u;

- Definiremos LB – Lower Bound (limite inferior) – como:
  - LB = 1/2 * (soma dos pesos de duas arestas de <u>menor custo</u> adjacentes a cada vértice <u>$u \in V$</u>);
  - O custo(T) >= Lower Bound (LB)

Grafos Hamiltonianos

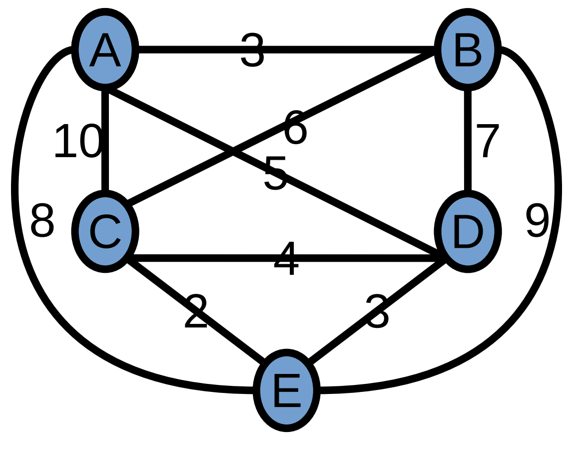
TSP - Travelling Salesman Problem usando um algoritmo de heurística local: Algoritmo Branch and Bound (algoritmo de Little, Marty, Sweeney & Karel):

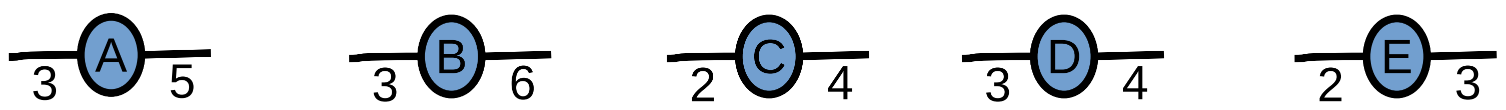


Grafos Hamiltonianos

Branch and Bound

1. O Nó Raiz: sem perda de generalidade, assumimos que será o vértice "A", para o qual o limite inferior (LB) é calculado abaixo

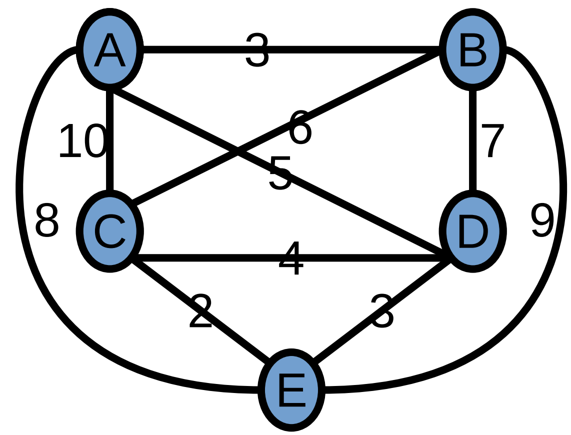




$$LB = \left\lceil \frac{3+5+3+6+2+4+3+4+2+3}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{30}{2} \right\rceil = \lceil 15 \rceil = 15$$

Grafos Hamiltonianos

Branch and Bound



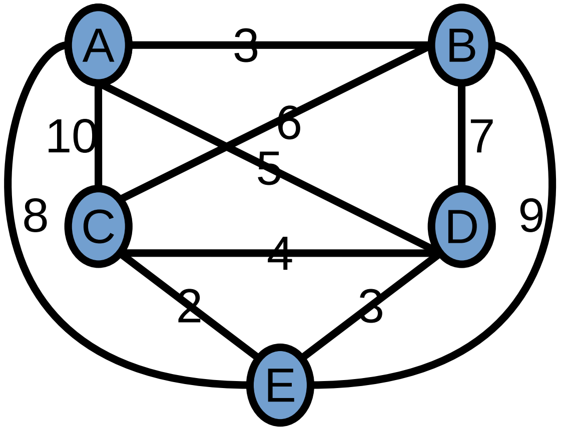
Sendo A a raiz da árvore de busca, a partir desse nó podemos construir ramos representando escolhas

Raiz A

LB=15

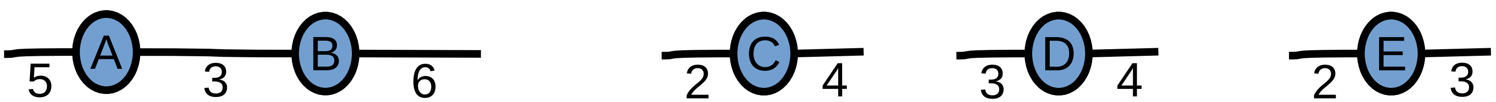
Grafos Hamiltonianos

Branch and Bound



Nível 2:

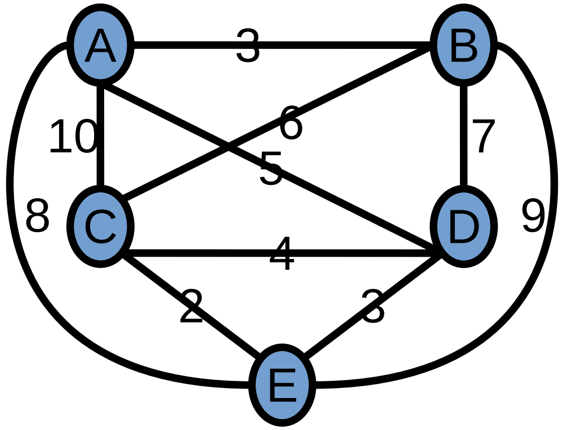
Incluindo a aresta A-B



$$LB = \left\lceil \frac{3+5+3+6+2+4+3+4+2+3}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{30}{2} \right\rceil = \lceil 15 \rceil = 15$$

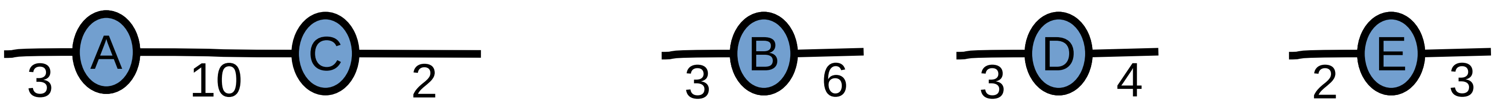
Grafos Hamiltonianos

Branch and Bound



Nível 2:

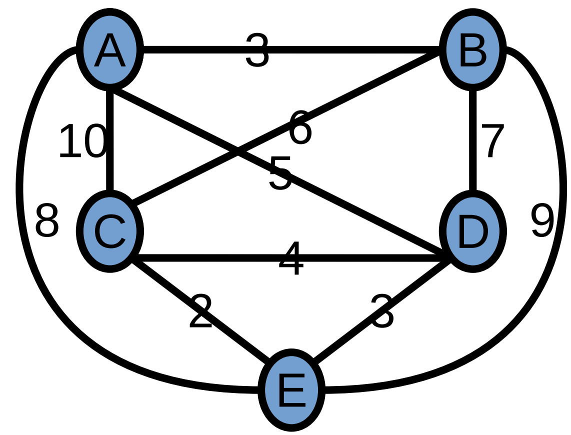
Incluindo a aresta A-C



$$LB = \left\lceil \frac{3+10+10+2+3+6+3+4+2+3}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{46}{2} \right\rceil = 23$$

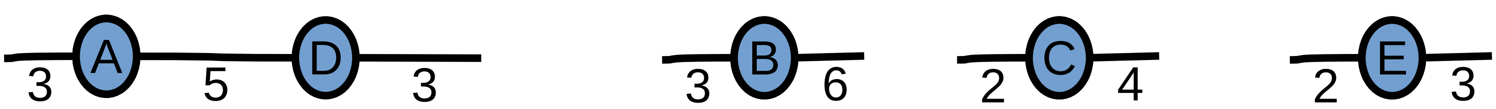
Grafos Hamiltonianos

Branch and Bound



Nível 2:

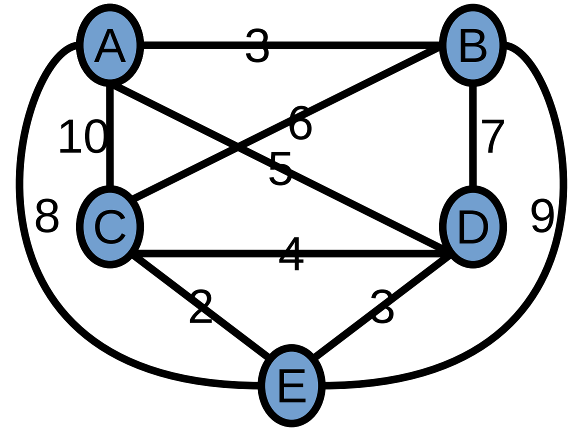
Incluindo a aresta A-D



$$LB = \left\lceil \frac{3+5+5+3+3+6+2+4+2+3}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{36}{2} \right\rceil = 18$$

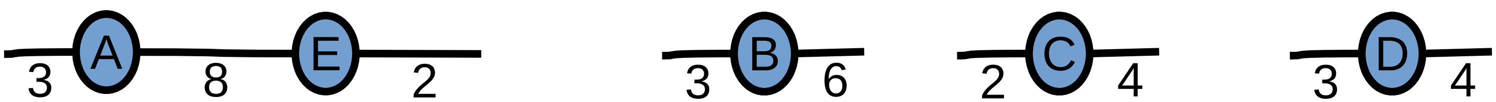
Grafos Hamiltonianos

Branch and Bound



Nível 2:

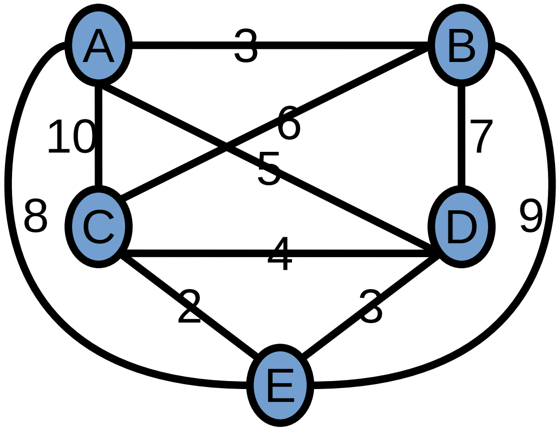
Incluindo a aresta A-E



$$LB = \left\lceil \frac{3+8+8+2+3+6+2+4+3+4}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{41}{2} \right\rceil = 21$$

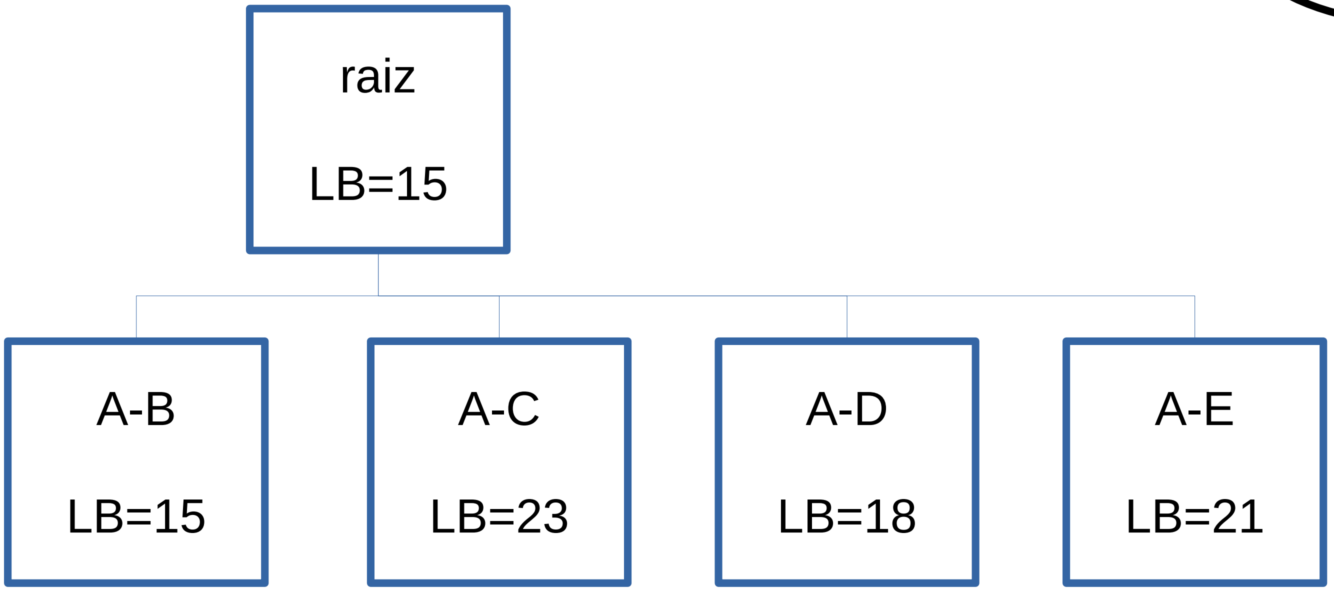
Grafos Hamiltonianos

Branch and Bound



Nível 2:

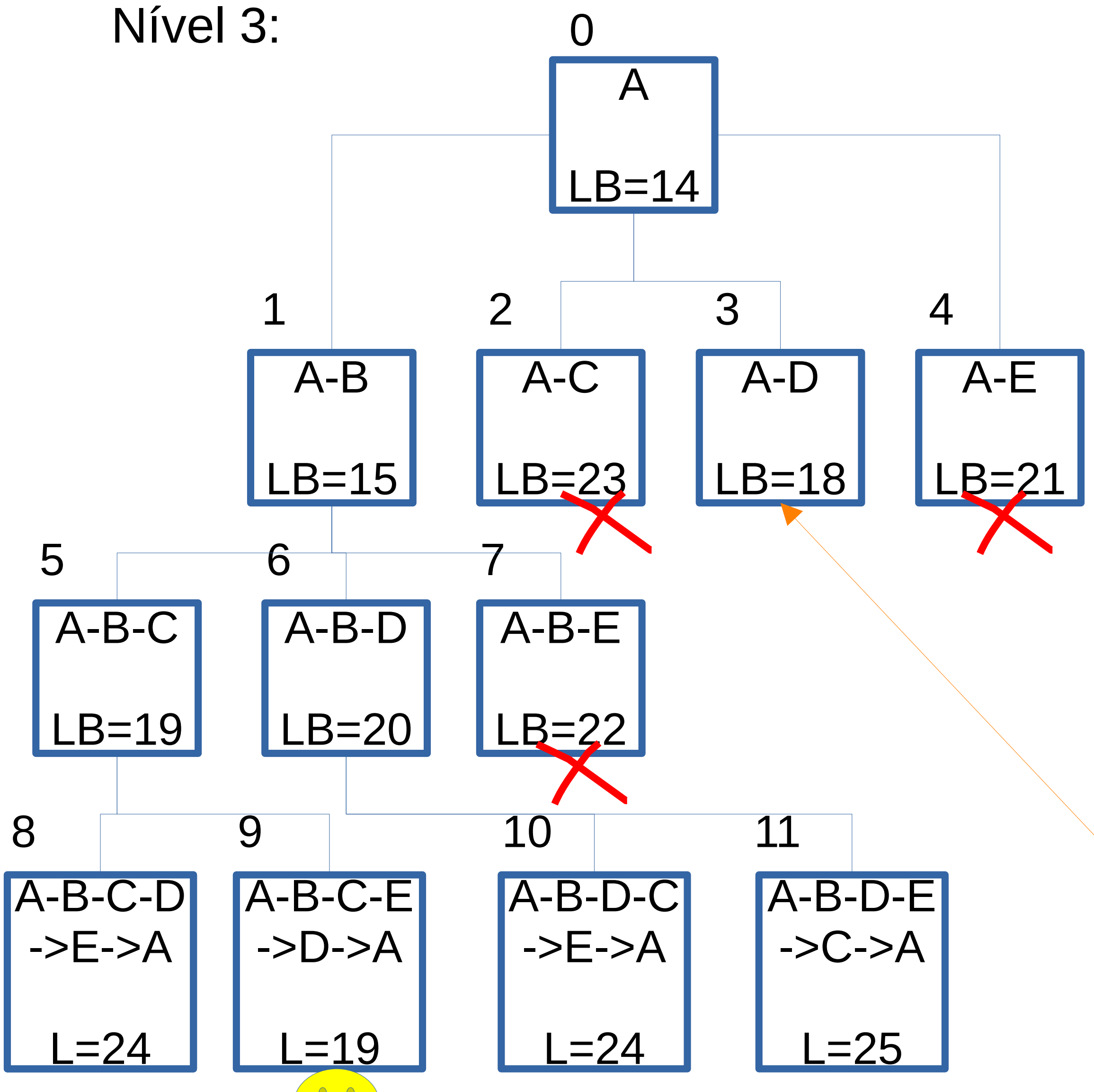
Poda:

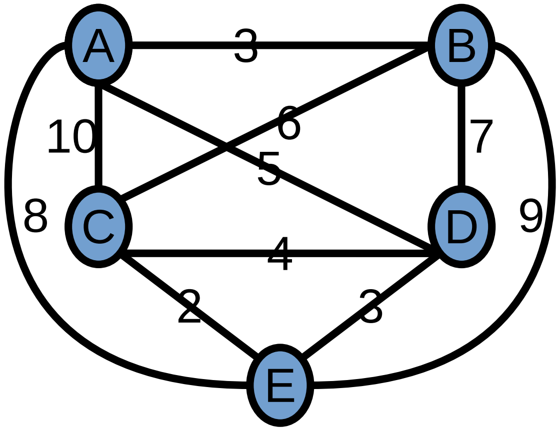


Grafos Hamiltonianos

Branch and Bound

Nível 3:





Indica que o LB foi maior do que o do nó ótimo (nó 3)

Você pode explorar os ramos a partir do nó 3

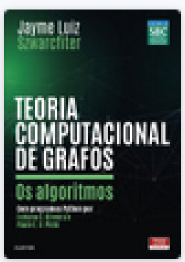
Pois o $LB_3 < L_9$

O ótimo, por enquanto

TEG

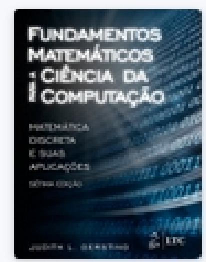
Vários livros podem ser acessados np formato eletrônico (e-book) via https://www.udesc.br/bu/acervos/ebook

NETTO, Paulo Oswaldo B.; JURKIEWICZ, Samuel. Grafos: introdução e prática. [Digite o Local da Editora]: Editora Blucher, 2017. E-book.



Teoria Computacional de Grafos - Os Algoritmos

Jayme Luiz Szwarcfiter

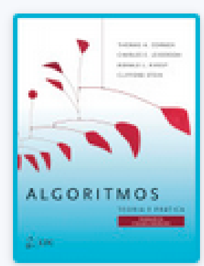


Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação

Judith L. Gersting

Grafos

Marco Goldbarg



Algoritmos - Teoria e Prática

Thomas Cormen