Autovalores e Autovetores

6.1 - Autovalor e Autovetor de um Operador Linear

Definição:

Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Um vetor $v \in V$, $v \neq 0$ é dito um autovetor de T se existe um número real λ tal que:

$$T(v) = \lambda.v$$

O número real λ acima é denominado autovalor de T associado ao autovetor v.

6.1 - Autovalor e Autovetor de um Operador Linear

Exemplo 1:

$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y).

$T(5, 2) = (30, 12) = 6.(5, 2)$.

$\therefore$ 6 e um autovalor associado ao autovetor (5, 2) do operador *T*.

Exemplo 2:

$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, T(x, y, z) = (x, y, 0).

T(x, y, 0) = 1.(x, y, 0) = 6.(5, 2).

$\therefore$ Qualquer qualquer vetor (x, y, 0) é um autovetor de T e seu autovalor associado é 1.

6.2 - Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovalores

- Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.
- Queremos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que exista $(x, y) \neq (0, 0)$ com $T(x, y) = \lambda.(x, y)$
- Isto é o mesmo que encontrar $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que:

$$ax + by = \lambda x \Leftrightarrow (a - \lambda)x + by = 0$$

$$cx + dy = \lambda y \Leftrightarrow cx + (d - \lambda)y = 0$$

- O sistema linear homogêneo acima possui solução se, e só se:

$$\det\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

- Os autovalores de T são as soluções da equação acima, se existirem.

6.2 - Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovetores

- Queremos agora encontrar os autovetores de T associados a um determinado autovalor λ.
- Isto é, queremos encontrar $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que $T(x, y) = \lambda.(x, y)$.
- Isto é o mesmo que encontrar $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que

$$ax + by = \lambda x \Leftrightarrow (a - \lambda)x + by = 0$$
$$cx + dy = \lambda y \Leftrightarrow cx + (d - \lambda)y = 0$$

- Os autovetores de T associados a λ são as soluções não-nulas do sistema linear homogêneo acima.

Obs.: Obrigatoriamente há tais soluções pois o λ foi calculado para que isto aconteça.

6.2 - Determinação dos Autovalores e Autovetores

Determinação dos Autovalores e Autovetores - Resumo:

1. Dada $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ determine a matriz canônica $A = [T]$.
2. Calcule a matriz $A - \lambda I$, onde I é a matriz identidade $n \times n$.
3. Calcule $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
   Obs.: $p(\lambda)$ é denominado polinômio característico de T.
4. Resolva a equação $p(\lambda) = 0$. As raízes desta equação são os autovalores de T.
   Obs.: $p(\lambda) = 0$ é denominada a equação característica de T.
5. Para cada autovalor λ encontrado, resolva o sistema linear homogêneo cuja matriz dos coeficientes é $A - \lambda I$.

6.2 - Determinação dos Autovalores e Autovetores

Exemplo 1: Determine os autovalores e autovetores de $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (x + 2y, -x + 4y)$.

Exemplo 2: Determine os autovalores e autovetores de $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (-y, x)$.

Exemplo 3: Determine os autovalores e autovetores de $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $T(x,y,z) = (4x + 2y, -x + y, y + 2z)$.

6.3 - Propriedades

Teorema: Seja λ um autovalor do operador $T: V \to V$. O conjunto $S_\lambda = \{v \in V \,;\, T(v) = \lambda.v\}$ (S_λ é o conjunto dos autovetores de T associados ao autovalor λ) é um subespaço vetorial de V denominado autoespaço associado a λ.

Prova:

- $T(0) = 0 = \lambda.0$, logo, $0 \in S_\lambda$ e $S_\lambda \neq \emptyset$;
- $u, v \in S_\lambda \Rightarrow T(u + v) = T(u) + T(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u + v)$. Logo, $u + v \in S_\lambda$;
- $u \in S_\lambda$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow T(\alpha u) = \alpha(T(u)) = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u)$. Logo, $\alpha u \in S_\lambda$;
- Pelo visto acima, S_λ é um subespaço vetorial de V.

6.4 - Diagonalização de Operadores

Teorema: Autovetores associados a autovalores distintos de um operador linear $T : V \longrightarrow V$ são linearmente independentes.

Prova:

- Faremos a demonstração para o caso de λ_1, λ_2, λ_3 distintos.
- Suponha $v_i \neq 0$ tal que $T(v_i) = \lambda_i v_i$, para $i = 1, 2, 3$.
- Tomemos a_i tais que $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$. (1)
- Aplicando T em ambos os lados da equação, obtemos, pela linearidade de T, e pela definição de autovetores

$$a_1T(v_1)+ a_2T(v_2)+ a_3T(v_3) = 0$$

$$a_1\lambda_1v_1 + a_2\lambda_2v_2 + a_3\lambda_3v_3 = 0. \qquad (2)$$

6.4 - Diagonalização de Operadores

Prova - continuação:

- Multiplicando ambos os membros da equação (1) por λ_1, obtemos
  $a_1\lambda_1 v_1 + a_2\lambda_1 v_2 + a_3\lambda_1 v_3 = 0.$ (3)
- Subtraindo (3) de (2):
  $a_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + a_3(\lambda_3 - \lambda_1)v_3 = 0.$ (4)
- Aplicando T em (4), obtemos:
  $a_2\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + a_3\lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1)v_3 = 0.$ (5)
- Multiplicando ambos os lados de (4) por λ_2, vem:
  $a_2\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + a_3\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_1)v_3 = 0.$ (6)

6.4 - Diagonalização de Operadores

Prova - continuação:

- Subtraindo (6) de (5):
  $a_3(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)v_3 = 0.$ (7)
- Como $\lambda_3 - \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 - \lambda_1 \neq 0$ e $v_3 \neq 0$, segue que $a_3 = 0$.
- Substituindo $a_3 = 0$ em (4), obtemos $a_2 = 0$.
- Substituindo $a_2 = a_3 = 0$ em (1), vem $a_1 = 0$.
- Logo, v_1, v_2 e v_3 são L.I.

6.4 - Diagonalização de Operadores

Corolário: Se λ_1, λ_2,…, λ_n são autovalores distintos e $v_i \in S_\lambda$, para todo i = 1, 2,…, n, então $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0$ se, e só se, $v_i = 0$ para todo i.

Prova: Se fosse possível ter $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 0$ sem que todos fossem nulos, seria uma contradição com o Teorema anterior.

6.4 - Diagonalização de Operadores

Corolário: Seja T : V ⟶ V um operador linear. Se $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, ... , $\mathcal{B}_n$ são bases dos autoespaços associados aos autovalores distintos λ_1, λ_2,…, λ_n de T, então $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup ... \cup \mathcal{B}_n$ é um conjunto L.I.

Prova: Faremos a demonstração para dois autovalores distintos λ_1 e λ_2 com bases de seus respectivos autoespaços $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w\}$.

- Tomemos $a_1v_1 + a_2v_2 + bw = 0$.
- Como cada $S_{\lambda i}$ é um subespaço, $a_1v_1 + a_2v_2 \in S_{\lambda 1}$ e $bw \in S_{\lambda 2}$.
- Pelo Corolário anterior, $a_1v_1 + a_2v_2 = 0$ e $bw = 0$.
- Como cada $\mathcal{B}_i$ é L.I. segue, $a_1 = a_2 = 0$ e $b = 0$.

6.4 - Diagonalização de Operadores

Teorema: Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, com $\dim V = n$. Se $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, ... , $\mathcal{B}_n$ são bases dos autoespaços associados aos autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de T, e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_n$ possui n vetores, então $\mathcal{B}$ é base de V.

6.4 - Diagonalização de Operadores

Definição: Se $T : V \longrightarrow V$ possui uma base formada por autovetores de T, dizemos que T é um operador *diagonalizável*.

Definição: Sejam $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um operador diagonalizável e $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ uma base de autovetores de T. Então,

(i) $D = [T]_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ é uma matriz diagonal.

(ii) A matriz $P = [\ I\ ]_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^{\mathcal{C}}$ de mudança de base de $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ para a base canônica, satisfaz $D = P^{-1}[T]P$. Dizemos que a matriz P diagonaliza [T].

6.4 - Diagonalização de Operadores

Exemplo 1: Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (-5x + 2y, 2x - 2y)$.

a) Determine os autovalores e os autoespaços de T.
b) Determine se T é diagonalizável. Em caso afirmativo, determine uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T e determine a matriz T com relação a esta base.
c) Se T for diagonalizável, determine a matriz diagonalizadora P de T.

6.4 - Diagonalização de Operadores

Exemplo 2: Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (-2x + 2y - 3z, 2x + y - 6z, -x - 2y)$.

a) Determine os autovalores e os autoespaços de T.
b) Determine se T é diagonalizável. Em caso afirmativo, determine uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T e determine a matriz T com relação a esta base.
c) Se T for diagonalizável, determine a matriz diagonalizadora P de T.

6.4 - Diagonalização de Operadores

Exemplo 3: Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (4x + 2y, -x + y, y + 2z)$.

a) Determine os autovalores e os autoespaços de T.
b) Determine se T é diagonalizável. Em caso afirmativo, determine uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T e determine a matriz T com relação a esta base.
c) Se T for diagonalizável, determine a matriz diagonalizadora P de T.