Complementando a Lista de Exercícios #1

16. Sobre o grafo bipartido, responda justificando:
a) Qual é a condição para um grafo bipartido completo $K_{m,n}$ ser regular?
b) Qual é o menor grau e o maior grau de um grafo bipartido completo $K_{m,n}$?
c) Qual é o maior número de arestas possível para um $K_{m,n}$ completo e regular?

d) Seja G(V,A) um grafo bipartido completo com:

1. |V|=|V1|+|V2| = t vértices;

2. |V1| = |V2|.

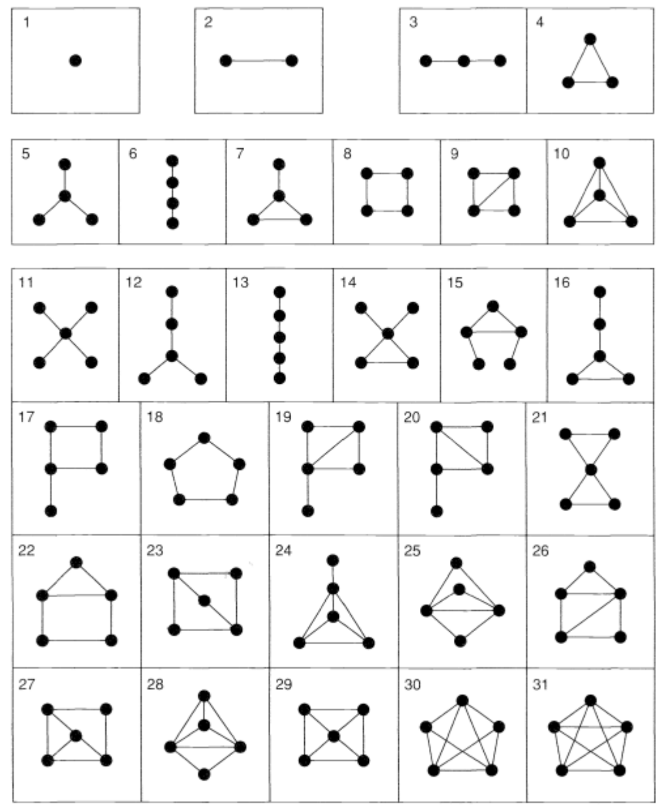
Prove que G tem a seguinte quantidade de arestas: t2/4

e) O grafo multipartido completo e regular $K_{p1,p1,p3,\ldots,ps}$ consiste de *s* conjuntos de vértices de tamanhos $p_i \in Z^*_+$, $1 \leq p_i \leq s$, com arestas unindo dois vértices se e somente se pertencem a conjuntos distintos. Sendo $K_{p1,p1,p3,\ldots,ps}$ um grafo regular, suas partições têm o mesmo tamanho:

i) Qual é a cardinalidade do conjunto de todos os vértices do grafo?
ii) Qual é a cardinalidade do conjunto de todas as arestas do grafo?
iii) Qual é o grafo complemento de $K_{p1,p1,p3,\ldots,ps}$*?*

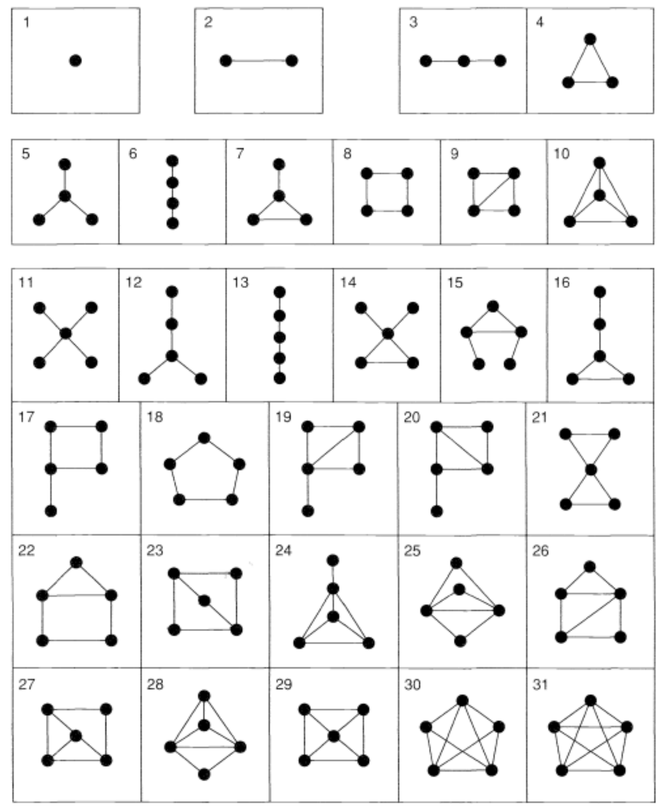
17. Mostre que Q_k onde 1 <= k <= 3 são regulares;

18. Quais grafos abaixo são bipartidos? Justifique a sua resposta utilizando as propriedades do bipartido.



17. Mostre que Q_k onde 1 <= k <= 3 são regulares e bipartidos;

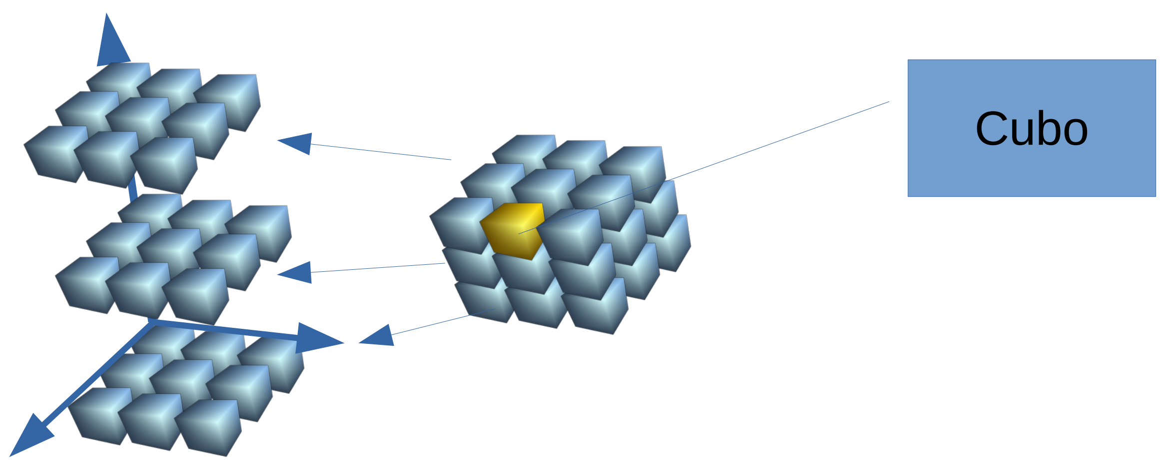
18. Quais grafos abaixo são bipartidos? Justifique a sua resposta utilizando as propriedades do bipartido.



19. Um rato come um bloco de 3x3x3 de queijo comendo todo os cubos de 1x1x1 durante seu caminho. Ele começa num cubo de um canto, come-o e se move para um cubo adjacente (que divide uma face de área 1), comendo-o e se movendo para o próximo adjacente.

a) O percurso para o rato comer todos os cubos do inicial até o final (sem retornar ao primeiro) é um grafo bipartido?
b) É possível ao rato comer todos os cubos e, após o último ser comido, retornar à posição do primeiro cubo comido e o grafo (resultante desse percurso) ser bipartido?

Exiba o circuito percorrido pelo rato no processo de comer os cubos ou prove que é impossível. (Ignore a gravidade)



20. Suponha que existam 4 pessoas, p1, p2, p3 e p4 disponíveis para preencher 6 funções vagas, f1, ... , f6. As pessoas p1, p2 e p4 são qualificadas para exercer a função f2 ou f5. A pessoa p3 é qualificada para exercer a função f1, f2, f3, f4 ou f6.

Desenhe o grafo que representa as qualificações para as vagas.

- Vértices: pessoas e funções vagas;
- Arestas: existe uma aresta ligando uma pessoa às funções para as quais ela esta habilitada.

Será possível empregar todas as pessoas de tal forma que cada pessoa desempenhe a função para a qual esta qualificada? Se a resposta é não, qual é o maior número de vagas que podem ser preenchidas?

21. Dois jogadores X e Y se alternam escolhendo vértices de um grafo bipartido. Primeiro X escolhe um vértice v0, a seguir Y escolhe um vértice v1 adjacente v0 e assim por diante.

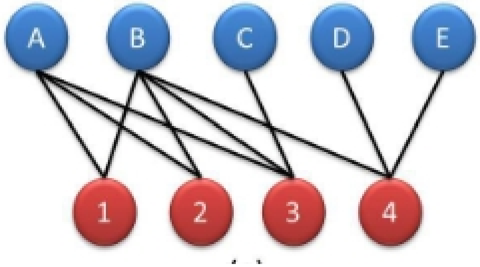
A escolha de X é sempre por um vértice distinto dos escolhidos anteriormente e sempre na mesma partição. Ex: se X iniciou na partição P1 ele sempre fará escolhas nesta parição.

A escolha Y é sempre um vértice adjacente a vi e distinto dos escolhidos anteriormente. Y sempre na mesma partição. Ex: se Y iniciou na partição P2 ele sempre fará escolhas nesta parição.

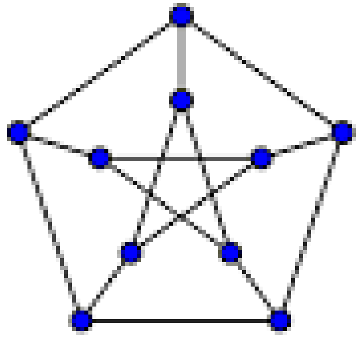
O jogador que não puder fazer uma escolha de vértice na sua vez, perde o jogo.
Quais as condições para que Y sempre vença?
Quais as condições para X sempre vencer?

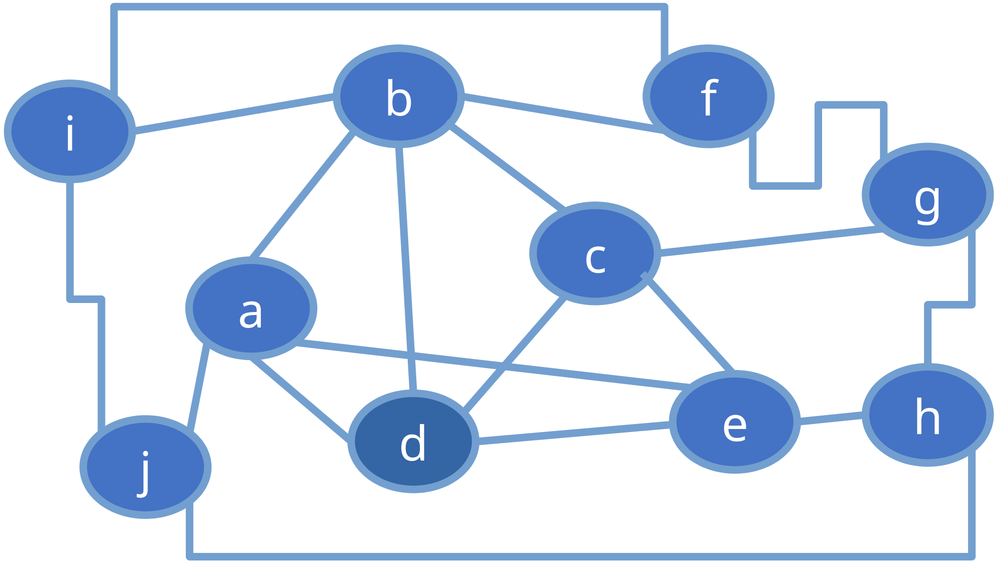
22. Seja G(V,A) um grafo bipartido completo com:
1. |V|=|V1|+|V2| = n vértices;
2. |V1| = |V2|.
Prove que G tem a seguinte quantidade de arestas: $n^2/4$

23. No grafo abaixo, as letras identificam autores e os números identificam artigos científicos. Realize as projeções ponderadas sobre as partições envolvidas e por meio da análise da(s) projeção(ões). Identifique qual é o autor que apresenta a maior intermediação com os demais autores

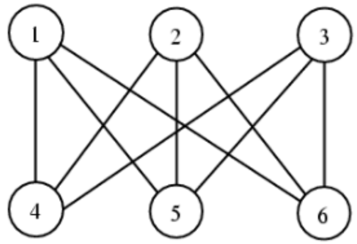


24. Os grafos abaixo são isomorfos?

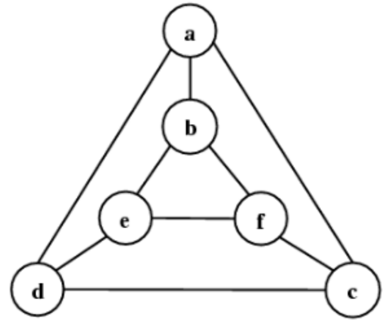




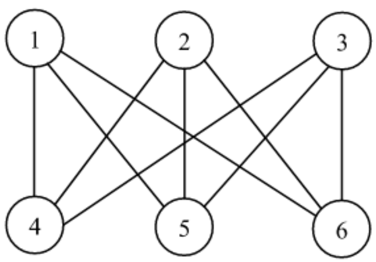
25. Os grafos abaixo são isomorfos?



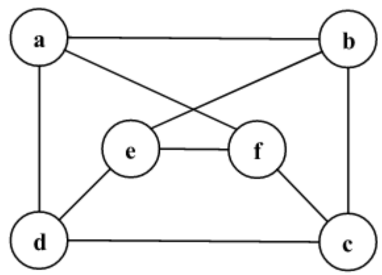
G



G’

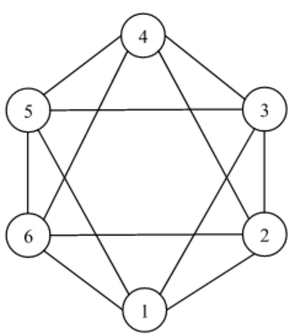


G

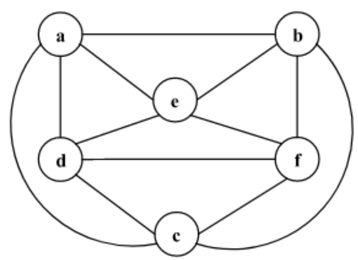


G'

V(G)	V(G')
1	a
2	e
3	c
4	b
5	d
6	f



G



G'

V(G)	V(G')
1	d
2	a
3	e
4	b
5	f
6	c

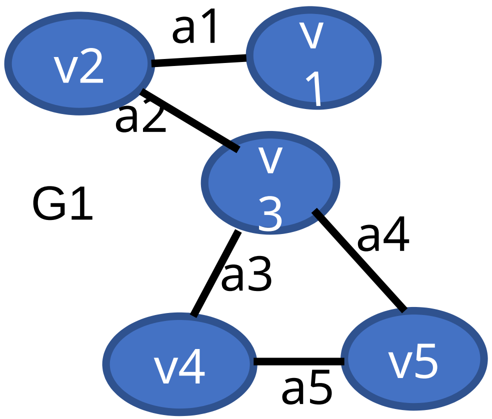
26. Dados P e A1 forneça o grafo G2, isomorfo a G1, por meio da matriz de permutação *P* e desenhe o grafo G2.

A1:

	v1	v2	v3	v4	v5
v1	0	1	0	0	0
v2	1	0	1	0	0
v3	0	1	0	1	1
v4	0	0	1	0	1
v5	0	0	1	1	0

P:

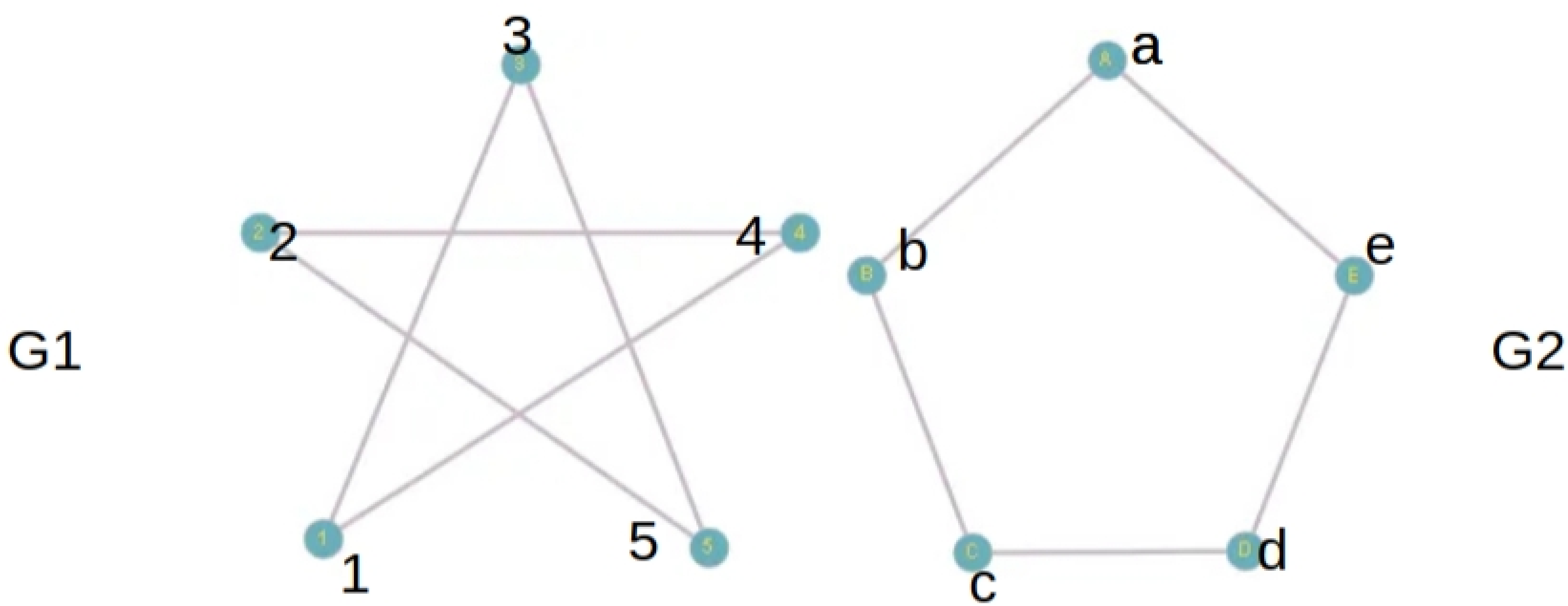
	a	b	c	d	e
v1	0	0	0	1	0
v2	0	0	0	0	1
v3	0	0	1	0	0
v4	0	1	0	0	0
v5	1	0	0	0	0



G1

27. Sejam G1 e G2, proponha uma permutação e verifique o isomorfismo pelo uso da matriz de permutação?

Exiba as matrizes de adjacências.



28. Avalie o isomorfismo entre XY e XZ, teste inicialmente por meio dos os autovalores das matrizes usando Python (numpy):

X

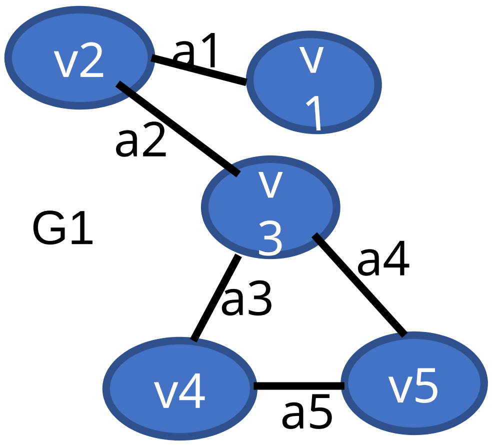
	v1	v2	v3	v4	v5
v1	0	1	0	0	0
v2	1	0	1	0	0
v3	0	1	0	1	1
v4	0	0	1	0	1
v5	0	0	1	1	0

Y

	a	b	c	d	e
a	0	1	1	0	0
b	1	0	1	0	0
c	1	1	0	1	0
d	0	0	1	0	1
e	0	0	0	1	0

Z

	a	b	c	d	e
v1	0	1	0	0	1
v2	1	0	1	0	0
v3	0	1	0	1	1
v4	0	0	1	0	1
v5	0	0	1	1	0



29. Discuta as complexidades de espaço das representações computacionais:

Matriz de adjacência
Matriz de incidência
Lista de adjacências