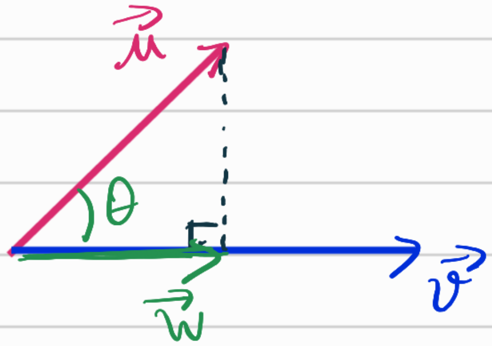
Projeção de um vetor

Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ e θ o ângulo por eles formado. Queremos calcular a projeção $\vec{w}$ de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, como nas figuras



1ª figura:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{w}|}{|\vec{u}|}$$

2ª figura

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{|\vec{w}|}{|\vec{u}|}$$

$$-\cos\theta = \frac{|\vec{w}|}{|\vec{u}|}$$

Logo, temos que

$$|\cos\theta| = \frac{|\vec{w}|}{|\vec{u}|}$$

$$\Rightarrow |\vec{w}| = |\vec{u}|\,|\cos\theta| = |\vec{u}| \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{w}| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}}$$

Como $\vec{w}$ e $\vec{v}$ são colineares, podemos tomar $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{w} = k\vec{v}$$

$$\Rightarrow |\vec{w}| = |k|\,|\vec{v}|$$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|} = |k|\,|\vec{v}|$$

$$\Rightarrow |k| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|^2}.$$

Observe ainda que

$$k > 0 \iff \cos\theta > 0 \iff \vec{u}\cdot\vec{v} > 0$$

Portanto, a projeção $\vec{w}$ de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ é dada por

$$\vec{w} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\vec{v}$$

ou

$$\boxed{\operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\right)\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}$$

Exemplo: Determine a projeção de $\vec{u} = (2,3,4)$ sobre $\vec{v} = (1,-1,0)$.

Temos

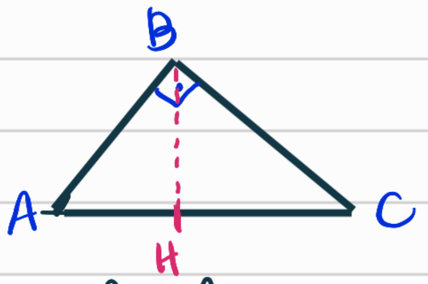
$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \right) \vec{v}$$

$$= \frac{2-3+0}{1+1+0} (1,-1,0)$$

$$= -\frac{1}{2} (1,-1,0)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

Exemplo: Já mostramos que o triângulo com vértices $A(5,1,5)$, $B(4,3,2)$ e $C(-3,-2,1)$ é retângulo em B.



(a) Calcule a projeção do vetor $\vec{BA}$ sobre a hipotenusa $\vec{AC}$.

(b) Determine H.

(a) $\overrightarrow{BA} = A - B = (5-4, 1-3, 5-2) = (1, -2, 3)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (-3-5, -2-1, 1-5) = (-8, -3, -4)$

$$\text{proj}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{BA} = \left(\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}} \right) \overrightarrow{AC}$$

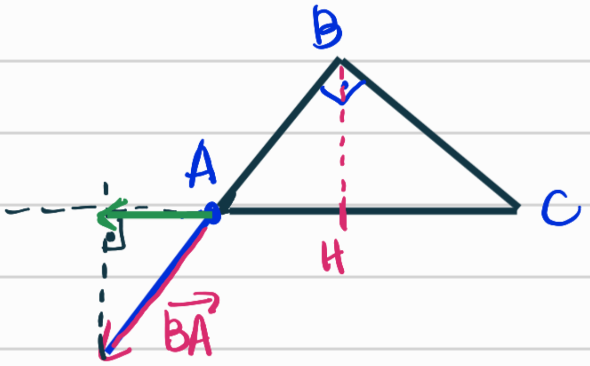
$$= \frac{-8+6-12}{64+9+16} (-8, -3, -4)$$

$$= -\frac{14}{89} (-8, -3, -4)$$

(b) Temos que

$$\overrightarrow{AH} = -\text{proj}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{BA},$$

pois



o vetor verde é a projeção de $\overrightarrow{BA}$ sobre $\overrightarrow{AC}$.

Logo, sendo $H(a, b, c)$,

$$\overrightarrow{AH} = \frac{14}{89} (-8, -3, -4)$$

$$\Rightarrow H - A = (a-5, b-1, c-5) = \frac{14}{89} (-8, -3, -4)$$

$$\Rightarrow (a-5, b-1, c-5) = \left(-\frac{112}{89}, \frac{-42}{89}, \frac{-56}{89}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-5 = -\dfrac{119}{89} \\ b-1 = \dfrac{-42}{89} \\ c-5 = \dfrac{-56}{89} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{119}{89} + 5 = \frac{-119 + 445}{89} = \frac{326}{89}$$

$$b = \frac{-42}{89} + 1 = \frac{-42+89}{89} = \frac{47}{89}$$

$$c = \frac{-56}{89} + 5 = \frac{-56+445}{89} = \frac{389}{89}$$

Portanto, o ponto H é

$$H\left(\frac{326}{89}, \frac{47}{89}, \frac{389}{89}\right).$$

OBS Se $\vec{v}$ é unitário, temos

$$\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v} = (\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{v}$$

$$\boxed{\text{proj}_{\vec{v}}\,\vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{v}}$$

Considerando os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ da base canônica e $\vec{u} = (x, y, z)$

- $\text{proj}_{\vec{i}}\,\vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{i})\,\vec{i}$

$$= [(x,y,z)\,(1,0,0)]\,\vec{i}$$

$$= (x+0+0)\,\vec{i}$$

$$= x\vec{i}$$

Analogamente,

$$\text{proj}_{\vec{j}}\,\vec{u} = y\vec{j}$$

e

$$\text{proj}_{\vec{k}}\,\vec{u} = z\vec{k}.$$