Derivada e Diferencial

• **Definição 1:** Seja $y = f(x)$ uma curva qualquer e $P(x_0, f(x_0))$ um ponto sobre ela. A inclinação da reta tangente à curva em P é dada por

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Derivada:

• **Definição 2:** A derivada de uma função $f(x)$ num ponto x_0, denotada por $f'(x)$ é definida pelo limite

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

temos que $x_1 = x_0 + \Delta x$, podemos escrever tbm como:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

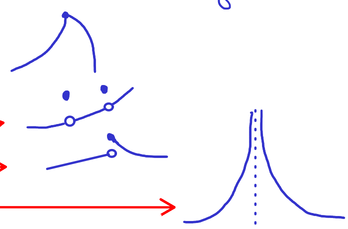
Definição 3: A derivada de uma função $y = f(x)$ é denotada por $f'(x)$ tq. $x \in Df$ é definido por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Diferenciabilidade

Os pontos de diferenciabilidade de f são aqueles em que a curva $f(x)$ tem uma tangente. E os pontos de não diferenciabilidade são aqueles onde a curva não tem reta tangente.

• Ponto Anguloso →
• Descontinuidade;
  • Removível; →
  • Salto; →
  • Essencial. →



• Tangência Vertical

$$\rightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \pm\infty$$

Teorema: Se uma função $y = f(x)$ é derivável em $x = a$, então é contínua em $x = a$.

Regras de Derivação:

seja $K \in \mathbb{R}$, $u = u(x)$ e $v = v(x)$:

1. $(K)' = 0$
2. $(u^n)' = n u^{n-1} u'$
3. $(Kv)' = K v'$
4. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
5. $(u \cdot v)' = u v' + u' \cdot v$
6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$
7. $(a^u)' = u' \cdot a^u \ln(a)$
8. $(e^u)' = u' e^u$
9. $(\mathrm{sen}(u))' = u' \cos(u)$
10. $(\cos(u))' = -u' \mathrm{sen}(u)$
11. $(\mathrm{tg}(u))' = u' \sec^2(u)$
12. $(\mathrm{cotg}(u))' = -u' \mathrm{cossec}^2(u)$
13. $(\sec(u))' = u' \sec(u) \cdot \mathrm{tg}(u)$
14. $(\mathrm{cossec}(u))' = -u' \mathrm{cossec}(u) \mathrm{cotg}(u)$
15. $(\mathrm{senh}(u))' = u' \cosh(u)$
16. $(\cosh(u))' = u' \mathrm{senh}(u)$
17. $(\mathrm{tgh}(u))' = u' \mathrm{sech}^2(u)$
18. $(\mathrm{cotgh}(u))' = -u' \mathrm{cossech}^2(u)$
19. $(\mathrm{sech}(u))' = -u' \mathrm{sech}(u) \cdot \mathrm{tgh}(u)$
20. $(\mathrm{cossech}(u))' = -u' \mathrm{cossech}(u) \cdot \mathrm{cotg}(u)$
21. $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$
22. $(\log_x u)' = \frac{u'}{u} \log_x e$
23. $(\mathrm{arcsen}(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
24. $(\arccos(u))' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
25. $(\mathrm{arctg}(u))' = \frac{u'}{1 + u^2}$
26. $(\mathrm{arccotg}(u))' = -\frac{u'}{1 + u^2}$
27. $(\mathrm{arcsec}(u))' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$
28. $(\mathrm{arccsc}(u))' = -\frac{u'}{|u|\sqrt{u^2 - 1}}$

f é derivável em x_0:

• $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Regra da Cadeia:

• $y = (g(x))^n \Rightarrow y' = n\,(g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$

• $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Derivada Implícita

• Aplique a derivada em ambos os lados da eq:

$$\frac{d}{d*}(\text{expressão}) = \frac{d}{d*}(\text{expressão})$$

$*$ variável da derivação.

• isole a expressão: $\frac{d\square}{d*} = \left(\text{expressão derivada que pode ou não conter } \square e *\right)$

$\square \rightarrow$ função $\rightarrow \square(*)$ „

Derivada a Função Inversa:

• $y = f(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = (\text{expressão})$; $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \Rightarrow \frac{1}{(\text{expressa})} \rightarrow$ trocando x por y.

Derivada de Ordem Superior:

• $y^{(n)} = f^{(n)}(x) \rightarrow \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n}{dx^n}[f(x)]$

Diferenciais e Aproximação Linear local

• **Incrementos:** Seja $y = f(x)$ uma função sempre dá para considerar uma variação na variável independente x. Se x varia de x_0 até x_1, definimos $\Delta x = x_1 - x_0$.

Sendo assim, temos uma variação $\Delta y = y_0 - y_1 = f(x_0) - f(x_1)$, sendo assim $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

• Diferenciais:

• $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$; • Δy representa a variação ao longo da curva $y = f(x)$, quando são percorridos Δx unidades na direção x.

• dy representa a variação ao longo da reta tangente $y = f(x)$, quando são percorridos dx unidades na direção de x.

• $dy = f'(x).dx$ • $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Aproximação Linear Local:

número que sabemos

• $\underbrace{f(x_0 + \Delta x)}_{\text{número que queremos encontrar por aproximação}} \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

diferença do numero que sabemos para o que queremos saber

• Obs: Graus ou radianos tem que ficar esperto!

Interpretação Mecânica da derivada ⚠

• Velocidade: Supondo que um corpo se move em linha reta e que $s(t)$ representa o espaço percorrido pelo móvel ate o instante t. Então no intervalo entre t e $t + \Delta t$, o corpo sofre um deslocamento $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$. Definimos velocidade média como:

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_m = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

• A v_m não nos diz nada a respeito da velocidade instantânea isto é, a velocidade em um instante t devemos fazer $\Delta t \to 0$, assim a velocidade no instante t é o limite das velocidades médias.

$$v = v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \to v = s'(t)$$

Aceleração:

Aceleração é a variação da velocidade num certo intervalo de tempo gasto. Por raciocínio analogo ao anterior segue que a aceleração média no intervalo t ate $t + \Delta t$ é.

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_m = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

• Para obter a aceleração do corpo no instante t tomamos sua aceleração media com $\Delta t \to 0$:

$$a = a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} a_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \Rightarrow a = v'(t) = s''(t)$$

Taxa de Variação:

Sabemos que a velocidade é a razão da variação do deslocamento por unidade de variação de tempo. Então dizemos que $s'(t)$ é a taxa de variação da função $s(t)$ por unidade de variação de t. Analogamente dizemos que a aceleração $a(t) = v'(t)$ representa a taxa de variação da velocidade $v(t)$ por unidade de tempo. Toda derivada pode ser interpretada como uma taxa de variação. Dada uma função $y = f(x)$, quando a variável independente varia de x a $x + \Delta x$, a correspondente variação de y será $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Assim a taxa de variação média de y em relação a x é dada por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

• A taxa de variação instantânea é definida como:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$