Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Séries de Funções

Séries de Potências

Intervalo de Convergência

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 do dia 09 de outubro de 2024.

UDESC

Séries de Funções

Séries de Funções são séries cujos termos gerais também dependem de uma variável real x, ou seja, são da forma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3\ (x) + u_4\ (x) + u_5\ (x) + \cdots +$$

em que $u_n(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, são funções reais de uma variável real x.

Em geral, o índice (n) de uma série de funções sempre inicia em 0, para possibilitar a soma de algum termo "constante" conforme veremos no exemplo a seguir:

Exemplo: Um exemplo de Série de funções é dada por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx^n)}{(n+1)^4} = 1 + \frac{\cos(x)}{2^4} + \frac{\cos(2x^2)}{3^4} + \frac{\cos(3x^3)}{4^4} + \frac{\cos(4x^4)}{5^4} + \cdots +$$

Ao estudarmos séries de funções, a questão consiste em determinar para quais valores de x a série converge.

Tal conjunto de valores de x para o qual a série de funções converge é chamado de Intervalo de Convergência da Série.

Séries de Funções e Séries de Potências

Para obter o intervalo de convergência de uma série de funções aplicamos os critérios estudados anteriormente.

Exemplo: A série do exemplo anterior é tal que, ao analisarmos sua convergência absoluta, obtemos

$$|u_n(x)| = \left|\frac{\cos(nx^n)}{(n+1)^4}\right| = \frac{|\cos(nx^n)|}{(n+1)^4} \leq \frac{1}{(n+1)^4} \leq \frac{1}{n^4}$$

pois

$$|\cos(nx^n)| \leq 1$$

e

$$n+1 \geq n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}.$$

Portanto, a série **converge absolutamente** para todos os valores reais de x, visto que

$|u_n(x)|$ é menor do que uma p −Série convergente (com $p = 4 > 1$).

Assim, seu intervalo de convergência é

$$I = (-\infty, +\infty).$$

Séries de Potências

Quando $u_n(x) = c_n(x-a)^n$ a série de funções é chamada de Séries de Potências:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots +$$

em que $a \in \mathbb{R}$ é dito centro da Série de Potências e c_n são ditos coeficientes da série.

Exercício 1: Determine o intervalo de convergência da Série de Potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3x-5)^n}{2^{3n-1}}$$

Exercício 2: Determine o intervalo de convergência da Série de Potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(7x+4)^n}{3^{2n}(n+1)}.$$

Série de Taylor

Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função infinitamente diferenciável e $a \in \mathbb{R}$ um valor fixado.

Vamos obter uma Série de Potências, com centro em a, que converge para f, pelo menos em um certo intervalo que contém a, ou seja, tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

para $x \in I$, em que I representa o intervalo de convergência da Série (que já sabemos obter), centrado em a e que possui um dos formatos:

$$I = (a-R, a+R), \quad I = [a-R, a+R], \quad I = (a-R, a+R], \quad ou \quad I = [a-R, a+R).$$

Para obter tal Série de Potências, basta determinar os coeficientes c_n (num processo que se assemelha ao efetuado em ALI para obter os coeficientes de uma combinação linear de polinômios).

Para tal, precisamos supor que possamos derivar termo a termos a igualdade acima (veja que isso faz sentido, pois o lado direito é uma soma de polinômios, que é derivável):

- Para obter c_0 basta aplicar $x = a$ em ambos os lados da igualdade acima:

$$f(a) = c_0 + c_1(a-a) + c_2(a-a)^2 + c_3(a-a)^3 + \cdots + c_n(a-a)^n + \cdots$$

ou seja

$$f(a) = c_0 + 0 = c_0 \qquad \text{e} \qquad c_0 = f(a)$$

Série de Taylor

- Para obter c_1 primeiro derivamos a igualdade anterior em ambos os lados

$$f'(x) = c_1.1 + 2c_2(x-a)^1 + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 \ldots + nc_n(x-a)^{n-1} + \cdots$$

e então aplicamos $x = a$ em ambos os lados:

$$f'(a) = c_1 + 0 = c_1 \qquad \text{e} \qquad c_1 = f'(a)$$

- Para obter c_2 derivamos novamente:

$$f''(x) = 2c_2.1 + 3.2c_3(x-a)^1 + 4.3c_4(x-a)^2 \ldots + n.(n-1)c_n(x-a)^{n-2} + \cdots$$

e então aplicamos $x = a$ em ambos os lados:

$$f''(a) = 2c_2 + 0 = 2c_2 \qquad \text{e} \qquad c_2 = \frac{f''(a)}{2}$$

- Para obter c_3 derivamos novamente:

$$f'''(x) = 3.2.1c_3 .1 + 4.3.2c_4(x-a)^1 \ldots + n.(n-1).(n-2)c_n(x-a)^{n-3} + \cdots$$

e então aplicamos $x = a$ em ambos os lados:

$$f'''(a) = 3.2.1c_3 + 0 = 3.2.1.c_3 \qquad \text{e} \qquad c_3 = \frac{f'''(a)}{3.2.1}$$

- Para obter c_4 repetimos o processo, derivando

$$f''''(x) = 4.3.2.1c_4 + \cdots + n.(n-1).(n-2)(n-3)c_n(x-a)^{n-4} + \cdots$$

e então aplicamos $x = a$ em ambos os lados:

$$f''''(a) = 4.3.2.1c_4 + 0 = 4.3.2.1.c_4 \qquad \text{e} \qquad c_4 = \frac{f''''(a)}{4.3.2.1}$$

Série de Taylor

- Repetindo sucessivamente o raciocínio, derivando sucessivamente e aplicando a derivada em $x = a$, obtemos que

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n.(n-1).(n-2).\ldots.4.3.2.1} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

em que $f^{(n)}$ representa a n-ésima derivada de f.

Veja que o fatorial está presente no denominador mesmo em $c_0 = f(a) = \frac{f(a)}{1} = \frac{f(a)}{0!}$ (aqui convencionamos que $f^{(0)} = f$) e em $c_1 = f'(a) = \frac{f'(a)}{1} = \frac{f'(a)}{1!}$.

Portanto, obtemos que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Tal série é chamada de **Série de Taylor de f**.

Série de MacLaurin

Já a Série de MacLaurin de f é um caso particular da Série de Taylor, obtida tomando-se o centro como $a = 0$. Com isso, temos que

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Como $(x - a) = (x - 0) = x$ obtemos que a Série de MacLaurin de f é dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots$$

Note que, na linguagem de Álgebra Linear, a igualdade acima indica que f pode ser escrita como uma combinação linear infinita dos polinômios $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\}$ que consiste em uma "*base*" para o espaço vetorial das funções infinitamente deriváveis!!!

Observação:

- A utilidade das Séries de Taylor e de MacLaurin consiste em escrever uma função que é essencialmente "mais complicada" como uma soma (infinita) de funções polinomiais.
- Veja que a classe de funções polinomiais são as funções "mais simples" possíveis de serem derivadas e integradas (por exemplo) e dependem apenas das quatro operações aritméticas básicas!

Exemplo

Exercício 3) Determine a série de MacLaurin para:

$$f(x) = e^x.$$

Exercício 4) Determine o intervalo de convergência da série de MacLaurin de $f(x) = e^x$.

Exercício 5) Determine o valor de convergência das seguintes séries numéricas;

$$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \qquad b)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \qquad c)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n!}$$

Exercício 6) Determine a série de MacLaurin para:

$$a)\ f(x) = x^{10} e^{-3x^{17}}$$

$$b)\ f(x) = \int x^{10} e^{-3x^{17}} dx$$

$$c)\ f(x) = \frac{1}{1+x}$$

Exemplo resolvido

Exemplo 1) Determine o intervalo de convergência da Série de Potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(5x-4)^n}{2^{3n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{(5x-4)}{2^4} + \frac{(5x-4)^2}{2^7} + \frac{(5x-4)^3}{2^{10}} + \cdots +$$

Solução: Nota-se que a série de potências dada é também uma série geométrica, de razão

$$q = \frac{5x-4}{2^3} = \frac{5x-4}{8}.$$

Pelo critério das séries geométricas, temos que a série converge se, e somente se,

$$|q| < 1,$$

ou seja:

$$\frac{|5x-4|}{8} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |5x-4| < 8 \quad \Leftrightarrow \quad -8 < 5x-4 < 8 \quad \Leftrightarrow \quad -4 < 5x < 12.$$

Logo

$$-\frac{4}{5} < x < \frac{12}{5}.$$

Com isso, temos que o intervalo de convergência da Série dada é $I = \left(-\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

Além disso, nota-se que o centro da série de potências dada é $a = \frac{4}{5}$, que consiste no ponto médio do intervalo de convergência obtido.

Intervalo de convergência – exemplo resolvido

Exemplo 2) Determine o intervalo de convergência da Série de Potências:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(9x-7)^n}{2^{3n}(n+1)} = 1 + \frac{(9x-7)}{2^3.2} + \frac{(9x-7)^2}{2^6.3} + \frac{(9x-7)^3}{2^9.4} + \cdots +$$

Solução: Para determinar os valores de x para os quais a série converge, utilizamos o Critério da Razão para a convergência absoluta:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(9x-7)^{n+1}}{2^{3(n+1)}(n+1+1)} \cdot \frac{2^{3n}(n+1)}{(9x-7)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(9x-7)^n(9x-7)}{2^{3n}.2^3\,(n+2)} \cdot \frac{2^{3n}(n+1)}{(9x-7)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(9x-7)(n+1)}{8(n+2)}\right|$$

$$= \frac{|9x-7|}{8} \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{|9x-7|}{8}.1 = \frac{|9x-7|}{8}.$$

O critério da Razão indica que a série converge se $L < 1$. Com isso, temos que

$$\frac{|9x-7|}{8} < 1 \quad \Rightarrow \quad |9x-7| < 8 \quad \Rightarrow \quad -8 < 9x-7 < 8.$$

Intervalo de convergência – exemplo resolvido

Ou seja,

$$-1 < 9x < 15 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{-1}{9} < x < \frac{5}{3}.$$

Assim, sabemos que a série de potências converge (absolutamente) no intervalo acima.
No entanto, o Critério da Razão era inconclusivo quando $L = 1$.
Por isso, precisamos aplicar novos testes de convergência/divergência para os valores de x que fornecem $L = 1$.
Tais valores consistem justamente nos extremos do intervalo acima.
Por isso, tal procedimento é chamado de **Teste nos Extremos**:

- Para $x = \frac{-1}{9}$ temos que a série de potências é tal que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(9.\frac{-1}{9} - 7)^n}{2^{3n}(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1-7)^n}{(2^3)^n(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-8)^n}{8^n(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{8^n(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

que é a série harmônica alternada, que converge por Leibnitz. Portanto, $x = \frac{-1}{9}$ pertence ao intervalo de convergência.

- Para $x = \frac{5}{3}$ temos que a série de potências é tal que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(9.\frac{5}{3} - 7)^n}{2^{3n}(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(15-7)^n}{(2^3)^n(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8^n}{8^n(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

Intervalo de convergência – exemplo resolvido

que corresponde à Série Harmônica, que sabemos que é divergente.

Logo, $x = \frac{5}{3}$ não pertence ao intervalo de convergência.

Portanto, o intervalo de convergência da série é dado por $I = \left[\frac{-1}{9}, \frac{5}{3}\right[$.

Observação: Temos que, para $x \in \left[\frac{-1}{9}, \frac{5}{3}\right[$ existe f tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(9x-7)^n}{2^{3n}(n+1)} = 1 + \frac{(9x-7)}{2^3.2} + \frac{(9x-7)^2}{2^6.3} + \frac{(9x-7)^3}{2^9.4} + \cdots +$$

ou seja, a série converge para f.

Além disso, o termo geral da série pode ser escrito como

$$u_n(x) = \frac{\left(9\left(x-\frac{7}{9}\right)\right)^n}{2^{3n}(n+1)} = \frac{9^n}{2^{3n}(n+1)} \cdot \left(x - \frac{7}{9}\right)^n$$

Isso significa que a série é uma Série de Potências cujos coeficientes são $c_n = \frac{9^n}{2^{3n}(n+1)}$.

e cujo centro é

$$a = \frac{7}{9}.$$

Perceba que a é o ponto médio do intervalo de convergência $I = \left[\frac{-1}{9}, \frac{5}{3}\right[$.

Exemplo

Exemplo 3) Determine a série de MacLaurin para as seguintes funções:

$a)\ f(x) = e^x$

Solução: Para expandir a função exponencial em Série de MacLaurin, basta obter os coeficientes c_n. Como a função exponencial é tal que

$$f^{(n)}(x) = e^x \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

temos que

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{e^0}{n!} = \frac{1}{n!}$$

Com isso temos que

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

Agora, vamos determinar o intervalo de convergência da série de e^x. Pelo Critério da Razão para a convergência absoluta:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} . \frac{n!}{x^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{(n+1).n!} x^n . x . \frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x}{n+1}\right| = |x| . \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = |x| . 0 = 0.$$

Como $L = 0 < 1$ é válido para todo x, o intervalo de convergência consiste em $I = \mathbb{R}$.

Exemplo

Portanto, obtemos que

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

é válido para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, tomando $x = 1$, temos que

$$e^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}1^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}.1 + \frac{1}{3!}.1 + \frac{1}{4!}.1 + \frac{1}{5!}.1 + \cdots + \frac{1}{n!}.1 + \cdots$$

Se somarmos apenas os primeiros sete termos dessa série, obtemos que

$$e = e^1 \approx \sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2{,}718055556$$

Compare o valor aproximado acima com o valor fornecido por uma calculadora e veja que já temos uma precisão de 3 casas decimais. Podemos melhorar essa precisão somando cada vez mais termos da série obtida.

O desenvolvimento de MacLaurin para e^x que obtivemos acima é justamente a "fórmula" matemática que está programada na memória de uma calculadora. Pense que na época em que o conceito de MacLaurin foi desenvolvido ainda não existiam ferramentas tecnológicas que auxiliasse a obter tal valor.

Exemplo

$b)\ f(x) = \int x^2 e^{5x^7} dx$

Solução: Veja que não é simples obter o resultado de tal integral pelos métodos de CDI-1. Vamos então aplicar a Teoria de Séries para obter essa primitiva como uma Série de MacLaurin. Pelo exemplo anterior, podemos escrever

$$e^q = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} q^n$$

para qualquer q real. Tomando $q = 5x^7$ obtemos que

$$e^{5x^7} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (5x^7)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} 5^n x^{7n}$$

Multiplicando ambos os lados por x^2 e usando propriedades de potenciação, obtemos

$$x^2 e^{5x^7} = x^2 . \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} 5^n x^{7n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^2 . \frac{1}{n!} 5^n x^{7n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} 5^n x^{7n+2}$$

Exemplo

Agora, basta integrar em ambos os lados. Como a integral de uma soma (mesmo infinita) de polinômio é a soma das integrais dos polinômios, encontramos que

$$f(x) = \int x^2 e^{5x^7}\,dx = \int \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} 5^n x^{7n+2}\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int \frac{1}{n!} 5^n x^{7n+2} dx = \quad k + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n x^{7n+3}}{n!\,(7n+3)}.$$

onde k é a constante da integração indefinida.

$c)$ $f(x) = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

Solução: Vamos obter os coeficientes da Série de MacLaurin de f:

$$c_0 = f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{-1}{1!} = -1$$

Exemplo

$$f''(x) = \frac{+2.1}{(1+x)^3} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{+2}{2!} = 1$$

$$f'''(x) = \frac{(-3).2.1}{(1+x)^4} \quad \Rightarrow \quad c_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{-3.2.1}{3!} = -1$$

$$f''''(x) = \frac{+4.3.2.1}{(1+x)^5} \quad \Rightarrow \quad c_4 = \frac{f''''(0)}{4!} = \frac{+4.3.2.1}{4!} = 1$$

Veja que obtivemos um padrão:

$$c_n = \begin{cases} 1, \text{se } n \text{ é par} \\ -1, \text{se } n \text{ é } ímpar \end{cases},$$

que pode ser escrito em termos de uma alternância de sinal como $c_n = (-1)^n$ e portanto

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

que é uma Série Alternada! Fica como exercício (a quem se interessar) obter o intervalo de convergência dessa série como $x \in (-1,1)$.