LMA0001 – Lógica Matemática
Aula 15
Semântica da Lógica de Predicados

Karina Girardi Roggia
karina.roggia@udesc.br

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

2021

Exemplo 2: assinatura e universo

Agora veremos um exemplo de sistema com conjunto universo infinito.

$\Sigma = (\mathbf{Con}, \mathbf{Fun}, \mathbf{Pred})$
$\mathbf{Con} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$
$\mathbf{Fun} = \{\mathtt{soma}, \mathtt{mult}\}$
$\mathbf{Pred} = \{\mathtt{Par}^1, \mathtt{Impar}^1, \mathtt{Menor}^2, \mathtt{Div}^3\}$

$\mathrm{D} = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$

Note que **não é possível** apresentar todas as fórmulas fechadas, pois são infinitas ...

$\mathcal{D} = (\mathbf{Con}_{\mathrm{D}}, \mathbf{Fun}_{\mathrm{D}}, \mathbf{Pred}_{\mathrm{D}})$

$\mathrm{Con}_{\mathrm{D}} = \quad \mathrm{id}, \qquad$ onde $\mathrm{id}(x) = x$

$$\mathcal{D} = (\mathbf{Con}_\mathrm{D}, \mathbf{Fun}_\mathrm{D}, \mathbf{Pred}_\mathrm{D})$$

$$\mathrm{Con}_\mathrm{D} = \quad \mathrm{id}, \qquad \text{onde } \mathrm{id}(x) = x$$

$$\mathrm{Fun}_\mathrm{D} = \{ \quad \mathtt{soma} \mapsto +, \quad \mathtt{mult} \mapsto \times \quad \}$$

Exemplo 2: estrutura

$$\mathcal{D} = (\mathbf{Con}_{\mathrm{D}}, \mathbf{Fun}_{\mathrm{D}}, \mathbf{Pred}_{\mathrm{D}})$$

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{Con}_{\mathrm{D}} = & \mathrm{id}, & \text{onde } \mathrm{id}(x) = x & \\
\mathrm{Fun}_{\mathrm{D}} = \{ & \mathtt{soma} \mapsto +, & \mathtt{mult} \mapsto \times & \} \\
\mathrm{Pred}_{\mathrm{D}} = \{ & \mathtt{Par}^{1} & \mapsto \{0, 2, 4, 6, \ldots\}, &
\end{array}$$

$\mathcal{D} = (\mathbf{Con}_\mathrm{D}, \mathbf{Fun}_\mathrm{D}, \mathbf{Pred}_\mathrm{D})$

$$
\begin{array}{llll}
\mathrm{Con}_\mathrm{D} = & \mathtt{id}, & \text{onde } \mathtt{id}(x) = x & \\
\mathrm{Fun}_\mathrm{D} = \{ & \mathtt{soma} \mapsto +, & \mathtt{mult} \mapsto \times & \} \\
\mathrm{Pred}_\mathrm{D} = \{ & \mathtt{Par}^1 & \mapsto \{0, 2, 4, 6, \ldots\}, & \\
 & \mathtt{Impar}^1 & \mapsto \{1, 3, 5, 7, \ldots\}, &
\end{array}
$$

Exemplo 2: estrutura

$\mathcal{D} = (\mathbf{Con}_{\mathrm{D}}, \mathbf{Fun}_{\mathrm{D}}, \mathbf{Pred}_{\mathrm{D}})$

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{Con}_{\mathrm{D}} = & \mathtt{id}, & \text{onde } \mathtt{id}(x) = x \\
\mathrm{Fun}_{\mathrm{D}} = \{ & \mathtt{soma} \mapsto +, & \mathtt{mult} \mapsto \times \quad \} \\
\mathrm{Pred}_{\mathrm{D}} = \{ & \mathtt{Par}^1 & \mapsto \{0, 2, 4, 6, \ldots\}, \\
 & \mathtt{Impar}^1 & \mapsto \{1, 3, 5, 7, \ldots\}, \\
 & \mathtt{Menor}^2 & \mapsto \{(0,1), (0,2), (0,3), \ldots, (1,2), (1,3), (1,4), \ldots, \\
 & & \quad (2,3), (2,4), (2,5), \ldots, (3,4), (3,5), (3,6), \ldots\}
\end{array}$$

$$\mathcal{D} = (\mathbf{Con}_{\mathrm{D}}, \mathbf{Fun}_{\mathrm{D}}, \mathbf{Pred}_{\mathrm{D}})$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Con}_{\mathrm{D}} = \quad & \mathtt{id}, && \text{onde } \mathtt{id}(x) = x \\
\mathrm{Fun}_{\mathrm{D}} = \{ \quad & \mathtt{soma} \mapsto +, && \mathtt{mult} \mapsto \times \quad \} \\
\mathrm{Pred}_{\mathrm{D}} = \{ \quad & \mathtt{Par}^1 && \mapsto \{0, 2, 4, 6, \ldots\}, \\
& \mathtt{Impar}^1 && \mapsto \{1, 3, 5, 7, \ldots\}, \\
& \mathtt{Menor}^2 && \mapsto \{(0,1), (0,2), (0,3), \ldots, (1,2), (1,3), (1,4), \ldots, \\
& && \quad (2,3), (2,4), (2,5), \ldots, (3,4), (3,5), (3,6), \ldots\} \\
& \mathtt{Div}^3 && \mapsto \{(0,1,0), (0,2,0), (0,3,0), \ldots, (1,1,1), (2,1,2), \\
& && \quad (2,2,1), (3,1,3), (3,3,1), (4,1,4), (4,2,2), \\
& && \quad (4,4,1), (5,1,5), (5,5,1) \ldots\} \qquad \}
\end{aligned}$$

Exemplo 2: considerações sobre operações

Operações **totais** (o resultado é sempre definido para qualquer entrada) podem ser representados usando funções na assinatura.

`soma(4,1)` representa o valor $4 + 1 = 5$
`mult(3,2)` representa o valor $3 \times 2 = 6$

Exemplo 2: considerações sobre operações

Operações **totais** (o resultado é sempre definido para qualquer entrada) podem ser representados usando funções na assinatura.

`soma(4,1)` representa o valor $4 + 1 = 5$
`mult(3,2)` representa o valor $3 \times 2 = 6$

Operações **parciais** (onde o resultado pode ser indefinido para algumas entradas) não podem ser representadas por funções na assinatura.

Contudo, elas podem ser representadas por predicados onde os dois primeiros números representam a entrada, e o terceiro, a saída.

`Div(6,3,2)` representa a afirmação $6/3 = 2$

Qual a interpretação intuitiva da seguinte fórmula?

$$\exists x. \forall y. (\mathtt{Menor}(x, y))$$

Qual a interpretação intuitiva da seguinte fórmula?

$$\exists x.\forall y.(\texttt{Menor}(x, y))$$

Resposta: "existe um natural menor que todos os naturais."

Qual a interpretação intuitiva da seguinte fórmula?

$$\exists x.\forall y.(\texttt{Menor}(x, y))$$

Resposta: "existe um natural menor que todos os naturais."

Ela é verdadeira ou falsa na estrutura apresentada?

Qual a interpretação intuitiva da seguinte fórmula?

$$\exists x.\forall y.(\mathtt{Menor}(x, y))$$

Resposta: "existe um natural menor que todos os naturais."

Ela é verdadeira ou falsa na estrutura apresentada?

Falsa: zero não é menor que zero.

Qual a interpretação intuitiva da seguinte fórmula?

$$\exists x.\forall y.(\mathtt{Menor}(x, y))$$

Resposta: "existe um natural menor que todos os naturais."

Ela é verdadeira ou falsa na estrutura apresentada?

Falsa: zero não é menor que zero.

E o que podemos dizer sobre a seguinte fórmula?

$$\exists x.\forall y.(\mathtt{Menor}(x, y) \vee x = y)$$

Qual a interpretação intuitiva da seguinte fórmula?

$$\forall x.\exists y.(\mathtt{Menor}(x, y))$$

Algumas sentenças sobre naturais (2)

Qual a interpretação intuitiva da seguinte fórmula?

$$\forall x.\exists y.(\mathtt{Menor}(x, y))$$

Resposta: "para todo natural existe um natural maior."

Algumas sentenças sobre naturais (2)

Qual a interpretação intuitiva da seguinte fórmula?

$$\forall x.\exists y.(\mathtt{Menor}(x, y))$$

Resposta: "para todo natural existe um natural maior."

Ela é verdadeira ou falsa na estrutura apresentada?

Qual a interpretação intuitiva da seguinte fórmula?

$$\forall x.\exists y.(\mathtt{Menor}(x, y))$$

Resposta: "para todo natural existe um natural maior."

Ela é verdadeira ou falsa na estrutura apresentada?

Verdadeira: temos que para o natural x o número $x + 1$ é maior.

Qual a interpretação intuitiva da seguinte fórmula?

$$\forall x.\exists y.(\mathtt{Menor}(x, y))$$

Resposta: "para todo natural existe um natural maior."

Ela é verdadeira ou falsa na estrutura apresentada?

Verdadeira: temos que para o natural x o número $x + 1$ é maior.

E o que podemos dizer sobre a seguinte fórmula?

$$\forall x.\forall y.(\mathtt{Menor}(x, y) \vee (x = y) \vee \mathtt{Menor}(y, x))$$

Como dizemos que, ao multiplicar dois pares, obtemos um par?

Como dizemos que, ao multiplicar dois pares, obtemos um par?

$$\forall x.\forall y.(\mathtt{Par}(x) \land \mathtt{Par}(y) \rightarrow \mathtt{Par}(\mathtt{mult}(x, y)))$$

Como dizemos que, ao multiplicar dois pares, obtemos um par?

$$\forall x.\forall y.(\mathtt{Par}(x) \wedge \mathtt{Par}(y) \rightarrow \mathtt{Par}(\mathtt{mult}(x, y)))$$

E como dizemos que, ao somar dois ímpares, obtemos um ímpar?

Como dizemos que, ao multiplicar dois pares, obtemos um par?

$$\forall x.\forall y.(\mathtt{Par}(x) \wedge \mathtt{Par}(y) \rightarrow \mathtt{Par}(\mathtt{mult}(x,y)))$$

E como dizemos que, ao somar dois ímpares, obtemos um ímpar?

$$\forall x.\forall y.(\mathtt{Impar}(x) \wedge \mathtt{Impar}(y) \rightarrow \mathtt{Impar}(\mathtt{soma}(x,y))\ )$$

Algumas sentenças sobre naturais (4)

E para dizer que divisão por zero é indefinida nos naturais?

E para dizer que divisão por zero é indefinida nos naturais?

$$\forall x . \neg \exists y . (\mathtt{Div}(x, 0, y))$$

E para dizer que divisão por zero é indefinida nos naturais?

$$\forall x.\neg\exists y.(\mathtt{Div}(x, 0, y))$$

E se precisarmos escrever uma fórmula cujo significado é "x é primo". Como escreveríamos?

E para dizer que divisão por zero é indefinida nos naturais?

$$\forall x.\neg\exists y.(\mathtt{Div}(x, 0, y))$$

E se precisarmos escrever uma fórmula cujo significado é "x é primo". Como escreveríamos?

$$\mathtt{Menor}(1, x) \wedge \neg\exists y.(\mathtt{Menor}(1, y) \wedge \mathtt{Menor}(y, x) \wedge \exists w.\mathtt{Div}(x, y, w))$$

Em português: "x é maior que 1, e não há divisor inteiro no intervalo (1,x)"

Considere agora uma estrutura ligeiramente diferente, mas sobre a mesma assinatura.

$\Sigma = (\mathbf{Con}, \mathbf{Fun}, \mathbf{Pred})$
$\mathbf{Con} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$\mathbf{Fun} = \{\mathtt{soma}, \mathtt{mult}\}$
$\mathbf{Pred} = \{\mathtt{Par}^1, \mathtt{Impar}^1, \mathtt{Menor}^2, \mathtt{Div}^3\}$

Uma variação na estrutura

Considere agora uma estrutura ligeiramente diferente, mas sobre a mesma assinatura.

$\Sigma = (\mathbf{Con}, \mathbf{Fun}, \mathbf{Pred})$
$\mathbf{Con} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$\mathbf{Fun} = \{\mathtt{soma}, \mathtt{mult}\}$
$\mathbf{Pred} = \{\mathtt{Par}^1, \mathtt{Impar}^1, \mathtt{Menor}^2, \mathtt{Div}^3\}$

$\mathrm{D}' = \{\spadesuit, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$ (um elemento extra no universo)

Uma variação na estrutura

Considere agora uma estrutura ligeiramente diferente, mas sobre a mesma assinatura.

$\Sigma = (\mathbf{Con}, \mathbf{Fun}, \mathbf{Pred})$
$\mathbf{Con} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$\mathbf{Fun} = \{\mathtt{soma}, \mathtt{mult}\}$
$\mathbf{Pred} = \{\mathtt{Par}^1, \mathtt{Impar}^1, \mathtt{Menor}^2, \mathtt{Div}^3\}$

$\mathrm{D}' = \{\spadesuit, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$ (um elemento extra no universo)

$\mathcal{D}' = (\mathbf{Con}_{\mathrm{D}'}, \mathbf{Fun}_{\mathrm{D}'}, \mathbf{Pred}_{\mathrm{D}'})$, onde $\mathbf{Fun}_{\mathrm{D}'} = \{\mathrm{soma} \mapsto \boxplus, \mathrm{mult} \mapsto \boxtimes\}$.

Uma variação na estrutura

Considere agora uma estrutura ligeiramente diferente, mas sobre a mesma assinatura.

$\Sigma = (\mathbf{Con}, \mathbf{Fun}, \mathbf{Pred})$
$\mathbf{Con} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$\mathbf{Fun} = \{\mathtt{soma}, \mathtt{mult}\}$
$\mathbf{Pred} = \{\mathtt{Par}^1, \mathtt{Impar}^1, \mathtt{Menor}^2, \mathtt{Div}^3\}$

$D' = \{\spadesuit, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$ (um elemento extra no universo)

$\mathcal{D}' = (\mathbf{Con}_{D'}, \mathbf{Fun}_{D'}, \mathbf{Pred}_{D'})$, onde $\mathbf{Fun}_{D'} = \{\mathsf{soma} \mapsto \boxplus, \mathsf{mult} \mapsto \boxtimes\}$.

$$a \boxplus b = \begin{cases} a + b & \text{se } a, b \in \mathbb{N} \\ \spadesuit & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Uma variação na estrutura

Considere agora uma estrutura ligeiramente diferente, mas sobre a mesma assinatura.

$\Sigma = (\mathbf{Con}, \mathbf{Fun}, \mathbf{Pred})$
$\mathbf{Con} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$\mathbf{Fun} = \{\mathtt{soma}, \mathtt{mult}\}$
$\mathbf{Pred} = \{\mathtt{Par}^1, \mathtt{Impar}^1, \mathtt{Menor}^2, \mathtt{Div}^3\}$

$\mathrm{D}' = \{\spadesuit, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$ (um elemento extra no universo)

$\mathcal{D}' = (\mathbf{Con}_{\mathrm{D}'}, \mathbf{Fun}_{\mathrm{D}'}, \mathbf{Pred}_{\mathrm{D}'})$, onde $\mathbf{Fun}_{\mathrm{D}'} = \{\mathtt{soma} \mapsto \boxplus, \mathtt{mult} \mapsto \boxtimes\}$.

$$a \boxplus b = \begin{cases} a + b & \text{se } a, b \in \mathbb{N} \\ \spadesuit & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad a \boxtimes b = \begin{cases} a \times b & \text{se } a, b \in \mathbb{N} \\ \spadesuit & \text{caso contrário} \end{cases}$$

1. Determine se as seguintes fórmulas (anteriormente vistas como exemplo) são verdadeiras ou não, sob a estrutura modificada introduzida no slide anterior.
   - $\exists x.\forall y.(\mathtt{Menor}(x, y))$
   - $\exists x.\forall y.(\mathtt{Menor}(x, y) \vee x = y)$
   - $\forall x.\exists y.(\mathtt{Menor}(x, y))$
   - $\forall x.\forall y.(\mathtt{Menor}(x, y) \vee x = y \vee \mathtt{Menor}(y, x))$
   - $\forall x.\forall y.(\mathtt{Par}(x) \wedge \mathtt{Par}(y) \rightarrow \mathtt{Par}(\mathtt{mult}(x, y)))$
2. Em relação à questão anterior, quais fórmulas tiveram o valor-verdade modificado ao trocarmos a estrutura ($D = \mathbb{N}$ vs $D' = \{\spadesuit\} \cup \mathbb{N}$)?

3. Determine uma estrutura para realizar afirmações sobre os inteiros, com as seguintes características:
   - um número infinito de constantes (os próprios inteiros)
   - conjunto vazio de funções
   - operações de soma, multiplicação e divisão inteira representados por predicados ternários.
   - predicados unários Par, Impar, Positivo, e binário Menor
4. Determine quais das fórmulas vistas no exercício 1 são verdadeiras e quais são falsas sob a estrutura da questão 3.
5. Escreva uma fórmula que capture a seguinte propriedade: "todo número inteiro possui um inverso", isto é, um outro número que, ao somarmos ao primeiro, gera-se um resultado igual a zero.

Propriedades Semânticas de Fórmulas

Lógica proposicional é mais simples e menos expressiva que lógica de predicados.

Definimos anteriormente uma série de propriedades e relações entre fórmulas de lógica proposicional:

- fórmulas satisfazíveis e falsificáveis
- tautologias (fórmulas válidas) e contradições (fórmulas insatisfazíveis)
- consequência lógica
- equivalência lógica

Vamos agora reproduzir estes mesmos conceitos sobre a *lógica de predicados*.

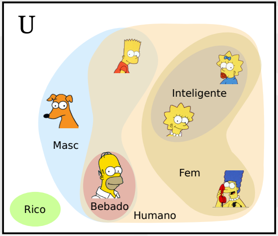
Sistema algébrico de exemplo

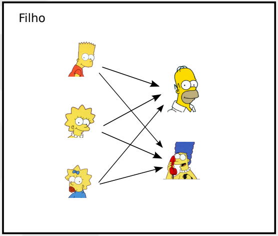
Vamos utilizar o sistema algébrico do Simpsons visto na aula anterior.

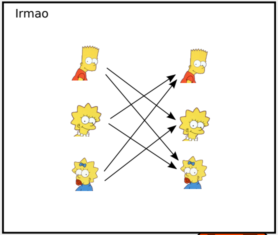
Assinatura:

$$\begin{aligned}\Sigma = \ & (\{\texttt{homer}, \texttt{bart}, \texttt{lisa}, \texttt{marge}, \texttt{maggie}, \texttt{ajudantePN}\},\\ & \{\},\\ & \{\texttt{Masc}^1, \texttt{Fem}^1, \texttt{Humano}^1, \texttt{Rico}^1, \texttt{Inteligente}^1, \texttt{Bebado}^1, \texttt{Irmao}^2, \texttt{Filho}^2\})\end{aligned}$$

Universo e interpretação:







Uma fórmula $A \in \mathfrak{F}$ é satisfazível se existir *estrutura* $\mathcal{D}$ e *atribuição de variáveis* σ tal que

$$[A]^{\sigma}_{\mathcal{D}} = 1$$

Uma fórmula $A \in \mathfrak{F}$ é satisfazível se existir *estrutura* $\mathcal{D}$ e *atribuição de variáveis* σ tal que

$$[A]^{\sigma}_{\mathcal{D}} = 1$$

Exemplos de fórmulas satisfazíveis:

- $\mathtt{Bebado}(\mathtt{homer})$
- $\mathtt{Humano}(x)$
- $\mathtt{Rico}(\mathtt{homer})$
- $\forall x.(\mathtt{Masc}(x) \vee \mathtt{Humano}(x))$

Uma fórmula $A \in \mathfrak{F}$ é satisfazível se existir *estrutura* $\mathcal{D}$ e *atribuição de variáveis* σ tal que

$$[A]^{\sigma}_{\mathcal{D}} = 1$$

Exemplos de fórmulas satisfazíveis:

- $\texttt{Bebado}(\texttt{homer})$
- $\texttt{Humano}(x)$
- $\texttt{Rico}(\texttt{homer})$
- $\forall x.(\texttt{Masc}(x) \lor \texttt{Humano}(x))$

Contraexemplo: $\texttt{Rico}(\texttt{homer}) \land \neg\texttt{Rico}(\texttt{homer})$

Uma fórmula $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$ é falsificável se existir *estrutura* $\mathfrak{D}$ e *atribuição de variáveis* σ tal que

$$[\mathcal{A}]^{\sigma}_{\mathfrak{D}} = 0$$

Uma fórmula $A \in \mathfrak{F}$ é falsificável se existir *estrutura* $\mathfrak{D}$ e *atribuição de variáveis* σ tal que

$$[A]^{\sigma}_{\mathfrak{D}} = 0$$

Exemplos de fórmulas falsificáveis:

- $\mathtt{Bebado}(\mathtt{homer})$
- $\mathtt{Humano}(x)$
- $\mathtt{Rico}(\mathtt{homer})$
- $\forall x.(\mathtt{Masc}(x) \vee \mathtt{Humano}(x))$

Falsificabilidade

Uma fórmula $A \in \mathfrak{F}$ é falsificável se existir *estrutura* $\mathcal{D}$ e *atribuição de variáveis* σ tal que

$$[A]^{\sigma}_{\mathcal{D}} = 0$$

Exemplos de fórmulas falsificáveis:

- $\mathtt{Bebado}(\mathtt{homer})$
- $\mathtt{Humano}(x)$
- $\mathtt{Rico}(\mathtt{homer})$
- $\forall x.(\mathtt{Masc}(x) \vee \mathtt{Humano}(x))$

Contraexemplo: $\mathtt{Rico}(\mathtt{homer}) \vee \neg\mathtt{Rico}(\mathtt{homer})$

Uma fórmula $A \in \mathfrak{F}$ é válida (tautologia) se é satisfeita por todas *estruturas* e *atribuições de variáveis*.

Validade e Insatisfazibilidade

Uma fórmula $A \in \mathfrak{F}$ é válida (tautologia) se é satisfeita por todas *estruturas* e *atribuições de variáveis*.

Uma fórmula $A \in \mathfrak{F}$ é insatisfazível (contradição) se é falsificada por todas *estruturas* e *atribuições de variáveis*.

Validade e Insatisfazibilidade

Uma fórmula $A \in \mathfrak{F}$ é válida (tautologia) se é satisfeita por todas *estruturas* e *atribuições de variáveis*.

Uma fórmula $A \in \mathfrak{F}$ é insatisfazível (contradição) se é falsificada por todas *estruturas* e *atribuições de variáveis*.

Exemplos:

- $\mathtt{Humano}(\mathtt{homer}) \to \exists x.\mathtt{Humano}(x)$ (tautologia)
- $\mathtt{Humano}(x) \land \neg\mathtt{Humano}(x)$ (contradição)

Dizemos que $\mathcal{D}$ e σ satisfazem um conjunto de fórmulas Γ quando temos $[A]^{\sigma}_{\mathcal{D}} = 1$ para **toda** $A \in \Gamma$.

Dizemos que $\mathcal{D}$ e σ satisfazem um conjunto de fórmulas Γ quando temos $[A]^{\sigma}_{\mathcal{D}} = 1$ para **toda** $A \in \Gamma$.

Assim como em lógica proposicional, consequência lógica é definida entre um conjunto de fórmulas Γ *(premissas)* e uma única fórmula X *(consequência)*.

Dizemos que $\mathcal{D}$ e σ satisfazem um conjunto de fórmulas Γ quando temos $[A]^{\sigma}_{\mathcal{D}} = 1$ para **toda** $A \in \Gamma$.

Assim como em lógica proposicional, consequência lógica é definida entre um conjunto de fórmulas Γ *(premissas)* e uma única fórmula X *(consequência)*.

Dizemos X é *consequência* de Γ, denotado por

$$\Gamma \models X$$

quando **todas** *estruturas* e *atribuições de variáveis* que satisfazem Γ **também** satisfazem X.

Duas fórmulas A e B são *equivalentes*, denotado por

$$A \equiv B$$

quando temos

$$A \vDash B \qquad \text{e} \qquad B \vDash A$$

Equivalência de fórmulas

Duas fórmulas A e B são *equivalentes*, denotado por

$$A \equiv B$$

quando temos

$$A \vDash B \qquad \text{e} \qquad B \vDash A$$

Exemplos:

- $P(a) \wedge Q(a) \equiv Q(a) \wedge P(a)$

Equivalência de fórmulas

Duas fórmulas A e B são *equivalentes*, denotado por

$$A \equiv B$$

quando temos

$$A \vDash B \qquad \text{e} \qquad B \vDash A$$

Exemplos:

- $P(a) \land Q(a) \equiv Q(a) \land P(a)$
- $\neg P(a) \lor Q(a) \equiv \neg\neg(P(a) \to Q(a))$

Equivalência de fórmulas

Duas fórmulas A e B são *equivalentes*, denotado por

$$A \equiv B$$

quando temos

$$A \vDash B \qquad \text{e} \qquad B \vDash A$$

Exemplos:

- $P(a) \wedge Q(a) \equiv Q(a) \wedge P(a)$
- $\neg P(a) \vee Q(a) \equiv \neg\neg(P(a) \rightarrow Q(a))$
- $P(x) \wedge \neg P(x) \equiv \neg(P(y) \vee \neg P(y))$

Os quantificadores universal e existencial se comportam de forma complementar em relação à negação.

A equivalência principal é a seguinte:

$$\neg\forall x.A \equiv \exists x.\neg A$$

Os quantificadores universal e existencial se comportam de forma complementar em relação à negação.

A equivalência principal é a seguinte:

$$\neg\forall x.A \equiv \exists x.\neg A$$

Consequência:

$$\neg\exists x.A \equiv \forall x.\neg A$$

Exercícios I

1. Para cada uma das seguintes fórmulas, determine fórmulas *equivalentes* que utilizem somente os conectivos $(\neg, \wedge, \exists)$.
   - $P(x) \to \neg(\forall x.Q(x) \vee R(x,y))$
   - $\neg\forall x.(P(x) \vee Q(x))$
2. Transforme as seguintes fórmulas, gerando fórmulas equivalentes que utilizam somente um quantificador (escolha $\exists$ ou $\forall$)
   - $\forall x.\neg\exists z.M(x,z)$
   - $\forall x.\exists y.(P(a) \to \forall z.R(x,y,z))$
3. As seguintes afirmações são *erradas*. Apresente um *contraexemplo* para cada uma delas.
   - $\neg\forall x.\mathtt{Masc}(x) \equiv \forall x.\neg\mathtt{Masc}(x)$
   - $\forall x.(\mathtt{Masc}(x) \vee \mathtt{Humano}(x)) \equiv \forall x.\neg\mathtt{Rico}(x)$

Exercícios II

4. Uma fórmula está na *forma normal disjuntiva* (FND) se ela consiste de uma série de disjunções de conjunções de fórmulas atômicas (ou negações de fórmulas atômicas)

   Exemplo: $(P(a) \wedge \neg Q(b) \wedge Q(a)) \vee (R(a, b) \wedge \neg Q(b)) \vee S(c)$

   Contraexemplo: $\neg((P(a) \vee Q(a)) \wedge S(c))$

   Converta as seguintes fórmulas para fórmulas equivalentes em FND:

   - $((P(a) \to P(b)) \to P(a)) \to P(b)$
   - $(P(a) \to P(b)) \to (\neg P(a) \vee \neg P(b))$