Cálculo Capítulo 1

• **Valor Absoluto:** $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Propriedades do Valor absoluto:

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| \geq x$
3. $|-x| = |x|$
4. $|x|^2 = x^2$ e $|x| = \sqrt{x^2}$
5. $|xy| = |x|.|y|$
6. $|x+y| \leq |x| + |y|$
7. $||x|-|y|| \leq |x|-|y|$
8. $|x|-|y| \leq |x+y|$
9. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, com $y \neq 0$

Seja a um número real positivo
a) $|x| < a$, se e somente se, $-a < x < a$
b) $|x| \leq a$, se e somente se, $-a \leq x \leq a$
c) $|x| > a$, se e somente se, $x < -a$ ou $x > a$
d) $|x| \geq a$, se e somente se, $x \leq -a$ ou $x \geq a$

Operações Com Funções:

1. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$;
2. $(f.g)(x) = f(x) . g(x)$;
3. $\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(x)}{g(x)}$, para $g(x) \neq 0$;

O domínio das funções $f \pm g$ e $f.g$ é a intersecção dos domínios f e g. O domínio de f/g é a intersecção dos dos domínios f e g, excluindo os pontos x onde $g(x) = 0$.

• **Função Par:** $f(-x) = f(x)$,,
• **Função Ímpar:** $f(-x) = -f(x)$,,
• **Função Periódica:** Uma função $f(x)$ é periódica se existe um número real $T \neq 0$, tal que: $f(x+T) = f(x)$,, para todo $x \in Df$.

• **Função Injetora:** Quando para quaisquer x_1 e x_2 do domínio de f, tais que $x_1 \neq x_2$ tivermos $f(x_1) \neq f(x_2)$.
• **Função Sobrejetora:** Quando o conjunto imagem de uma função f for igual ao seu contradomínio.
• **Função Bijetora:** Quando a função é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

• **Função Inversa:**
$(f^{-1} \circ f)(x) = x$, $\forall x \in Df$
$(f \circ f^{-1})(x) = x$, $\forall x \in Df^{-1}$

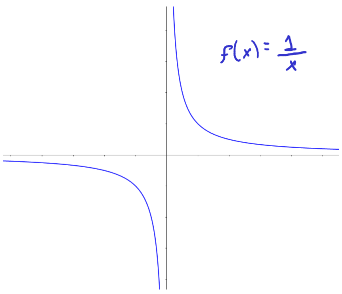
$\boxed{f^{-1} \neq \frac{1}{f}}$

Algumas funções Elementares

• **Função Potencial:** definida por $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{R}$
• **Função Exponencial:** $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, definida por $f(x) = a^x$ com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Podemos afirmar que:
  • está acima do eixo das abscissas;
  • corta o eixo das ordenadas no ponto $(0,1)$
  • f é crescente se $a > 1$ e decresente se $0 < a < 1$.

Funções Especiais

• **Função Constante:** $f: \mathbb{R} \to \{K\}$, definida por $f(x) = K$.
• **Função Identidade:** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$.
• **Função Afim:** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, onde a e b são constantes e $a \neq 0$, a é o coeficiente angular e b o coeficiente linear. Se $a > 0$, função crescente, se $a < 0$, função decrescente. Se $b = 0$ a reta passa pela origem.
• **Função Módulo:** $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, definida por $f(x) = |x|$.
• **Função Quadrática:** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são constantes e $a \neq 0$. Se $a > 0$ a parábola tem concavidade voltada para cima. Se $a < 0$ a concavidade é voltada para baixo.
• **Função Racional:** função definida como o quociente de duas funções polinomiais, isto é $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ onde $q(x) \neq 0$.



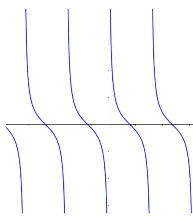
onde as retas $x = 0$ e $y = 0$ são assíntotas, pois $x = 0 \notin Df$ e $y = 0 \notin Imf$.

• **Função Logarítma:** $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_a x$ com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Podemos afirmar que:
  • está todo a direita do eixo das ordenadas;
  • corta o eixo das abcissas no ponto $(1,0)$;
  • f é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$;
  • função exponencial e logaritimicas são inversas uma da outra.

Funções Trigonométricas:

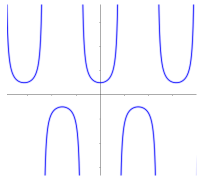
• **Função Seno:** $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$.
• **Função Cosseno:** $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, definida por $f(x) = \cos x$.
• **Função Tangente:** $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ para todo x tais que $x \neq 0$, isto é: para $x \neq \pi/2 + K\pi$, $K \in \mathbb{Z}$.
• **Função Cotangente:** definida por $f(x) = \operatorname{cotg}(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$ para todo x tais que $\operatorname{sen} x \neq 0$, isto é, para $x \neq K\pi$, com $K \in \mathbb{Z}$.

$f(x) = \operatorname{cotg}(x)$



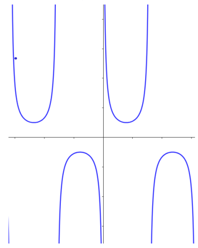
• Função Secante: definida por $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$, para todo x tais que $\cos x \neq 0$, isto é, para $x \neq \pi/2 + K\pi$, $K \in \mathbb{Z}$.

$f(x) = \sec x$



• Função Cossecante: definida por $f(x) = \operatorname{cossec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ para todo x, tais que $x \neq 0$, isto é, para $x = K\pi$, com $K \in \mathbb{Z}$

$f(x) = \operatorname{cossec}(x)$



Funções Trigonométricas Inversas:

• Função Arco Seno: $f: [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, definida por $f(x) = \arcsin(x)$.

• Função Arco Cosseno: $f: [-1,1] \to [0,\pi]$, definida por $f(x) = \arccos(x)$.

• Função Arco Tangente: $f: \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, definida por $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$.

• Função Arco Cotangente: $f: \mathbb{R} \to (0,\pi)$, definida por $f(x) = \operatorname{arccotg}(x)$.

• Função Tangente Hiperbólica: $f: \mathbb{R} \to (1,1)$, definida por $f(x) = \operatorname{tgh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

• Função Cotangente Hiperbólica: $f: \mathbb{R}^* \to [(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)]$ definida por $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tgh}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

• Função Secante Hiperbólica: $f: \mathbb{R} \to (0,1]$, definida por $f(x) = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$.

• Função Cossecante Hiperbólica: $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, definida por $f(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$

Funções hiperbólicas Inversas:

• Inversa do Seno Hiperbólico: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{argsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Chamada de argumento do seno hiperbólico.

• Inversa do Cosseno Hiperbólico: $f: [1,+\infty) \to [0,+\infty)$, definida por $f(x) = \operatorname{argcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

• Inversa da Tangente Hiperbólica: $f: (-1,1) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{argtgh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$.

• Inversa da Cotangente Hiperbólica: $f: (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \to \mathbb{R}^*$ definida por $f(x) = \operatorname{argcotgh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

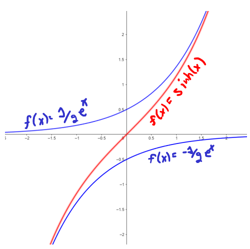
• Inversa da Secante Hiperbólica: $f: (0,1] \to \mathbb{R}^*$, definida por $f(x) = \operatorname{argsech}(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

• Função Arco Secante: $f: (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \to [0,\pi/2) \cup (\pi/2,\pi]$ definida por $f(x) = \operatorname{arcsec}(x)$.

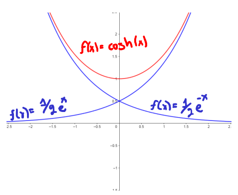
• Função Arco Cossecante: $f: (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \to [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$ definida por $f(x) = \operatorname{arcocossec}(x)$

Funções Hiperbólicas

• Função Seno Hiperbólico: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\sinh x = f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, o gráfico pode ser obtido pelo método chamado de adição de coordenadas. Para usar esta técnica, esboçamos os gráficos das funções $\frac{1}{2}e^x$ e $-\frac{1}{2}e^{-x}$.



• Função Cosseno Hiperbólico: $f: \mathbb{R} \to [1,+\infty]$, definida por $f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$



• Inversa da Cossecante Hiperbólica: $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, definida por $f(x) = \operatorname{argcossech}(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$

Translações

• $g(x) = f(x) + K$: basta deslocar K unidade p/ cima, se $K > 0$, ou p/ baixo se $K < 0$. (Translação Vertical).

• $g(x) = f(x - c)$: basta deslocar c unidades p/ direita, se $c > 0$, ou p/ esquerda se $c < 0$. (Translação Horizontal).