Cálculo Diferencial e Integral II (CDI2001)

Área entre curvas em cartesianas

Professor: Marnei Luis Mandler

Aula de CDI-2 de 04 de setembro de 2024.

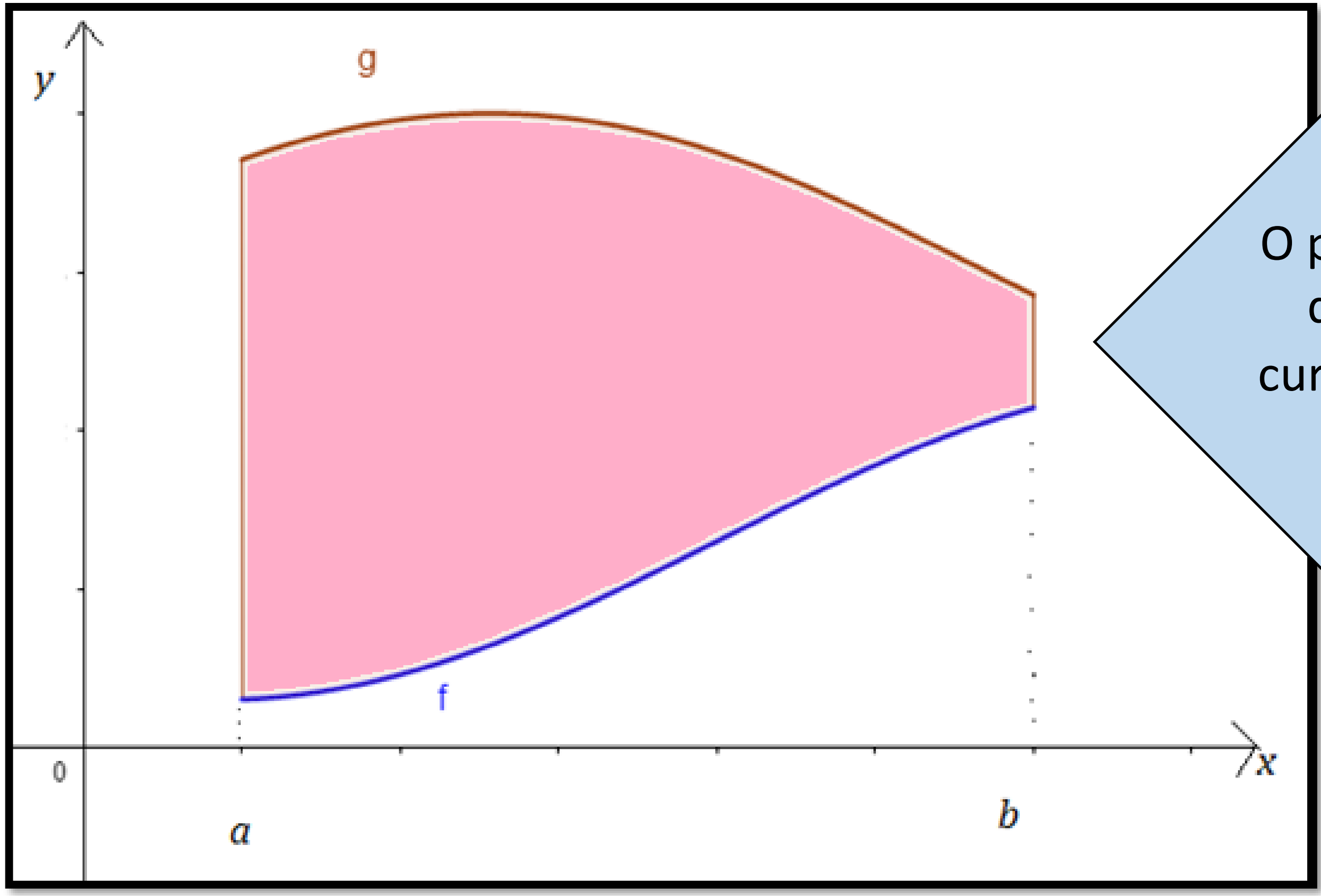
UDESC

Aplicações da Integral Definida

1. Área em Coordenadas Cartesianas

Sejam $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas tais que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in [a,b].$$

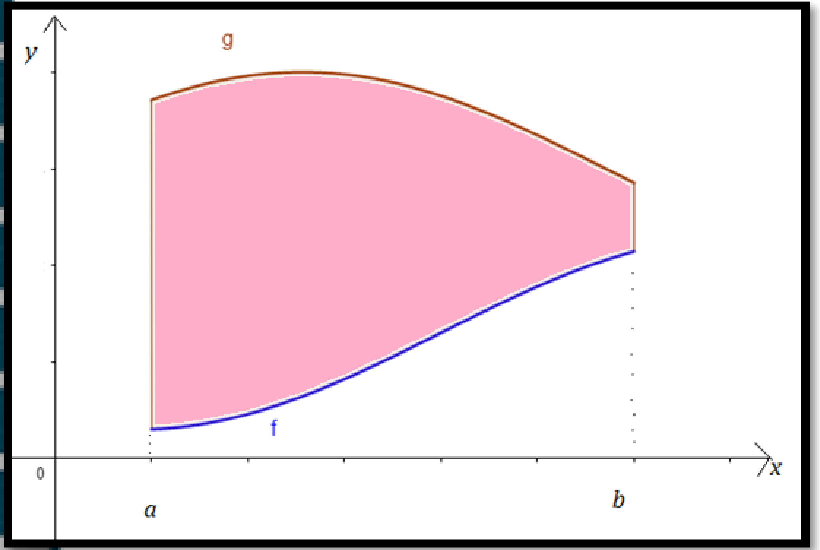


O problema consiste em calcular a área de uma região delimitada por duas curvas: superiormente por $y = g(x)$ e inferiormente por $y = f(x)$.

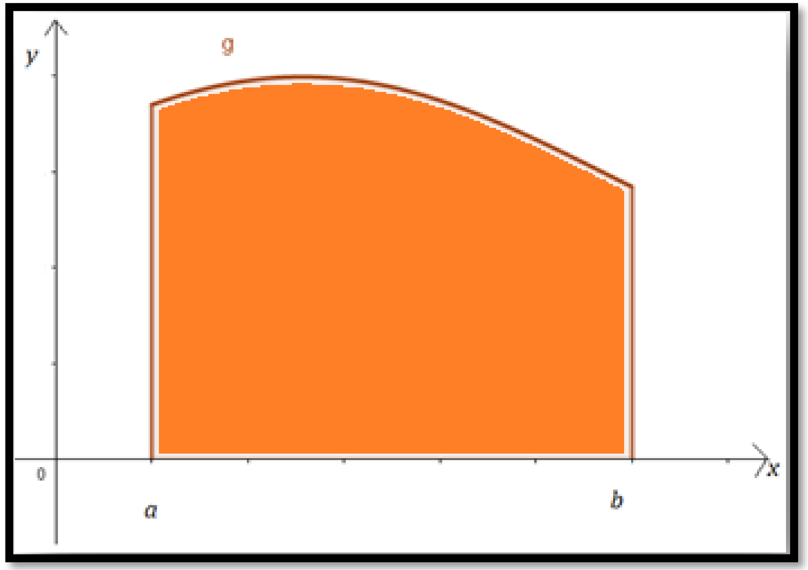
Questão: Qual a área da região R situada entre os gráficos de f e g?

Área em coordenadas Cartesianas

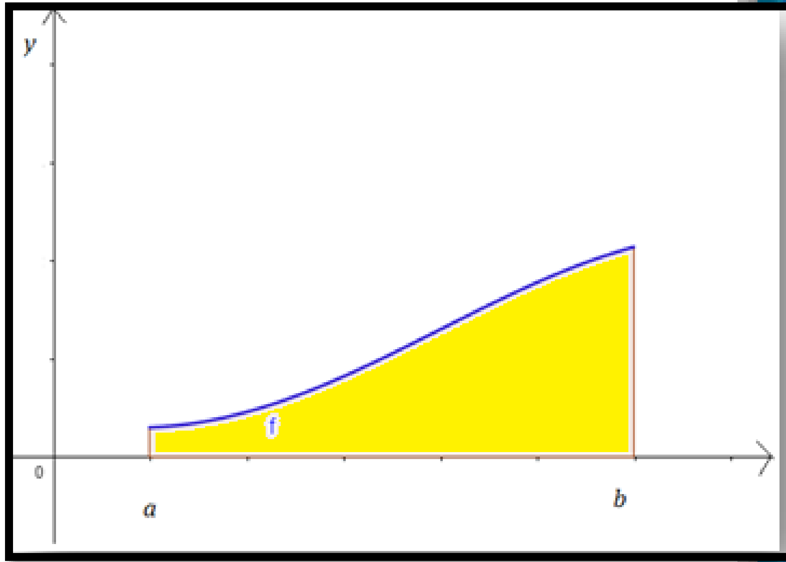
Para calcular a área da região R, podemos fazer uma diferença entre as áreas das regiões situadas entre cada uma das curvas e o eixo $\overrightarrow{0x}$:



=



−



Como já sabemos resolver o problema da área com somente uma curva , obtemos que

$$\text{área}(R) = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx\,.$$

Portanto:

$$\boxed{\text{área}(R) = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx\,.}$$

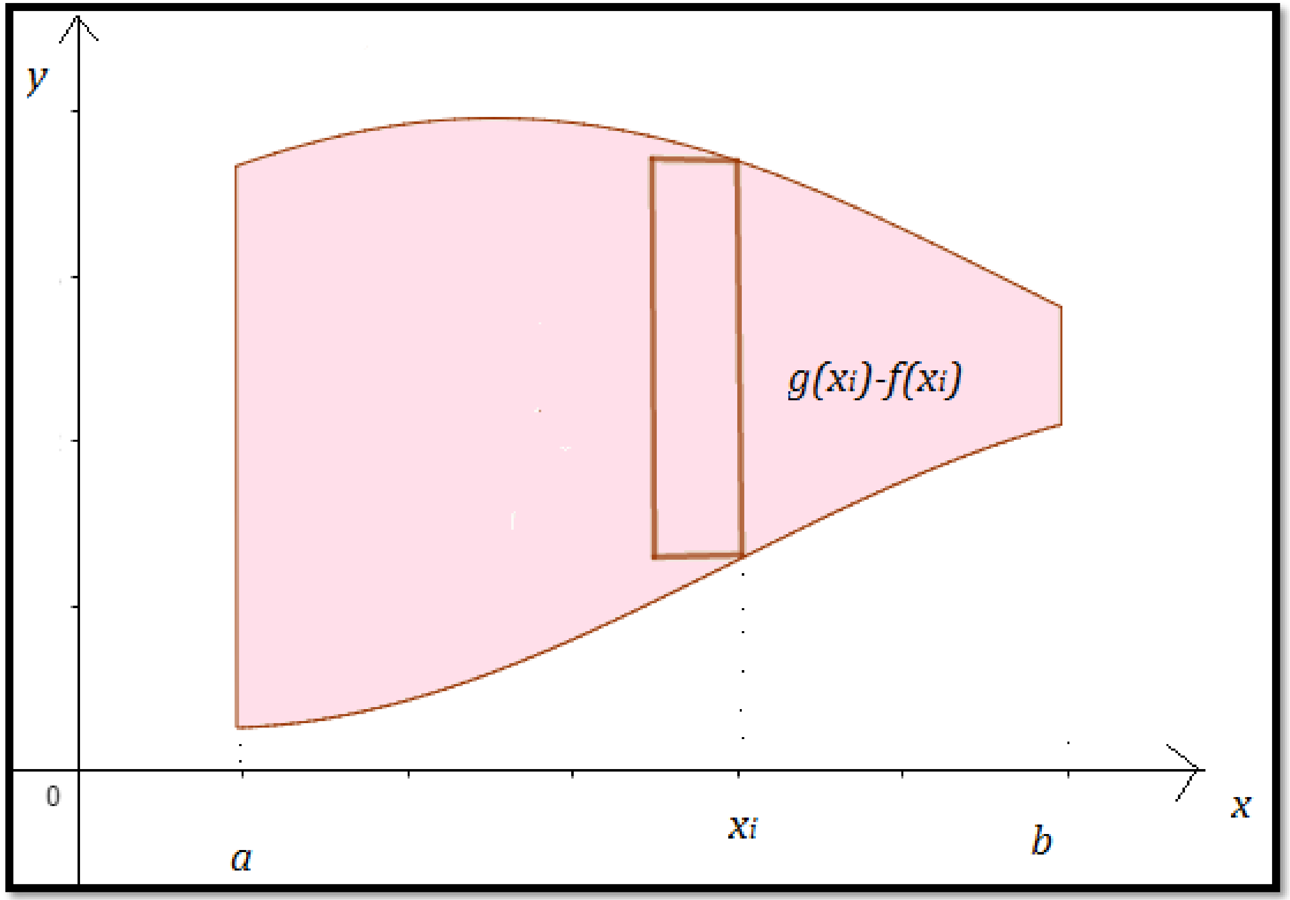
Veja que a área é dada pela integral da curva superior "menos" a curva inferior.

Observação

Note que o integrando é tal que

$$g(x) - f(x) \geq 0$$

e representa a altura de um retângulo, cuja base é dx.

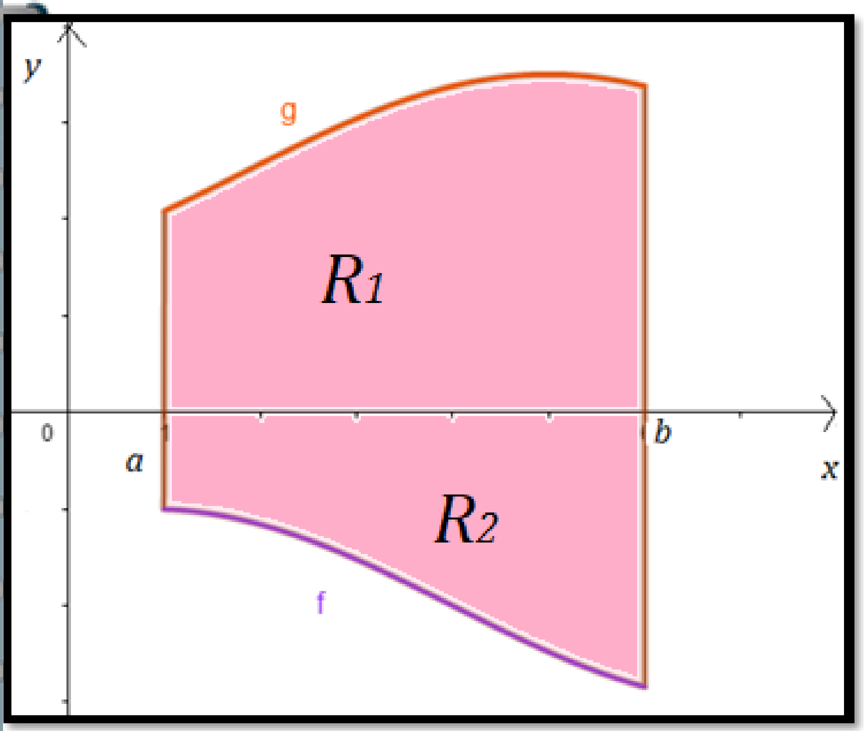


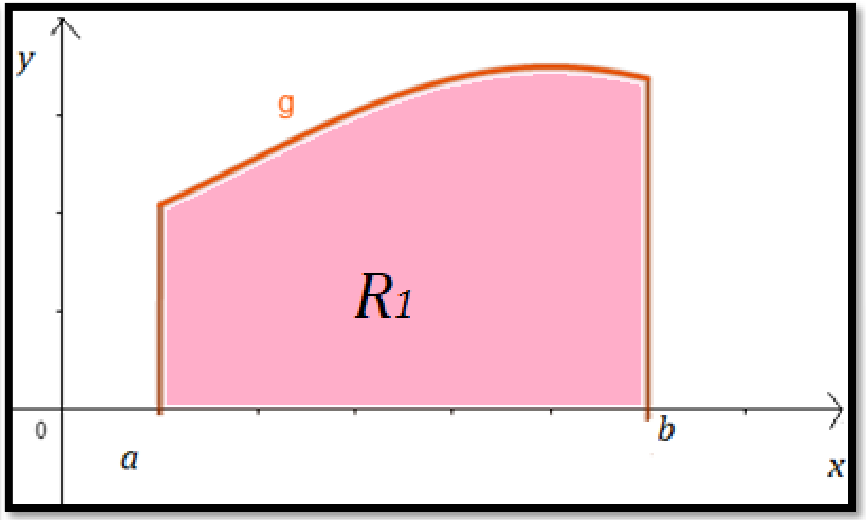
Questão: A posição que a região ocupa no plano cartesiano (acima ou abaixo do eixo x) interfere na expressão para a sua área?

- Se o gráfico de g estiver acima do eixo $\overrightarrow{0x}$ e o gráfico de f estiver abaixo de $\overrightarrow{0x}$, isto é, se

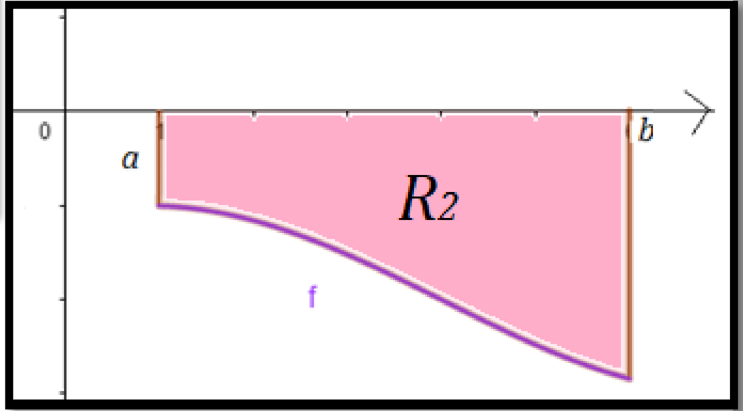
$$g(x) \geq 0 \quad \text{e} \quad f(x) \leq 0 \qquad \forall\, x \in [a,b],$$

obtemos que a área da região desejada é dada por uma soma de áreas:





Como R_2 está situada abaixo do eixo x, temos que $\int_a^b f(x)dx = -área(R_2)$.



$$área(R) = área(R_1) + área(R_2) = \int_a^b g(x)dx + \left(-\int_a^b f(x)dx\right).$$

Portanto:

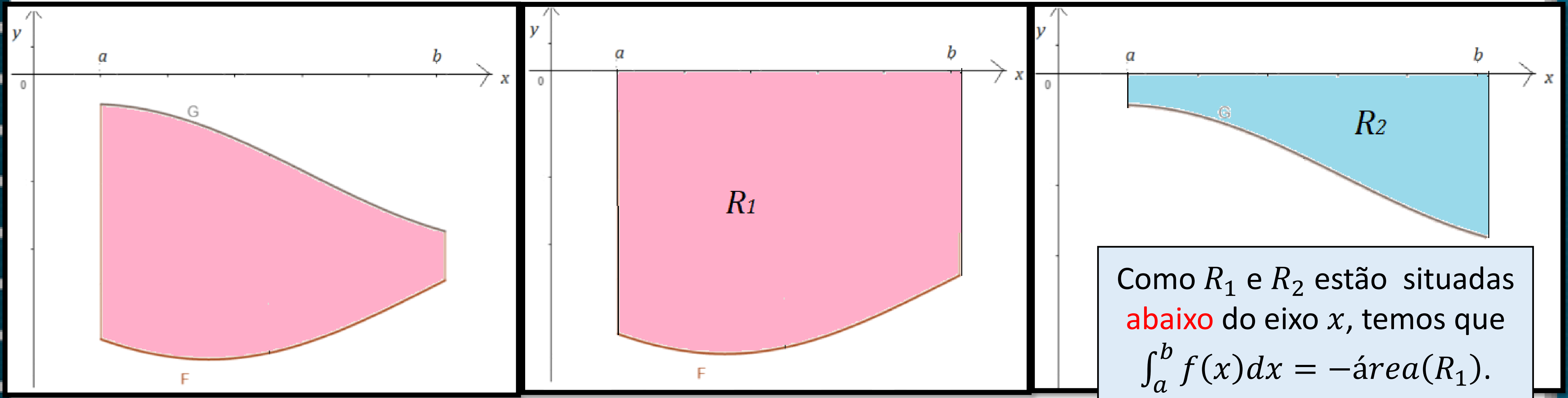
$$\boxed{área(R) = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx.}$$

É a mesma expressão do caso anterior!

- Se os gráficos de g e f estiverem ambos situados abaixo do eixo $\overrightarrow{0x}$, isto é, se

$$f(x) \leq g(x) \leq 0, \qquad \forall\, x \in [a,b],$$

obtemos que a área da região desejada é dada por uma diferença de áreas:



Como R_1 e R_2 estão situadas abaixo do eixo x, temos que

$$\int_a^b f(x)dx = -área(R_1).$$

$$\int_a^b g(x)dx = -área(R_2).$$

$$área(R) = área(R_1) - área(R_2)$$

$$= -\int_a^b f(x)dx - \left(-\int_a^b g(x)dx\right) = \int_a^b \big(-f(x) + g(x)\big)dx.$$

Portanto:

$$área(R) = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx.$$

Novamente, obtemos a mesma expressão!

Exercícios

Exercício 1) Calcule a área da região delimitada simultaneamente pelas curvas:

a) $y = -x^2 + 4x + 6$ e $y = x^2 - 2x - 2$.

b) $x + 2y^2 = 5$ e $x + 2y = 1$.

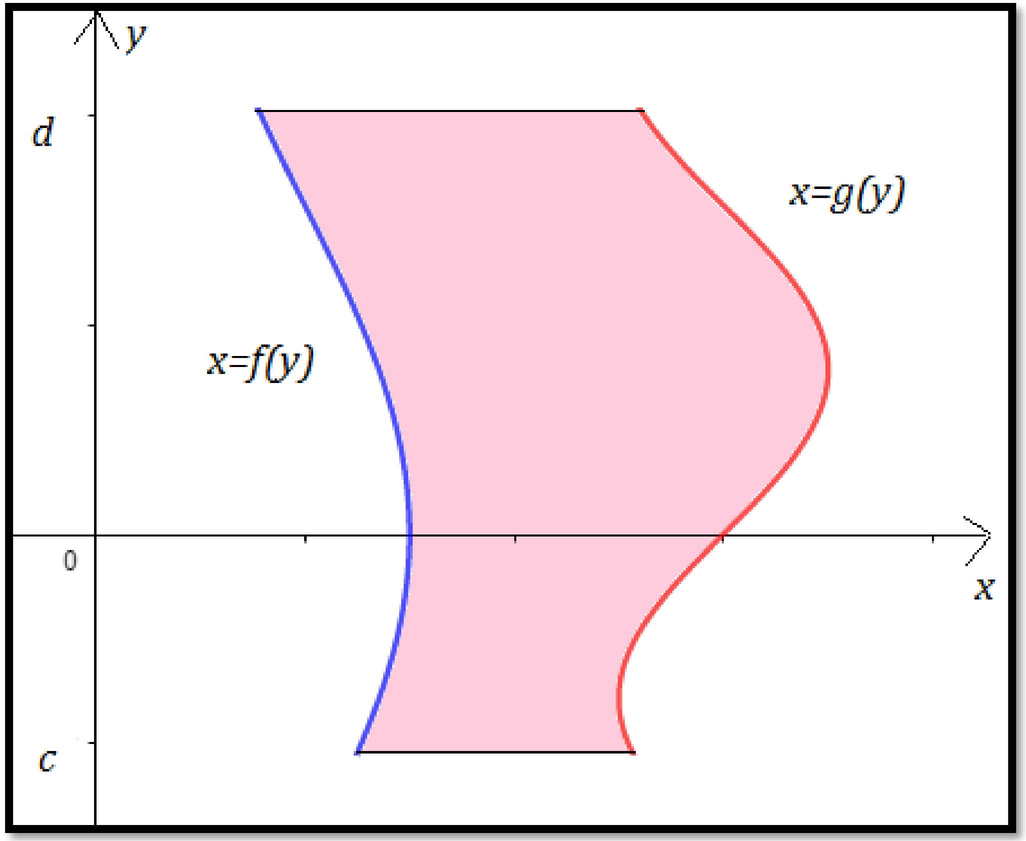
Questão: Há alguma forma de obter uma única integral para a área da região do item (b)?

Formalizando: Área por integração em y

Sejam $f, g: [c, d] \to \mathbb{R}$ funções contínuas tais que

$$f(y) \leq g(y) \quad \forall\, y \in [c, d].$$

A área da região situada entre as curvas $x = f(y)$ e $x = g(y)$, representada na figura,



é dada por

$$A(R) = \int_c^d [g(y) - f(y)]\, dy.$$

Veja que a ideia da integração em y é a mesma que antes: integramos a **diferença** entre a curva "**maior**" (que agora está situada à direita ($x = g(y)$) e a curva "**menor**", agora situada à **esquerda** ($x = f(y)$).

Exercícios

Exercício 2) Escreva as integrais que permitem calcular a área da região delimitada simultaneamente pelas curvas

$$x + 2y^2 = 5 \quad \text{e} \quad x + 2y = 1.$$

usando integração em relação a y.

Exercício 3) Considere como R a região que está situada simultaneamente no interior das curvas $9x^2 + 4y^2 = 25$ e $y = -1 + 3x^2$.

Escreva as integrais que permitem calcular a área de R mediante:

a) integração em relação a x.

b) integração em relação a y.

Escolha uma das formas para calcular o valor numérico da área de R.

Exercício 4) Considere a região R delimitada simultaneamente pelas curvas

$$y = \sqrt{4 + x}, \qquad x + y = -2 \quad \text{e} \quad y = \sqrt{12 - 3x}.$$

Escreva as integrais que permitem calcular a área de R mediante:

a) integração em relação a x.

b) integração em relação a y.

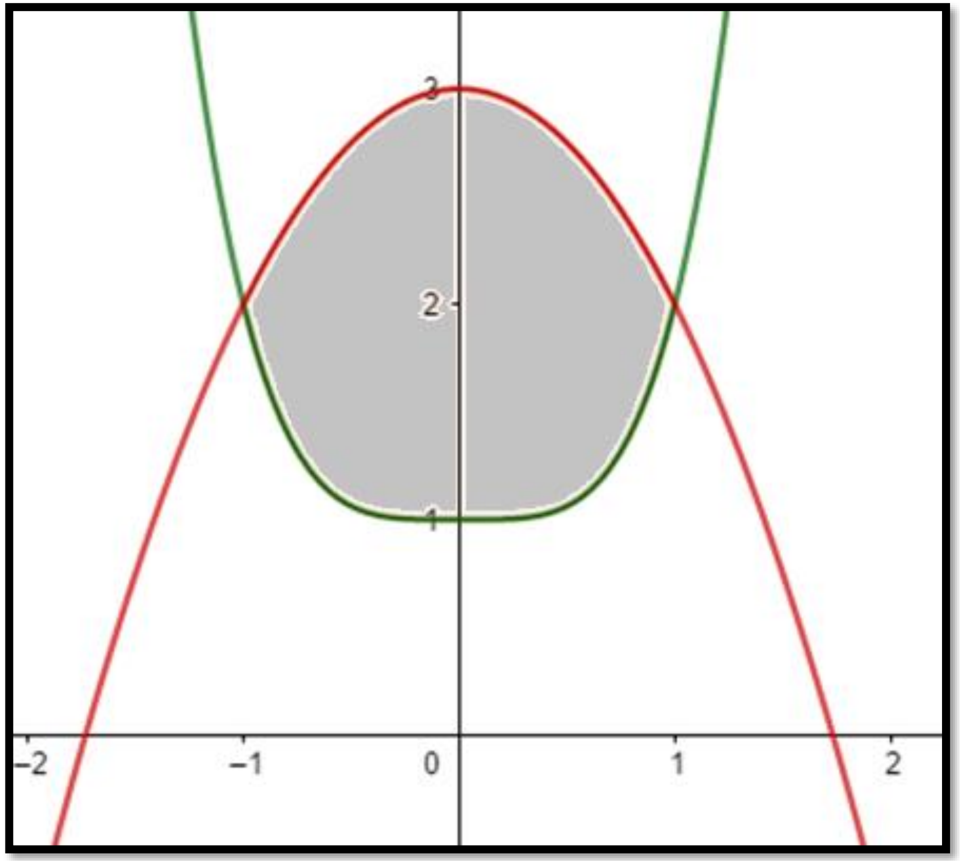
Escolha uma das formas para calcular o valor numérico da área de R.

Exemplos

Exemplo 1) Calcule a área da região delimitada:

a) Simultaneamente pelas curvas $y = x^4 + 1$ e $y = 3 - x^2$.

Solução: Note que não sabemos, a princípio, qual das duas curvas é a superior e qual é a inferior. Por isso, precisamos da análise gráfica da região:



Interpretando o gráfico, vemos que a parábola é a curva superior e a quártica é a inferior.

Exemplo 1a

Além disso, não temos os limitantes de integração.

Para obtê-los, fazemos a interseção entre as curvas:

$$x^4 + 1 = 3 - x^2 \qquad \Rightarrow \qquad x^4 + x^2 - 2 = 0.$$

Para resolver a equação biquadrada, substituímos $t = x^2$ e obtemos

$$t^2 + t - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = 1 \ \text{ ou } \ t = -2.$$

Voltando à variável original:

$$x^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm 1$$
$$x^2 = -2 \qquad \Rightarrow \qquad x \notin \mathbb{R}.$$

Portanto, temos que $x \in [-1, 1]$. Assim, a área da região é dada por

Lembre que a curva superior é $y = 3 - x^2$ e a curva inferior é $y = x^4 + 1$.

$$A(R) = \int_{-1}^{1} (3 - x^2) - (x^4 + 1)\, dx = \int_{-1}^{1} (2 - x^2 - x^4)\, dx$$

$$= 2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \Big|_{-1}^{1} = 2.1 - \frac{1}{3}.1 - \frac{1}{5}.1 - \left(2.(-1) - \frac{1}{3}.(-1) - \frac{1}{5}.(-1)\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = 4 - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{44}{15} \ \textit{unidades de área}.$$

Exemplo:

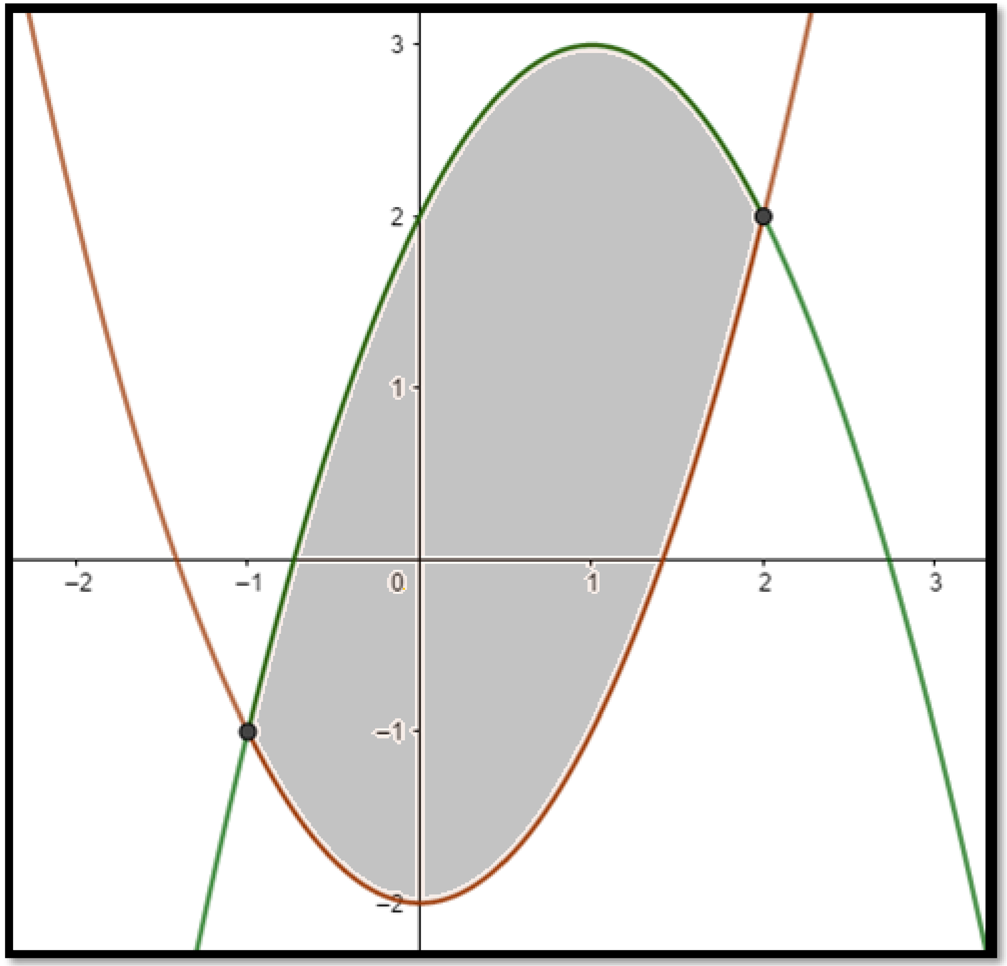
b) Simultaneamente pelas curvas $y = x^2 - 2$ e $y = -x^2 + 2x + 2$.

Solução: Vamos começar com a interseção entre as curvas:

$$x^2 - 2 = -x^2 + 2x + 2 \;\Rightarrow\; 2x^2 - 2x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -1 \text{ e } x = 2.$$

Portanto, as interseções ocorrem em $A(-1,-1)$ e $B(2,2)$.

Geometricamente:



Apesar de parte da região estar acima e parte abaixo do eixo x, não é necessário dividir a região em várias partes, pois a curva superior sempre é $y = -x^2 + 2x + 2$ e a curva inferior sempre é $y = x^2 - 2$.

Portanto, o integrando será dado por $(-x^2 + 2x + 2) - (x^2 - 2)$.

Exemplo 1b

Portanto, a área da região desejada é dada por

$$A(R)=\int_{-1}^{2}(-x^2+2x+2)-(x^2-2)dx=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,dx$$

$$=\frac{-2}{3}x^3+x^2+4x\Big|_{-1}^{2}=\frac{-2}{3}.8+4+8-\left(\frac{-2}{3}.(-1)+1-4\right)$$

$$=\frac{-16}{3}+12-\frac{2}{3}+3=-6+15=9\ \textit{unidades de área}.$$

c) Simultaneamente pelas curvas $x=y^2-4$ e $x+y=-2$.

Solução: A interseção entre as curvas é dada por:

$$\begin{cases}x=y^2-4\\x+y=-2\end{cases}\Rightarrow\quad(y^2-4)+y=-2\quad\Rightarrow\quad y^2+y-2=0$$

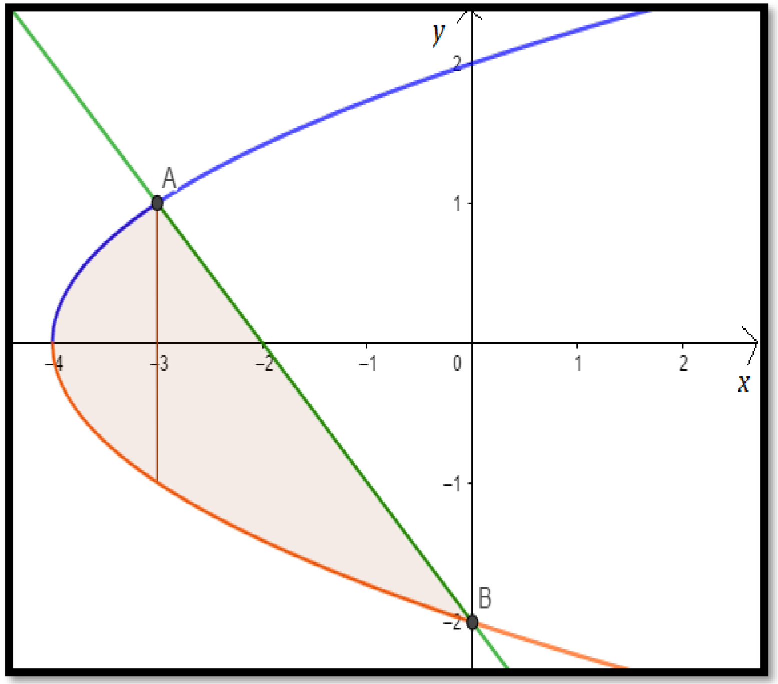
$$\Rightarrow\quad y=1\quad\text{ou}\quad y=-2.$$

Para $y=1$ obtemos $x=-3$.

Para $y=-2$ temos $x=0$.

Portanto, as interseções são $A(-3,1)$ e $B(0,-2)$.

Geometricamente:

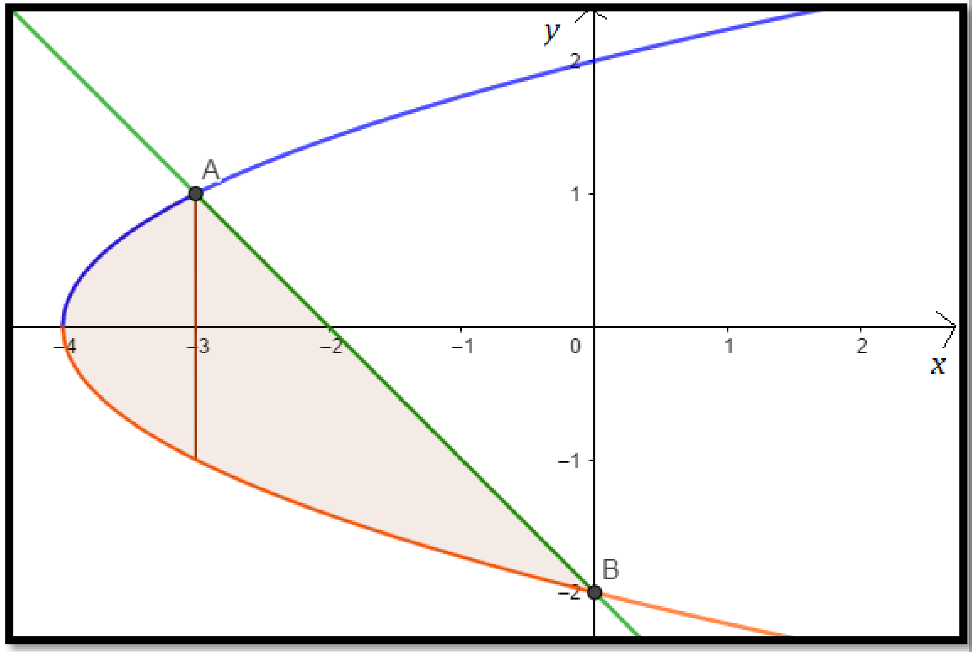


Exemplo 1c

Note que há uma "troca" na curva inferior quando $x = -3$.

Por isso, precisamos utilizar uma soma de integrais definidas. Ainda:

$$x = y^2 - 4 \;\Rightarrow\; y^2 = x + 4 \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{x+4}.$$



Assim:

$y = \sqrt{x+4}$ $\Rightarrow$ curva em azul

$y = -\sqrt{x+4}$ $\Rightarrow$ curva em vermelho

$x + y = -2$ $\Rightarrow$ $y = -2 - x$

curva em verde

Para $x \in [-4, -3]$, a curva superior é $y = \sqrt{x+4}$ e a inferior é $y = -\sqrt{x+4}$.

Para $x \in [-3, 0]$, a superior é $y = -2 - x$ e a inferior, $y = -\sqrt{x+4}$.

Portanto, a área da região é dada por:

$$A(R) = \int_{-4}^{-3} \sqrt{x+4} - \left(-\sqrt{x+4}\right) dx + \int_{-3}^{0} (-2 - x) - \left(-\sqrt{x+4}\right) dx$$

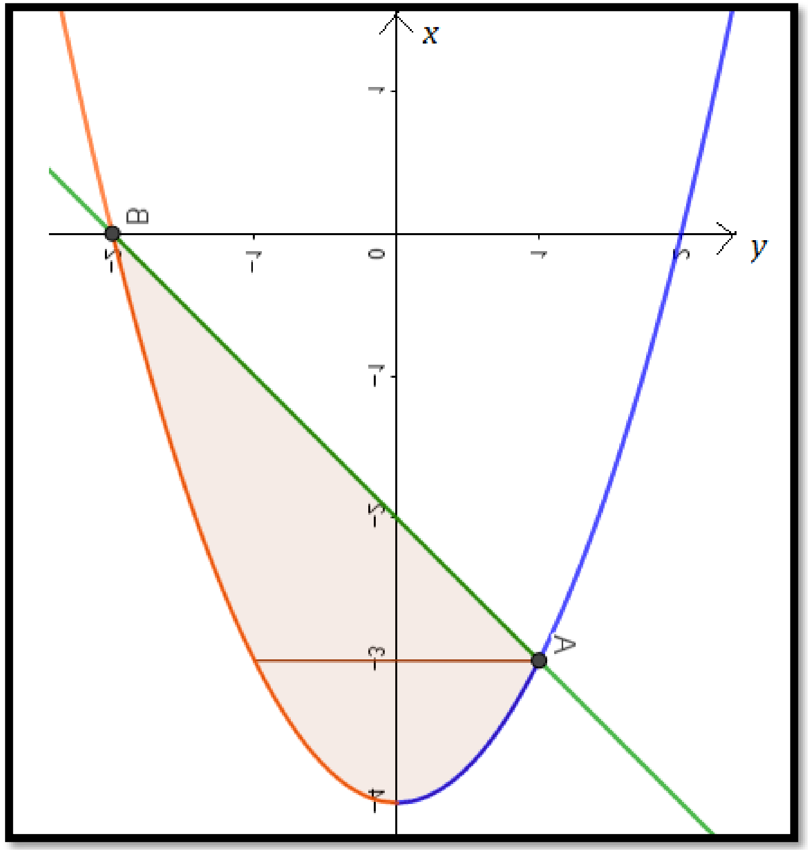
$$= \int_{-4}^{-3} 2\sqrt{x+4}\; dx + \int_{-3}^{0} (-2 - x) + \sqrt{x+4}\; dx.$$

Exercício: resolver as integrais!

Questão:

Há alguma forma de termos apenas uma única integral?

Note que, se invertermos os eixos coordenados, a figura fica:



E temos somente uma curva superior (a reta $x = -2 - y$) e uma única curva inferior (a parábola $x = y^2 - 4$) .

Assim, se integrarmos em relação à variável y, teremos:

$$A(R) = \int_{-2}^{1} (-2 - y) - (y^2 - 4) dy$$

$$= \int_{-2}^{1} (-y - y^2 + 2)\, dy$$

que além de ser uma única integral, é bem mais simples que a expressão anterior.

Ao invertermos os eixos, as curvas devem ser escritas como funções $x = x(y)$, por isso, a integração é em y. O intervalo de integração diz respeito à projeção da região sobre $\overrightarrow{0y}$.

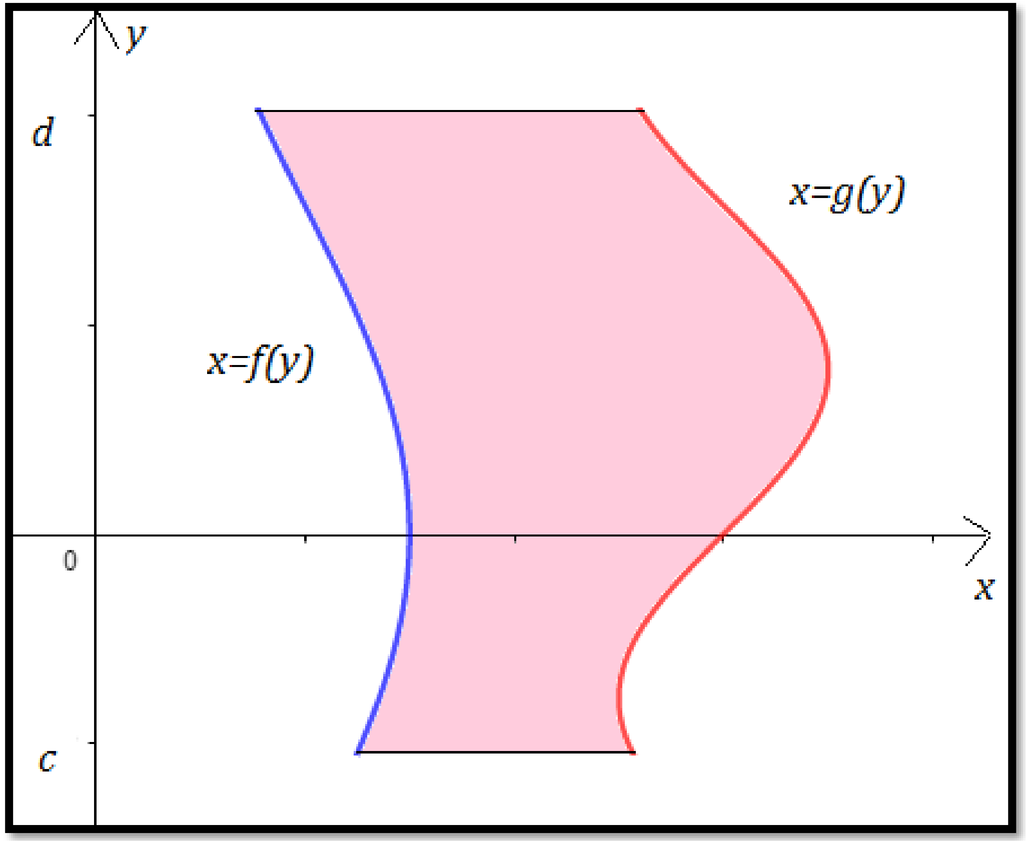
Exercício: Resolver essa integral e comparar com o resultado do cálculo do slide anterior! Note que o resultado deve ser o mesmo, pois a área da região é única!

Formalizando: Área por integração em y

Sejam $f, g: [c, d] \to \mathbb{R}$ funções contínuas tais que

$$f(y) \leq g(y) \quad \forall\, y \in [c, d].$$

A área da região situada entre as curvas $x = f(y)$ e $x = g(y)$, representada na figura,



é dada por

$$A(R) = \int_c^d [g(y) - f(y)]\, dy.$$

Veja que a ideia da integração em y é a mesma que antes: integramos a **diferença** entre a curva "**maior**" (que agora está situada à direita $(x = g(y))$ e a curva "**menor**", agora situada à **esquerda** $(x = f(y))$.

Exemplo

Exemplo 2) Considere a região R delimitada simultaneamente pelas curvas $y = \sqrt{3-x}$, $x + y = -3$ e $y - x = -1$. Escreva as integrais que permitem calcular a área de R mediante:

a) integração em relação a x.

b) integração em relação a y.

Solução: Para auxiliar na representação geométrica, iniciamos com as interseções. Como aqui temos três curvas, precisamos fazer a interseção duas a duas:

$$I \cap II: \begin{cases} y = \sqrt{3-x} \\ x + y = -3 \end{cases} \Rightarrow -3 - x = \sqrt{3-x} \Rightarrow (-3-x)^2 = 3 - x$$

$$\Rightarrow 9 + 6x + x^2 = 3 - x \Rightarrow x^2 + 7x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ x = -6. \end{matrix}$$

Substituindo $x = -1$ na primeira equação, obtemos $y = 2$ e, substituindo na segunda, encontramos $y = -2$.

Um absurdo, pois $2 \neq -2$. Isso significa que $x = -1$ é uma interseção “falsa”.

Substituindo $x = -6$ na primeira equação, obtemos $y = 3$ e, substituindo na segunda, também chegamos em $y = 3$.

Isso significa que somente o ponto $A(-6, 3)$ é a interseção desejada.

Exemplo

$II \cap III$: $\begin{cases} x + y = -3 \\ y - x = -1 \end{cases} \Rightarrow \quad -3 - x = -1 + x \quad \Rightarrow \quad -2x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = -1.$

Substituindo $x = -1$ em ambas as equações, obtemos que $y = -2$.

Assim, a interseção é $B(-1, -2)$.

$I \cap III$: $\begin{cases} y = \sqrt{3 - x} \\ y - x = -1 \end{cases} \Rightarrow \quad -1 + x = \sqrt{3 - x} \quad \Rightarrow \quad (-1 + x)^2 = 3 - x$

$$\Rightarrow \quad 1 - 2x + x^2 = 3 - x \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 2.$$

Novamente, substituindo $x = -1$ na primeira equação, obtemos $y = 2$.
Substituindo na segunda, encontramos $y = -2$.
Um absurdo, pois $2 \neq -2$. Isso significa que $x = -1$ é uma interseção "falsa".
Substituindo $x = 2$ tanto na primeira quanto na segunda equação obtemos

$$y = 1.$$

Isso significa que o ponto $C(2, 1)$ é a única interseção que nos interessa.

Exemplo

Com as interseções calculadas, vamos construir a representação geométrica da região.

Para isso, note que, para $y = \sqrt{3-x}$ temos que $y \geq 0$.

Para identificar essa curva, fazemos uma manipulação algébrica:

$$y = \sqrt{3-x} \qquad \Rightarrow \qquad y^2 = 3 - x \qquad \Rightarrow \qquad x = 3 - y^2.$$

Isso significa que a curva é a parte positiva (pois $y \geq 0$) de uma parábola com concavidade voltada para direção negativa do eixo x, ou seja, para a esquerda.

Além disso, as outras curvas são tais que

$$x + y = -3 \qquad \Rightarrow \qquad y = -3 - x \qquad \text{(reta decrescente)}$$

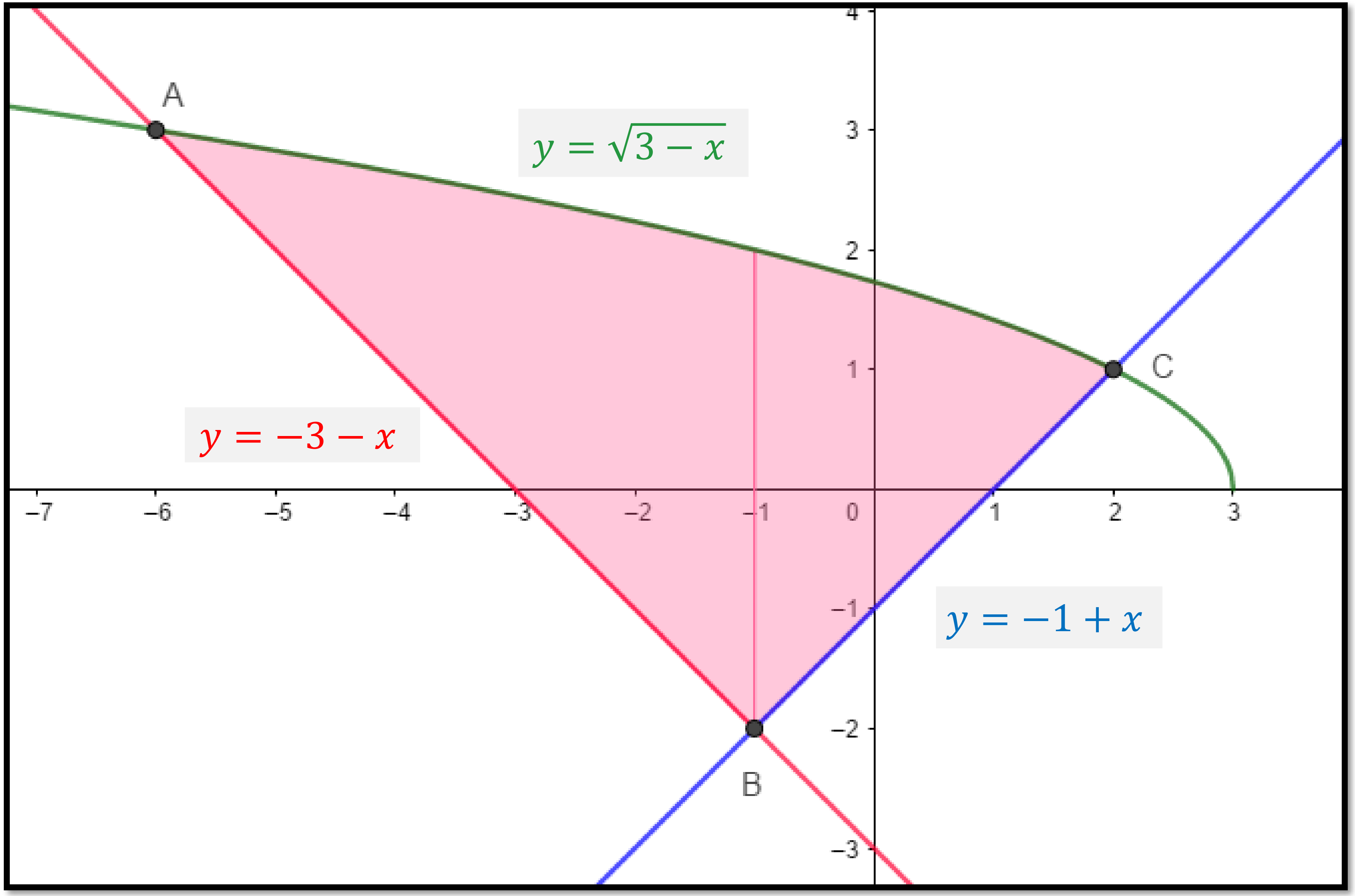
e

$$y - x = -1 \qquad \Rightarrow \qquad y = -1 + x \qquad \text{(reta crescente).}$$

Assim, podemos representar geometricamente a região desejada:

Exemplo

A região desejada é:

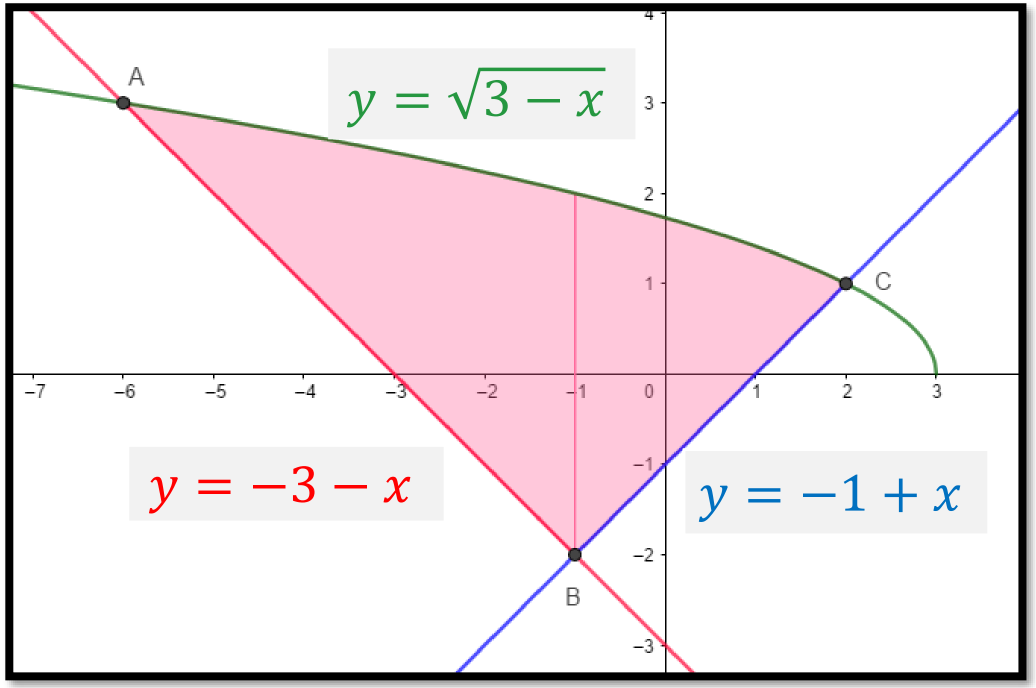


Exemplo

a) Para a integração em x, note que há uma "troca" de limitação da curva inferior quando $x = -1$:

Para $x \in [-6, -1]$, a curva superior é $y = \sqrt{3 - x}$ e a inferior é $y = -3 - x$.

Para $x \in [-1, 2]$, a superior é $y = \sqrt{3 - x}$ e a inferior, $y = -1 + x$.



Sempre que ocorrer troca de limitação na curva inferior (ou superior), deve-se usar uma soma de integrais!

Por isso, precisamos usar uma soma de duas integrais. Assim, temos que:

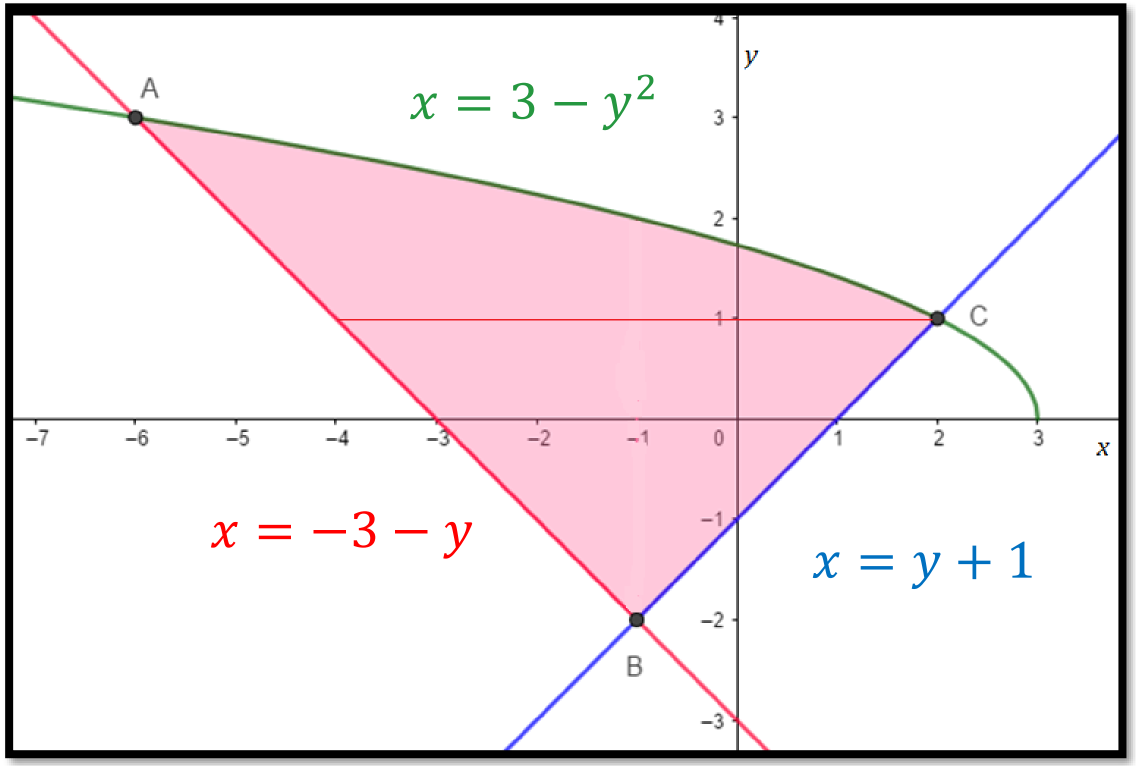
$$A(R) = \int_{-6}^{-1} \sqrt{3 - x} - (-3 - x)\, dx + \int_{-1}^{2} \sqrt{3 - x} - (-1 + x)\, dx$$

$$= \int_{-6}^{-1} \sqrt{3 - x} + 3 + x \, dx + \int_{-1}^{2} \sqrt{3 - x} + 1 - x \, dx.$$

A resolução dessas integrais fica como exercício!

Exemplo

b) Para a integração em y:



Para $y \in [-2, 1]$, a curva da direita é *reta azul*, e a curva da esquerda é *reta vermelha*.
Para $x \in [1, 3]$, a curva da direita é a *parábola verde* e a a curva da esquerda é *reta vermelha*.

Note que quando $y = 1$ ocorre uma "troca" de limitação da curva à direita.

Além disso, precisamos inverter as funções, colocando-as na forma $x = x(y)$:

$$y = \sqrt{3 - x} \quad \Rightarrow \quad x = 3 - y^2$$

$$x + y = -3 \quad \Rightarrow \quad x = -3 - y$$

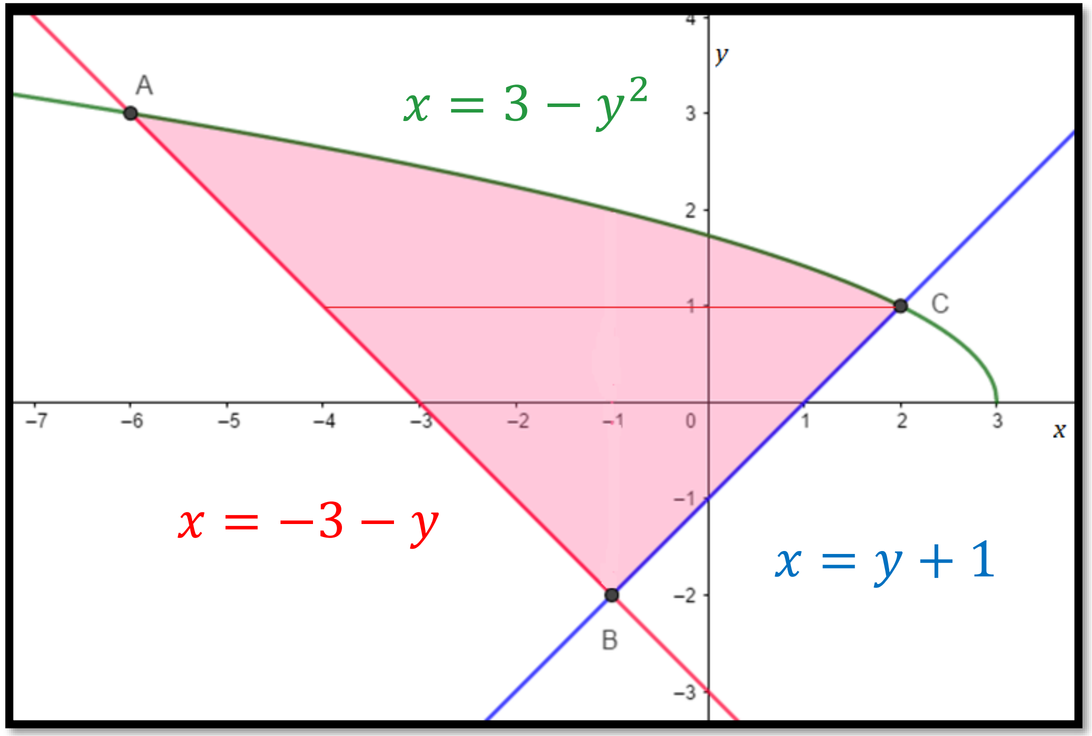
$$y - x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = y + 1$$

Exemplo

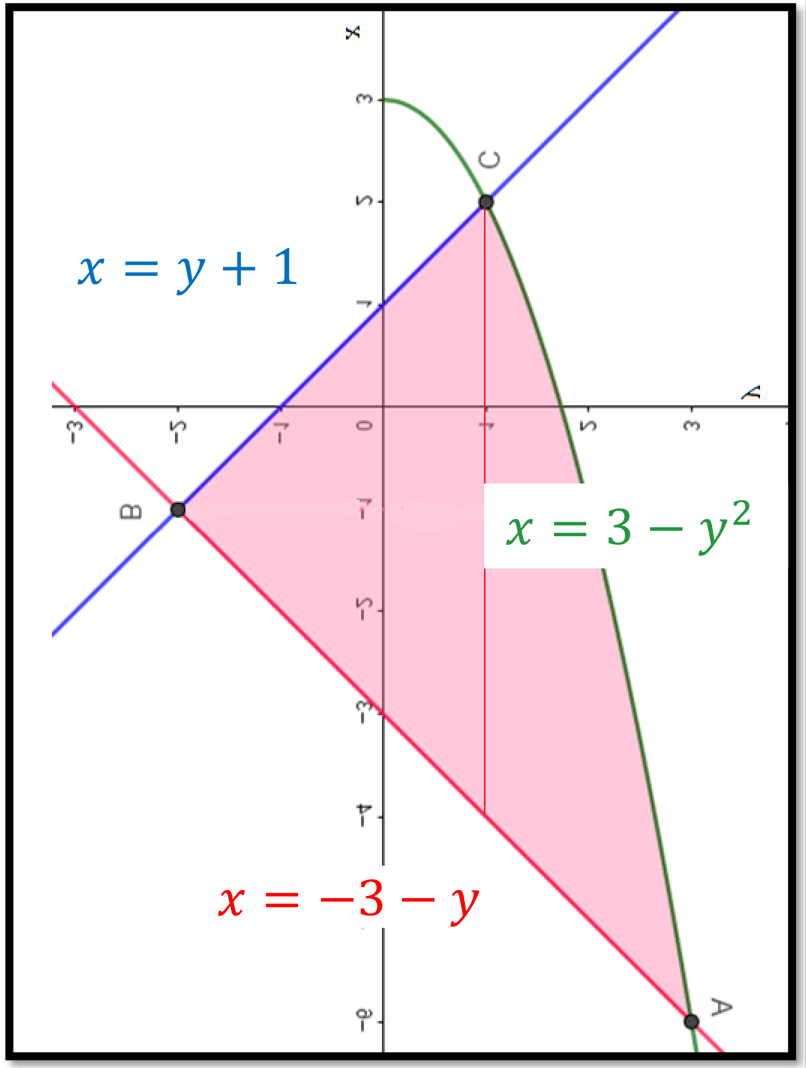
Devido à troca de limitação na curva à direita em $y = 1$, precisamos usar duas integrais:

$$A(R) = \int_{-2}^{1} (y+1) - (-3-y)\, dy + \int_{1}^{3} (3-y^2) - (-3-y)\, dy$$

$$= \int_{-2}^{1} (2y+4)\, dy + \int_{1}^{3} (6 - y^2 + y)\, dy$$



Invertendo os eixos:



A resolução das integrais fica como exercício!

Exemplo OPCIONAL

Exemplo 3 - OPCIONAL) Considere a região R que é simultaneamente interior às curvas $9x^2+y^2=9$ e $y=2x^2$. Escreva (não é preciso resolver) as integrais que permitem calcular a área de R mediante:

a) integração em relação a x.

b) integração em relação a y.

Solução: Iniciamos com as interseções:

$$\begin{cases} 9x^2+y^2=9 \\ y=2x^2 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2=\frac{y}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{9y}{2}+y^2=9 \quad \Rightarrow \quad 2y^2+9y-18=0$$

$$\Rightarrow \quad y=\frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad y=\frac{-17}{2}.$$

Quando $y=\frac{3}{2}$, temos $x^2=\frac{3}{4}$ e $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Quando $y=\frac{-17}{2}$, temos $x^2=\frac{-17}{4}$ e $x\notin\mathbb{R}$.

Portanto, as interseções desejadas são $P\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$ e $Q\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Exemplo

Manipulando as equações:

$$9x^2 + y^2 = 9 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + \frac{y^2}{9} = 1,$$

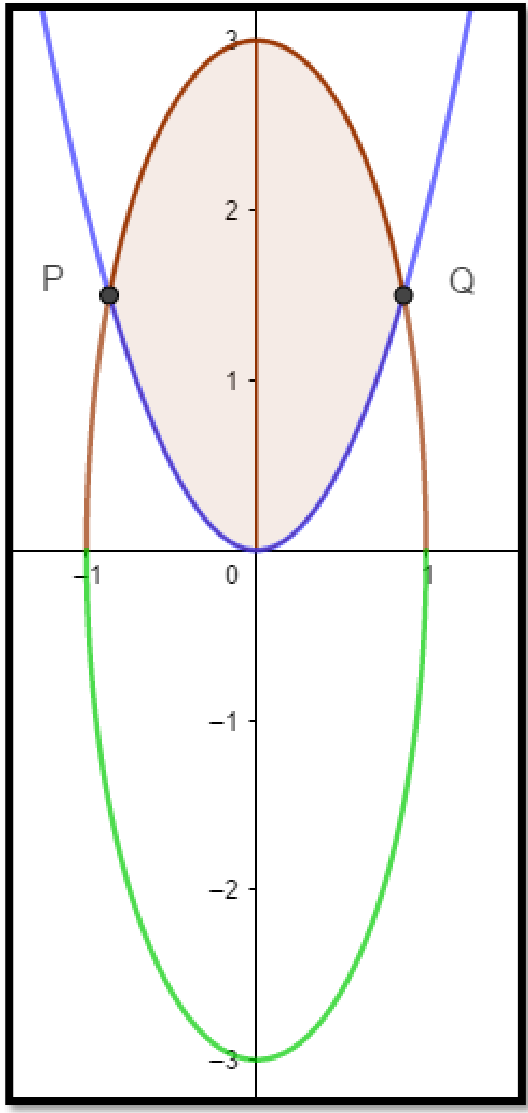
que é uma elipse, com centro em $(0,0)$ e semieixos $a = 1$ e $b = 3$.

Isolando $y = y(x)$, obtemos:

$$9x^2 + y^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 9 - 9x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{9 - 9x^2}$$

e

$$y = 2x^2$$ (parábola com concavidade pra cima).



Geometricamente, a região simultaneamente interior às curvas é:

a) Para a integral em x, como a curva superior é a elipse e a curva inferior é a parábola, obtemos que a área da região é dada por:

$$A(R) = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{9 - 9x^2} - 2x^2 \, dx.$$

Note que usamos a equação da parte superior da elipse, em que $y \geq 0$, por isso usamos

$$y = +\sqrt{9 - 9x^2}.$$

Exemplo

b) Para a integral em y, invertendo as equações, temos que:

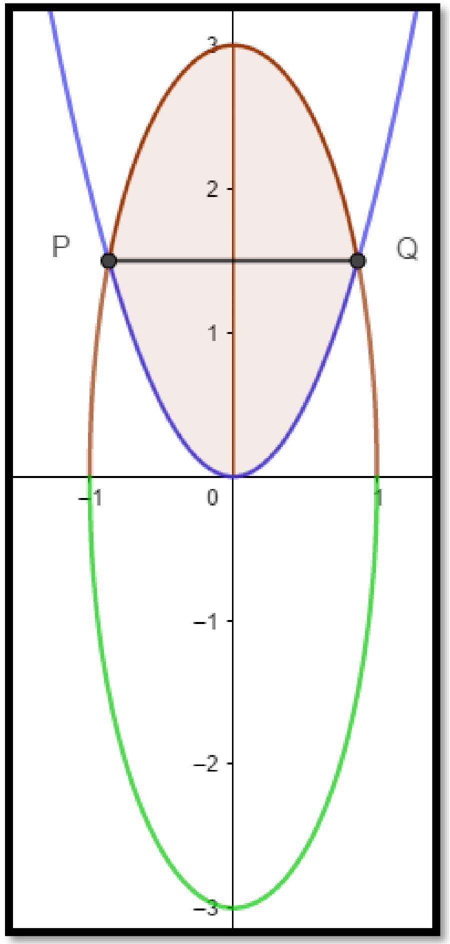
$$9x^2 + y^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{9 - y^2}{9} \quad \Rightarrow \quad x = \pm \frac{\sqrt{9 - y^2}}{3}$$

$$y = 2x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{y}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm \sqrt{\frac{y}{2}}.$$

Note que os sinais negativos representam a porção da curva situados no segundo quadrante (em que $x \leq 0$).

Veja que há uma "troca" na limitação das curvas à esquerda e à direita em

$$y = \frac{3}{2}.$$



Portanto, temos uma soma de integrais:

$$A(R) = \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{y}{2}} - \left(-\sqrt{\frac{y}{2}}\right) dy + \int_{\frac{3}{2}}^{3} \frac{\sqrt{9 - y^2}}{3} - \left(-\frac{\sqrt{9 - y^2}}{3}\right) dy$$

$$= 2\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{y}{2}}\, dy + 2\int_{\frac{3}{2}}^{3} \frac{\sqrt{9 - y^2}}{3} dy.$$

Exercícios da Lista: do 1 ao 33 (item a)

Ainda que não usamos a simetria da região em relação ao eixo y, tal fato surge nas integrais, devido ao fator 2.