Exercícios para entregar

2 6 10 13 14 24

lista 2

12 Intersecção entre a reta e o plano

$$t: \begin{cases} y = 2x+1 \\ z = x-3 \end{cases} \qquad \pi: 2x+2y-3z+4=0$$

- $\vec{v} = (1,2,1)$ é vetor diretor da reta t
- $\vec{n} = (2,2,-3)$ é vetor normal de π

Note que t e π não são paralelos, pois $\vec{v} \cdot \vec{n} = 2+4-3 = 3 \neq 0$. Logo, o único ponto $I(x,y,z)$ da intersecção deve satisfazer

$$\begin{cases} y = 2x+1 & (1) \\ z = x-3 & (2) \\ 2x+2y-3z+4=0 & (3) \end{cases}$$

Substituindo (1) e (2) em (3):

$$2x+2(2x+1)-3(x-3)+4=0$$
$$\Rightarrow 2x+4x+2-3x+9+4=0$$
$$\Rightarrow 3x+15=0$$
$$\Rightarrow x = \frac{-15}{3} = -5$$

$$\Rightarrow \quad y = 2(-5)+1 = -9$$
$$z = -5-3 = -8$$

$$\Rightarrow I(-2,-3,-5).$$

Logo, a reta p desejada passar por $I(-2,-3,-5)$ e é ortogonal aos vetores

- $\vec{v}_1 = (-1,3,1)$ vetor diretor de r
- $\vec{v}_2 = (0,1,2)$ vetor diretor de s.

Então, um vetor $\vec{u}$ diretor de p é

$$\vec{u} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= 6\vec{i} - \vec{k} - (\vec{i} - 2\vec{j})$$
$$= 5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$
$$= (5,2,-1)$$

Portanto, temos

$$p: \quad \frac{x+5}{5} = \frac{y+9}{2} = \frac{z+8}{-1}$$

(10) Determine a posição relativa entre:

(a) as retas $r: \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} y=4x+7 \\ z=x \end{cases}$

- retirar os vetores: $\vec{v}_r = (0,0,1)$
  $\vec{v}_s = (1,4,1)$

- verificar se r e s são paralelas

- se não, pegar um ponto A_r de r e um ponto A_s de s e verificar se

$$(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_rA_s}) = 0.$$

(b) • verificar se r e π são paralelos, ou seja, se $\vec{v} \perp \vec{n}$.

- se $\vec{v} \perp \vec{n}$, verificar se um ponto de r está em π, o que implicaria que r está contida em π.

- se r e π não são paralelos, verificar se são ortogonais, ou seja, se $\vec{v} \parallel \vec{n}$.

(c) • verificar se π_1 e π_2 são paralelos, ou seja, se $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$.

- se não, verificar se são perpendiculares, ou seja, se $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$.

(19) (a) $r: \begin{cases} x-1 = \dfrac{y+1}{-2} \\ z=0 \end{cases}$

$\pi: 2x+y-3z-1=0$

Temos
- $\vec{v} = (1,-2,0)$ vetor diretor de r.
- $\vec{n} = (2,1,-3)$ vetor normal de π.

Observe que r e π são paralelos, pois

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 2-2+0 = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{n}.$$

Além disso, o ponto $A(1,-1,0)$ de r está em π, pois

$$2 \cdot 1 + (-1) - 3 \cdot 0 - 1 = 2-2=0.$$

Portanto, r está contida em π.

(23) (a) Temos $\vec{AB} = (0,3,0)$. Logo, a reta é paralela ao eixo y, ou seja, ortogonal ao plano xz (FALSA)

(b) Temos $\vec{CB} = (-1,0,4)$ e $\vec{CE} = (1,3,-4)$.
O vetor normal do plano é

$$\vec{CB} \times \vec{CE} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

$$= 4\vec{j} - 3\vec{k} - 12\vec{i} - 4\vec{j}$$

$$= -12\vec{i} - 3\vec{k}$$

$$= (-12, 0, -3)$$

Logo, o plano é paralelo ao eixo y.
(VERDADE)

25 (a) $O(0,0,0)$, $P(2,4,3)$, $D(0,4,3)$.

$$\vec{n} = \vec{OP} \times \vec{OD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{matrix}$$

$$= 12\vec{i} + 8\vec{k} - 12\vec{i} - 6\vec{j}$$
$$= -6\vec{j} + 8\vec{k}$$
$$= (0, -6, 8)$$

$\Rightarrow \pi: \; -6y + 8z = 0$

ou

$\pi: \; -3y + 4z = 0$

(b) r passa por $(1,0,0)$ e tem como vetor diretor o vetor $\vec{k} = (0,0,1)$.

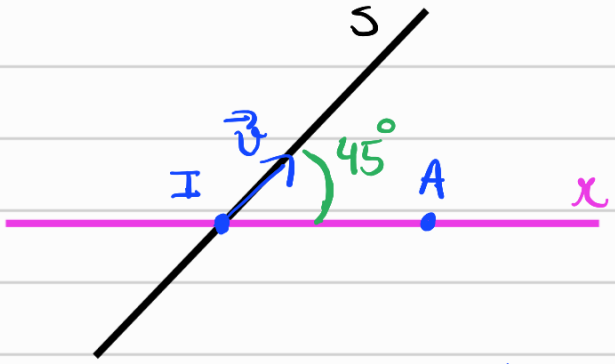
$$\Rightarrow \quad r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

(c) $y = 4$.

(8) r contém o ponto $A(2,-1,1)$ e intercepta

$$s: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$$ segundo um ângulo de $45°$.

Temos



Precisamos encontrar um vetor diretor de r.
Pela figura, podemos usar o vetor $\vec{AI}$.

Sabemos que $\vec{v} = (2,0,1)$ e que

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45° = \frac{|\vec{AI} \cdot \vec{v}|}{|\vec{AI}|\,|\vec{v}|}$$

Como I é um ponto de s, podemos descrevê-lo como

$$I(1+2t, -1, t)$$

para algum $t \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\vec{AI} = (1+2t-2, -1-(-1), t-1)$$
$$= (2t-1, 0, t-1)$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|(2t-1)\cdot 2 + (t-1)\cdot 1|}{\sqrt{(2t-1)^2+(t-1)^2}\,\sqrt{4+0+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|4t-2+t-1|}{\sqrt{4t^2-4t+1+t^2-2t+1}\,\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \left(\frac{|5t-3|}{\sqrt{5t^2-6t+2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = \frac{(5t-3)^2}{5t^2-6t+2}$$

$$\Rightarrow 25t^2-30t+10 = 2(25t^2-30t+9)$$

$$\Rightarrow 50t^2-60t+18-25t^2+30t-10=0$$

$$\Rightarrow 25t^2-30t+8=0$$

$$\Rightarrow t = \frac{30 \pm \sqrt{900-800}}{50} = \frac{30 \pm 10}{50}$$

Logo, temos duas soluções possíveis:

- $t_1 = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$
- $t_2 = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$

- $t_1 = \frac{4}{5} \Rightarrow \vec{AI} = \left(2\cdot\frac{4}{5}-1, 0, \frac{4}{5}-1\right) = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{-1}{5}\right)$

$$// \ (3,0,-1)$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = 2+3t \\ y = -1 \\ z = 1-t \end{cases}$$

• $t_2 = \frac{2}{5} \Rightarrow \vec{AI} = \left(2\cdot\frac{2}{5}-1, 0, \frac{2}{5}-1\right) = \left(\frac{-1}{5}, 0, \frac{-3}{5}\right)$

$\parallel (-1, 0, -3)$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = 2-t \\ y = -1 \\ z = 1-3t \end{cases}$$

(22) (c) $r: \begin{cases} x = 1 \\ z = 2y-6 \end{cases}$

Queremos uma reta $l \perp r$, formando um ângulo de $60°$ com o eixo y e interceptando o eixo x em $x=2$.

• O vetor diretor de r é $\vec{u} = (0,1,2)$

Se $\vec{v} = (a,b,c)$ é o vetor diretor de l, temos

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = 0 \Rightarrow b+2c=0$$
$$\Rightarrow b = -2c$$
$$\Rightarrow \vec{v} = (a, -2c, c)$$

• ângulo entre l e eixo y é $60°$:

$$\frac{1}{2} = \cos 60° = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{j}|}{|\vec{v}||\vec{j}|}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{|-2c|}{\sqrt{a^2+4c^2+c^2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2+4c^2+c^2 = 4\cdot 4c^2$$
$$\Rightarrow \quad a^2 = 16c^2-5c^2$$
$$\Rightarrow \quad a^2 = 11c^2$$
$$\Rightarrow \quad a = \pm\sqrt{11}\,c$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = (\pm\sqrt{11}\,c, -2c, c) \;//\; (\pm\sqrt{11}, -2, 1)$$

Falta descobrir, se devemos usar $+\sqrt{11}$ ou $-\sqrt{11}$.

- ℓ passa pelo ponto $A(2,0,0)$

$$\Rightarrow \ell: \quad \frac{x-2}{\pm\sqrt{11}} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$$

ou seja, temos duas respostas possíveis.

22 (a)
- $\vec{v}_r = (0,1,2)$ $\quad A_r(1,0,-6)$
- $\vec{v}_s = (1,3,-1)$ $\quad A_s(-1,-1,6)$

- r e s não são paralelas
$\Rightarrow$ r e s são concorrentes ou reversas.
Sendo $\overrightarrow{A_rA_s} = (-2,-1,12)$,

$$(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_rA_s}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{matrix}$$

$$= 2-2-(-12+12)$$
$$= 0$$

Portanto, r e s são concorrentes.
Sendo $I(x,y,z)$ o pto de intersecção, temos

$$\begin{cases} x = 1 & (1) \\ z = 2y - 6 & (2) \\ x = -1 + t & (3) \\ y = -1 + 3t & (4) \\ z = 6 - t & (5) \end{cases}$$

(1) e (3) $\Rightarrow$ $1 = -1 + t \Rightarrow t = 2$

$(3) \Rightarrow x = 1$
$(4) \Rightarrow y = -1 + 6 = 5$
$(5) \Rightarrow z = 6 - 2 = 4$

$\Rightarrow I(1,5,4)$.

(b) Determine a eq do plano que contém as retas r e s.

Vimos em (a) que as retas são concorrentes. Logo, o vetor normal ao plano que contém as duas é dado por

$$\vec{n} = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

$$= -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} - 6\vec{i}$$
$$= (-7, 2, -1)$$

O ponto $A(1,0,-6)$ está em r. Logo, está também no plano. Então, temos

$$ax+by+cz+d=0$$

com

$$-7x+2y-z+d=0$$

$$-7\cdot 1+2\cdot 0-(-6)+d=0$$

(A está no plano)

$$\Rightarrow d-1=0$$

$$\Rightarrow d=1.$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: -7x+2y-z+1=0.}$$

Principais tópicos

- Equações da reta r que passa por $P(x_1, y_1, z_1)$ e tem direção $\vec{v} = (a, b, c)$:

paramétricas: $r: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

simétricas: $r: \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$

reduzidas: $r: \begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}$

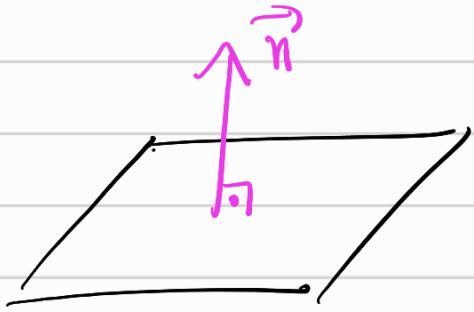
também podemos tomar como vetor diretor $\vec{v} = (1, m, p)$

- posição relativa de duas retas r e s:

(i) verificar se $r \parallel s$ $(\vec{v}_r \parallel \vec{v}_s)$
- se sim, verificar se são coincidentes

(ii) se não são paralelas, verificar se r e s são concorrentes ou reversas, ou seja, se $(\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{A_r A_s}) = 0$, como A_r ponto de r e A_s de s.

- equação do plano passando por $A(x_1, y_1, z_1)$ com vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$:



$$\pi: a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

ou

$$\boxed{\pi: ax + by + cz + d = 0} \quad \text{com} \quad d = -ax_1 - by_1 - cz_1 .$$

- paralelismo e ortogonalidade:
  retas r e s e planos π_1 e π_2

(1) $r \parallel s$ se $\vec{v}_r \parallel \vec{v}_s$
(2) $r \perp s$ se $\vec{v}_r \perp \vec{v}_s$
(3) $\pi_1 \parallel \pi_2$ se $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$
(4) $\pi_1 \perp \pi_2$ se $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$
(5) $r \perp \pi_1$ se $\vec{v}_r \parallel \vec{n}_1$
(6) $r \parallel \pi_1$ se $\vec{v}_r \perp \vec{n}_1$

- Um plano π contém uma reta r se

(1) $\vec{v} \perp \vec{n}$
(2) Um ponto A de r está em π

ou simplesmente se dois pontos A e B de r estão em π.

- ângulos

(1) entre retas r e s:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r||\vec{v}_s|} \qquad 0 \leq \theta \leq 90^\circ$$

(2) planos π_1 e π_2:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|} \qquad 0 \leq \theta \leq 90^\circ$$

(3) reta r e plano π:

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|} \qquad 0 \leq \phi \leq 90^\circ$$

- Sempre lembrar que $\vec{u} \times \vec{v}$ gera um vetor simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$.