Regra da Cadeia

Exemplo 1. Sejam a e $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Em cada item, obtenha a primeira derivada de y com relação à x, ou seja, determine $\frac{dy}{dx}$, mostrando passo a passo como chegou a conclusão.

$a)\ y = (ax + b)^2$

Expandindo o produto notável, temos que:

$$y = (ax)^2 + 2abx + b^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2$$

Usando as regras de derivação, temos que:

$$y' = \frac{dy}{dx} = (a^2x^2)' + (2abx)' + (b^2)'$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = a^2(x^2)' + 2ab(x)' + 0$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2a^2x + 2ab$$

$$\boxed{y' = \frac{dy}{dx} = 2a(ax + b)}$$

Reescrever a função dada como um produto:

$$y = (ax + b)^2 = (ax + b)\,(ax + b)$$

Pela regra do produto, temos que:

$$y' = u.v' + u'.v$$

$$y' = (ax + b).(ax + b)' + \\ +(ax + b)'.(ax + b)$$

$$y' = (ax + b).a + a.(ax + b)$$

$$\boxed{y' = 2a(ax + b)}$$

Regra da Cadeia

Exemplo 1. Sejam a e $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Em cada item, obtenha a primeira derivada de y com relação à x, ou seja, determine $\frac{dy}{dx}$, mostrando passo a passo como chegou a conclusão.

b) $y = (ax + b)^3$

Reescrever a função dada como um produto:

$$y = (ax + b)^2(ax + b)$$

Pela regra do produto, temos que: $y' = u.v' + u'.v$

$$\frac{dy}{dx} = y' = (ax + b)^2.(ax + b)' + \left((ax + b)^2\right)'.(ax + b)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = (ax + b)^2.a + 2a(ax + b).(ax + b)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = a(ax + b)^2 + 2a(ax + b)^2$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y' = 3a(ax + b)^2}$$

Regra da Cadeia

Exemplo 1. Sejam a e $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Em cada item, obtenha a primeira derivada de y com relação à x, ou seja, determine $\frac{dy}{dx}$, mostrando passo a passo como chegou a conclusão.

c) $y = (ax + b)^4$

Reescrever a função dada como um produto:

$$y = (ax + b)^3(ax + b)$$

Pela regra do produto, temos que: $y' = u.v' + u'.v$

$$\frac{dy}{dx} = y' = (ax + b)^3.(ax + b)' + \left((ax + b)^3\right)'.(ax + b)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = (ax + b)^3.a + 3a(ax + b)^2.(ax + b)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = a(ax + b)^3 + 3a(ax + b)^3$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y' = 4a(ax + b)^3}$$

Regra da Cadeia

Exemplo 1. Sejam a e $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Em cada item, obtenha a primeira derivada de y com relação à x, ou seja, determine $\frac{dy}{dx}$, mostrando passo a passo como chegou a conclusão.

$d)\ y = (ax + b)^n, n > 1$ e $n \in \mathbb{N}^*$

Pelos itens anteriores, temos que:

$$n = 2 \Longrightarrow \quad y = (ax + b)^2 \Longrightarrow y' = 2a(ax + b)$$

$$n = 3 \Longrightarrow \quad y = (ax + b)^3 \Longrightarrow y' = 3a(ax + b)^2$$

$$n = 4 \Longrightarrow \quad y = (ax + b)^4 \Longrightarrow y' = 4a(ax + b)^3$$

$$\vdots$$

Por observação dos casos anteriores, concluímos que:

$$y = (ax + b)^n \Longrightarrow \boxed{y' = na(ax + b)^{n-1}}$$

Exemplo 2. Sejam a e $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Em cada item, obtenha a primeira derivada de y com relação à x, ou seja, determine $\frac{dy}{dx}$, mostrando passo a passo como chegou a conclusão.

a) $y = sen^2(ax),\ a \in \mathbb{R}$

Reescrever a função dada como um produto:

$$y = sen(ax).sen(ax)$$

Pela regra do produto, temos que: $y' = u.v' + u'.v$

$$\frac{dy}{dx} = y' = sen(ax).(sen(ax))' + (sen(ax))'.(sen(ax))$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = sen(ax).a\cos(ax) + a\cos(ax)sen(ax)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y' = 2a\ sen(ax).\cos(ax)}$$

Exemplo 2. Sejam a e $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Em cada item, obtenha a primeira derivada de y com relação à x, ou seja, determine $\frac{dy}{dx}$, mostrando passo a passo como chegou a conclusão.

b) $y = sen^3(ax),\ a \in \mathbb{R}$

Reescrever a função dada como um produto:

$$y = sen^2(ax).sen(ax)$$

Pela regra do produto, temos que: $y' = u.v' + u'.v$

$$\frac{dy}{dx} = y' = sen^2(ax).(sen(ax))' + (sen^2(ax))'.(sen(ax))$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = sen^2(ax).a\cos(ax)\ + 2a\,sen(ax).\cos(ax)\,.sen(ax)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = asen^2(ax).\cos(ax) + 2a\,sen^2(ax).\cos(ax)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y' = 3asen^2(ax).\cos(ax)}$$

Exemplo 2. Sejam a e $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Em cada item, obtenha a primeira derivada de y com relação à x, ou seja, determine $\frac{dy}{dx}$, mostrando passo a passo como chegou a conclusão.

c) $y = sen^4(ax),\ a \in \mathbb{R}$

Reescrever a função dada como um produto:

$$y = sen^3(ax).sen(ax)$$

Pela regra do produto, temos que: $y' = u.v' + u'.v$

$$\frac{dy}{dx} = y' = sen^3(ax).(sen(ax))' + (sen^3(ax))'.sen(ax)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = sen^3(ax).a\cos(ax) + 3a\ sen^2(ax).\cos(ax)\,.\,sen(ax)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = a\ sen^3(ax).\cos(ax) + 3a\ sen^3(ax).\cos(ax)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y' = 4a\ sen^3(ax).\cos(ax)}$$

Exemplo 2. Sejam a e $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Em cada item, obtenha a primeira derivada de y com relação à x, ou seja, determine $\frac{dy}{dx}$, mostrando passo a passo como chegou a conclusão.

d) $y = sen^n(ax),\ a \in \mathbb{R}, n > 1$ e $n \in \mathbb{N}^*$

Pelos itens anteriores, temos que:

$$n = 2 \Longrightarrow \ y = sen^2(ax) \Longrightarrow y' = 2a\, sen(ax)\cos(ax)$$

$$n = 3 \Longrightarrow \ y = sen^3(ax) \Longrightarrow y' = 3a\, sen^2(ax)\cos(ax)$$

$$n = 4 \Longrightarrow \ y = sen^4(ax) \Longrightarrow y' = 4a\, sen^3(ax)\cos(ax)$$

$$\vdots$$

Por observação dos casos anteriores, concluímos que:

$$y = sen^n(ax) \Longrightarrow \boxed{y' = na\, sen^{n-1}(ax)\cos(ax)}$$

Exemplo 3. Sejam a e $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Em cada item, obtenha a primeira derivada de y com relação à x, ou seja, determine $\frac{dy}{dx}$, mostrando passo a passo como chegou a conclusão.

a) $y = ln^2(ax),\ \ a \in \mathbb{R}$

Reescrever a função dada como um produto:

$$y = ln(ax).ln(ax)$$

Pela regra do produto, temos que: $y' = u.v' + u'.v$

$$\frac{dy}{dx} = y' = ln(ax).(ln(ax))' + (ln(ax))'.ln(ax)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = ln(ax).\frac{1}{x} + \frac{1}{x}.ln(ax)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y' = \frac{2}{x}ln(ax)}$$

Exemplo 3. Sejam a e $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Em cada item, obtenha a primeira derivada de y com relação à x, ou seja, determine $\frac{dy}{dx}$, mostrando passo a passo como chegou a conclusão.

b) $y = ln^3(ax),\ \ a \in \mathbb{R}$

Reescrever a função dada como um produto:

$$y = ln^2(ax).\,ln(ax)$$

Pela regra do produto, temos que: $y' = u.\,v' + u'.\,v$

$$\frac{dy}{dx} = y' = ln^2(ax).\,(ln(ax))' + (ln^2(ax))'.\,ln(ax)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = ln^2(ax).\frac{1}{x} + \frac{2}{x}\,ln(ax).\,ln(ax)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{x}\ ln^2(ax)\ + \frac{2}{x}\,ln^2(ax)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y' = \frac{3}{x}\ ln^2(ax)}$$

Exemplo 3. Sejam a e $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Em cada item, obtenha a primeira derivada de y com relação à x, ou seja, determine $\frac{dy}{dx}$, mostrando passo a passo como chegou a conclusão.

c) $y = ln^4(ax), \; a \in \mathbb{R}$

Reescrever a função dada como um produto:

$$y = ln^3(ax).ln(ax)$$

Pela regra do produto, temos que: $y' = u.v' + u'.v$

$$\frac{dy}{dx} = y' = ln^3(ax).(ln(ax))' + (ln^3(ax))'.ln(ax)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = ln^3(ax).\frac{1}{x} + \frac{3}{x}\; ln^2(ax).ln(ax)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{x}ln^3(ax) + \frac{3}{x}\; ln^3(ax)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = y' = \frac{4}{x}ln^3(ax)}$$

Exemplo 3. Sejam a e $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Em cada item, obtenha a primeira derivada de y com relação à x, ou seja, determine $\frac{dy}{dx}$, mostrando passo a passo como chegou a conclusão.

d) $y = ln^n(ax)$, $a \in \mathbb{R}, , n > 1$ e $n \in \mathbb{N}^*$

Pelos itens anteriores, temos que:

$$n = 2 \Longrightarrow \quad y = ln^2(ax) \Longrightarrow y' = \frac{2}{x} ln(ax)$$

$$n = 3 \Longrightarrow \quad y = ln^3(ax) \Longrightarrow y' = \frac{3}{x} ln^2(ax)$$

$$n = 4 \Longrightarrow \quad y = ln^4(ax) \Longrightarrow y' = \frac{4}{x} ln^3(ax)$$

$$\vdots$$

Por observação dos casos anteriores, concluímos que:

$$\boxed{y = ln^n(ax) \Longrightarrow y' = \frac{n}{x} ln^{n-1}(ax)}$$

Exemplo 4. Seja g uma função diferenciável em $\mathbb{R}$. Em cada item, obtenha $\frac{dy}{dx}$, mostrando passo a passo como chegou à conclusão.

a) $y = (g(x))^2$

Reescrever a função dada como um produto:

$$y = g(x).\, g(x)$$

Pela regra do produto, temos que: $y' = u.\, v' + u'.\, v$

$$y' = g(x).\, g'(x) + g'(x).\, g(x) \Longrightarrow \boxed{y' = 2g(x).\, g'(x)}$$

b) $y = (g(x))^3$

Reescrever a função dada como um produto: $y = (g(x))^2.\, g(x)$

Pela regra do produto, temos que:

$$y' = (g(x))^2.\, g'(x) + \left((g(x))^2\right)'.\, g(x)$$

$$y' = (g(x))^2.\, g'(x) + 2g(x).\, g'(x).\, g(x)$$

$$y' = (g(x))^2.\, g'(x) + 2(g(x))^2 g'(x)$$

$$\boxed{y' = 3(g(x))^2 g'(x)}$$

$c)\ y = (g(x))^4$

Reescrever a função dada como um produto: $y = (g(x))^3 . g(x)$

Pela regra do produto, temos que:

$$y' = (g(x))^3 . g'(x) + \left((g(x))^3\right)' . g(x)$$

$$y' = (g(x))^3 . g'(x) + 3(g(x))^2 g'(x) . g(x)$$

$$y' = (g(x))^3 . g'(x) + 3(g(x))^3 g'(x)$$

$$\boxed{y' = 4(g(x))^3 g'(x)}$$

d) $y = (g(x))^n, n > 1$ e $n \in \mathbb{N}^*$

Pelos itens anteriores, temos que:

$$n = 2 \Longrightarrow \ y = (g(x))^2 \Longrightarrow y' = 2g(x) . g'(x)$$

$$n = 3 \Longrightarrow \ y = (g(x))^3 \Longrightarrow y' = 3(g(x))^2 . g'(x)$$

$$n = 4 \Longrightarrow \ y = (g(x))^4 \Longrightarrow y' = 4(g(x))^3 . g'(x)$$

Por observação dos casos anteriores, concluímos que:

$$y = (g(x))^n \Longrightarrow y' = n(g(x))^{n-1} . g'(x)$$

Caso particular de **regra da cadeia.**

Regra da Cadeia

Pela atividade 4, parece que se $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{R}$, g uma função derivável e $y = (g(x))^n$, então

$$\frac{dy}{dx} = n(g(x))^{n-1} . g'(x)$$

E se ao invés de $f(x) = x^n$ considerássemos qualquer função diferenciável, ou seja, se $y = f(g(x))$, qual é a $\frac{dy}{dx}$?

Definindo $u = g(x)$ a fim de simplificar a escrita, temos que $y = f(g(x)) = f(u)$, desejamos encontrar $\frac{dy}{dx}$.

Pela definição de derivada, temos que:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \left(\frac{\triangle y}{\triangle u} \frac{\triangle u}{\triangle x} \right) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle u} \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle u}{\triangle x}$$

Como $u = g(x) \Rightarrow \triangle u = g(x + \triangle x) - g(x)$.

Assim sendo, se $\triangle x \to 0$, então $\triangle u \to 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\lim_{\triangle u \to 0} \frac{f(u + \triangle u) - f(u)}{\triangle u}}_{f'(u)} . \underbrace{\lim_{\triangle x \to 0} \frac{g(x + \triangle x) - g(x)}{\triangle x}}_{u'} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = f'(u) . u'}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{df}{du} . \frac{du}{dx}}$$

Regra da Cadeia:
Se $y = f(u)$ e $u = g(x)$, f e u são funções diferenciáveis, então

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\, u'(x) \text{ ou } \frac{dy}{dx} = \frac{df}{du} . \frac{du}{dx}$$

Ou:

Se $y = (f \circ g)(x)$, f e g são funções diferenciáveis, então

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) . g'(x)$$

Dessa forma, se $f(x) = x^n$, $y = f(g(x)) = (g(x))^n$, temos que:

$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

$f'(g(x)) = n(g(x))^{n-1}$

Pela regra da cadeia que acabamos de provar, resulta que:

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) . g'(x) = n(g(x))^{n-1} g'(x) .$$

Retornando a tabela de derivadas, tome como exemplo a função:

$$y = sen\left(ax\right) \Rightarrow y' = \underbrace{a}_{u'} \cos\underbrace{\left(ax\right)}_{u}$$

Generalizando, se $f\left(x\right) = sen\left(x\right)$ e g diferenciável, então:

$$y = f\left(g\left(x\right)\right) = sen\left(g\left(x\right)\right)$$

Pela regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = f'\left(g\left(x\right)\right).g'\left(x\right) \quad \underset{\substack{f'\left(x\right) = \cos\left(x\right) \\ f'\left(g\left(x\right)\right) = \cos\left(g\left(x\right)\right)}}{\Rightarrow} \quad \frac{dy}{dx} = \cos\underbrace{\left(g(x)\right)}_{u}.\underbrace{g'\left(x\right)}_{u'}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = u' \cos\left(u\right)}$$

Esse mesmo raciocínio usa-se em todas as funções que já provamos as derivadas.

Tabela de Derivadas

$(x^n)' = nu^{n-1};$

$(uv)' = u'v + v'u;$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2};$

$\left(a^{bx}\right)' = b.a^{bx}\ln a;$

$\left(e^{bx}\right)' = be^{bx};$

$(\log_a(bx))' = \dfrac{1}{x}\log_a e;$

$(\ln(bx))' = \dfrac{1}{x};$

$(\text{sen}\,(ax))' = a\cos(ax);$

$(\cos(ax))' = -a\ \text{sen}(ax);$

$(\text{tg}\,(ax))' = a\sec^2(ax);$

$(\text{cotg}\,(ax))' = -a\ \text{cossec}^2(ax);$

$(\sec(ax))' = a\ \text{tg}(ax)\sec(ax);$

$(\text{cossec}\,(ax))' = -a\ \text{cossec}(ax)\text{cotg}(ax);$

$(\text{senh}\,(ax))' = a\cosh(ax);$

$(\cosh(ax))' = a\ \text{senh}(ax);$

$(\text{tgh}\,(ax))' = a\ \text{sech}^2(ax);$

$(\text{cotgh}\,(ax))' = -a\ \text{cossech}^2(ax);$

$(\text{sech}\,(ax))' = -a\ \text{sech}(ax)\text{tgh}(ax);$

$(\text{cossech}\,(ax))' = -a\ \text{cossech}(ax)\text{cotgh}(ax);$

$(u^n)' = nu'u^{n-1};$

$(uv)' = u'v + v'u;$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2};$

$\left(a^{u}\right)' = u'.a^{u}\ln a;$

$\left(e^{u}\right)' = u'e^{u};$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u}\log_a e;$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u};$

$(\text{sen}\,(u))' = u'\cos(u);$

$(\cos(u))' = -u'\text{sen}(u);$

$(\text{tg}\,(u))' = u'\sec^2(u);$

$(\text{cotg}\,(u))' = -u'\text{cossec}^2(u);$

$(\sec(u))' = u'\text{tg}(u)\sec(u);$

$(\text{cossec}\,(u))' = -u'\text{cossec}(u)\text{cotg}(u);$

$(\text{senh}\,(u))' = u'\cosh(u);$

$(\cosh(u))' = u'\text{senh}(u);$

$(\text{tgh}\,(u))' = u'\text{sech}^2(u);$

$(\text{cotgh}\,(u))' = -u'\text{cossech}^2(u);$

$(\text{sech}\,(u))' = -u'\text{sech}(u)\text{tgh}(u);$

$(\text{cossech}\,(u))' = -u'\text{cossech}(u)\text{cotgh}(u);$