UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Centro de Ciências Tecnológicas - CCT - Joinville
Departamento de Matemática
Lista 2 de Cálculo Diferencial e Integral II
Funções de Várias Variáveis e Diferenciação Parcial

1. Determine, descreva e represente geometricamente o domínio das funções abaixo:
   (a) $f(x,y)=\dfrac{xy-5}{2\sqrt{y-x^2}}$; (b) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$;
   (c) $f(x,y)=x\ln(y^2-x)$; (d) $f(x,y)=\sqrt{y-x}-\sqrt{1-y}$;
   (e) $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{2x^2-y}{4-x^2-y^2}}$; (f) $f(x,y,z)=\ln(16-x^2-y^2-4z^2)$.

2. Represente geometricamente as superfícies de equações:
   (a) $x^2+y^2+z^2=25$; (b) $x^2+y^2-z^2=25$;
   (c) $9x+4y+12z=36$; (d) $z^2-x^2-y^2=0$.

3. Dada a função $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$, determine as curvas de nível $z=\frac{1}{4}, z=4$ e $z=9$. A seguir, faça um esboço do gráfico desta função.

4. Descreva e represente geometricamente as superfícies de nível de $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$.

5. Usando a definição mostre que:
   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)}(3x+2y)=8$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,3)}(2x-4y)=-10$.

6. Em cada exercício abaixo verifique se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe. Justifique a sua resposta.

   (a) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ (b) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ (c) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

   (d) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}$ (e) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^2}$ (f) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$

7. Calcule, se possível, o valor dos limites abaixo. Justifique a sua resposta.
   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{2x(y-2)}{3x^2+y^2-4y+4}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,0)}\frac{(x-3)^5y^2+(x-3)^4y^4}{(x^2-6x+9+y^6)^3}$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(2,1,0)}\frac{(x+y+z-3)^5}{(x-2)(y-1)z^3}$ (d) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{x^2y^2z^2}{x^6+y^6+z^6}$

8. Calcule o valor dos seguintes limites usando as propriedades:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} e^{x-y}[\ln(x^2-y^2)-\ln(x-y)]$;

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2}$;

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\sqrt{2},1)} \sqrt{\frac{x^2-2}{x^2y+x^2-2y-2}}$;

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}}$;

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$;

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,2)} \frac{(x^2-5x+6)(y^4-16)}{(x-3)(y-2)}$;

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{\sin(x-y)+\sin(y)}{xy}$.

9. Use as propriedades de limite para determinar o valor de $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,4)} g(x,y)$, sendo

$$\lim_{(x,y)\to(4,4)} \left[\frac{(x-y)g(x,y)}{x^2-y^2} + \cos(x-y)\right] = \frac{1}{2}.$$

10. Se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \{xf(x,y)+e^{y-x}[\ln(x^2-y^2)-\ln(x-y)]\} = \ln 2$, determine o valor de $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$.

11. Em cada item verifique se a função f é contínua, justificando sua resposta.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{ se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, \text{ se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{(x+y+z+1)^2}{(x-1)^2+y^4+(z+2)^2}, & \text{se } (x,y,z)\neq(1,0,-2) \\ 1, & \text{se } (x,y,z)=(1,0,-2) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5xy^2-3x^2y}{2x^2+y^4}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy-2x}{x^2+y^2+2x-4y+5}, & \text{se} \quad (x,y)\neq(-1,2) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y)=(-1,2) \end{cases}$.

(g) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3y^4(x+1)^4}{(y^4+x^2+2x+1)^3}, & \text{se } (x,y) \neq (-1,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (-1,0) \end{cases}$

12. Determine se a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2(y-2)}{x^2+y^2-4y+4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,2) \\ b, & \text{se } (x,y) = (0,2) \end{cases}$ é contínua em $(0,2)$ para algum valor de $b \in \mathbb{R}$. Justifique sua resposta com argumentos consistentes, explicitando o valor de b e uma relação entre ε e δ, se for o caso.

13. Determine se a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x^2y+y^2}{2x^2+2y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ b, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua na origem para algum valor de $b \in \mathbb{R}$. Justifique sua resposta com argumentos consistentes, explicitando o valor de b e uma relação entre ε e δ, se for o caso.

14. Determine se a função $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{(x-3)(y+2)(z-1)^2}{(2x+y-3z-1)^4}, & \text{se } (x,y,z) \neq (3,-2,1) \\ b, & \text{se } (x,y,z) = (3,-2,1) \end{cases}$ é contínua em $(3,-2,1)$ para algum valor de b. Justifique sua resposta com argumentos consistentes.

15. Utilize argumentos consistentes para calcular, se existir, o valor de $f(0,0)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua dada por
$$f(x,y) = 1 + xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

16. Escreva as funções abaixo na forma de funções composta e encontre as derivadas parciais em relação a x e y.

    (a) $z = \ln\sqrt{x^2e^{2y}+x^2e^{-2y}}$ $\qquad$ (b) $z = \ln\left((e^{x+y^2})^2+x^2+y\right)$

    (c) $z = x^2\cos^2 y + 2x^2 \sin y \cos y + x^2 \sin^2 y$ $\qquad$ (d) $z = \sqrt{x+y^2+(x^2e^{-2y})^3}$

17. Usando a regra da cadeia, encontre as derivadas parciais de

    (a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}$ $\qquad$ (b) $f(x,y) = \ln\sqrt[3]{(x^2+y^2)+(2x+y^2x^2)}$

18. Mostre que $z = \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) + \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$ é solução da equação diferencial $y\dfrac{\partial z}{\partial y} + x\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$.

19. Verifique se a função $f(x,y,z) = x^2\sin\left(\dfrac{y}{z}\right) + y^2\ln\left(\dfrac{z}{x}\right) + z^2e^{x/y}$ é uma solução da equação diferencial parcial $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} = 2f$.

20. Se $z = \ln(x^2+y^2)$ mostre que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

21. Verifique se a função $f(x,y) = e^{xy} + \ln\left(\dfrac{2y^2}{x^2}\right)$ é uma solução da equação diferencial parcial $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{y}{x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2xye^{xy}$.

22. Se $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ mostre que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

23. Sejam $f(x,y,z) = x^3y^4z^5 + x \sin yz$ e $g(x,y) = e^x \ln y$. Encontre todas as derivadas parciais de f e g até a terceira ordem.

24. Determine uma equação para o plano que é tangente à superfície $-2x^2 + y^2 = \dfrac{-z}{2}$, no ponto $P(-1,1,2)$.

25. Encontre a equação do plano tangente à superfície $-12x^2 + 3y^2 - z = 0$, no ponto $P(1,4,36)$.

26. Encontre um ponto da superfície $z = 3x^2 - y^2$ onde seu plano tangente é paralelo ao plano $6x + 4y - z = 5$.

27. Sabendo que o plano $2x + y + 3z - 6 = 0$ é paralelo ao plano tangente ao gráfico de $z = f(x,y)$, no ponto $P(1,1,1)$, calcule os valores de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

28. Mostre que todos os planos tangentes ao gráfico de $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ passam pela origem.

29. Determine a equação do plano π que passa pelos pontos $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$.

30. Considere as funções $f(x,y) = 2 + x^2 + y^2$ e $g(x,y) = -x^2 - y^2$. Determine:
    (a) a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x,y)$ no ponto $(1,2,7)$;
    (b) o ponto no gráfico de $z = g(x,y)$ em que o plano tangente seja paralelo ao plano obtido no item (a).

31. Considere a função de duas variáveis $f(x,y) = \sqrt{100 + 4y^2 - 25x^2}$.
    (a) Determine o domínio de $f(x,y)$.
    (b) Determine o ponto sobre o gráfico de $z = f(x,y)$ tal que o plano tangente a $z = f(x,y)$ neste ponto seja ortogonal ao vetor $\vec{v} = (0,\ 1,\ 2)$.

32. Considere a função de duas variáveis $f(x,y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$. E seja C a curva de interseção do gráfico de $z = f(x,y)$ com o plano $y = 2$.
    (a) Determine o domínio de $f(x,y)$.
    (b) Determine a equação da reta tangente à curva C no ponto $(1,2,\sqrt{11})$.

33. Seja $w = (x^2+y^2+z^2)^k$. Determine para quais valores de k a igualdade $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$ é satisfeita.

34. Seja $z = f(u)$, com $u = x + ay^2$. Prove que $\dfrac{\partial z}{\partial y} - 2ay\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$.

35. Seja $f(x-y, y-z, z-x)$ uma função diferenciável. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}$.

36. Dada uma função $f\left(\dfrac{y-x}{xy}, \dfrac{z-y}{yz}\right)$, calcule $x^2\dfrac{\partial f}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial f}{\partial y} + z^2\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

37. Seja f uma função diferenciável qualquer e considere $w = x^3 f\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{x}{z}, \dfrac{z}{x}\right)$. Mostre que w satisfaz a equação diferencial parcial $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} + z\dfrac{\partial w}{\partial z} = 3w$.

38. Seja $w = f(x^2 - at) + g(x + at^2)$, onde f e g são funções diferenciáveis e $a \in \mathbb{R}$. Calcule $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ e $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

39. Seja $w = f(u) + g(v)$ uma função diferenciável, onde $u(x,t) = x^2 + t^2$ e $v(x,t) = x^2 - t^2$. Mostre que
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 4\frac{df}{du} + 4(x^2+t^2)\left(\frac{d^2 f}{du^2} + \frac{d^2 g}{dv^2}\right).$$

40. Seja $w = f(x,y)$ uma função diferenciável, onde $x(r,\theta) = r\cos\theta$ e $y(r,\theta) = r\sin\theta$. Mostre que
$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2.$$

41. Considere a função $g(t) = t \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}(2t, t^3)$, em que $f(x,y)$ é uma função de duas variáveis com derivadas parciais de primeira e segunda ordem contínuas. Determine $g'(t)$.

42. Sejam $f(u,v)$ uma função de duas variáveis diferenciável e $F(x,y)$ uma função de duas variáveis definida por
$$F(x,y) = f(\sin x,\ \cos y).$$
Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,1) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(0,1) = 2$, calcule $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0)$.

43. Sejam $f(u,v)$ e $g(x,y)$ funções de duas variáveis que admitem derivadas parciais de primeira ordem. Se $g(x,y) = f(\sqrt{x^3} + \ln(y) + 1,\ \cos(x) + \sqrt{y^2+3})$, $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,3) = 6$ e $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,3) = 2$, determine a equação do plano tangente a superfície $z = g(x,y)$ no ponto $(0,1,10)$.

44. A areia é derramada num monte cônico na velocidade de $4\ m^3$ por minuto. Num dado instante, o monte tem $6\ m$ de diâmetro e $5\ m$ de altura. Qual a taxa de aumento da altura nesse instante, se o diâmetro aumenta na velocidade de 2 *centímetros* por minuto?

45. A resistência R, em ohms, de um circuíto é dada por $R = \frac{E}{I}$, onde I é a corrente em amperes e E é a força eletromoriz em volts. Num instante, quando $E = 120V$ e $I = 15A$, E aumenta numa de velocidade $0,1V/s$ e I diminui à velocidade de $0,05A/s$. Encontre a taxa de variação instantânea de R.

46. Num determinado circuito elétrico, a corrente I é dada em função da voltagem V, da resistência R e da indutância L por $I = \dfrac{V}{\sqrt{R^2 + 10L^2}}$. No instante em que V é 210 *volts*, R é igual a 3 *ohms* e

está decaindo a uma taxa de $0,1$ ohm por segundo, enquanto L é igual a 2 $henrys$ e está crescendo a uma razão de $0,05$ $henry$ por segundo. Qual deve ser a variação de V, neste instante, para que a corrente permaneça constante?

47. Um reservatório de areia tem o formato de uma pirâmide invertida de base quadrada. A taxa de vazão da areia deste reservatório diminui a uma velocidade de $40\pi\ cm^3/min$. Esta areia forma no chão um monte cônico. O volume total de areia no reservatório era $243\pi\ cm^3$. Determine a velocidade com que aumenta a altura do cone quando um terço da areia já caiu do reservatório. Sabendo que neste instante a altura do monte é $3\ cm$ e o raio aumenta uma taxa de $0,3\ cm/min$.

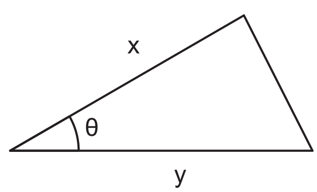
48. Use a lei do gás comprimido $PV = kT$, com $k = 10$, para encontrar a taxa de variação instantânea da temperatura no instante em que o volume do gás é $120cm^3$ e está sob uma pressão de $8din/cm^2$, a taxa de crescimento é 2 cm$^3/s$, a pressão decresce a taxa de 0,1 din/cm$^2 \cdot s$.

49. A energia consumida num resistor elétrico, em função da voltagem V e da resistência R é dada por $P = \dfrac{V^2}{R}$. Deseja-se que um determinado resistor tenha uma voltagem de 200 $volts$ e uma resistência de 20 ohms.

    (a) Qual deverá ser a variação na resistência para que a energia consumida nesse resistor fique praticamente inalterada quando a voltagem sofrer um decréscimo de $0,2$ $volts$?

    (b) Se esse resistor consumir 3 % a mais que a energia desejada quando sua resistência for 1 % menor que a desejada, qual será a variação percentual da sua voltagem?

50. Considere o triângulo da figura abaixo.



Num dado instante temos que $x = 40$cm, $y = 50$cm e $\theta = \dfrac{\pi}{6}$rad.

   (a) Se o comprimento x e o ângulo θ aumentam a uma taxa de 3cm/s e 0.05rad/s, respectivamente, e o comprimento y diminui a uma taxa de 2cm/s, determine a taxa de variação da área deste triângulo em relação ao tempo.

   (b) Suponha que ao realizar a medida dos comprimentos dos lados, x e y, e do ângulo, θ, foi cometido um erro. Em relação a qual destas variáveis o valor da área é mais sensível? Justifique sua resposta usando diferenciais.

51. O ângulo central de um setor circular é $80°$ e o raio desse setor é $20\ cm$. Qual deverá ser o acréscimo a ser dado no raio para que a área deste setor circular fique aproximadamente inalterada quando o ângulo central sofrer um decréscimo de $1°$?

52. A pressão P (em quilopascals), o volume V (em litros) e a temperatura T (em kelvins) de um mol de um gás ideal estão relacionados por meio da fórmula $PV = 8,31T$. Determine a taxa de variação da pressão quando a temperatura é 300K e está aumentando a uma taxa de 0,1K/s e o volume é 100L e está aumentando com a taxa de 0,2L/s.

53. A fórmula do tamanho do lote de Wilson em economia diz que a quantidade mais econômica Q de produtos para uma loja pedir é dada pela fórmula $Q = \sqrt{\frac{2KM}{h}}$, onde K é o custo do pedido, M é o número de itens vendidos por semana e h é o custo semanal de manutenção de cada item. Se $K = 2$, $M = 20$ e $h = 0,05$, determine:

    (a) para qual das variáveis K, M e h a sensibilidade de Q é maior? Justifique sua resposta usando diferenciais.

    (b) a variação do número de itens vendidos por semana se Q e K aumentam 10% e o custo semanal de manutenção de cada item permanece constante.

54. Um pintor cobra $R\$12,00$ por m^2 para pintar as 4 paredes e o teto de uma sala. Se as medidas do teto são $12m$ e $15m$ e altura $3m$, com um erro de até $0,05m$ em todas as dimensões. Aproxime o erro, usando a diferencial, na estimativa do custo do trabalho, a partir dessas medidas.

55. A energia consumida num resistor elétrico é dada por $P = \frac{V^2}{R}$watts. Se $V = 120$ volts e $R = 12$ ohms, calcular através da diferencial um valor aproximado para a variação de energia quando V decresce de $0,001V$ e R aumenta de $0,02$ ohms.

56. Um material está sendo escoado de um recipiente, formando uma pilha cônica. Num dado instante, o raio da base é de 12 cm e a altura é 8 cm . Obtenha uma aproximação da variação do volume, se o raio varia para $12,5$ cm e a altura para $7,8$ cm. Compare o resultado da variação obtida com a variação exata do volume.

57. Um funil cônico (sem tampa) de dimensões $h = 4\ m$ e $r = 3\ m$ será construído para auxiliar o armazenamento de grãos. Sabendo que o material utilizado na construção desse funil custa R\$ $150,00$ por m^2. Usando diferencial, responda qual será o acréscimo de custo na construção desse funil se aumentarmos seu raio em 5% e sua altura 3%.

58. Uma caixa em forma de paralelepípedo tem dimensões internas iguais a 7cm, 8cm e 13cm. Sendo a espessura das paredes 0,2cm, do fundo 0,3cm e da tampa 0,1cm, fazer uma estimativa aproximada em cm^3 da quantidade de material necessário a ser usado na confecção da caixa.

59. Uma empresa de cosméticos necessita de latas cilíndricas fechadas com raio de 4 cm e altura de 20 cm para embalar seus produtos. Porém, devido as variações na fabricação, estas embalagens apresentam pequenas oscilações em suas medidas. Diante disso:

    (a) Se um engenheiro de controle de qualidade precisa assegurar que essas embalagens tenham o volume correto, ele deverá se preocupar mais com variações no raio ou na altura? Justifique sua resposta com argumentos usando diferenciais.

    (b) Se o custo de fabricação destas embalagens for de 20 centavos por cm^2, obtenha uma estimativa para o acréscimo (ou decréscimo) no custo ao fabricar-se emba-lagens com altura 2% maior e raio 3% menor em relação ao original.

60. Usando diferencieis encontre uma aproximação para:

    (a) $(1,1)^{3,02}$;

    (b) $\dfrac{\cos(e^{0,2} - 1)}{\sqrt{9,4}}$;

(c) $\sqrt{(3,02)^2 + (1,97)^2 + (5,99)^2}$.

61. Considere a função de duas variáveis dada por $f(x,y) = 2\sqrt{x^2 + \dfrac{y^2}{9} - 1}$.

    (a) Determine e represente geometricamente o domínio de $f(x,y)$.

    (b) Usando diferenciais encontre uma aproximação para $f(1.98,\ 3.3)$.

62. Considere a função de duas variáveis dada por $f(x,y) = \dfrac{x+y-1}{\sqrt{x} - \sqrt{1-y}}$.

    (a) Determine e represente geometricamente o domínio de $f(x,y)$.

    (b) Usando as propriedades de limite calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(4,-3)} f(x,y)$.

    (c) Usando diferenciais encontre uma aproximação para $f(9.06,\ -3.04)$.

63. Dada a superfície $z = -x^2 - y^2 + 6x - 4y - 4$, determine:

    (a) a equação do plano tangente a esta superfície no ponto $P(3,-2,9)$;

    (b) a classificação do ponto $P(3,-2,9)$, se possível, como extremo da superfície.

64. Determine os pontos críticos da função $f(x,y) = 2\ln(x^2y) + \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{5}{2}x^2 - y + 5$ e classifique-os, se possível, como pontos de máximo, mínimo ou de sela.

65. Uma caixa retangular tem volume 20 m^3. O material usado nas laterais custa R$ 1,00 por metro quadrado, o material usado o fundo custa R$ 2,00 por metro quadrado e o material usado na tampa custa R$ 3,00 por metro quadrado. Quais as dimensões da caixa para que o custo de confeção seja mínimo?

66. Sejam $A(0,0), B(4,0)$ e $C(3,3)$ os vértices de um triângulo. Encontre o ponto $P\ (x,y)$ tal que a soma dos quadrados das distâncias do ponto P aos vértices seja a menor possível.

67. Determine as dimensões relativas de uma caixa retangular sem tampa que possua uma área total de 300 cm^2 e que comporte o máximo possível de volume.

68. Uma empresa de embalagem necessita fabricar caixas retangulares de 128 cm^3 de vo-lume. Se o material da parte lateral custa a metade do material a ser usado para a tampa e para o fundo da caixa, determinar as dimensões da caixa que minimizam o seu custo de produção.

69. Uma caixa retangular é colocada no primeiro octante, com um dos seus vértices na origem e três de suas faces coincidindo com os três planos coordenados. O vértice oposto à origem está situado no plano de equação $3x + 2y + z = 6$. Qual é o volume máximo possível de tal caixa? Quais serão as suas dimensões?

70. Uma certa indústria produz dois tipos de ligas metálicas. O custo total da produção dessas ligas é expresso pela função $C(x,y) = x^2 + 100x + y^2 - xy$ e a receita total obtida com a vendas dessas ligas é dada pela função $R(x,y) = 100x - x^2 + 2000y + xy$, onde x e y representam a quantidade de toneladas de cada uma das ligas. Determine o nível de produção que maximiza o lucro dessa indústria.

71. Determinada empresa produz 2 produtos cujas quantidades são indicadas por x e y. Tais produtos são oferecidos ao mercado consumidor a preços unitários p_1 e p_2, respectivamente, que dependem de x e y conforme equações $p_1 = 120 - 2x$ e $p_2 = 200 - y$. O custo total da empresa para produzir e vender quantidades x e y dos produtos é dado por $C = x^2 + 2y^2 + 2xy$. Admitindo que toda a produção seja absorvida pelo mercado, determine a produção que maximiza o lucro.

72. Uma loja vende dois tipos de casacos A e B. O casaco A custa R\$ 40,00 e o casaco B custa R\$ 50,00. Seja x o preço de venda do casaco A e y o preço de venda do casaco B. O total de vendas feito pela loja foi de $(3200 - 50x + 25y)$ unidades do casaco A e $(25x - 25y)$ unidades do casaco B. Encontre os valores de x e y para que o lucro obtido pela loja seja o maior possível.

73. Encontre as coordenadas do ponto que pertence ao plano $x + y - z + 5 = 0$ e cujo quadrado da distância ao ponto $P(3, -2, 1)$ seja mínimo.

74. Suponha que a temperatura em um ponto qualquer da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ seja dada, em graus, por $T(x, y, z) = xyz^2$. Em quais pontos desta esfera a temperatura é máxima? Em quais pontos da esfera a temperatura é mímima?

75. Determine o valor máximo para a soma dos cossenos dos ângulos internos de um triângulo.

76. Determine a equação do plano que é tangente a superfície definida implicitamente por $z^3 - (x^2 + y^2)z + 2 = 0$ no ponto $P(1, 2, 2)$.

77. Sabe-se que a equação $x^2 + z^3 - z - xy \sin z = 1$ define implicitamente uma função $z = f(x, y)$ cujo gráfico passa pelo ponto $P(1, 1, 0)$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto P.

78. Seja $y = y(x)$ uma função definida implicitamente por $x = F(u, v)$, onde F é dife-renciável, $u = x^2 + y$ e $v = y^2$. Determine $\dfrac{dy}{dx}$ em função de x, y e das derivadas de F.

79. Seja $z = z(x, y)$ uma função definida implicitamente por $F(xy, z) = 0$, onde F é uma função diferenciável. Mostre que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

0.1 Respostas

1. (a) Todos os pontos do plano xy acima (ou no interior) do gráfico de $y = x^2$.
   (b) Todos os pontos do plano xy à direita (ou acima) e sobre a reta $y = -1 - x$ excluindo a reta $x = 1$.
   (c) Todos os pontos do plano xy à esquerda (ou no exterior) do gráfico de $x = y^2$.
   (d) Todos os pontos do plano xy que estão abaixo da reta $y = 1$ e à esquerda (ou acima) da reta $y = x$.
   (e) Todos os pontos do plano xy que estão no interior da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ e abaixo ou sobre o gráfico de $y = 2x^2$ ou todos os pontos que estão no exterior de $x^2 + y^2 = 4$ e acima ou sobre o gráfico de $y = 2x^2$.
   (f) Todos os pontos (x, y, z) que estão no interior do elipsóide $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{4} = 1$.

2. .
   (a) *esfera de raio* 5 (b) *hiperbolóide de uma folha*
   (c) *plano* (d) *cone circular*

3. As curvas de nível são circunferências de raio 2, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, respectivamente.

4. As superfícies de nível são ou cones, ou hiperbolóides de uma folha ou hiperbolóides de duas folhas, dependendo se o nível for $k = 0$, $k > 0$ ou $k < 0$, respectivamente.

5. $(a)\ \delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$ $(b)\ \delta = \dfrac{\varepsilon}{6}$

6. .
   (a) *não existe* $(b)\ L = 0,\ com\ \delta = \sqrt{\varepsilon}$ $(c)\ L = 0,\ com\ \delta = \frac{\varepsilon}{2}$
   (d) *não existe* (e) *não existe* (f) *não existe*

   Também pode-se justificar os itens (b) e (c) usando a Proposição **??**.

7. Todos os limites dados não existem.

8. .
   $(a)\ \ln 4$ $(b)\ 1$ $(c)\ 0$

   $(d)\ \frac{\sqrt{2}}{2}$ $(e)\ 0$ $(f)\ 0$

   $(g)\ 32$ $(h)\ -\frac{1}{\pi}$

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(4,4)} g(x, y) = -4$

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x, y) = 0$

11. .
   (a) *contínua*, $com\ \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ (b) *descontínua*

   (c) *descontínua* (d) *descontínua*

(e) *contínua, com* $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ $\quad$ (f) *descontínua* $\quad$ (g) *descontínua*

Também pode-se justificar os itens em que o limite existe usando a Proposição **??**.

12. f é contínua para $b = 0$ e, neste caso, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$.

13. f é contínua para $b = \frac{1}{2}$ e, neste caso, $\delta = \dfrac{2\varepsilon}{3}$

14. f é sempre descontínua, independente do valor de b.

15. $f(0,0) = 1$. Justifica-se pela definição, com $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ ou usando a Proposição **??**.

16. .

$$(a)\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x} \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{e^{2y} + e^{-2y}}$$

$$(b)\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2(e^{2(x+y^2)} + x)}{e^{2(x+y^2)} + x^2 + y} \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4ye^{2(x+y^2)} + 1}{e^{2(x+y^2)} + x^2 + y}$$

$$(c)\ \frac{\partial z}{\partial x} = 2x(1 + \sin(2y)) \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2\cos(2y)$$

$$(d)\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - 6x^5e^{-6y}}{2\sqrt{x + y^2 + (x^2e^{-2y})^3}} \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y + 6x^6e^{-6y}}{2\sqrt{x + y^2 + (x^2e^{-2y})^3}}$$

17. .

$$(a)\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2 - 2xy + 1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2 - 2xy + 1}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$(b)\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x + 2 + 2xy^2}{3(x^2 + y^2 + 2x + x^2y^2)} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y + 2x^2y}{3(x^2 + y^2 + 2x + x^2y^2)}$$

18. Basta derivar e substituir na equação diferencial dada.

19. Sim, f é solução da equação diferencial dada.

20. Basta tomar as derivadas parciais de segunda ordem de z e substituir na equação dada.

21. Sim, f é solução da equação diferencial dada.

22. Basta tomar as segundas derivadas parciais de u e substituir na equação dada.

23. .

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 6y^4z^5 \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 24x^2yz^5 - xz^3\cos yz \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = 60x^3y^4z^2 - xy^3\cos yz$$

$$\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} = e^x \ln y \qquad \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} = \frac{2e^x}{y^3}$$

24. $8x + 4y + z + 2 = 0$.

25. $-24x + 24y - z = 36$

26. $P(1, -2, -1)$

27. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \dfrac{-2}{3}, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \dfrac{-1}{3}$

28. Basta obter a equação do plano tangente num ponto $P(a, b, f(a, b))$ qualquer e mostrar que a origem satisfaz sua equação.

29. $x + 6y - 2z - 3 = 0$

30. (a) $2x + 4y - z - 3 = 0$ (b) $(-1, -2, -5)$

31. (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \; -2 \leq x$ ou $x \geq 2, \; y^2 \geq \frac{25x^2}{4} - 25\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \; -2 \leq x \leq 2, y$ qualquer$\}$;
(b) $P\left(0, -\sqrt{\frac{5}{3}}, 8\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$.

32. (a) Os pontos do plano xy que estão no interior ou sobre a elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$;

(b) $\begin{cases} y &= 2 \\ z - \sqrt{11} &= -\frac{9}{\sqrt{11}}(x-1) \end{cases}$

33. $k = 0$ e $k = -\frac{1}{2}$

34. Utilize a regra da cadeia.

35. Chame $u = x - y, \; v = y - z$ e $w = z - x$,utilize a regra da cadeia e mostre que a soma desejada é zero.

36. Chame $u = \dfrac{y - x}{xy}, \; v = \dfrac{z - y}{yz}$ e utilize a regra da cadeia para mostrar que a soma desejada é zero.

37. Utilize a regra do produto juntamente com a regra da cadeia, com $u = \dfrac{y}{x}, \; v = \dfrac{x}{z}$ e $t = \dfrac{z}{x}$.

38. Se $u = x^2 - at$ e $v = x + at^2$ obtém-se, pela regra da cadeia e do produto:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 4x^2 \frac{d^2 f}{du^2} + 2\frac{df}{du} + \frac{d^2 g}{dv^2} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 4a^2 t^2 \frac{d^2 g}{dv^2} + 2a\frac{dg}{dv} + a^2 \frac{d^2 f}{du^2}.$$

39. Utilize regra da cadeia e regra do produto para obter as derivas segundas.

40. Basta utilizar a regra da cadeia.

41. $g'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(2t, t^3) + 2t \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2t, t^3) + 3t^3 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2t, t^3)$.

42. $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 2$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$.

43. $7y - z + 3 = 0$

44. $\dfrac{dh}{dt} \simeq 0,39\text{m}/\text{min}$

45. $\dfrac{dR}{dt} = \dfrac{1}{30}$ ohms por segundo

46. $\dfrac{dV}{dt} = 3$ volts por segundo

47. $1,28\text{cm}/\text{min}$

48. $0,4$

49. (a) $dR = -0,04$ (b) 1 %

50. (a) $\frac{dA}{dt} \approx 60,8\text{cm}^2/\text{s}$ (b) Em relação a θ.

51. $0,125\text{cm}$

52. $-0,042\text{kPa}/\text{s}$

53. (a) Q é mais sensível em relação à variação de h;
(b) $dM = 4$ que corresponde a uma variação de 10%

54. $dC = 55,8$

55. $dP = -2,02$

56. $dV = 70,371\ cm^3$ $\Delta V = 69,9\ cm^3$

57. $dC = 616,38$

58. $dV = 100,4\text{cm}^3$

59. (a) O engenheiro deve dar maior atenção à variações no raio, pois o volume é 10 vezes mais sensível à variaões no raio do que à variações na altura.

(b) $dC = -221,16$ *centavos*

60. (a) 1,3

(b) $\dfrac{44}{135}$

(c) $\dfrac{2447}{350}$

61. (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x^2 + \dfrac{y^2}{9} \geq 1\}$, ou seja, os pontos no exterior e sobre a elipse de equação $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$

(b) 4,06

62. (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x \geq 0,\ y \leq 1 \text{ e } x + y \neq 1\}$, ou seja, os pontos abaixo e sobre a reta $y = 1$, à esquerda e sobre o eixo y (reta $x = 0$) e não pertencentes a reta $y = 1 - x$.

(b) $\lim_{(x,y)\to(4,-3)} f(x,y) = 4$

(c) 5,02

63. (a) $z - 9 = 0$

(b) P é ponto de máximo

64. $P_1(-2,2)$ e $P_2(2,2)$ são pontos de sela e $P_3(-1,2)$ e $P_4(1,2)$ são pontos de máximo.

65. $x = 2$, $y = 2$, $z = 5$

66. $x = \frac{7}{3}$ e $y = 1$

67. $x = y = 10$, $z = 5$

68. $x = y = 4$, $z = 8$

69. $x = \frac{2}{3}$, $y = 1$, $z = 2$, $V = \frac{4}{3}$

70. $x = 1000$, $y = 2000$

71. $x = 10$, $y = 30$

72. $x = 84$, $y = 89$

73. $x = \frac{4}{3}$, $y = -\frac{11}{3}$, $z = \frac{22}{3}$

74. A temperatura é máxima em $(1,1,\pm\sqrt{2})$ e $(-1,-1,\pm\sqrt{2})$ e a temperatura mínima em $(-1,1,\pm\sqrt{2})$ e $(1,-1,\pm\sqrt{2})$. Note, no entanto, que existem ainda outros 5 pontos de sela.

75. $\dfrac{3}{2}$

76. $-4x - 8y + 7z + 6 = 0$

77. $z = x - 1$

78. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - 2x\dfrac{\partial F}{\partial u}}{\dfrac{\partial F}{\partial u} + 2y\dfrac{\partial F}{\partial v}}$

79. Utilize derivação implícita e regra da cadeia.