LMA0001 - Lógica Matemática
Exercícios Lógica de Predicados
Professora Karina G. Roggia
Monitor: Miguel A. Nunes
Joinville, outubro de 2019

*Em f é garantida a existência de mais de um elemento com tais características, enquanto em g pode haver somente um.

1. Formalize as seguintes sentenças utilizando lógica de predicados.

   (a) Sócrates é um homem. $H(s)$
   (b) Todo homem é mortal. $\forall x.(H(x) \rightarrow M(x))$
   (c) Jonas é um homem e todo homem é mortal. $H(j) \wedge \forall x.(H(x) \rightarrow M(x))$
   (d) Toda cobra é venenosa. $\forall x.(C(x) \rightarrow V(x))$
   (e) Não existe bêbado feliz. $\neg \exists x.(B(x) \wedge F(x))$
   *(f) Alguns políticos não são honestos. $\exists x.\exists y.(P(x) \wedge P(y) \wedge \neg I(x) \wedge \neg I(y) \wedge \neg x=y)$
   *(g) Há aves que não voam. $\exists x.(A(x) \wedge \neg W(x))$
   (h) Todos mentem. $\forall x.(H(x) \rightarrow L(x))$
   (i) Existem pôneis alienígenas. $\exists x.(E(x) \wedge S(x))$
   (j) Todo peixe nada. $\forall x.(X(x) \rightarrow N(x))$
   (k) Algumas aves voam. $\exists x.(A(x) \wedge W(x))$
   (l) Nenhuma ave voa. $\neg \exists x.(A(x) \wedge W(x))$
   (m) Nem tudo que reluz é ouro. $\neg \forall x.(R(x) \rightarrow x=o)$

| SÍMBOLO | SIGNIFICADO |
|---|---|
| H(x) | x é humano |
| M(x) | x é mortal |
| C(x) | x é uma cobra |
| V(x) | x é venenoso |
| B(x) | x é bêbado |
| F(x) | x é feliz |
| P(x) | x é político |
| I(x) | x é honesto |
| A(x) | x é uma ave |
| W(x) | x voa |
| L(x) | x mente |
| E(x) | x é um pônei |
| S(x) | x é um alienígena |
| X(x) | x é um peixe |
| N(x) | x nada |
| R(x) | x reluz |
| s | Sócrates |
| j | Jonas |
| o | ouro |

2. Prove os seguintes sequentes no sistema de dedução natural.

   (a) $\forall x.P(x) \rightarrow Q(a) \vdash \exists x.(P(x) \rightarrow Q(a))$
   (b) $\forall x.(P(x) \vee Q(x)) \vdash \forall x.P(x) \vee \exists x.Q(x)$
   (c) $\forall x.\exists y.(P(x) \vee Q(y)) \vdash \exists y.\forall x.(P(x) \vee Q(y))$
   (d) $\forall x.(\neg P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x.(P(x) \rightarrow Q(x))$
   (e) $\forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x.(P(x) \rightarrow Q(x))$
   (f) $\exists x.(\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vdash \exists x.\neg(P(x) \wedge Q(x))$
   (g) $\exists x.(\neg P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists x.\neg(P(x) \wedge \neg Q(x))$
   (h) $\forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)$
   (i) $\forall x.P(x) \vee \forall x.Q(x) \vdash \forall x.(P(x) \vee Q(x))$
   (j) $\exists x.(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists x.P(x) \wedge \exists x.Q(x)$
   (k) $\exists x.F(x) \vee \exists x.G(x) \vdash \exists x.(F(x) \vee G(x))$
   (l) $\forall x.\forall y.(S(y) \rightarrow F(x)) \vdash \exists y.S(y) \rightarrow \forall x.F(x)$
   (m) $P(b) \vdash \forall x.(x = b \rightarrow P(x))$
   (n) $P(b), \forall x.\forall y.(P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y) \vdash \forall x.((P(x) \rightarrow x = b) \wedge (x = b \rightarrow P(x)))$
   (o) $\exists x.\exists y.(H(x,y) \vee H(y,x)), \neg\exists x.H(x,x) \vdash \exists x.\exists y.\neg(x = y)$
   (p) $\forall x.((P(x) \rightarrow x = b) \wedge (P(x) \rightarrow x = b)) \vdash P(b) \wedge \forall x.\forall y.(P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$
   (q) $P(a) \rightarrow \forall x.Q(x) \vdash \forall x.(P(a) \rightarrow Q(x))$
   (r) $\forall x.\forall y.\forall z.(S(x,y) \wedge S(y,z) \rightarrow S(x,z)), \forall x.\neg S(x,x) \vdash \forall x.\forall y.(S(x,y) \rightarrow \neg S(y,x))$

(s) $\forall x.(P(x) \lor Q(x)), \exists x.\neg Q(x), \forall x.(R(x) \to \neg P(x)) \vdash \exists x.\neg R(x)$

(t) $\forall x.(P(x) \to (Q(x) \lor R(x))), \neg\exists x.(P(x) \land R(x)) \vdash \forall x.(P(x) \to Q(x))$

(u) $\exists x.\exists y.(S(x,y) \lor S(y,x)) \vdash \exists x.\exists y.S(x,y)$

(v) $\exists x.(P(x) \land Q(x)), \forall y.(P(x) \to R(x)) \vdash \exists x.(R(x) \land Q(x))$

3. Considere a seguinte argumentação: * Resolução na página a seguir ;-)

   (a) O mais forte hebreu é Sansão.

   (b) Hércules é mais forte que Sansão.

   (c) Se $a$ é mais forte que $b$, então $b$ não é mais forte que $a$.

   (d) Logo, Hércules não é hebreu.

   Formalize as sentenças acima, e prove a validade da argumentação utilizando dedução natural.

4. Considere o seguinte raciocínio:

   (a) Cloud gosta de Aeris e de Tifa. $G(c,a) \land G(c,t)$

   (b) Não há quem goste de quem feriu alguém que gostamos. $\forall x \forall y \forall z (G(x,y) \land F(z,y) \to \neg G(x,z))$

   (c) Sephiroth feriu Aeris. $F(s,a)$

   (d) Logo, Cloud não gosta de Sephiroth. $\neg G(c,s)$

   Formalize a argumentação acima e apresente uma prova de sua validade no sistema de dedução natural.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $G(c,a) \land G(c,t)$ | premissa |
| 2. | $\forall x \forall y \forall z (G(x,y) \land F(z,y) \to \neg G(x,z))$ | premissa |
| 3. | $F(s,a)$ | premissa |
| 4. | $\forall y \forall z (G(c,y) \land F(z,y) \to \neg G(c,z))$ | $\forall E$ 2 |
| 5. | $\forall z (G(c,a) \land F(z,a) \to \neg G(c,z))$ | $\forall E$ 4 |
| 6. | $G(c,a) \land F(s,a) \to \neg G(c,s)$ | $\forall E$ 5 |
| 7. | $G(c,a)$ | $\land E$ 1 |
| 8. | $G(c,a) \land F(s,a)$ | $\land I$ 7,3 |
| 9. | $\neg G(c,s)$ | $\to E$ 6,8 |

(a) $\forall x\,(H(x) \wedge \neg x = s \rightarrow F(s,x))$

(b) $F(h,s)$

(c) $\forall x\,\forall y\,(F(x,y) \wedge \neg x = y \rightarrow \neg F(y,x))$

(d) $\neg H(h)$

(*Temos ainda que $\neg h = s$)

Dedução

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall x\,(H(x) \wedge \neg x = s \rightarrow F(s,x))$ | premissa |
| 2. | $F(h,s)$ | premissa |
| 3. | $\forall x\,\forall y\,(F(x,y) \wedge \neg x = y \rightarrow \neg F(y,x))$ | premissa |
| 4. | $\neg h = s$ | premissa |
| 5. | $\forall y\,(F(h,y) \wedge \neg h = y \rightarrow \neg F(y,h))$ | $\forall E\,3$ |
| 6. | $F(h,s) \wedge \neg h = s \rightarrow \neg F(s,h)$ | $\forall E\,5$ |
| 7. | $F(h,s) \wedge \neg h = s$ | $\wedge I\,2,4$ |
| 8. | $\neg F(s,h)$ | $\rightarrow E\,6,7$ |
| 9. | $\quad H(h)$ | hipótese |
| 10. | $\quad H(h) \wedge \neg h = s \rightarrow F(s,h)$ | $\forall E\,1$ |
| 11. | $\quad H(h) \wedge \neg h = s$ | $\wedge I\,9,4$ |
| 12. | $\quad F(s,h)$ | $\rightarrow E\,10,11$ |
| 13. | $\quad \perp$ | $\neg E\,8,12$ |
| 14. | $\neg H(h)$ | $\neg I\,9\text{-}13$ |