Continuando...

$$12)\ I = \int \frac{\ln(x)}{x}\, dx$$

Definindo: $u = \ln(x) \Longrightarrow du = \frac{1}{x} dx$

$$I = \int \ln(x)\ \ \frac{1}{x} dx = \int u\, dv = \frac{u^2}{2} + k \Longrightarrow \boxed{I = \frac{ln^2(x)}{2} + k}$$

$$13)\ I = \int \ln(x)\, dx$$

Definindo: $m = \ln(x) \Longrightarrow dm = \frac{1}{x} dx \Rightarrow dx = x\ dm \Rightarrow dx = e^m\ dm$

$$I = \int \ln(x)\, dx = \int m\, e^m\ dm$$

Método da Integração por Partes

Supondo que Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são funções deriváveis, então pela regra do produto, temos que:

$$\frac{d}{dx}[\,u(x).v(x)] = u(x)\,v'(x) + v(x)\,u'(x)\,.$$

Integrando com relação a x, temos que:

$$\int \tfrac{d}{dx}[\,u(x).v(x)]\,dx = \int [u(x)\,v'(x) + v(x)\,u'(x)]\,dx$$

$$\Rightarrow u(x).v(x) = \int u(x)\underbrace{v'(x)\,dx}_{dv} + \int v(x)\underbrace{u'(x)\,dx}_{du}$$

$$\Rightarrow u(x).v(x) = \int u(x)\,dv + \int v(x)\,du$$

$$\Rightarrow \int u(x)\,dv = u(x).v(x) - \int v(x)\,du$$

Esta é a chamada **fórmula de integração por partes.** Omitindo x para simlificar a escrita

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Retornando ao exemplo:

13) $I = \int \ln(x)\, dx$

Definindo: $m = \ln(x) \Longrightarrow dm = \frac{1}{x} dx \Rightarrow dx = x\, dm \Rightarrow dx = e^m\, dm$

$$I = \int \ln(x)\, dx = \int m\, e^m\, dm = \int u\, dv$$

Aplicando a integral por partes, temos que:

$$\begin{cases} u = m \longrightarrow du = dm \\ dv = e^m\, dm \longrightarrow \int dv = \int e^m\, dm \Rightarrow v = e^m \end{cases}$$

$$I = \int m\, e^m\, dm = \int u\, dv = me^m - \int e^m dm = me^m - e^m + \mathrm{k}$$

$$I = e^m(m-1) + \mathrm{k} \Rightarrow I = e^m(m-1) + \mathrm{k} = e^{\ln(x)}(\ln(x) - 1) + \mathrm{k}$$

$$\boxed{I = x(\ln(x) - 1) + \mathrm{k}}$$

Retornando ao exemplo:

13) $I = \int \ln(x)\,dx = \int 1.\ \ln(x)\,dx$

Aplicando a integral por partes, temos que:

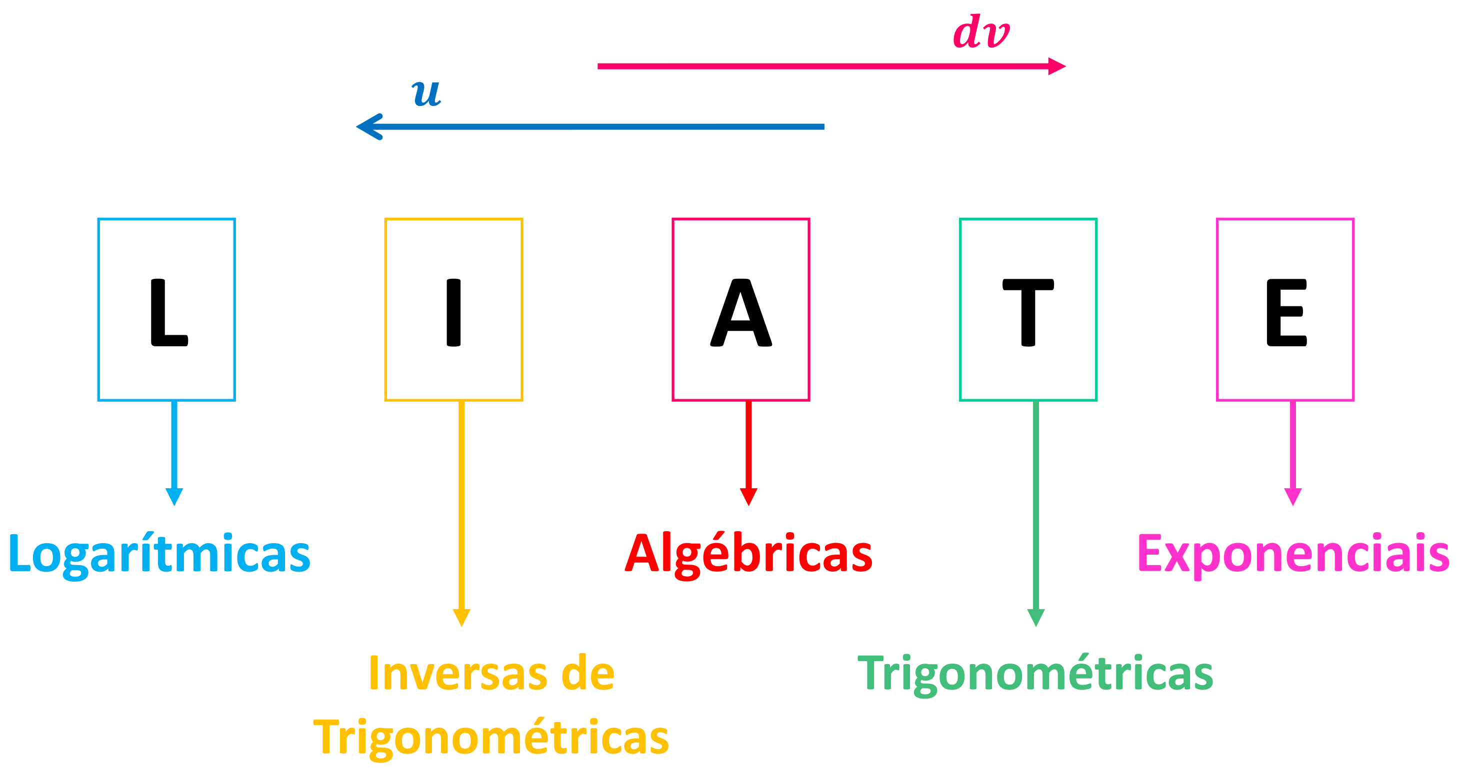
$$\begin{cases} u = \ln(x) \longrightarrow du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = 1\,dx \longrightarrow \int dv = \int 1\ dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$I = \int 1.\ \ln(x)\,dx = \int u\,dv = \ln(x)x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln(x) - \int dx$$

$$I = x\ln(x) - x + c$$

$$\boxed{I = x\,(\ln(x) - 1) + c}$$

Anagrama para auxiliar na escolha, se possível aplica-lo:



Este anagrama aconselha como escolher u e dv, mas nos exemplos veremos que ele não pode ser aplicado a qualquer função que esteja sendo dada no integrando.

14) $I = \int (x^2 + 3) sen(4x)\, dx$

Algébrica

Trigonométrica

$\boldsymbol{dv}$

$\boldsymbol{u}$

14) $I = \int (x^2 + 3)sen(4x)\,dx$

Usando a integração por partes, temos que:

$$\begin{cases} u = x^2 + 3 \longrightarrow du = 2x\,dx \\ dv = sen(4x)\,dx \longrightarrow \int dv = \int sen(4x)\;dx \Rightarrow v = -\dfrac{1}{4}cos(4x) \end{cases}$$

$$I = \int (x^2 + 3)sen(4x)\,dm = \int u\,dv = -\frac{(x^2+3)}{4}cos(4x) + \frac{1}{2}\underbrace{\int cos(4x)\,xdx}_{\text{Por partes}}$$

$$\begin{cases} u = x \longrightarrow du = x\,dx \\ dv = cos(4x)\,dx \longrightarrow \int dv = \int cos(4x)\;dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{4}sen(4x)$$

$$I = \int (x^2+3)sen(4x)\,dm = -\frac{(x^2+3)}{4}cos(4x) + \frac{1}{2}\int cos(4x)\,xdx = -\frac{(x^2+3)}{4}cos(4x) + \frac{1}{2}\int v\,du$$

$$I = -\frac{(x^2+3)}{4}cos(4x) + \frac{1}{2}\left(u\frac{1}{4}sen(4x) - \frac{1}{4}\int sen(4x)\,dx\right)$$

$$\begin{cases} u = x \longrightarrow du = x\,dx \\ dv = cos(4x)\,dx \longrightarrow \boxed{\int dv = \int cos(4x)\;dx \Rightarrow v = \frac{1}{4}sen(4x)} \end{cases}$$

$$I = \int (x^2+3)sen(4x)\,dm = -\frac{(x^2+3)}{4}cos(4x) + \frac{1}{2}\int cos(4x)\,xdx = -\frac{(x^2+3)}{4}cos(4x) + \frac{1}{2}\int v\,du$$

$$I = -\frac{(x^2+3)}{4}cos(4x) + \frac{1}{2}\left(u\frac{1}{4}sen(4x) - \frac{1}{4}\int sen(4x)\,dx\right)$$

$$I = -\frac{(x^2+3)}{4}cos(4x) + \frac{u\,sen(4x)}{8} - \frac{1}{8}\int sen(4x)\,dx$$

$$\boxed{I = -\frac{(x^2+3)}{4}cos(4x) + \frac{u\,sen(4x)}{8} + \frac{1}{32}\cos(4x) + k}$$

Exemplos:

1. $\int \left(x^2+3x\right)\sin\left(2x+1\right)dx$
2. $\int \left(x^2+3\right)\sin\left(x^3+9x\right)dx$
3. $\int e^{-2x}\cos\left(4x\right)dx$
4. $\int \csc^3\left(ax\right)dx$
5. $\int x^2\ln\left(\sqrt{1-x}\right)dx$

Resumindo: As **integrais que contém funções trigonométricas** geralmente resolvem-se pelo método da susbstituição ou método da integração par partes após usar alguma das identidades trigonométricas abaixo:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

$$\sin^2 x=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos\left(2x\right)$$

$$\cos^2 x=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos\left(2x\right)$$

$$\mathrm{tg}^2 x=\sec^2 x-1$$

$$\mathrm{cotg}^2 x=\mathrm{cossec}^2 x-1.$$