Integrais Imediatas

1. $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1;$
2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c;$
3. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c$
4. $\int e^u\,du = e^u + c$
5. $\int \operatorname{sen}(u)\,du = -\cos(u) + c;$
6. $\int \cos(u)\,du = \operatorname{sen}(u) + c;$
7. $\int \sec^2(u)\,du = tg(u) + c;$
8. $\int \operatorname{cossec}^2(u)\,du = -\operatorname{cotg}(u) + c;$
9. $\int \dfrac{du}{u^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{u}{a}\right) + c;$
10. $\int \sec(u)\,du = \ln|\sec(u) + tg(u)| + c;$
11. $\int \operatorname{cossec}(u)\,du = \ln|\operatorname{cossec}(u) - \operatorname{cotg}| + c;$

- Integração por partes: sendo $u = u(x)$ e $v = v(x)$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Uma estratégia é usar $\underset{u}{\overleftarrow{\overrightarrow{\text{LIATE}}^{dv}}}$

Integração de Funções Trigonométricas

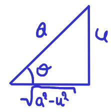
- Integrais do tipo $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ e $\int \cos^n x\,dx$
- Para $n \geq 2$:
  - $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow$ se n for ímpar.
  - $\left.\begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) \\ \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \end{cases}\right\}$ se n for par

Ⓘ O integrando contém a expressão $(a^2-u^2)^{n/2}$:

- $u = a\operatorname{sen}\theta \rightarrow du = a\cos\theta\,d\theta$:

$(a^2-u^2)^{n/2} = (a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta)^{n/2} = [a^2(1-\operatorname{sen}^2\theta)]^{n/2} \Rightarrow$
$= (a^2\cos^2\theta)^{n/2} = a^n\cos^n\theta$

Como $\operatorname{sen}\theta = u/a$, então $\theta = \operatorname{arcsen}(u/a)$

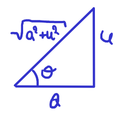


Ⓘⓘ O integrando contém a expressão $(a^2+u^2)^{n/2}$:

- $u = a\,tg\,\theta \rightarrow du = a\sec^2\theta\,d\theta$:

$(a^2+u^2)^{n/2} = (a^2 + a^2 tg^2\theta)^{n/2} = (a^2(1+tg^2\theta))^{n/2} = (a^2\sec^2\theta)^{n/2} \Rightarrow$
$= a^n\sec^n\theta$

Como $tg\,\theta = u/a$ então $\theta = \operatorname{arctg}(u/a)$

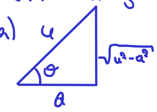


Ⓘⓘⓘ O integrando contém a expressão $(u^2-a^2)^{n/2}$:

$u = a\sec\theta \rightarrow du = a\sec\theta\,tg\,\theta\,d\theta$

$(u^2-a^2)^{n/2} = (a^2\sec^2\theta - a^2)^{n/2} = (a^2(\sec^2\theta - 1))^{n/2} = a^n tg^n\theta$

Como $\sec\theta = u/a$ então $\theta = \operatorname{arcsec}(u/a)$



Regras de Derivação: seja $K \in \mathbb{R}$, $u = u(x)$ e $v = v(x)$:

1. $(K)' = 0$
2. $(u^n)' = n\,u^{n-1}u'$
3. $(Kv)' = K\,v'$
4. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
5. $(u \cdot v)' = uv' + u'.v$
6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{v.u' - u.v'}{v^2}$
7. $(a^u)' = u'.a^u\ln(a)$
8. $(e^u)' = u'\,e^u$
9. $(\operatorname{sen}(u))' = u'\cos(u)$
10. $(\cos(u))' = -u'\operatorname{sen}(u)$
11. $(tg(u))' = u'\sec^2(u)$
12. $(\operatorname{cotg}(u))' = -u'\operatorname{cossec}^2(u)$
13. $(\sec(u))' = u'\sec(u).tg(u)$
14. $(\operatorname{cossec}(u))' = -u'\operatorname{cossec}(u)\operatorname{cotg}(u)$
15. $(\operatorname{senh}(u)) = u'\cosh(u)$
16. $(\cosh(u))' = u'\operatorname{senh}(u)$
17. $(tgh(u))' = u'\operatorname{sech}^2(u)$

- Integração de função envolvendo se e cosseno de arcos diferentes $m \neq n$

I - $\operatorname{sen}(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}((m+n)x) + \operatorname{sen}((m-n)x)]$

II - $\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx) = \frac{1}{2}[\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)]$

III - $\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}[\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)]$

- Integrais do tipo $\int tg^n x\,dx$ e $\int \operatorname{cotg}^n x\,dx$, onde n é inteiro positivo
  - $tg^2 x = \sec^2 x - 1$ e $\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x - 1$ que tem por finalidade obter $\int tg^m x\sec^2 x\,dx$ e $\int \operatorname{cotg}^m x\operatorname{cossec}^2 x\,dx$.

- Integrais do tipo $\int \sec^n x\,dx$ e $\int \operatorname{cossec}^n x\,dx$, onde n é um inteiro positivo
  - $\sec^n x = \sec^{n-2} x\sec^2 x$ ou $\operatorname{cossec}^n x = \operatorname{cossec}^{n-2} x\operatorname{cossec}^2 x\,dx$

e utilizar: $\sec^2 x = tg^2 x + 1$ e $\operatorname{cossec}^2 x = \operatorname{cotg}^2 x + 1$

- Integrais do tipo $\int tg^m(x)\sec^n x\,dx$ e $\int \operatorname{cotg}^m x\operatorname{cossec}^n x\,dx$
  - Quando m for par e n for ímpar, a integral deve ser resolvida por integração por partes. Nos demais casos sai por substituição.

Integrais Por Substituição trigonométrica

- Quando temos $(a^2-u^2)^{n/2}$, $(a^2+u^2)^{n/2}$ ou $(u^2-a^2)^{n/2}$, $n \in \mathbb{N}$ e $a \neq 0$. Usamos $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ou $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

18. $(\operatorname{cotgh}(u))' = -u'\operatorname{cossech}^2(u)$
19. $(\operatorname{sech}(u))' = -u'\operatorname{sech}(u).tgh(u)$
20. $(\operatorname{cossech}(u))' = -u'\operatorname{cossech}(u).\operatorname{cotg}(u)$
21. $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$
22. $(\log_K u)' = \dfrac{u'}{u}\log_K e$
23. $(\operatorname{arcsen}(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
24. $(\arccos(u))' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
25. $(\operatorname{arctg}(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
26. $(\operatorname{arccotg}(u))' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
27. $(\operatorname{arsec}(u))' = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$
28. $(\operatorname{arccsc}(u))' = -\dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

Somas de Riemann. $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$; $x_i = a + i\Delta x$

- $\bar{S}(f^+ cresc) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$; $\underline{S}(f^+ cresc) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$
- $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} S(f) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$
- $\bar{S}(f^+ decresc) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x = \underline{S}(f^+ cresc)$
- $\underline{S}(f^+ decresc) = \sum_{i=1}^{n} (f x_i)\Delta x = \bar{S}(f^+ cresc)$
- $\bar{S}(f^- cresc) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$; $\underline{S}(f^- cresc) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$
- $\bar{S}(f^- decrec) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$; $\underline{S}(f^- decresc) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$	$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$
$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(1+n).n}{2}$	$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$	$S_n = \frac{\overset{\text{1º elem}}{a_1}\,(r^{\overset{\text{qtd. de elem.}}{n}}-1)}{\underset{\text{razão}}{r}-1}$

Interpretação Geométrica

- Se $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$ então: área $(R) = \int_a^b f(x)dx$
- Se $f(x) < 0$ $\forall x \in [a,b]$ então: área $(R) = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

Propriedades

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)dx$ sendo $c \in [a,b]$
4. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)dx$
5. $\int_a^b K f(x)dx = K\int_a^b f(x)dx$

Teorema do Valor Intermediário:

- $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \Rightarrow f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Teorema Fundamental do Cálculo:

- $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

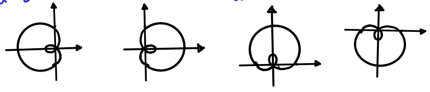
Integração Por Partes

- $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$ ⚠ não substituir os limitantes

Curvas em Polares

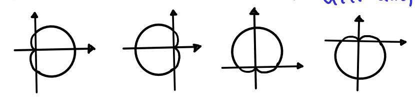
- Circunferência:
  - $r = a$, $a \in \mathbb{R}$ → raio $= |a|$.
  - $r = 2a\cos\theta$ → $a>0$: gráfico a direita do polo; $a<0$: gráfico a esquerda do
  - $r = 2b\cos\theta$ → raio $|b|$
    - ↳ $a>0$: gráfico acima do pólo
    - ↳ $a<0$: gráfico abaixo do pólo
- Limaçons: $r = a \pm b\cos\theta$ ou $r = a \pm b\,\text{sen}\,\theta$
  - $b > a$.

a-bcosθ   a+bcosθ   a+bsenθ   a-bsenθ



  - $b = a$

a(1+cosθ)   a(1-cosθ)   a(1-senθ)   a+(1+senθ)



- Se $b < a$ então o gráfico não tem laço e não passa pelo pólo

Rosáceas: $r = a\cos(n\theta)$ ou $r = a\,\text{sen}(n\theta)$

- Se n é par temos uma rosácea com $2n$ pétalas
- Se n é impar temos uma rosácea com n pétalas

Volume de Sólidos de Revolução

- Volume $(S) = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx$, em torno eixo x.
  $= \pi\int_a^b g(y)^2\,dy$, em torno eixo y.
- Sólido não maciço:
  $V(S) = V_{ext} - V_{int} = \pi\int_a^b g(x)^2 - f(x)^2\,dx$
- Em torno de retas paralelas aos eixos coordenadores
  $V(S) = \pi\int_a^b (K - f(x))^2\,dx$; sendo a reta $y = K$

Integral de função descontínua

- Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua exeto em $c \in [a,b]$ então:
  - $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
    $= \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\,dx + \lim_{w\to c^+}\int_w^b f(x)\,dx$

Integrais Impróprias

- Seja $f:[a,+\infty) \to \mathbb{R}$ contínua $\forall x \in [a,+\infty)$:
  - $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$. ⚠ se o limite existe ele converge senão ela diverge
- Seja $f:(-\infty,b] \to \mathbb{R}$ contínua $\forall x \in (-\infty,b]$:
  - $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$.
- Seja $f:(-\infty,+\infty) \to \mathbb{R}$ contínua $\forall x \in (-\infty,+\infty)$
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$ para algum $c \in \mathbb{R}$

Área entre curvas em cartesianas

1- Seja $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas tais que: $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, portanto área$(R) = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$

2- Seja $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas tais que: $f(y) \leq g(y)$ $\forall y \in [a,b]$, portanto área$(R) = \int_a^b [g(y) - f(y)]dy$

⚠ Sempre a superior menos a inferior!

Área de curvas em polares

- área $(R) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}.f(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2 d\theta$
- área interior à $f(\theta)$ e exterior à $g(\theta) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\theta)^2 - g(\theta)^2]d\theta$

Curvas em cartesianas

- Elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
  - ↳ a é o semi-eixo maior (maior denominador)
  - ↳ vertices do semi-eixo maior está em $\pm a$ e do semi-eixo menor em $\pm b$.
- Hipérbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ou $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$
  - ↳ vértices estão em $\pm a$ para hipérbole horizontal e $\pm b$ para uma hipérbole vertical
  - ↳ assintotas são $y = \pm \frac{b}{a}x$ (horizontal) ou $x = \pm \frac{a}{b}y$ (vertical)

Relações Úteis

- $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $tg^2\theta + 1 = \sec^2\theta$
- $1 + \cot g^2\theta = \text{cossec}^2\theta$
- $\text{sen}(2\theta) = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$
- $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \text{sen}^2\theta$
- $\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}\,a\cos b \pm \text{sen}\,b\cos a$
- $\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$