Blatt 3, Aufgabe 3

Es seien A und B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Eigenschaften:

a) f ist injektiv.

b) Für alle $X, Y \subset A$ gilt: $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

c) Für alle $X \subset Y \subset A$ gilt: $f(Y \setminus X) = f(Y) \setminus f(X)$.

Beweis durch Ringschluss:

a) $\Rightarrow$ b):
Voraussetzung: f ist injektiv.
Zu zeigen: Für alle $X, Y \subset A$ gilt

$$f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y).$$

Zeige „$\subset$": Es gilt

$$X \cap Y \subset X \quad \text{und} \quad X \cap Y \subset Y.$$

Damit folgt

$$f(X \cap Y) \subset f(X) \quad \text{und} \quad f(X \cap Y) \subset f(Y)$$

und schließlich

$$f(X \cap Y) \ \subset \ f(X) \cap f(Y).$$

(Bemerkung: Die Injektivität wird hier nicht benötigt!)

Zeige „$\supset$":
Es sei $z \in f(X) \cap f(Y)$ beliebig.
Dann gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = z$ und ein $y \in Y$ mit $f(y) = z$. Insgesamt gilt also $f(x) = z = f(y)$.
Da f injektiv ist, folgt $x = y$, das heißt es gilt $x \in X$ und $x \in Y$.
Also gilt $x \in X \cap Y$, und es folgt $z = f(x) \in f(X \cap Y)$.
Da z aus $f(X) \cap f(Y)$ beliebig gewählt war, folgt

$$f(X \cap Y) \ \supset \ f(X) \cap f(Y).$$

b) $\Rightarrow$ c):
Voraussetzung: Für alle $X, Y \subset A$ gilt

$$f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$$

Zu zeigen: Für alle $X, Y \subset A$ mit $X \subset Y$ gilt

$$f(Y \setminus X) = f(Y) \setminus f(X)$$

Es sei also $X \subset Y \subset A$.

Zeige „$\supset$":
Es sei $z \in f(Y) \setminus f(X)$,

d.h. es gibt ein $y \in Y$ mit $z = f(y)$, und $z \neq f(x)$ für alle $x \in X$.
Insbesondere gilt dann $y \notin X$.
Also ist $y \in Y \setminus X$ mit $z = f(y)$.
Somit folgt $z \in f(Y \setminus X)$.

Da z in $f(Y) \setminus f(X)$ beliebig gewählt war, folgt

$$f(Y \setminus X) \;\supset\; f(Y) \setminus f(X).$$

(Bemerkung: Die Voraussetzung $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ wird hier nicht benötigt!)

Zeige „$\subset$“:

Vorüberlegung: Aus

$$\emptyset = f(\emptyset) = f(X \cap (A \setminus X))$$

folgt mit Voraussetzung b)

$$\emptyset = f(X \cap (A \setminus X)) \;=\; f(X) \cap f(A \setminus X).$$

Also:

$$f(A \setminus X) \subset B \setminus f(X). \qquad (*)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
f(Y \setminus X) &= f(Y \cap (A \setminus X)) && \text{da } X \subset Y \subset A \\
&= f(Y) \cap f(A \setminus X) && \text{wegen b)} \\
&\subset\; f(Y) \cap (B \setminus f(X)) && \text{wegen } (*) \\
&= f(Y) \setminus f(X) && \text{da } f(Y) \subset B.
\end{aligned}$$

<u>*c) $\Rightarrow$ a):*</u>
Voraussetzung: Für alle $X, Y \subset A$ mit $X \subset Y$ gilt

$$f(Y \setminus X) = f(Y) \setminus f(X)$$

Zu zeigen: f ist injektiv

Wähle beliebige $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$.
Wir wollen zeigen, dass dann $x = y$ gilt.
Angenommen es gilt $x \neq y$. Dann folgt für die Teilmengen

$$X := \{x\} \;\text{ und }\; Y := \{x, y\}$$

von A, dass

$$\begin{aligned}
f(\{y\}) = f(\{x,y\} \setminus \{x\}) &= f(Y \setminus X) \\
&= f(Y) \setminus f(X) \qquad \text{wegen c)} \\
&= f(\{x,y\}) \setminus f(\{x\}) \\
&= \{f(x)\} \setminus \{f(x)\} \qquad \text{wegen } f(x) = f(y) \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch! Also war unsere Annahme $x \neq y$ falsch und es folgt $x = y$.