Der (-1)-Trick

Worum gehts?

Viele Probleme der Linearen Algebra führen auf das Lösen lineare Gleichungssysteme. Dies ist ein Trick, um sich das finden der Lösung bzw des Lösungsraumes zu erleichtern. Dazu stellt man die Gleichungskoeffizienten als Matrix dar und ergänzt gegebenenfalls Nullzeilen bis man genausoviele Zeilen/Gleichungen wie Unbekannte/Variablen hat. Dann führt man folgende Schritte aus:

- **Schritt 1:**
  Führe Gaussalgorithmus (Also Zeilenvertauschungen und -Additionen) bis folgendes erreicht ist:
  - die links-untere Dreiecksmatrix ist leer (nur mit Nullen besetzt)
  - Das erste Element jeder Zeile ist eine 1, diese erste 1 der Zeile ist ein Diagonalelement
  - Alle Elemente in der Spalte über uund unter Diagonaleinsen sind 0

  Dabei müssen gegebenenfalls Nullzeilen eingefügt werden und Zeilen vertauscht werden, Zeilen voneinander abgezogen werden...
- **Schritt 2:**
  Ersetze die Diagonalnullen durch -1.
- **Schritt 3:**
  Die Lösungsmenge besteht aus der letzten (ganz rechten) Spalte plus Vielfache der Spalten, in denen man im zweiten Schritt eine -1 eingefügt hat.

Es ist wichtig, dass genau diese Form erreicht wird, und nicht z.B. noch über einer Diagonal-Eins noch ein nicht-0-Element steht.
Ebenfalls sollte vor Schritt 2 ein Sinnhaftigkeits-Check durchgeführt werden, um zu schauen ob überhaupt eine Lösung existiert. Gibt es nach dan Umformungen eine Zeile, in der nur in der (rechten) Lösungsspalte eine Zahl ungleich Null steht, und die Zeile sonst nur aus Nullen besteht, ist das LGS nicht lösbar, ansonsten lösbar.

Da das jetzt vermutlich noch nicht so überzeugend klingt hier gleich einige Beispiele:

Beispiel 1

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 + 6a_3 + 8a_4 &= 1 \\ -a_1 + 2a_2 - 7a_3 - 2a_4 &= 1 \end{aligned}$$

Daraus machen wir die Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & 8 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 14 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dabei wurde zuerst die erste Zeile zur zweiten und dann die (neue) zweite zur ersten Zeile addiert. Wir haben nun die gewünschte Form.
Die letzte Spalte ist also eine Lösung. In den beiden Spalten davor steht eine Null auf der Diagonalen. Nehmen wir diese Spalten und ersetzen die Diaonal-Nullen durch -1 erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Und damit als Lösung insgesamt:

$$L := \{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \}$$

Beispiel 2

Nehmen wir ein Gleichungssystem mit derKoeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 30 & 9 & 48 \\ 3 & 6 & 31 & 14 & 54 \\ 6 & 12 & 61 & 23 & 102 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

Wir subtrahieren die erste von der zweiten und zweimal von der dritten, teilen die erste durch 3 und die letzte durch 5:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 10 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Die dritte und die vierte Zeile sind identisch, deshalb streichen wir die dritte (bzw subtrahieren die zweite von der dritten):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 10 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Damit wir wieder nur Einsen auf der Diagonalen haben vertauschen wir zweite und dritte Zeile. Danach können wir durch geschickte Subtraktion mit den letzten beiden Zeilen in den letzten beiden Spalten noch Nullen über den Einsen erzeugen.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Das Diagonalelement der zweiten Zeile ist 0, darum ersetzen wir diese durch -1 und haben die rechte Spalte plus Vielfache der zweite Spalte (mit der eingesetzten -1) als Lösung:

$$\{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R}\}$$

(beziehungsweise jedes Vielfache davon).

Beispiel 3

Noch ein letztes, eher dämliches Beispiel, aber um zu zeigen worum es geht vielleicht ganz nützlich:

Löse $x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$ im $\mathbb{R}^5$

Die Matrix ist:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Setzt man in die Diagonalnullen -1 erhält man als Spalten (und damit als Lösung):

$$L := \{a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$