Вопросы к экзамену

1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.
2. Методы нахождения неопределенных интегралов: непосредственное интегрирование, метод подстановки.
3. Методы нахождения неопределенных интегралов: интегрирование по частям.
4. Рациональные функции. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.
5. Интегрирование рациональных функций.
6. Интегрирование иррациональных выражений. Первая подстановка Эйлера.
7. Интегрирование иррациональных выражений. Вторая подстановка Эйлера.
8. Интегрирование тригонометрических выражений.
9. Дифференциальный бином.
10. Определенный интеграл и его свойства.
11. Интеграл с переменным верхним пределом и его дифференцирование. Формула Ньютона – Лейбница.
12. Метод подстановки и интегрирование по частям.
13. Интеграл от четных и нечетных функций.
14. Геометрические приложения определенных интегралов: вычисление площадей плоских фигур.
15. Геометрические приложения определенных интегралов: объемов тел.
16. Геометрические приложения определенных интегралов: длин дуг.
17. Несобственные интегралы 1-го рода, их свойства. Исследование на сходимость: признаки сравнения для интегралов от неотрицательных функций.
18. Абсолютная и условная сходимости несобственных интегралов 1-го рода. Главное значение.
19. Несобственные интегралы 2-го рода, их свойства. Исследование на сходимость: признаки сравнения для интегралов от неотрицательных функций.
20. Множества точек евклидова пространства. Связные и ограниченные множества. Понятие функции многих переменных (ФМП).
21. Предел функции многих переменных в точке, его свойства. Повторные пределы.
22. Непрерывность ФМП в точке.
23. Частные производные. Дифференцируемость функции многих переменных.
24. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости. Полный дифференциал и его связь с частными производными.
25. Дифференцирование сложных функций.
26. Производная по направлению.
27. Градиент функции и его смысл. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
28. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных второго порядка.
29. Дифференциалы высших порядков.
30. Понятие неявной функции, ее существование и дифференцирование.
31. Формула Тейлора для функции многих переменных.
32. Понятие локального экстремума функции многих переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума.
33. Условный экстремум функции многих переменных.
34. Числовой ряд и его частичные суммы. Сходящиеся и расходящиеся числовые ряды. Необходимое условие сходимости ряда.
35. Критерии сходимости числового ряда. Свойства сходящихся числовых рядов.

36. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости: признак Даламбера.
37. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости: признак Коши.
38. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости: интегральный признак Маклорена-Коши.
39. Знакопеременные числовые ряды. Абсолютно и условно сходящиеся ряды.
40. Знакочередующиеся ряды: признак сходимости Лейбница, оценка остатка сходящегося ряда.
41. Функциональные ряды. Область сходимости и сумма ряда. Абсолютная и условная сходимости. Равномерная сходимость на замкнутом множестве. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости.
42. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов: теоремы о непрерывности суммы, предельном переходе.
43. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов: теоремы о почленном интегрировании и почленном дифференцировании
44. Степенные ряды, теорема Абеля. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда. Равномерная сходимость степенного ряда.
45. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора.
46. Необходимое и достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Достаточные условия представления функции рядом Тейлора.
47. Разложение основных функций в ряд Маклорена.
48. Двойной интеграл в прямоугольных координатах и его свойства. Изменение порядка интегрирования в двойном интеграле.
49. Свойства и вычисление криволинейных интегралов 1-го рода.
50. Криволинейный интеграл 2-го рода. Свойства и вычисление криволинейных интегралов 2-го рода.
51. Формула Грина. Независимость криволинейных интегралов 2-го рода от пути интегрирования.
52. Основные понятия теории дифференциальных уравнений (ДУ). ДУ 1-го порядка, задача Коши.
53. Основные классы ДУ 1-го порядка, интегрируемые в квадратурах: с разделяющимися переменными, однородные.
54. Основные классы ДУ 1-го порядка, интегрируемые в квадратурах: линейные уравнения.
55. Основные классы ДУ 1-го порядка, интегрируемые в квадратурах: Бернулли.
56. Основные классы ДУ 1-го порядка, интегрируемые в квадратурах: в полных дифференциалах.
57. Основные понятия о ДУ высших порядков. Уравнения допускающие понижение порядка.
58. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков и свойства их решений. Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения.
59. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков. Структура общего решения.
60. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков. Метод вариации произвольных постоянных.

1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на интервале (a,b), если функция $F(x)$ непрерывна на (a,b), дифференцируема в каждой внутренней точке этого интервала и

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$$

Общий вид первообразной для $f(x)$ на (a,b)

$$F(x) + C \quad C = const$$

$$\left(F(x) + C\right)' = F'(x) + C' = f(x)$$

$$\forall x \in (a,b)$$

Теорема

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные функции $f(x)$ на интервале (a,b), то они отличаются на константу C, то есть $F_1(x) - F_2(x) = C$, $\forall x \in (a,b)$, где C – некоторая постоянная

Неопределенный интеграл от функции $f(x)$

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$

$$\int f(x)dx$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$F'(x) = f(x)$$

$F(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$

$\int$ – знак неопределенного интеграла

Неопределенный интеграл от функции $f(x)$

Символ $\int$ – знак интеграла

$f(x)$ – подынтегральная функция

$f(x)\,dx$ – подынтегральное выражение

x – переменная интегрирования

Интегрирование функции $f(x)$

Операция нахождения первообразной или неопределенного интеграла от функции $f(x)$

Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
3. $\int f'(x)dx = f(x) + C$
4. $\int df(x) = f(x) + C$
5. Линейность неопределенного интеграла

$$\int\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right)dx =$$
$$= \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx =$$
$$= \alpha F(x) + \beta G(x) + C$$

5)

Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \quad k \in \mathbb{R}$$

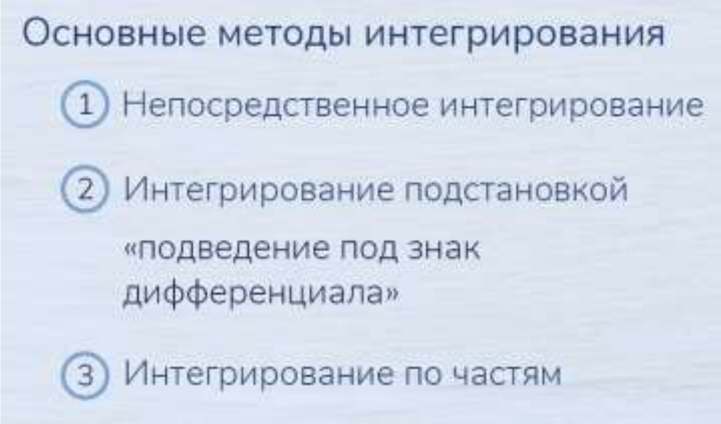
Неопределенный интеграл от суммы функций равен сумме неопределенных интегралов от каждого слагаемого

$$\int\left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Таблица основных неопределенных интегралов

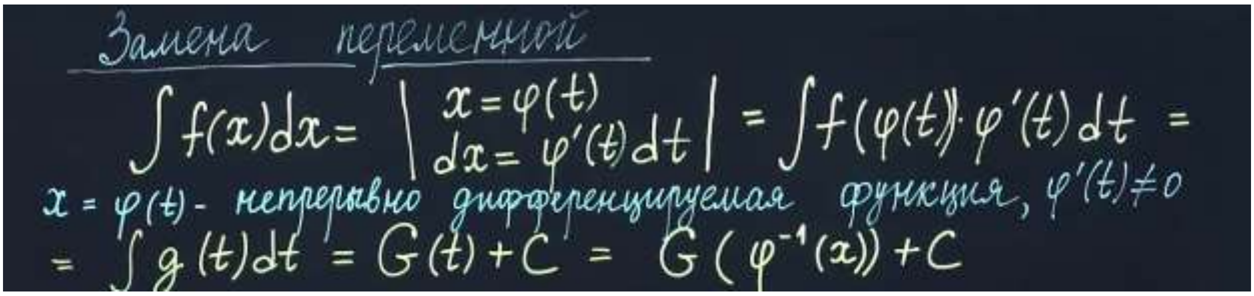
1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad 0 < a \neq 1$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$
10. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
11. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
12. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
13. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
14. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} \quad a \neq 0$
15. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \quad a \neq 0$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|} + C \quad a \neq 0$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| \quad a \neq 0$



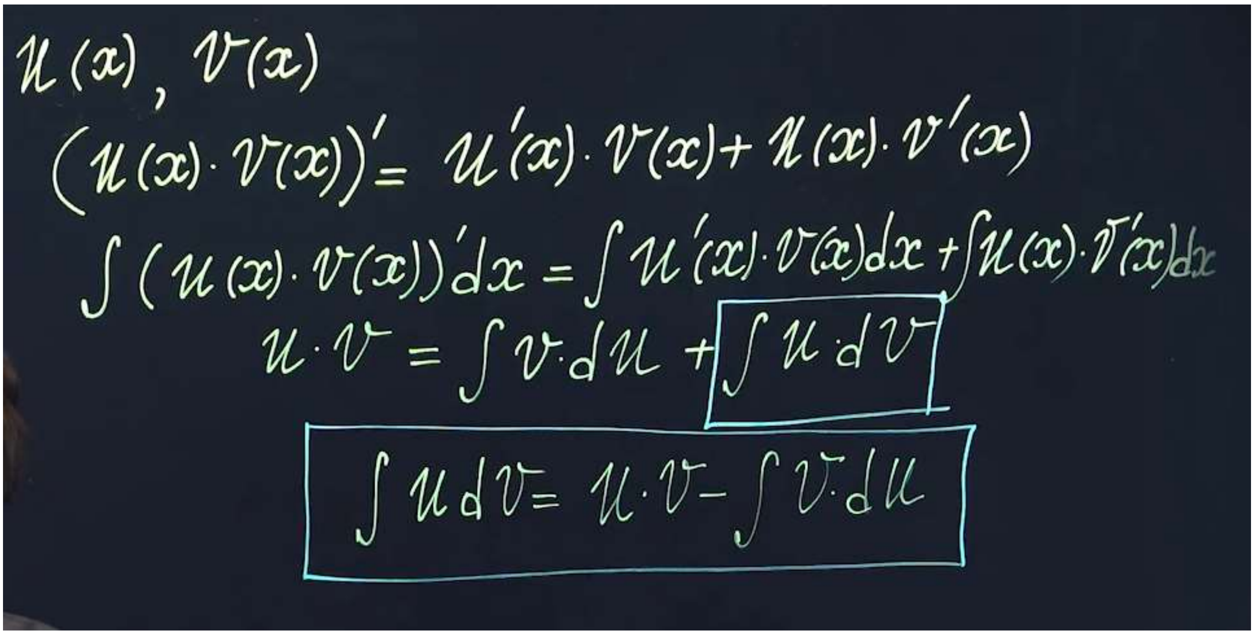
2. Методы нахождения неопределенных интегралов: непосредственное интегрирование, метод подстановки.

Непосредственное интегрирование осуществляется при помощи таблицы интегралов.

Метод подстановки(замены):



3. Методы нахождения неопределенных интегралов: интегрирование по частям.



4. Рациональные функции. Разложение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.

Определение 1

Рациональной функцией или **рациональной дробью** называется функция вида

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0;$

$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0,\ b_m \neq 0;$

$n, m \in \mathbb{N}$ – многочлены степеней n и m соответственно.

Если $Q_m(x) = 1\ \forall x$, то $R(x) = P_n(x)$.

Определение 2

Рациональная функция (рациональная дробь) $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется **правильной**, если $n < m$, и **неправильной**, если $n \geq m$.

В случае неправильной дроби делением («уголком») числителя на знаменатель всегда можно выделить целую часть этой дроби, т.е. дробь представить в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_k(x) + \frac{R_l(x)}{Q_m(x)}.$$

Здесь $S_k(x)$ – **целая часть** дроби, а $R_l(x)$ – остаток от деления $\mathrm{P}_n(x)$ на $Q_m(x)$, причем ясно, что $l < m,\ \ k = n - m$.

3. Разложение рациональных функций на сумму простейших дробей

Интегрирование рациональных функций $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ в случае $n < m$ сводится к **разложению правильной рациональной функции на простейшие дроби** и дальнейшему интегрированию этих простейших дробей.

В общем случае пусть теперь знаменатель $Q_m(x)$ разложен на неприводимые множители и имеет вид

$$Q_m(x) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_r)^{k_r}\,(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$$

Здесь числа $a_1, a_2, \ldots, a_r$ – действительные корни $Q_m(x)$ кратности соответственно $k_1, k_2, \ldots, k_r; l_1, l_2, \ldots, l_s$ – кратности комплексно-сопряженных корней $\alpha_1 \pm i\beta_1$, $\alpha_2 \pm i\beta_2, \ldots, \alpha_s \pm i\beta_s$ ($p_i^2 - 4q_i < 0, i = \overline{1,s}, k_1 + k_2 + \ldots + k_r + 2(l_1 + l_2 + \ldots + l_s) = m$). Тогда справедлива следующая **формула разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей**:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_{10}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \ldots + \frac{A_{1k_1-1}}{x-a_1} + \frac{A_{20}}{(x-a_2)^{k_2}} +$$

$$+\frac{A_{21}}{(x-a_1)^{k_2-1}} + \ldots + \frac{A_{2k_2-1}}{x-a_2} + \frac{A_{r0}}{(x-a_r)^{k_r}} + \frac{A_{r1}}{(x-a_r)^{k_r-1}} + \ldots + \frac{A_{rk_r-1}}{x-a_r} +$$

$$+\frac{B_{10}x+C_{10}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \frac{B_{11}x+C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1}} + \ldots + \frac{B_{1l_1-1}x+C_{1l_1-1}}{x^2+p_1x+q_1} +$$

$$+\frac{B_{20}x+C_{20}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}} + \frac{B_{21}x+C_{21}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2-1}} + \ldots + \frac{B_{2l_2-1}x+C_{2l_2-1}}{x^2+p_2x+q_2} + \ldots +$$

$$+\frac{B_{s0}x+C_{s0}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}} + \frac{B_{s1}x+C_{s1}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s-1}} + \ldots + \frac{B_{sl_s-1}x+C_{sl_s-1}}{x^2+p_sx+q_s}.$$

Здесь $A_{10}, A_{11}, \ldots, A_{rk_r-1}, B_{10}, B_{11}, \ldots, B_{sl_s-1}, C_{10}, C_{11}, \ldots, C_{sl_s-1}$ – некоторые действительные числа, называемые **коэффициентами разложения** рациональной функции $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ на простейшие дроби.

Рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих интегрирование правильных рациональных дробей с помощью разложения этих дробей на сумму простейших и последующего интегрирования простейших дробей одного из четырех типов.

5. Интегрирование рациональных функций.

Определение 1

Рациональной функцией или **рациональной дробью** называется функция вида

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0;$

$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0, b_m \neq 0;$

$n, m \in \mathbb{N}$ – многочлены степеней n и m соответственно.

Если $Q_m(x) = 1 \; \forall x$, то $R(x) = P_n(x)$.

Определение 2

Рациональная функция (рациональная дробь) $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется **правильной**, если $n < m$, и **неправильной**, если $n \geq m$.

В случае неправильной дроби делением («уголком») числителя на знаменатель всегда можно выделить целую часть этой дроби, т.е. дробь представить в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_k(x) + \frac{R_l(x)}{Q_m(x)}.$$

Здесь $S_k(x)$ – **целая часть** дроби, а $R_l(x)$ – остаток от деления $\mathrm{P_n}(x)$ на $Q_m(x)$, причем ясно, что $l < m, \;\; k = n - m$.

Определение

Простейшими или **элементарными** рациональными дробями называются дроби следующих четырех типов:

I. $\frac{A}{x-a}, \; a, A \in \mathbb{R}, A \neq 0.$

(простейшая рациональная дробь первого типа).

II. $\frac{A}{(x-a)^n}, A \in \mathbb{R}, A \neq 0, n \in \mathbb{N}, \; n \neq 1$.

(простейшая рациональная дробь второго типа).

III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \; M, N, p, q \in \mathbb{R}, p^2 - 4q \langle 0, \; |M| + |N| \rangle \, 0.$

(простейшая рациональная дробь третьего типа).

IV. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, M, N, p, q \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \; n > 1, p^2 - 4q \langle 0, \; |M| + |N| \rangle \, 0.$

(простейшая рациональная дробь четвертого типа).

Интегрирование простейших дробей производится следующим образом:

I. $\int \frac{Adx}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$

II. $\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C, n \neq 1.$

III. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \Big|$ В числителе сначала выделяется производная знаменателя $\Big| = \frac{M}{2} \int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} - \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \Big|$ Во втором интеграле в знаменателе подынтегральной функции выделяем полный квадрат $\Big|_{=} \frac{M}{2} \ln|x^2+px+q| + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2} = \frac{M}{2} \ln|x^2+px+q| + + \frac{N - Mp/2}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} arctg \frac{x+p/2}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$

IV. $\int \frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^n} = \frac{M}{2} \int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \times \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \frac{M}{2} \frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{d(x+p/2)}{\left((x+p/2)^2 + q - p^2/4\right)^n}, n > 1.$

Последний интеграл подстановкой $t = x + p/2$ приводится к интегралу $\mathrm{I}_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}, a \neq 0$, для нахождения которого используется **рекуррентная** формула

$$\mathrm{I}_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left(\frac{t}{(t^2+a^2)^n} + (2n-1)\, \mathrm{I}_n \right),$$

полученная методом интегрирования по частям.

6. Интегрирование иррациональных выражений. Первая подстановка Эйлера.

~~[illegible] находится [illegible] неопределенн[illegible]ралов, а также [illegible]~~ Начнём с постановки задачи. Задана некая рациональная функция от x и $\sqrt{ax^2+bx+c}$, т.е. $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$. Требуется найти неопределённый интеграл этой функции, т.е. $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$. Кстати, если словосочетание "рациональная функция" вызывает вопросы, советую глянуть примечание. Если же нет – пойдём далее.

Что такое рациональная функция: показать скрыть

Суть подстановок Эйлера сводится к трём правилам:

1. Если $a>0$, то полагаем $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x+t$.
2. Если $c>0$, то полагаем $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$.
3. Если многочлен ax^2+bx+c имеет действительные корни x_1 и x_2, т.е. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, то допустимы такие подстановки:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1);$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_2).$$

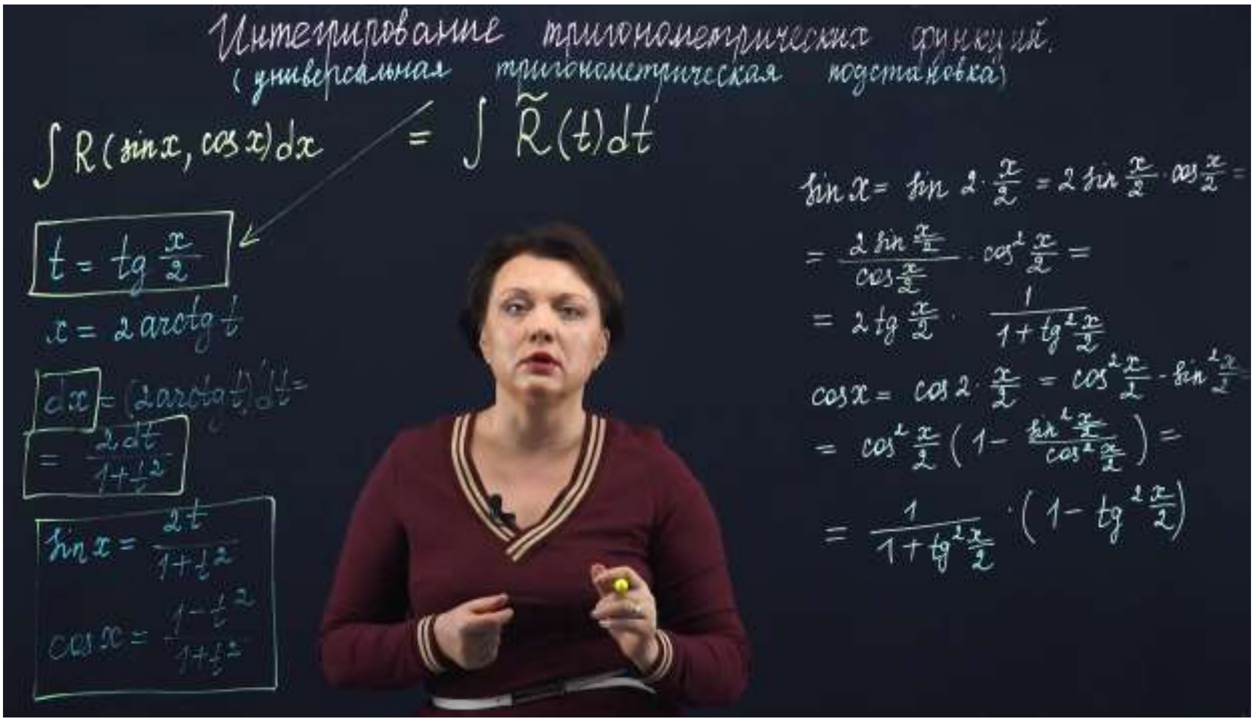
Примечание:

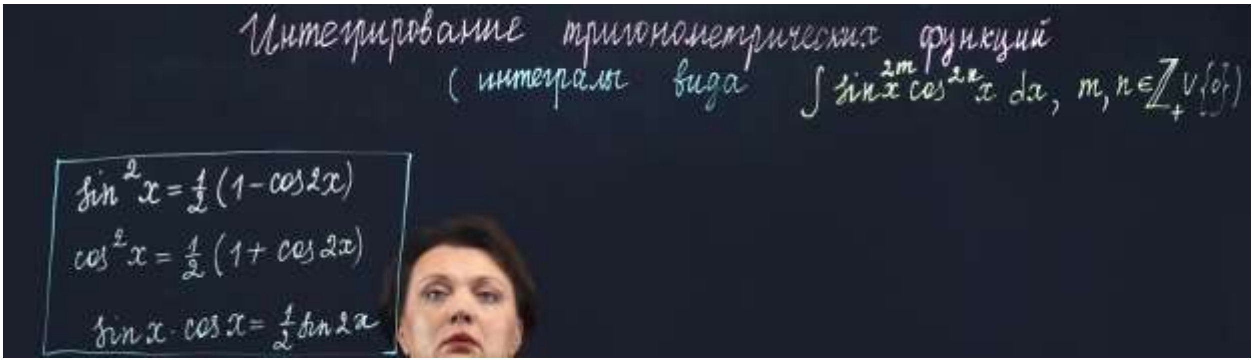
Использование знака "$\pm$" означает, что решающий вправе взять любой знак (плюс или минус) – на своё усмотрение. Например, если $a>0$, то можно принять $\sqrt{ax^2+bx+c}=-\sqrt{a}\,x+t$, а можно взять $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,x+t$.

7. Интегрирование иррациональных выражений. Вторая подстановка Эйлера.

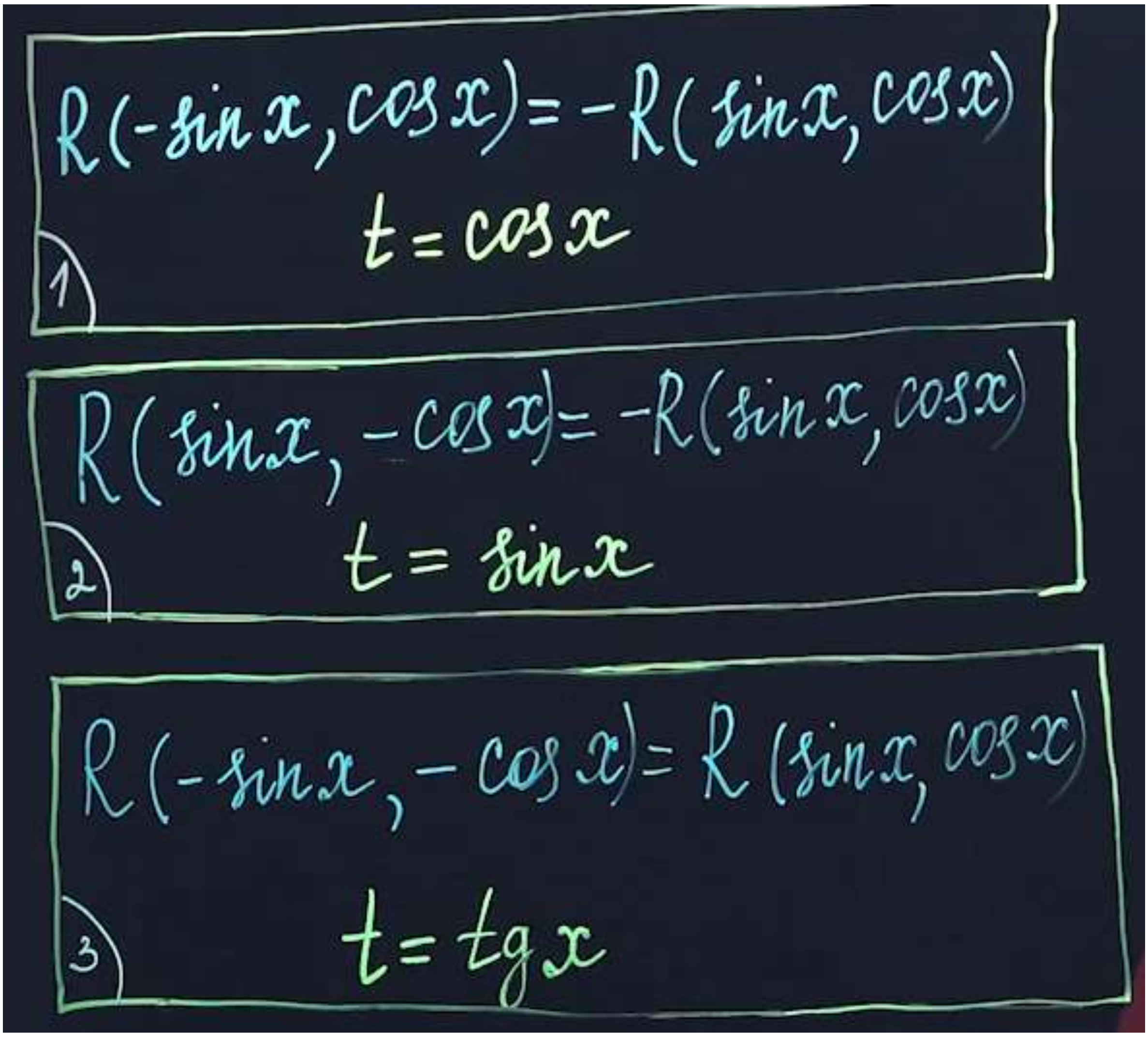
Смотреть вопрос №6

8. Интегрирование тригонометрических выражений.





Учитывая свойства подынтегральной функции (четность/нечетность)



9. Дифференциальный бином.

Определение

Выражение $x^m(a+bx^n)^p dx$ называется **дифференциальным биномом**. Здесь $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0, b \neq 0$; m, n, p – рациональные числа, $n \neq 0, p \neq 0$.

Интегралы от дифференциального бинома рационализируются только в следующих трех случаях:

1. p – целое число;
2. $\frac{m+1}{n}$ – целое число;
3. $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число.

Для рационализации дифференциального бинома в указанных случаях используются следующие подстановки, полученные П.Л. Чебышевым.

1. В первом случае применяется подстановка $x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей m и n.
2. Во втором случае – подстановка $a + bx^n = t^s$, где s – знаменатель дроби p.
3. В третьем случае – подстановка $ax^{-n} + b = t^s \Leftrightarrow a + bx^n = x^n t^s$, где s – знаменатель дроби p.

В таблице представлены случаи интегрируемости дифференциального бинома, установленные Чебышевым.

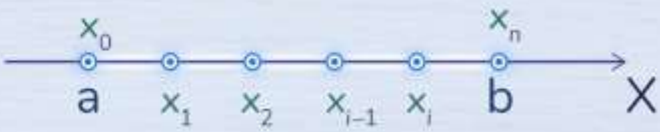
Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m(a+bx^n)^p dx$	**Рационализирующая подстановка**
$p \in \mathbb{Z}$	$x = t^s$, s – общий знаменатель дробей m и n
$\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$	$a + bx^n = t^s$, где s - знаменатель дроби p
$\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$	$\frac{a+bx^n}{x^n} = t^s$, где s – знаменатель дроби p

10. Определенный интеграл и его свойства.

Алгоритм построения определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$, $a < b$

1. С помощью точек $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ $(x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n)$ разобьем отрезок $[a,b]$ на n **частичных отрезков** $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$. Эти отрезки называются еще **отрезками разбиения**



2. На каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и вычислим значение функции в ней, то есть $f(c_i)$

c_1	c_2	…	c_i	…	c_n
$f(c_1)$	$f(c_2)$	…	$f(c_i)$	…	$f(c_n)$

③ Умножим найденное значение функции $f(c_i)$ на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ и получим произведение $f(c_i)\Delta x_i$

④ Составим сумму S_n всех таких произведений:

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_n)\Delta x_n$$

называемую **интегральной суммой Римана** функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$

⑤ Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка, называемую **диаметром разбиения**

$$\lambda = \max_i \Delta x_i \qquad i = \overline{1,n}$$

Найдем предел интегральной суммы $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, когда $n \to \infty$ так, что $\lambda \to 0$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} S_n = I$$

Определенный интеграл или интеграл Римана

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty\,(\lambda\to 0)} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

a – нижний предел интегрирования

b – верхний предел интегрирования

$f(x)$ – подынтегральная функция

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение

x – переменная интегрирования

$[a, b]$ – область (отрезок) интегрирования

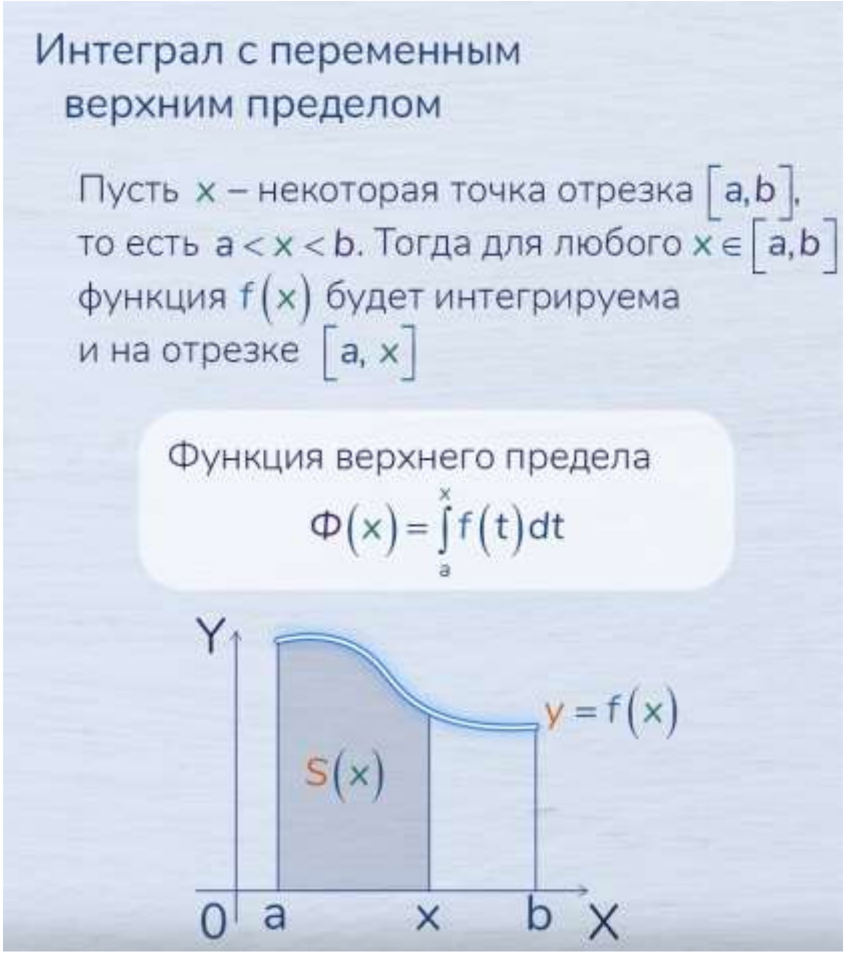
Теорема (Коши о существовании определенного интеграла)

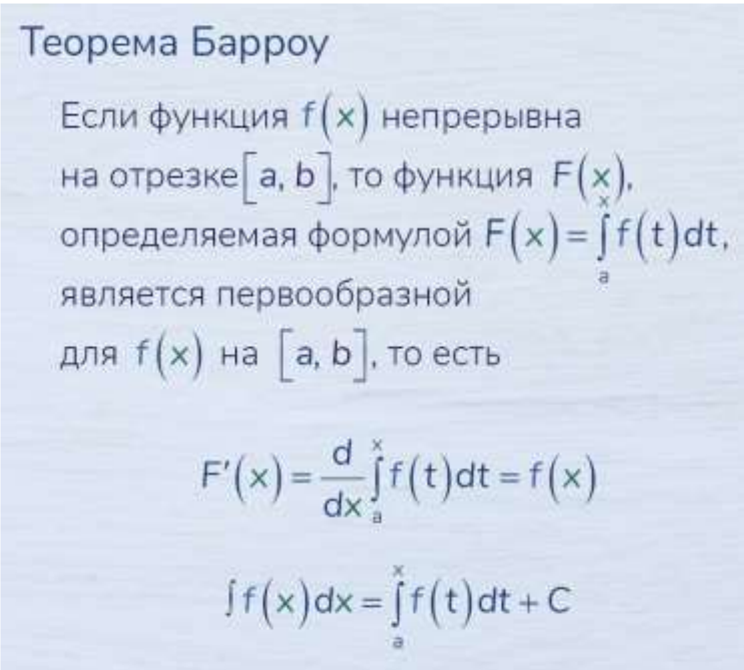
Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует

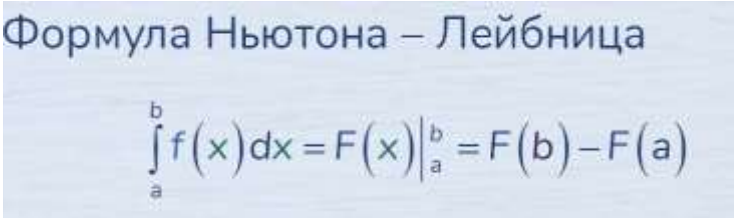
Задача Архиеда:

Свойства:

11. Интеграл с переменным верхним пределом и его дифференцирование. Формула Ньютона – Лейбница.

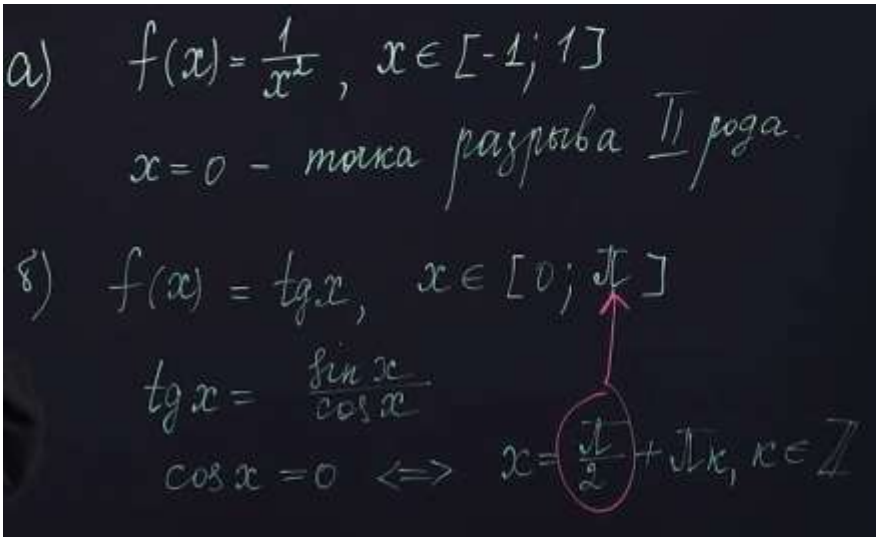






Формула работает только для тех ф-ций, которые непрерывны на **всем** отрезрке [a; b]

Примеры неберущихся:



12. Метод подстановки и интегрирование по частям.

Вычисление определенного интеграла методом интегрирования по частям

Интеграл	Рекомендуемая часть
$\int P_n(x)\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)e^{kx}dx \quad k\in\mathbb{R}$	$u=P_n(x)$
$\int e^{ax}\cdot\cos bx\,dx$ $\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx \quad a,b\in\mathbb{R}$	$u=e^{ax}$
$\int P_n(x)\arcsin x\,dx$ $\int P_n(x)\arccos x\,dx$ $\int P_n(x)\ln x\,dx$ $\int P_n(x)\mathrm{arctg}\,x\,dx \quad \int P_n(x)\mathrm{arcctg}\,x\,dx$	$dv=P_n(x)dx$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$P_n(x)$ – многочлен n-ной степени с действительными коэффициентами от переменной x

Теорема

Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке (a, b). Тогда имеет место следующая **формула интегрирования по частям в определенном интеграле**

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

13. Интеграл от четных и нечетных функций.

Интегрирование четных, нечетных и периодических функций

1. Пусть $f(x)$ – интегрируемая на отрезке $[-a, a]$ функция.
   Тогда если $f(x)$ – четная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

2. Пусть $f(x)$ – интегрируемая на отрезке $[-a, a]$ функция.
   Тогда если $f(x)$ – нечетная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Доказательство

Δ Пусть $f(x)$ – интегрируемая на $[-a,\ a]$ функция. По свойству аддитивности определенного интеграла имеем

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

В первом интеграле справа сделаем замену

$$(x=-t,\ x\in[-a,\ 0]) \Rightarrow (dx=-dt,\ t\in[a,\ 0]).$$

Тогда

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

1. Если f – четная функция $(f(-x)=f(x))$, то из равенства

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

следует равенство

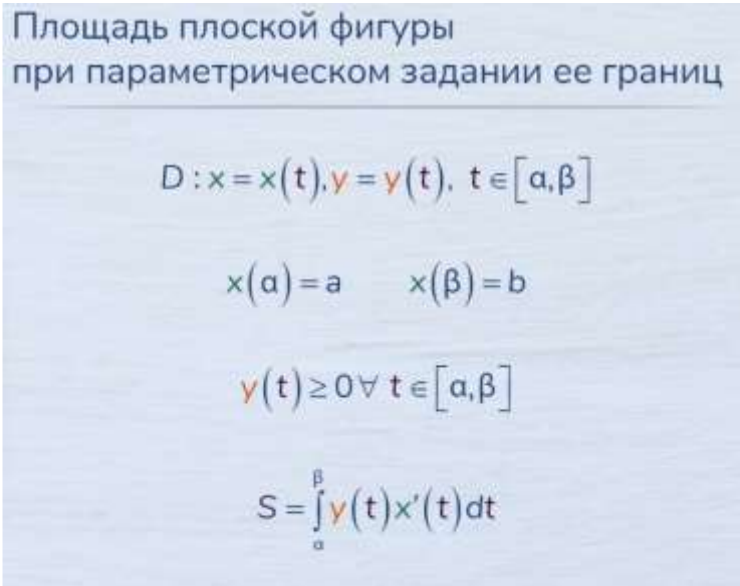
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

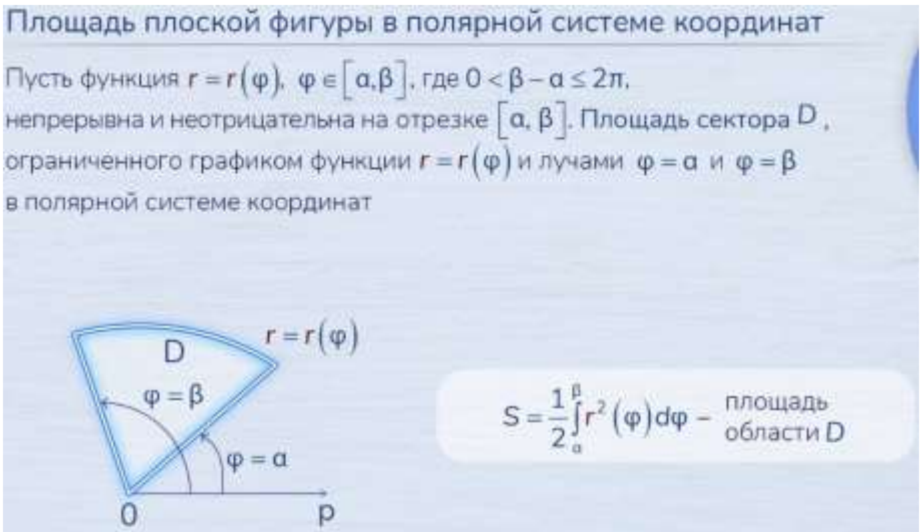
2. Если f – нечетная функция $(f(-x)=-f(x))$, то из равенства $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$

получим, что

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

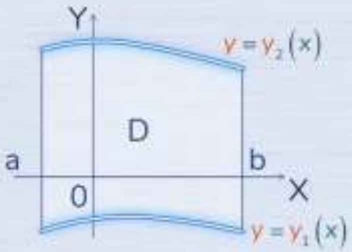
14. Геометрические приложения определенных интегралов: вычисление площадей плоских фигур.





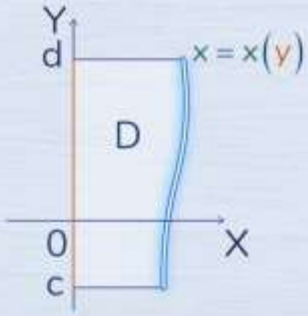
Вычисление площадей различных видов областей

① Пусть область D ограничена снизу и сверху графиками функций $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$ и $y_2(x) \geq y_1(x)$, $\forall x \in [a, b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$



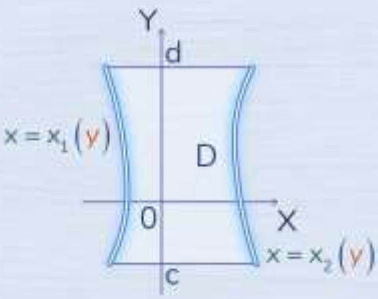
$$S = \int_a^b \left(y_2(x) - y_1(x)\right) dx$$ – площадь области D

② Пусть область D ограничена слева прямой $x = 0$, справа графиком функции $x = x(y)$, а сверху и снизу $y = d$, $y = c$ прямыми, то есть может быть аналитически описана следующим образом $D: c \leq y \leq d, 0 \leq x \leq x(y)$



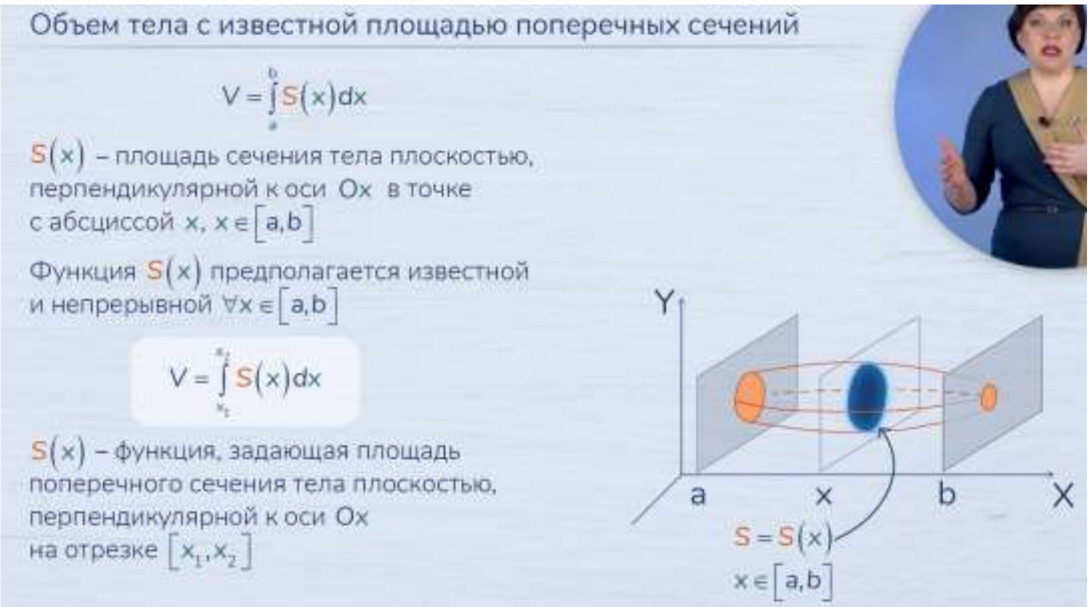
$$S = \int_c^d x(y)\, dy$$ – площадь области D

③ Площадь области D, ограниченной графиками функций $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$, непрерывными на отрезке $[c, d]$ и такими, что $x_2(y) \geq x_1(y)$, $\forall y \in [c, d]$, а также прямыми $y = c$ и $y = d$



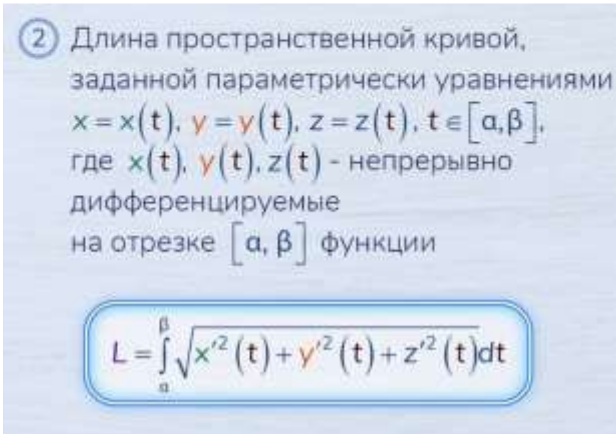
$$S = \int_c^d \left(x_2(y) - x_1(y)\right) dy$$ – площадь области D

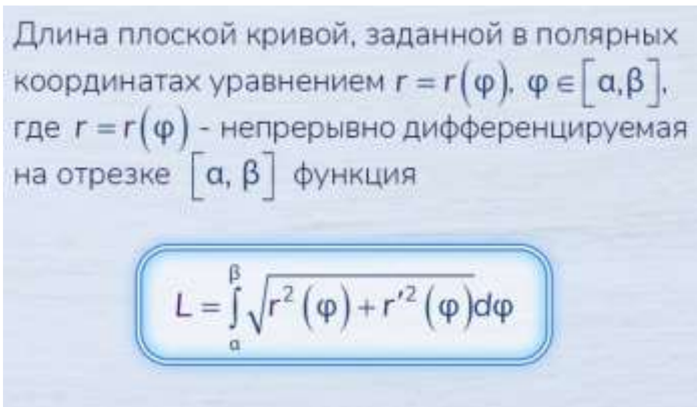
15. Геометрические приложения определенных интегралов: объемов тел.



Вывод формулы объема шара:

16. Геометрические приложения определенных интегралов: длин дуг.





17. Несобственные интегралы 1-го рода, их свойства. Исследование на сходимость: признаки сравнения для интегралов от неотрицательных функций.

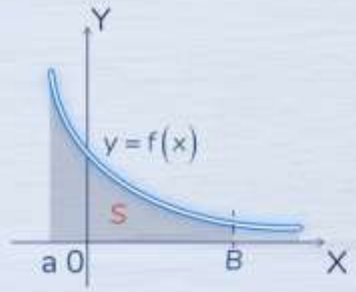
Несобственным интегралом первого рода (НИ-1) от функции $f(x)$ называется предел

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty} \Phi(B) = \lim_{B\to+\infty} \int_a^B f(x)dx$$

Если предел $\lim_{B\to+\infty} \int_a^B f(x)dx$ существует и конечен, то НИ-1 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся

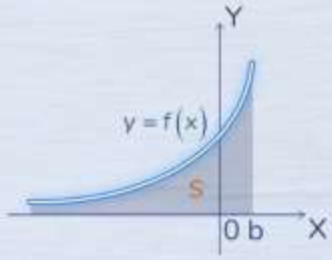
Если предел $\lim_{B\to+\infty} \int_a^B f(x)dx$ не существует или равен бесконечности, то НИ-1 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется расходящимся

Геометрический смысл НИ-1 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$



$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty} \int_a^B f(x)dx = S$$

Определение и геометрический смысл НИ-1 $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$



$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^b f(x)dx$$

Определение и геометрический смысл НИ-1 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int_A^B f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{M} f(x)dx + \int_{M}^{+\infty} f(x)dx$$

M – произвольное число

Если в правой части равенства хотя бы один из интегралов расходится, то интеграл от - ∞ до + ∞

также расходится.

Свойства несобственного интеграла первого рода

① Линейность НИ-1

Если несобственные интегралы первого рода $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся, то для любых чисел $\alpha, \beta \in R$ сходится и несобственный интеграл $\int_a^{+\infty}\left[\alpha f(x)+\beta g(x)\right]dx$, причем

$$\int_a^{+\infty}\left[\alpha f(x)+\beta g(x)\right]dx=\alpha\int_a^{+\infty} f(x)dx+\beta\int_a^{+\infty} g(x)dx$$

② Замена переменной в НИ-1

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$, функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha;\beta)$ и $a \le \varphi(t) < +\infty$.

Тогда, если $\varphi(\alpha)=a$, $\lim\limits_{t\to\beta}\varphi(t)=+\infty$, то имеет место формула замены переменной в НИ-1

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

При этом интегралы в обеих частях этой формулы одновременно сходятся или расходится

③ Интегрирование по частям

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a;+\infty)$, то имеет место формула интегрирования по частям

$$\int_a^{+\infty} u\,dv=uv\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty} v\,du$$

При этом предполагается, что если из трех входящих в равенство выражений (два интеграла и двойная подстановка) имеют смысл по крайней мере два, то имеет смысл и третье

Признаки сравнения

① Признак сравнения

Пусть две неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на промежутке $[a;+\infty)$, интегрируемы на отрезке $[a;B]$ при любом $B>a$

$$0 \le f(x) \le g(x) \quad \forall x \ge a$$

Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ вытекает расходимость несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$

② Предельный признак сравнения

Пусть две положительные функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на промежутке $[a;+\infty)$, интегрируемы на отрезке $[a;B]$ при любом $B>a$. Тогда, если существует конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k\ne 0$$

то несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся либо расходятся одновременно

18. Абсолютная и условная сходимости несобственных интегралов 1-го рода. Главное значение.

5. Абсолютно и условно сходящиеся НИ-1

Важными понятиями для НИ-1 от знакопеременных функций, т. е. функций, меняющих знак, являются понятия абсолютно и условно сходящегося интеграла.

Определение

Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

Определение

Если же интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, а НИ $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ расходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется **условно сходящимся**.

Определение

Функция, для которой интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ абсолютно сходится, называется **абсолютно интегрируемой** на $[a;\ +\infty)$.

Из неравенства $f(x) \le |f(x)|$, согласно признаку сравнения вытекает, что всякий абсолютно сходящийся НИ сходится.

Признак сравнения и результаты, касающиеся интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, позволяют сформулировать следующий признак абсолютной сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Теорема

Если существует такое число $\alpha > 1$, что для всех достаточно больших x функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$|f(x)| \le \frac{M}{x^\alpha},$$

где $M > 0$ и не зависит x, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно.

6. Главное значение НИ-1

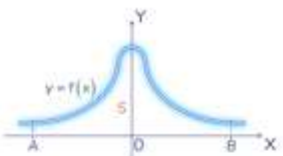
Если оба предела интегрирования бесконечны, то по определению полагают

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int_A^B f(x)\,dx$$

или

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to+\infty}} \int_{-A}^{B} f(x)\,dx,$$

где A и B стремятся к $+\infty$ независимо друг от друга.



Может оказаться, что определенный таким образом несобственный интеграл не существует, но существует главное значение интеграла от функции $f(x)$ в смысле Коши, определяемое по формуле

$$V.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx,$$

то есть когда $A = B = R$ (V.p. – начальные буквы слов valeur principal – главное значение). Тогда говорят, что несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

сходится в смысле главного значения по Коши.

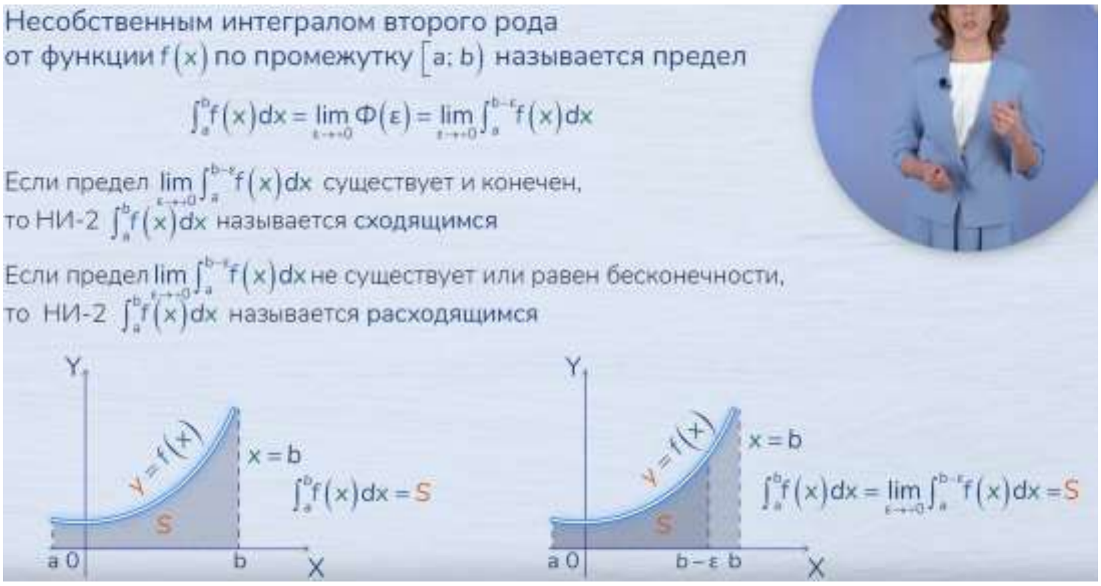
Если $f(x)$ – нечетная на всей числовой оси функция, то НИ-1 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ в смысле главного значения сходится и равен нулю.

Если функция $f(x)$ четная, то

$$\int_{-A}^{A} f(x)\,dx = 2\int_0^A f(x)\,dx,$$

предел для этого интеграла существует в том и только в том случае, когда существует предел для интеграла $\int_0^A f(x)\,dx$, то есть существует несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, а с ним и интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Таким образом, для четной функции главное значение интеграла существует лишь одновременно с несобственным интегралом и равно ему.

19. Несобственные интегралы 2-го рода, их свойства. Исследование на сходимость: признаки сравнения для интегралов от неотрицательных функций.



Свойства несобственного интеграла второго рода

1. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть точка $x = b$ является особой для функции $f(x)$, а $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. Тогда справедлива формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a),$$

$$\text{где } F(b-0) = \lim_{\varepsilon \to +0} F(b-\varepsilon)$$

2. Линейность НИ-2

Пусть точка $x = b$ является особой для функций $f(x)$ и $g(x)$. Если несобственные интегралы второго рода $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ сходятся, то для любых чисел α, $\beta \in R$ сходится и несобственный интеграл $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx$, причем

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$$

3. Интегрирование по частям

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы на каждом отрезке $[a; b-\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, то имеет место формула интегрирования по частям

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

При этом предполагается, что если из трех входящих в формулу выражений (два интеграла и двойная подстановка) имеют смысл по крайней мере два, то имеет смысл и третье

$$uv\Big|_a^b = \lim_{\varepsilon \to +0}\left[u(b-\varepsilon)\cdot v(b-\varepsilon)\right] - u(a)\cdot v(a)$$

4. Замена переменной интегрирования в НИ-2

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b)$, функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha; \beta)$ и $a = \varphi(\alpha) \le \varphi(t) < b = \lim_{t \to \beta}\varphi(t)$ при $\alpha \le t < \beta$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

При этом интегралы в обеих частях этой формулы одновременно сходятся или расходятся

① Признак сравнения

Пусть две неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b-\varepsilon]$ при любом сколь угодно малом $\varepsilon>0$, не ограничены в интервале $(b-\varepsilon;b)$

$$0\le f(x)\le g(x) \qquad \forall x\in[a;b)$$

Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$, а из расходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ вытекает расходимость несобственного интеграла $\int_a^b g(x)dx$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\text{сходится при } \alpha<1,\\ \text{расходится при } \alpha\ge 1\end{cases}$$

② Предельный признак сравнения

Пусть две положительные функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на полуинтервале $[a;b)$ и не ограничены в левой окрестности точки $x=b$. Тогда, если существует конечный предел

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=k\ne 0$$

то несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся либо расходятся одновременно. В частности, если $f(x)\sim g(x)$ при $x\to b-0$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ одновременно интегрируемы либо не интегрируемы на $[a;b)$

20. Множества точек евклидова пространства. Связные и ограниченные множества. Понятие функции многих переменных (ФМП).

Обозначение: $M(x_1,x_2,\ldots,x_m)$. Числа $x_1,x_2,\ldots,x_m$ называются *координатами* точки M. Точка $O(0,0,\ldots,0)$ называется *началом координат*.
Введем *расстояние* между точками $M_1(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ и $M_2(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ по формуле

$$\rho(M_1,M_2)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_m-y_m)^2}. \qquad (9.1)$$

Эта формула хорошо известна из курса аналитической геометрии для плоскости $(m=2)$ и трехмерного пространства $(m=3)$.

Определение. Координатное пространство с введенным по формуле (9.1) расстоянием между точками называется *m-мерным евклидовым пространством*.

Обозначение: $\mathbb{R}^m$.

Примеры.

1. $\mathbb{R}^1$ — числовая прямая;
2. $\mathbb{R}^2$ — евклидова плоскость;
3. $\mathbb{R}^3$ — трехмерное евклидово пространство.

Определение

Открытым n-мерным шаром с центром в точке $A\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$ и радиусом $\varepsilon > 0$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется множество всех точек $M\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, удалённых от точки A на расстояние, меньшее, чем ε:

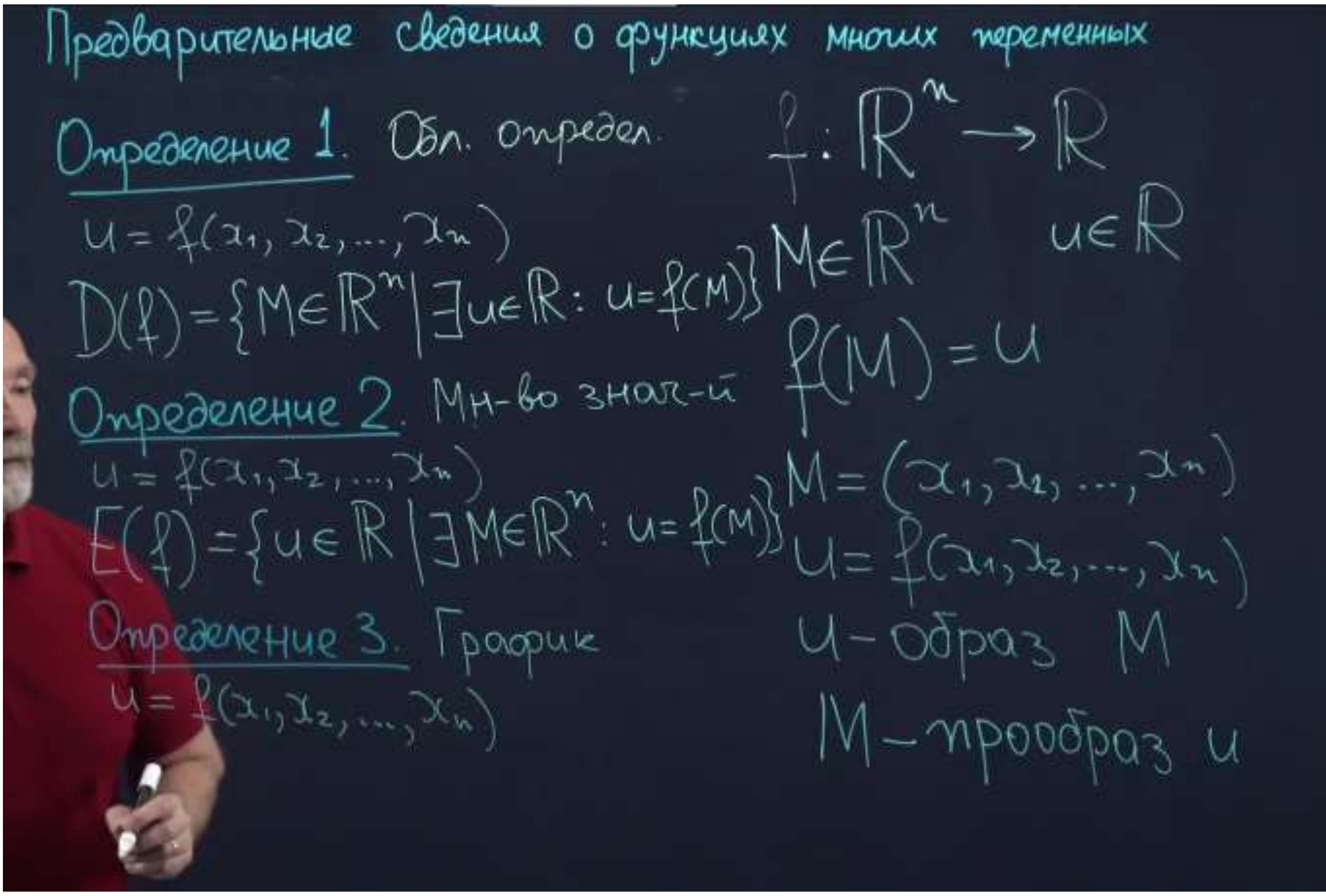
$$U_\varepsilon(A) = \{M \in \mathbb{R}^n \mid |AM| < \varepsilon\} = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2} < \varepsilon\right\}.$$

Открытый n-мерный шар $U_\varepsilon(A)$ с центром в точке $A\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$ и радиусом $\varepsilon > 0$ будем также называть **ε-окрестностью точки** A, а если из этого шара мы удалим (выколем) его центр (т.е. точку A), то получим **проколотую окрестность** точки A, которую будем обозначать $\dot{U}_\varepsilon(A)$.

Множество $D \subset R^n$ называется **связным**, если для любых двух точек этого множества найдётся путь, соединяющий эти точки и целиком лежащий в множестве D.

Множество $D \subset R^n$ называется **ограниченным**, если существует n-мерный шар, целиком содержащий это множество, т.е. если $\exists\ A \in R^n,\ \exists r > 0 : D \subset U_r(A)$.

Функцией многих переменных называется отображение $f : R^n \to R$, т.е. правило, согласно которому каждой точке $M=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in R^n$ ставится в соответствие не более одного числа $u \in R$.



21. Предел функции многих переменных в точке, его свойства. Повторные пределы.

Определение по Коши

Число a называется **пределом** функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке M_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \forall M \in \dot{U}_\delta(M_0) \ : \ |f(M) - a| < \varepsilon.$$

Другими словами, число a является пределом функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке M_0, если любая (сколь угодно малая) окрестность этого числа целиком содержит образ некоторой проколотой окрестности точки M_0.

Определение по Гейне

Число a называется **пределом** функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке M_0, если для любой последовательности точек $\{M_k\}$, сходящейся к точке M_0, причём $M_k \neq M_0$, соответствующая ей числовая последовательность $\{f(M_k)\}$ значений этой функции сходится к этому числу a.

Свойства:

Если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = a, \ \lim\limits_{M \to M_0} g(M) = b$, то

$\lim\limits_{M \to M_0} (f(M) \pm g(M)) = a \pm b;$

$$\lim_{M \to M_0} (f(M) \cdot g(M)) = a \cdot b;$$

$$\lim_{M \to M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{a}{b}, \quad (b \neq 0).$$

Если функция f(x1,x2,…,xn) имеет в точке M0 предел, то эта функция ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = a \neq 0$, то существует проколотая окрестность точки M_0, для всех точек M которой значение функции имеет тот же знак, что и предел a.

Рассмотрим теперь функцию двух переменных f(x1,x2). Как и прежде, будем предполагать, что эта функция определена в некоторой проколотой окрестности точки M0(x01,x02), и возьмём произвольную точку M(x1,x2) из этой окрестности. Зафиксируем значение переменной x2=y, а значение переменной x1 будем изменять. В результате получим функцию gy(x1)=f(x1,y) одной переменной x1, для которой можно рассмотреть вопрос о существовании предела в точке x01; предположим, что этот предел существует и конечен:

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} g_y(x_1) = a(y).$$

Очевидно, этот предел, в свою очередь, является функцией одной переменной y; следовательно, для этой функции можно рассмотреть вопрос о существовании предела в точке x02; предположим, что и этот предел существует и конечен: $\lim\limits_{x_2 \to x_2^0} a(y) = a.$

Полученное число а называется повторным пределом функции двух переменных f(x1,x2) в точке M0(x01,x02) и обозначается

$$\lim_{x_2 \to x_2^0} \lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2).$$

Аналогично определяется другой повторный предел данной функции в этой же точке

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} \lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2).$$

22. Непрерывность ФМП в точке.

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **непрерывной в точке** $M_0(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$, если её предел в точке M_0 равен значению этой функции в этой точке, т.е. если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Таким образом, непрерывность функции многих переменных f(x1,x2,…,xn) в точке M0 означает, что:
во-первых, эта функция определена в этой точке;
во-вторых, эта функция имеет конечный предел в этой точке;
в-третьих, этот предел равен значению этой функции в этой точке.
Если же хотя бы одно из этих условий не выполняется, то функция f(x1,x2,…,xn) называется разрывной в точке M0.
Функция f(x1,x2,…,xn) называется непрерывной в области D, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Св-во 1. $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ и $g(x_1,x_2,\dots,x_n)$ непрер. в т. $M_0 \Rightarrow$ непрерывны

$f(M)\pm g(M)$

$f(M)\cdot g(M)$, $\dfrac{f(M)}{g(M)}$, $g(M_0)\neq 0$

$M=(x_1,x_2,\dots,x_n)$,

$M_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$

Св-во 2. $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ непрер. в т. $M_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$

$f(M_0)\neq 0 \Rightarrow \exists\, U_\delta(M_0)$

$\forall M\in U_\delta(M_0):\ f(M)\cdot f(M_0)>$

Св-во 3. $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$,

$x_1=\varphi_1(t_1,t_2,\dots,t_m)$,

$x_2=\varphi_2(t_1,t_2,\dots,t_m)$, …,

$x_n=\varphi_n(t_1,t_2,\dots,t_m)$

$\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n$ непрер. в т.

$T_0=(t_1^0,t_2^0,\dots,t_m^0)$

f непрер. в точке

$M_0=(\varphi_1(T_0),\varphi_2(T_0),\dots,\varphi_n(T_0))$

$f(x_1(t_1,t_2,\dots,t_m),\dots,x_n(t_1,t_2,\dots,t_m))$

непрер. в T_0.

Св-во 4. (Теорема о среднем). $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ связном мн-ве D, $M_1,M_2\in D$, $f(M_1)\neq f(M_2)$.

$$\forall C\in(f(M_1);f(M_2))\ \exists M_0$$

$$f(M_0)=C.$$

Св-во 5. (Т. Вейерштрасса) $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ непрер на огранич. замкн. D.

f огранич., $\exists M_1,M_2\in D$

$$\forall M\in D:\ f(M_1)\leq f(M)\leq f(M_2)$$

23. Частные производные. Дифференцируемость функции многих переменных.

Напомним, что производная функции одной переменной y=f(x) определялась как предел приращения функции к приращению её аргумента: $f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Заметим, что непосредственное использование этой формулы для определения производной функции нескольких переменных вряд ли возможно, так как в этом случае аргументом функции является не число, а элемент векторного пространства Rn, значит, и приращение аргумента Δx также является вектором из пространства Rn, а операция деления на вектор не определена. Выход из этой ситуации предлагается следующий. Зафиксируем значения всех переменных, кроме первой, а значение первой переменной x1будем изменять. В результате получим функцию f1 одной переменной x1 (все остальные xi мы считаем константами); для этой функции производную уже можно определить:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1'(x_1) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_1}$$

если этот предел существует и конечен. Предел в последней формуле в случае его существования и конечности называется частной производной функции f по переменной x1. Аналогично определяются частные производные по всем остальным переменным

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = f_n'(x_n) = \lim_{\Delta x_n \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n+\Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\Delta x_n}$$

По аналогии с функцией одной переменной определим дифференцируемость функции многих переменных. Для этого введём следующие обозначения:

M0=(x01,x02,…,x0n) – точка из области определения функции f(x1,x2,…,xn),

Δx1,Δx2,…,Δxn – приращения переменных,

Δf(M0)=f(x01+Δx1,x02+Δx2,…,x0n+Δxn)−f(x01,x02,…,x0n) – соответствующее приращение функции f

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется дифференцируемой в точке $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, если её приращение в этой точке, рассматриваемое как функция от приращений переменных, имеет линейную главную часть, т.е. представимо в виде:

$$\Delta f(M_0) = a_1 \cdot \Delta x_1 + a_2 \cdot \Delta x_2 + \ldots + a_n \cdot \Delta x_n + \circ(\rho),$$

где a_1, a_2, ..., a_n – некоторые фиксированные числа,

$\rho = \sqrt{\Delta x_1{}^2 + \Delta x_2{}^2 + \ldots + \Delta x_n{}^2}$ – расстояние между точками $M = (x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_n^0 + \Delta x_n)$ и $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$,

$\circ(\rho)$ – бесконечно малая по сравнению с ρ функция при $M \to M_0$.

24. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости. Полный дифференциал и его связь с частными производными.

Необходимое условие: Если функция z = f(x,y) дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.

По определению функции, дифференцируемой в точке $P_0(x_0;y_0)$, ее приращение представимо в виде

$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, где $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha = 0$; $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta = 0$;

A, B –некоторые числа, не зависящие от Δx и Δy .Следовательно,

$\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y) = 0$, а это означает, что функция $z = f(x,y)$ непрерывна в точке $P_0(x_0;y_0)$.

Если функция дифференцируема в точке , то она имеет в этой точке частные производные, причем $f'_x(x_0, y_0) = A$, $f'_y(x_0, y_0) = B$.

Пусть функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, тогда ее приращение представимо в виде (1). Положив в формуле (1) $\Delta y = 0$, имеем $\Delta_x z = A\Delta x + \alpha\Delta x$. Разделив это равенство на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A = f'_x(x_0, y_0)$$

.

Следовательно, в точке $P_0(x_0;y_0)$ существует частная производная $f'_x(x,y_0)$

Аналогично для В.

Достаточное условие: Если функция $z=f(x,y)$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки $P_0(x_0;y_0)$, непрерывные в самой этой точке, то она дифференцируема в этой точке.

25. Дифференцирование сложных функций.

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – непрерывно дифференцируемая функция многих переменных, у которой каждый аргумент является непрерывно дифференцируемой функцией **одной и той же переменной** t: $x_1=x_1(t)$, $x_2=x_2(t)$, …, $x_n=x_n(t)$.

Таким образом, возникает сложная функция $u=f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, являющаяся уже функцией одной переменной t.

Найдём производную этой функции в точке t. Для этого переменной t придадим приращение $\Delta t\neq 0$; это приращение, в свою очередь, вызовет приращения

$\Delta x1=x1(t+\Delta t)-x1(t)$,

$\Delta x2=x2(t+\Delta t)-x2(t)$,

$\Delta xn=xn(t+\Delta t)-xn(t)$

функций $x1(t)$, $x2(t)$, …, $xn(t)$, а также приращение

$\Delta u=u(t+\Delta t)-u(t)=f(x1(t+\Delta t),x2(t+\Delta t),\ldots,xn(t+\Delta t))-f(x1(t),x2(t),\ldots,xn(t))== f(x1(t)+\Delta x1,x2(t)+\Delta x2,\ldots,xn(t)+\Delta xn)-f(x1(t),x2(t),\ldots,xn(t))$.

(здесь мы воспользовались равенствами $xi(t+\Delta t)=xi(t+\Delta t)-xi(t)+xi(t)=xi(t)+\Delta xi$).

Заметим, что поскольку функции $x1(t)$, $x2(t)$, …, $xn(t)$ дифференцируемы, то они также и непрерывны, и потому при $\Delta t\to 0$ имеем также, что $\Delta x1\to 0$, $\Delta x2\to 0$, …, $\Delta xn\to 0$. В силу дифференцируемости функции $f(x1,x2,\ldots,xn)$ имеем:

$$\Delta u = \frac{\partial f(M)}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1 + \frac{\partial f(M)}{\partial x_2}\cdot\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f(M)}{\partial x_n}\cdot\Delta x_n + \circ(\rho),$$

Разделим обе части полученного равенства на Δt; можно показать, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\circ(\rho)}{\Delta t} = 0$. Учитывая этот факт, а также дифференцируемость функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, перейдём к пределу при $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial f(M)}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1(t)}{dt} + \frac{\partial f(M)}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2(t)}{dt} + \ldots + \frac{\partial f(M)}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n(t)}{dt}.$$

Таким образом, получаем, что функция u дифференцируема в точке t, и её производная равна

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$$

Рассмотрим теперь случай, когда все аргументы непрерывно дифференцируемой функции f(x1,x2,…,xn), кроме x1, являются непрерывно дифференцируемыми функциями одной переменной x1, т.е. x2=x2(x1), x3=x3(x1), …, xn=xn(x1). Тогда, используя цепочное правило, можно вычислить производную функции одной переменной u(x1)=f(x1,x2(x1),x3(x1),…,xn(x1)):

$$\frac{du}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dx_1} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot \frac{dx_3}{dx_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dx_1}$$

Наконец, рассмотрим самый общий случай, когда все аргументы непрерывно дифференцируемой функции f(x1,x2,…,xn) являются непрерывно дифференцируемыми функциями переменных t1,t2,…,tm:

x1=x1(t1,t2,…,tm), x2=x2(t1,t2,…,tm), xn=xn(t1,t2,…,tm).

Тем самым определена сложная функция многих переменных u(t1,t2,…,tm)=f(x1(t1,t2,…,tm),x2(t1,t2,…,tm),…,xn(t1,t2,…,tm)), аргументами которой являются переменные t1,t2,…,tm. Так как для вычисления частной производной функции u по переменной t1 нужно все остальные переменные зафиксировать, то по сути дела нам нужно вычислить производную сложной функции, зависящей только от одной переменной t1, и потому можно использовать цепочное правило:

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt_1}$$

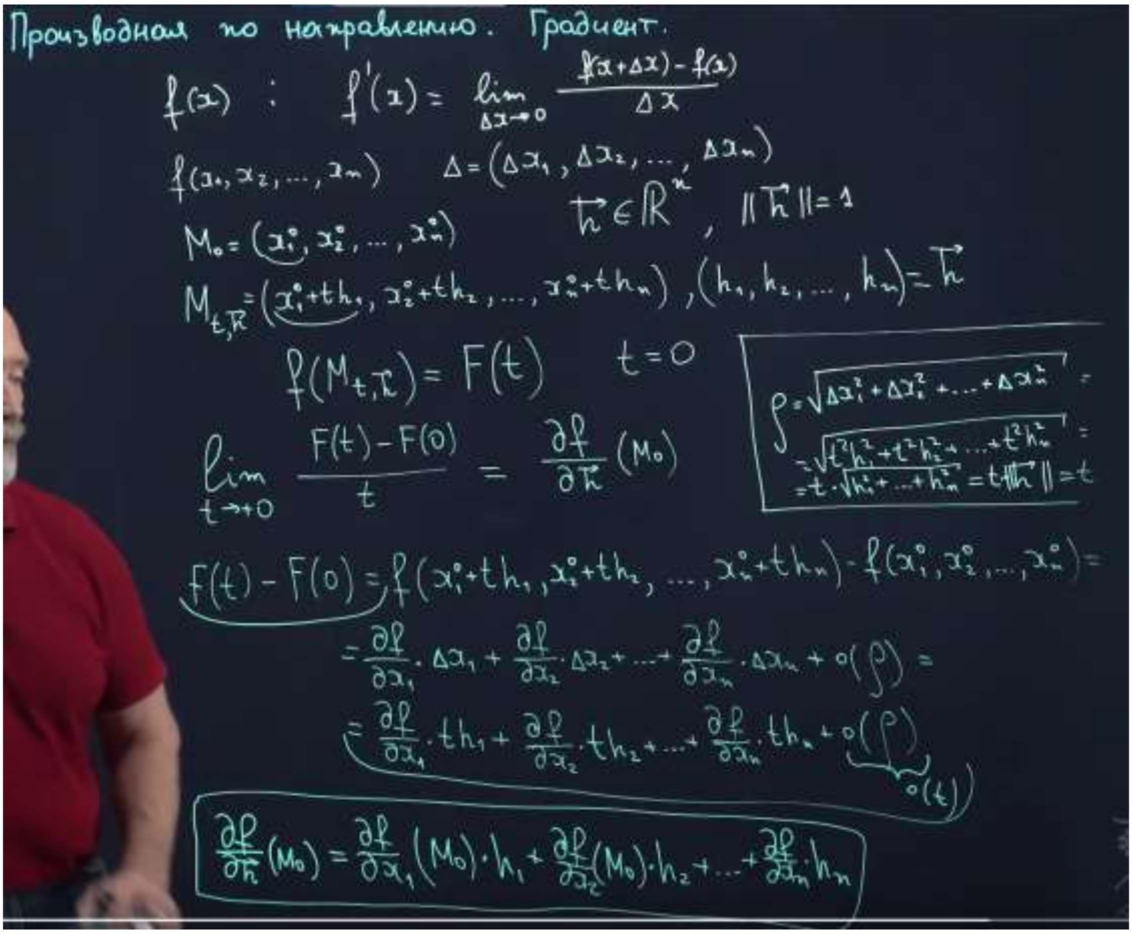
аналогично вычисляются частные производные функции u по всем остальным переменным

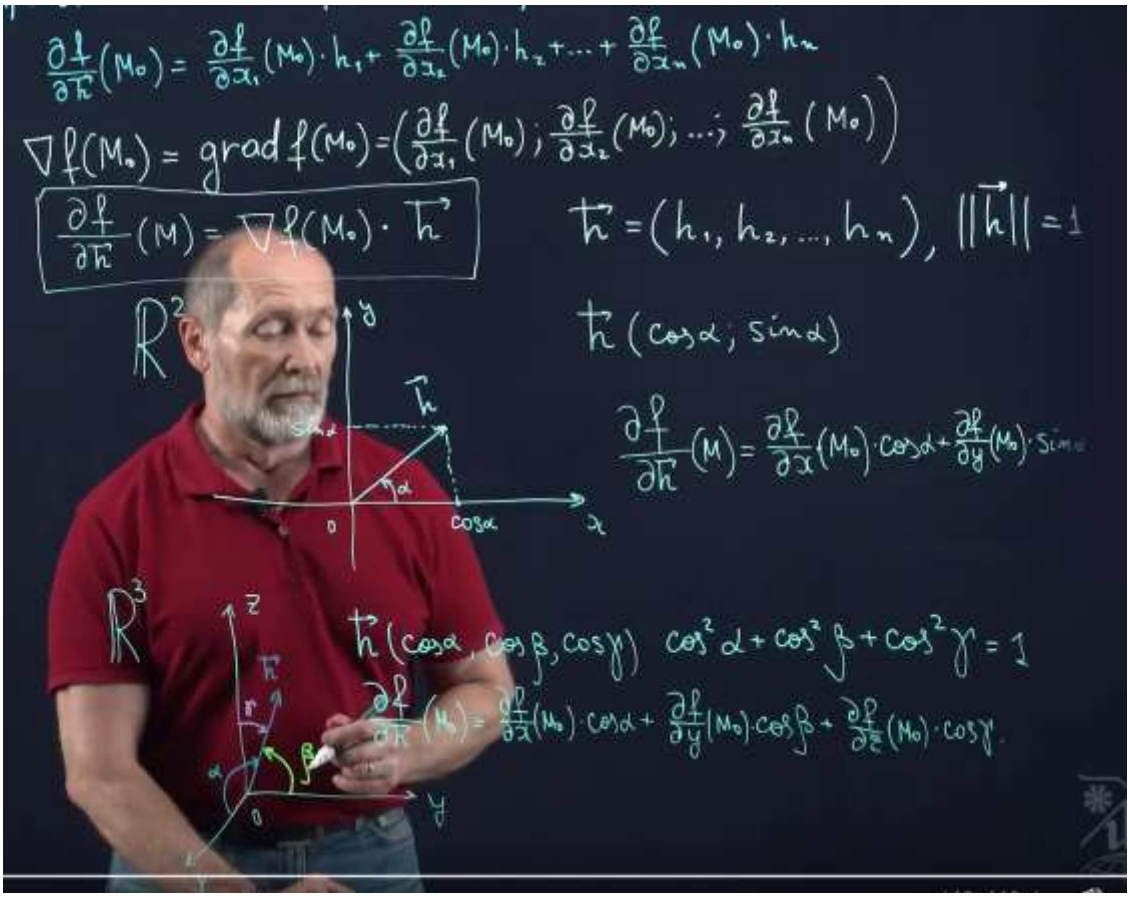
26. Производная по направлению.

Производной функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точке $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ **по направлению** $\vec{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ называется предел

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{h}} = \lim_{t \to +0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_1^0 + th_1, x_2^0 + th_2, \ldots, x_n^0 + th_n) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{t},$$

если он существует и конечен.





27. Градиент функции и его смысл. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Теорема

Градиент $\nabla f(M_0) \neq \vec{0}$ в точке M_0, лежащей на множестве уровня функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, перпендикулярен этому множеству уровня.

Заметим, что если мы наряду с функцией $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ рассмотрим также функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n,\ u) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - u$, то множество уровня функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n,\ u)$ совпадает с графиком функции $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

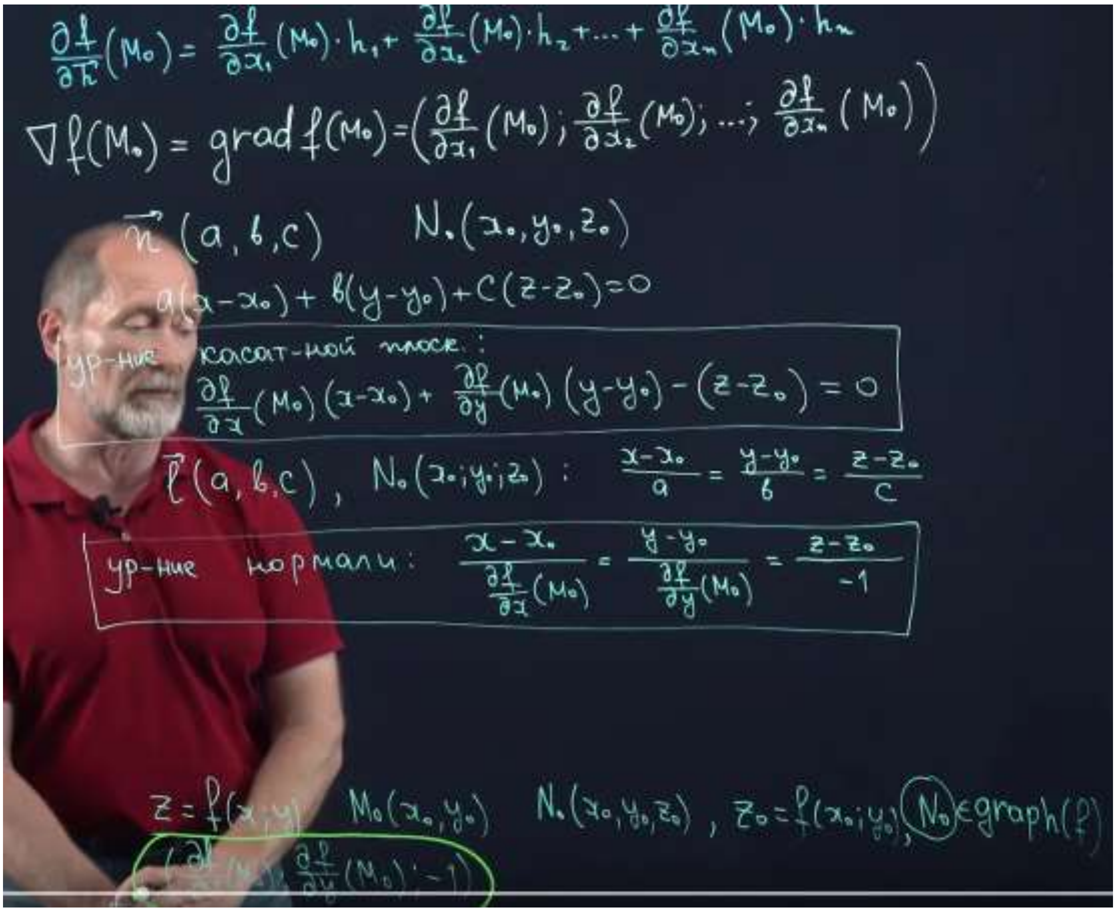
Тогда из последней теоремы следует, что в случае функции двух переменных $z = f(x, y)$ все касательные к кривым, лежащим на графике этой функции и проходящим через одну и ту же точку $N_0 = (x_0,\ y_0,\ u_0)$ графика, лежат в одной и той же плоскости, перпендикулярной вектору $\nabla F(N_0) = \left(\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x},\ \frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y},\ -1\right)$, где $F(x, y,\ z) = f(x, y) - z$. Эта плоскость называется **касательной плоскостью** к графику функции $f(x, y)$ в точке N_0, а прямая, перпендикулярная касательной плоскости и проходящая через точку касания N_0, называется **нормалью** к графику функции $z = f(x, y)$ в точке N_0.

Из вышесказанного следует, что если дифференцируемая функция $z = f(x; y)$ задаёт в пространстве $\mathbb{R}^3$ поверхность, являющуюся её графиком, и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на этой поверхности, то вектор $\vec{n}\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}; \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}; -1\right)$ является нормальным вектором касательной плоскости и направляющим вектором нормали к данной поверхности в точке M_0.

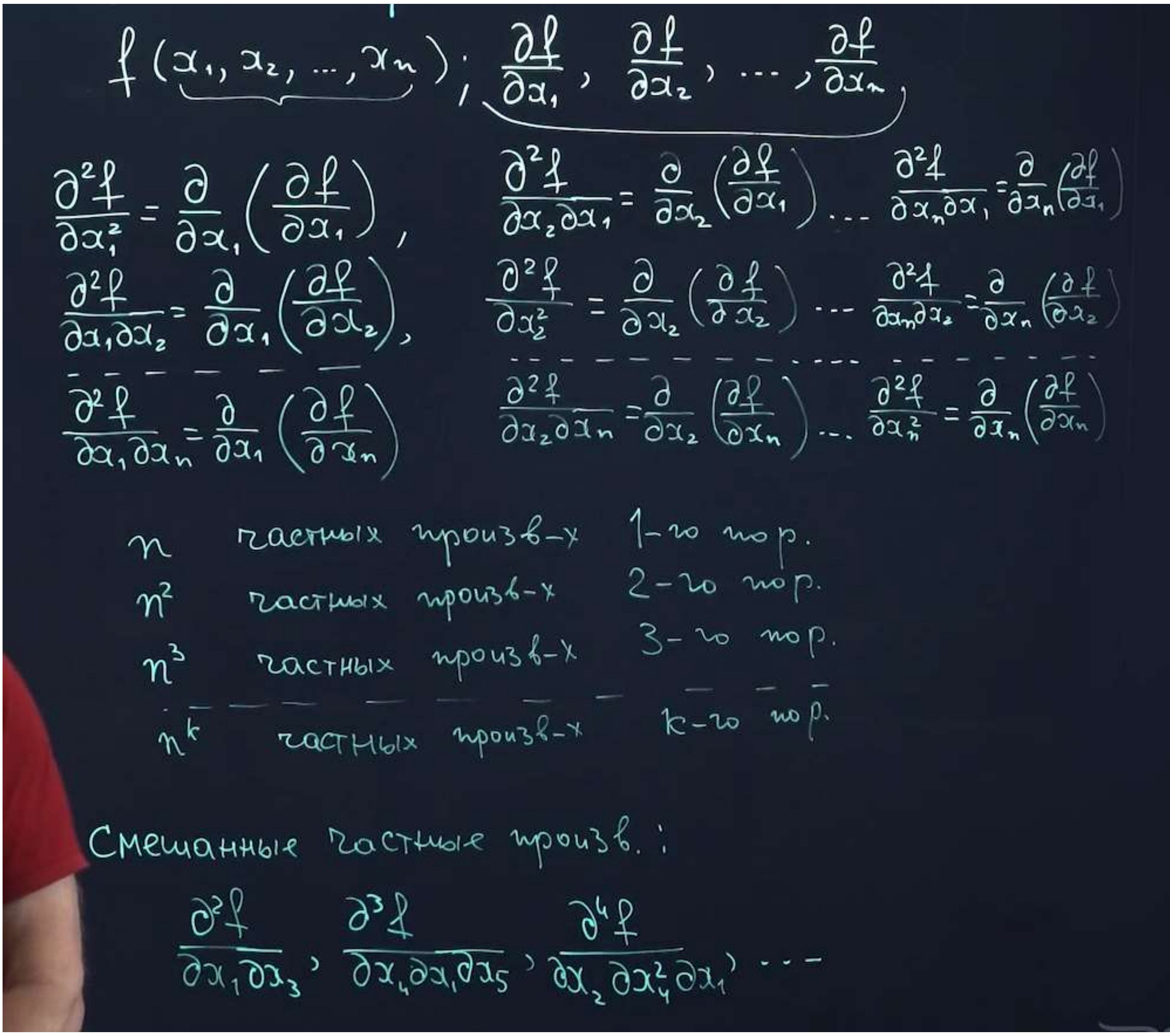
Следовательно, уравнение касательной плоскости имеет вид:
$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \cdot (y - y_0) - z + z_0 = 0$,

а уравнение нормали имеет вид: $\frac{x-x_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}} = \frac{z-z_0}{-1}$.

Касат. Пл.



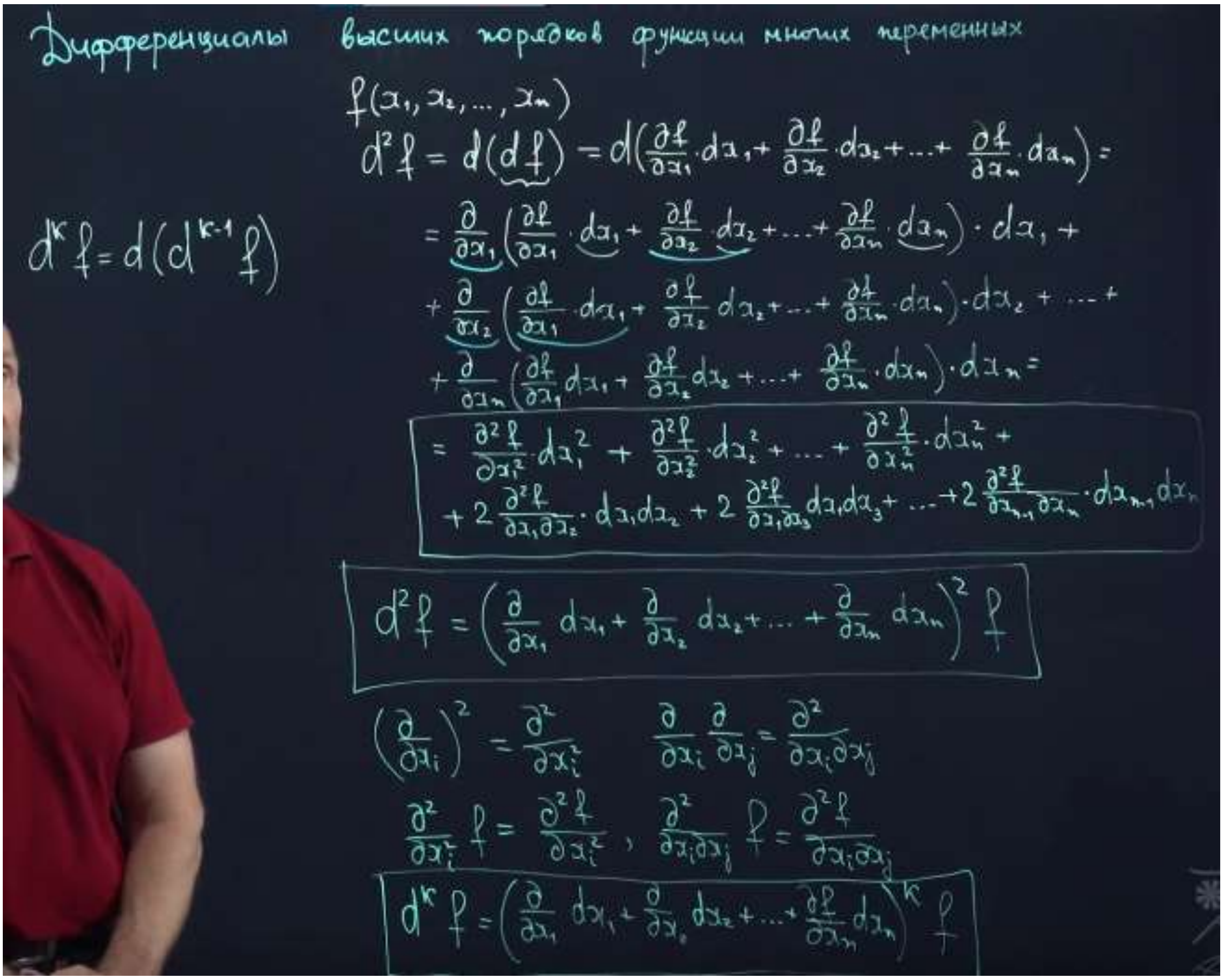
28. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных второго порядка.



Теорема

Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет в некоторой точке непрерывные частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, то $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

29. Дифференциалы высших порядков.



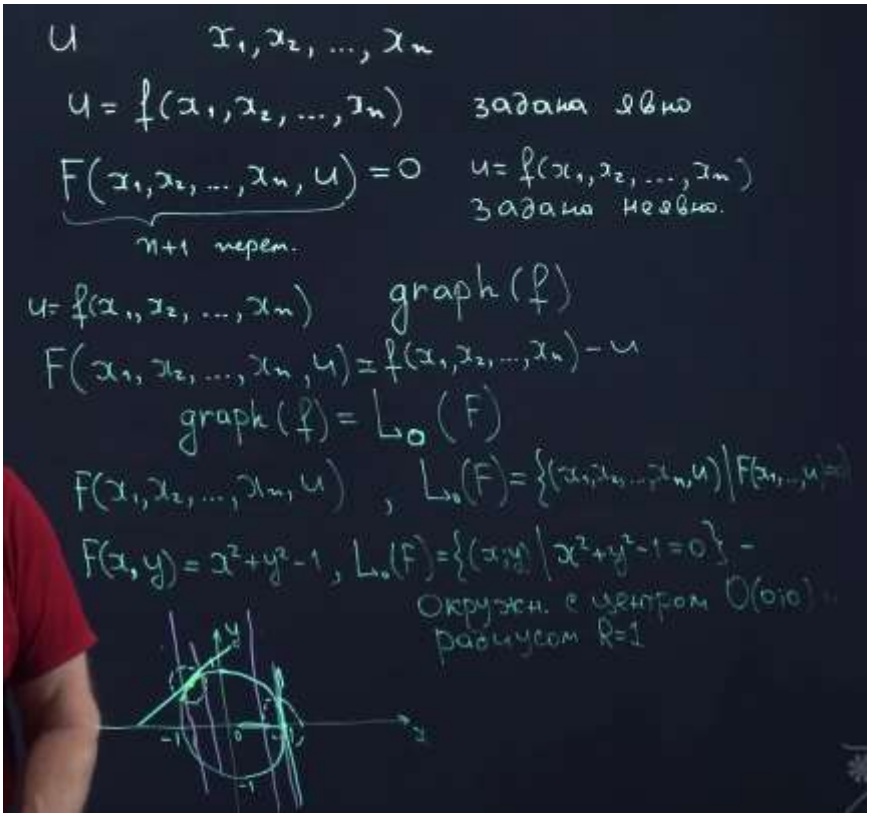
Заметим, что дифференциал второго порядка функции многих переменных $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ представляет собой квадратичную форму относительно переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$; следовательно, его можно записать в матричном виде. Для этого рассмотрим матрицу этой квадратичной формы

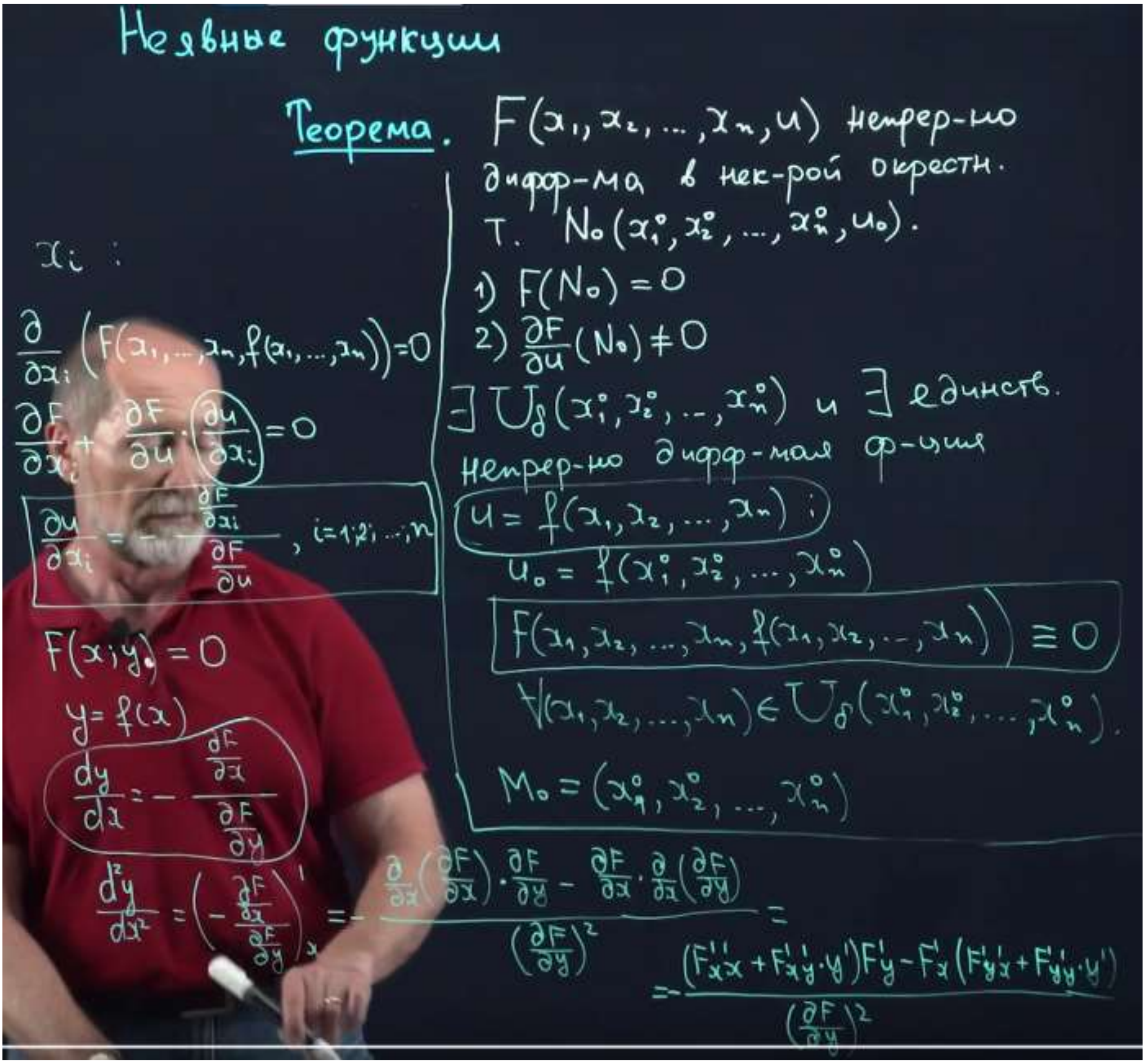
$$H=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2} \end{pmatrix},$$

которая называется **матрицей Гессе**. Первая строка этой матрицы состоит из частных производных по переменной x_1 всех частных производных первого порядка, вторая строка – из частных производных по переменной x_2 всех частных производных первого порядка, и т.д. Тогда

$$d^2 f=\left(dx_1 \; dx_2 \; \ldots \; dx_n\right) \cdot H \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \ldots \\ dx_n \end{pmatrix}.$$

30. Понятие неявной функции, ее существование и дифференцирование.





Если зависимость значения u от значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ записана в виде формулы

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

то говорят, что функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ задана явно; если же эта зависимость отражена уравнением

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n,\ u) = 0,$$

где $F(x_1, x_2, \dots, x_n,\ u)$ – некоторая функция $n + 1$ переменной, то говорят, что функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **задана неявно**.

Теорема

Пусть функция $F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u\right)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0,\ u_0\right)$. Если:

$$F\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0,\ u_0\right)=0;$$

$$\frac{\partial F\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0,\ u_0\right)}{\partial y} \neq 0,$$

то существуют окрестность U точки $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ и единственная непрерывно дифференцируемая функция нескольких переменных $u=f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ такая, что

$$y_0=\ f\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right) \text{ и}$$

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n,\ f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\right) \equiv 0 \quad \forall\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in U.$$

31. Формула Тейлора для функции многих переменных.

(Сори, ребзи, её нет в лмс'е)

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Если функция многих переменных имеет достаточное число непрерывных производных в окрестности некоторой точки, то эту функцию в указанной окрестности можно (подобно тому как это было сделано для функций одного переменного) представить в виде суммы некоторого многочлена и остатка, который «мал» в определенном смысле.

Теорема 1. *Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными до порядка m включительно ($m \geqslant 1$) в δ-окрестности точки (x_0, y_0). Тогда для всех Δx и Δy, удовлетворяющих условию $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$, существует такое $\theta = \theta(\Delta x, \Delta y)$, $0 < \theta < 1$, что справедлива формула*

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}\Delta y^2\right] + \frac{1}{3!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{3\}} f(x_0, y_0) + \ldots + \frac{1}{(m-1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{m-1\}} f(x_0, y_0) + r_{m-1}(\Delta x, \Delta y),$$

или, короче

$$\Delta z = \sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{k\}} f(x_0, y_0) + r_{m-1}(\Delta x, \Delta y), \qquad (39.1)$$

где

$$r_{m-1}(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{m!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\{m\}} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y). \qquad (39.2)$$

Формула (39.1) называется *формулой Тейлора* (порядка $m-1$) для функции f, функция $r_{m-1}(\Delta x, \Delta y)$ — *ее остаточным членом*, а его запись в виде (39.2) — остаточным членом формулы Тейлора в *форме Лагранжа*.

32. Понятие локального экстремума функции многих переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума.

Определение

Точка M_0 называется **точкой локального минимума** функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если существует окрестность $U(M_0)$ этой точки такая, что для любой точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U(M_0)$ справедливо неравенство:

$$f(M_0) \leq f(M).$$

Точка локального максимума определяется аналогично, только в последнем неравенстве знак $\leq$ нужно заменить на знак $\geq$.

Теорема 1 (необходимое условие локального экстремума)

Если дифференцируемая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет в точке $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ локальный экстремум, то

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n} = 0,$$

или, что то же самое,

$$df(M_0) = 0.$$

Точки, в которых выполняются указанные выше равенства, называются **стационарными точками** функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Теорема 2 (достаточные условия локального экстремума)

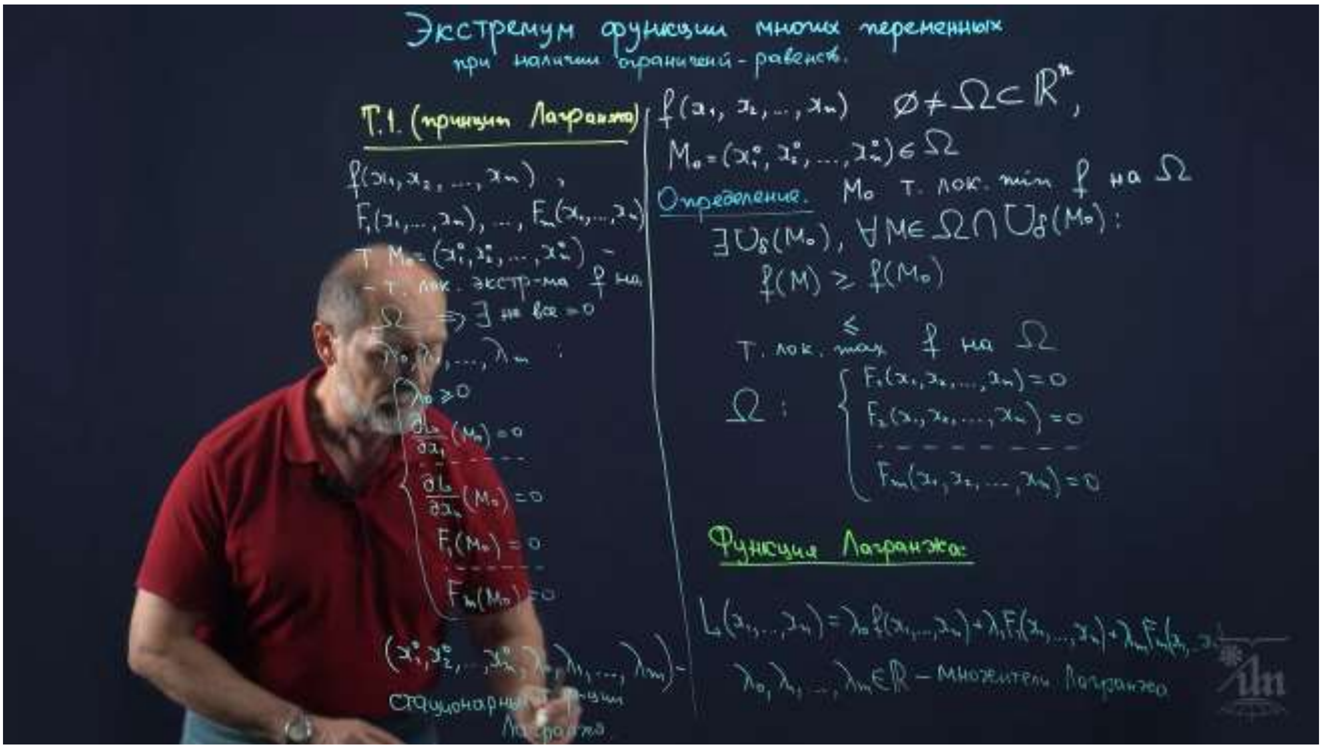
Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дважды непрерывно дифференцируема и пусть точка $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ является стационарной точкой этой функции, т.е. $df(M_0) = 0$. Тогда если $d^2 f(M_0) > 0$, то точка M_0 является точкой локального минимума, а если $d^2 f(M_0) < 0$, то точка M_0 является точкой локального максимума функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

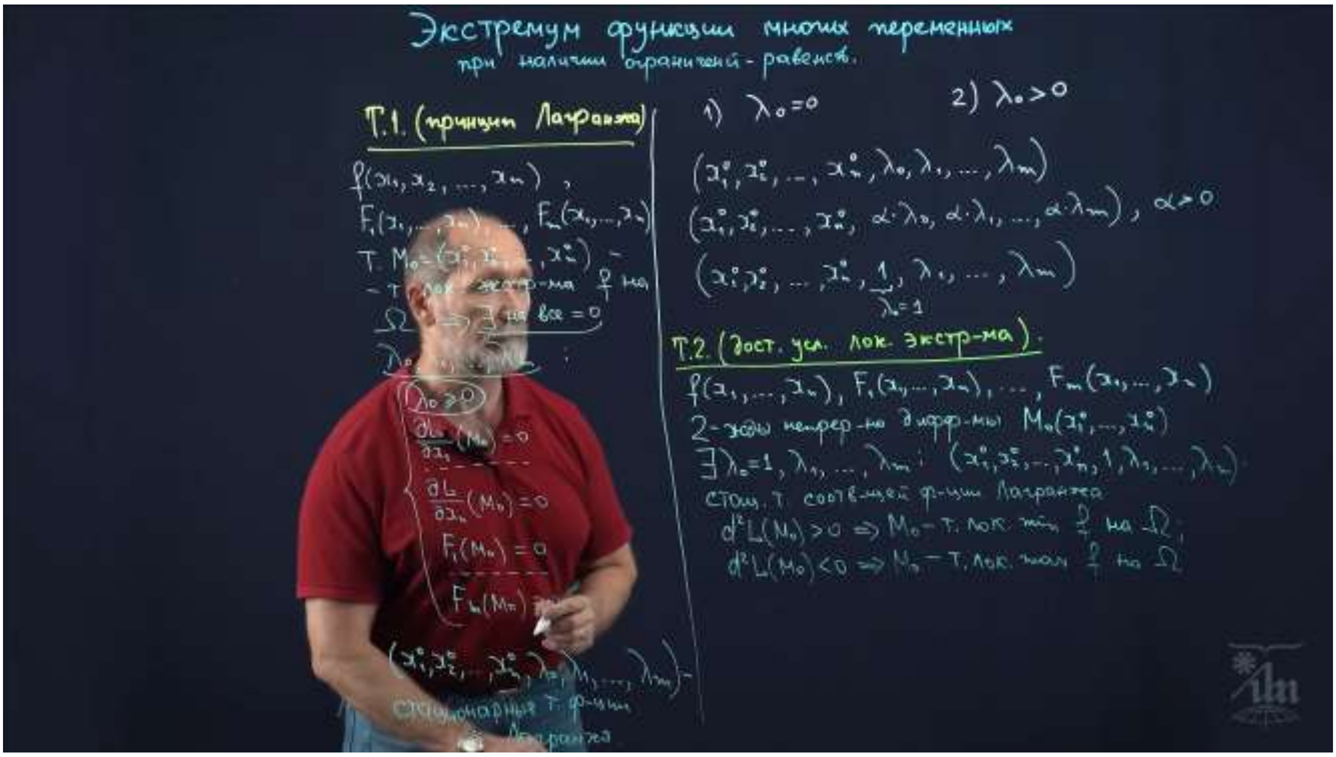
Доказательство ⌄

Теорема 3

Для того чтобы дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имела в точке M_0 локальный минимум (максимум), достаточно, чтобы в этой точке все её частные производные первого порядка были равны нулю, а матрица Гессе была положительно (отрицательно) определённой.

33. Условный экстремум функции многих переменных.




Экстремум функции многих переменных
при наличии ограничений-равенств.
Т.1. (принцип Лагранжа)
$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$,
Ω
$\lambda_0 > 0$
$\frac{\partial L}{\partial x_n}(M_0) = 0$
$F_1(M_0) = 0$
$F_m(M_0) = 0$
$(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ –
стационарные т. ф-ции Лагранжа
1) $\lambda_0 = 0$
2) $\lambda_0 > 0$
$(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$
$(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \alpha\cdot\lambda_0, \alpha\cdot\lambda_1, \dots, \alpha\cdot\lambda_m)$, $\alpha > 0$
$(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$
$\lambda_0 = 1$
Т.2. (дост. усл. лок. экстр-ма).
$f(x_1, \dots, x_n)$, $F_1(x_1, \dots, x_n)$, …, $F_m(x_1, \dots, x_n)$
2-жды непрер-но дифф-мы $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$
$\exists \lambda_0 = 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m$: $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ -
стац. т. соотв-щей ф-ции Лагранжа
$d^2L(M_0) > 0 \Rightarrow M_0$ – т. лок. min f на Ω;
$d^2L(M_0) < 0 \Rightarrow M_0$ – т. лок. max f на Ω

34. Числовой ряд и его частичные суммы. Сходящиеся и расходящиеся числовые ряды. Необходимое условие сходимости ряда.

Определение

Пусть дана числовая последовательность $\{a_n\} = \{a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n, \ldots\}$. Составим новую последовательность чисел $\{s_n\}$ следующим образом:

$s_1 = a_1$,

$s_2 = a_1 + a_2$,

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$,

....

$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$,

$s_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1}$,

....

Числовым рядом (подробнее: числовым рядом с общим членом a_n) называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

или кратко

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Элементы исходной последовательности $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n, \ldots$ называются членами ряда, а число a_n – ***общим*** или n-м ***членом ряда***. Элементы последовательности $\{s_n\}$ называются ***частичными суммами*** этого ряда, а конечная сумма s_n – n-ой ***частичной суммой ряда*** $(n = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$.

Сумма n первых членов ряда – n-ная частичная сумма s_n

Определение

Если последовательность частичных сумм $\{s_n\}$ имеет конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

то есть последовательность $\{s_n\}$ сходится к числу s, то этот предел называют ***суммой ряда*** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, при этом пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

и говорят, что ***ряд сходится***. Если же предел

$$\lim_{n\to\infty} s_n$$

не существует или равен бесконечности, то есть последовательность $\{s_n\}$ ***расходится***, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится (и суммы не имеет).

35. Критерии сходимости числового ряда. Свойства сходящихся числовых рядов.

Теорема

Сходимость ряда не нарушится, если изменить в нем произвольным образом конечное число членов (в частности, переставить, отбросить, добавить).

Теорема

Пусть c – некоторое действительное число ($c \neq 0$). Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$, называемый произведением данного ряда на число c, также сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Доказательство

Пусть $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ – n-ая частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а $s_n' = \sum\limits_{k=1}^{n} ca_k$ – n -ая частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$. По условию $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ существует, потому, в силу очевидного равенства $s_n' = cs_n$, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n{}'$ и

$$\lim_{n\to\infty} s_n' = c\lim_{n\to\infty} s_n.$$

Согласно определению суммы ряда, отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.\blacksquare$$

Теорема

Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, называемый суммой данных рядов, также сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Доказательство

Пусть

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ s_n{}' = \sum_{k=1}^{n} b_k \text{ и } \sigma_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k).$$

Тогда очевидно $\sigma_n = s_n + s_n{}'$. Так как по условию ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то есть существуют $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} s_n'$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$ также существует и

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty}(s_n + s_n') = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} s_n'.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.\blacksquare$$

Необходимый признак сходимости ряда.

Теорема. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то общий член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Признак сравнения. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ $(b_n \geq 0)$ таковы, что $\forall n \in \mathbb{N}$ или начиная с некоторого номера $n_0 \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство:

$$a_n \leq b_n.$$

Тогда:

1) из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема (критерий Коши)

Для того, чтобы числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такой, что для $\forall\, n > n(\varepsilon)$ и для $\forall\, p \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

36. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости: признак Даламбера.

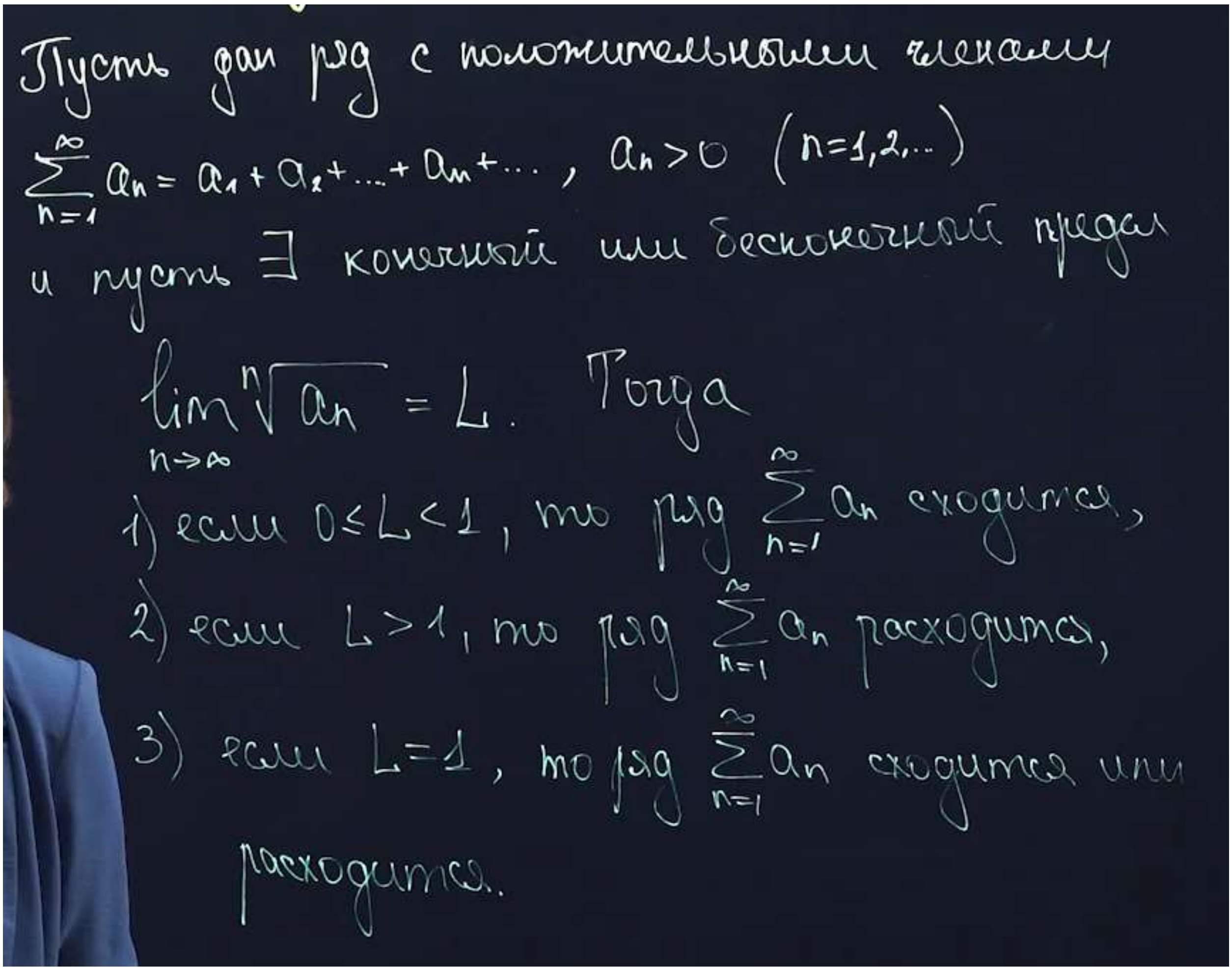
Признак Даламбера

Если в числовом знакоположительном ряде $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

существует предел отношения последующего члена ряда u_{n+1}
к предыдущему u_n при $n \to \infty$ равный числу p

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = p, \quad \text{то} \begin{cases} \text{при } p < 1 - \text{ ряд сходится} \\ \text{при } p > 1 - \text{ ряд расходится} \\ \text{при } p = 1 - \text{ вопрос о сходимости не решен} \end{cases}$$

37. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости: признак Коши.



38. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости: интегральный признак Маклорена-Коши.

Теорема (интегральный признак Коши сходимости рядов)

Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна, положительна и монотонно убывает при всех $x \geq 1$. Тогда

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится, если сходится несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится, если расходится несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx.$$

39. Знакопеременные числовые ряды. Абсолютно и условно сходящиеся ряды.

Определение

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, членами которого являются действительные числа любого знака, называется ***знакопеременным***.

Определение

Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots,$$

где все $a_n > 0$ (или все $a_n < 0$), называется ***знакочередующимся числовым рядом***.

Теорема

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то он сходится и в обычном смысле.

Другими словами, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказательство

Определение

Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, то есть сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется ***условно сходящимся***, если он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов расходится.

40. Знакочередующиеся ряды: признак сходимости Лейбница, оценка остатка сходящегося ряда.

Теорема (признак Лейбница)

Если для знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ ($a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$) выполняются два условия:

1) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots$ (то есть последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает);

2) предел модуля общего члена ряда при $n \to \infty$ равен нулю, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ сходится.

Причем его сумма s положительна и не превосходит первого члена:

$$0 < s \le a_1.$$

41. Функциональные ряды. Область сходимости и сумма ряда. Абсолютная и условная сходимости. Равномерная сходимость на замкнутом множестве. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости.

Функциональный ряд

$$f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$

Функции $f_n(x)$ $(n\in\mathbb{N})$ определены и непрерывны на некотором множестве $X\subset\mathbb{R}$

Областью сходимости D функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ называется совокупность всех значений x, при которых данный ряд сходится

Сумма функционального ряда

$$S(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

$$x \in D$$

n-ая частичная сумма функционального ряда

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

Остаток функционального ряда

$$r_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

$$\forall x \in D$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x) \qquad \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x)$$

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется **абсолютно сходящимся** на множестве D, если на этом множестве сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$

Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** на множестве $\Omega \subseteq D$ к сумме $s(x)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $N(\varepsilon) > 0$ такое, что для $\forall n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|s(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| < \varepsilon$$

$$\forall x \in \Omega$$

Признак Вейерштрасса

Пусть для всех x из области Ω члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ по абсолютной величине не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами, то есть

$$|f_n(x)| \le a_n \qquad a_n \ge 0 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

для всех $x \in \Omega$. Тогда функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно во всех точках $x \in \Omega$

42. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов: теоремы о непрерывности суммы, предельном переходе.

Теорема (о непрерывности суммы функционального ряда)

Пусть все члены $f_n(x)$ функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ непрерывны, и ряд сходится равномерно на множестве Ω. Тогда сумма $s(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ непрерывна на множестве Ω.

Следствие

В равномерно сходящихся рядах возможен почленный переход к пределу, то есть

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

43. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов: теоремы о почленном интегрировании и почленном дифференцировании

Теорема (о почленном интегрировании функционального ряда)

Пусть все члены $f_n(x)$ функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a;b]$ к функции $s(x)$. Тогда справедливо равенство

$$\int_{x_0}^{x} s(t)\,dt = \int_{x_0}^{x}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right]dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt,$$

то есть данный ряд можно почленно интегрировать в пределах от x_0 до x при любых x, $x_0 \in [a;b]$.

Полученный ряд будет сходиться равномерно по x на отрезке $[a;b]$, каково бы ни было $x_0 \in [a;b]$.

Теорема (о почленном дифференцировании функционального ряда)

Пусть все члены $f_n(x)$ сходящегося к функции $s(x)$ функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ имеют непрерывные производные, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(x)}$, составленный из этих производных, равномерно сходится на отрезке $[a;b]$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a;b]$, его сумма $s(x)$ непрерывно дифференцируема, и в любой точке $x \in [a;b]$ выполняется равенство

$$s'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

то есть данный ряд можно почленно дифференцировать.

44. Степенные ряды, теорема Абеля. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда. Равномерная сходимость степенного ряда.

Определение

Функциональный ряд вида

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 \ldots + c_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$$

называется ***степенным рядом по степеням*** x. Числа $c_n \in \mathbb{R} \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$ называются ***коэффициентами степенного ряда***.

Теорема Абеля

Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ сходится при $x = x_1 \neq 0$, то он абсолютно сходится для всех x, таких, что $|x| < |x_1|$.

Если же степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ расходится в точке $x = x_2$, то он расходится для любых x, таких, что $|x| > |x_2|$.

Теорема

Если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = L, \quad 0 < L < +\infty,$$

то радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ определяется формулой

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}.$$

Если $L = 0$, то полагают $R = +\infty$, если $L = +\infty$, то $R = 0$.

Теорема

Если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L, \quad 0 < L < +\infty,$$

то радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ определяется формулой

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Если $L = 0$, то полагают $R = +\infty$, если $L = +\infty$, то $R = 0$.

Теорема

Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ сходится абсолютно и равномерно на любом отрезке $[-a; a]$, $a > 0$, содержащемся в интервале сходимости степенного ряда $(-R; R)$, $R > 0$.

45. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора.

Определение

Будем говорить, что функция $f(x)$ **раскладывается в степенной ряд** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ на интервале $(x_0-R; x_0+R)$, если на этом интервале указанный ряд сходится и его сумма равна $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n, \quad x \in (x_0-R; x_0+R).$$

Определение

Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на интервале $(x_0-R; x_0+R)$. Степенной ряд вида

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

независимо от того, сходится ли он и имеет ли он своей суммой функцию $f(x)$, называется **рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0**.

Коэффициенты этого ряда

$$c_0 = f(x_0), \quad c_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \ \ldots, \ c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ldots$$

называются **коэффициентами Тейлора** функции $f(x)$ в точке x_0.

Многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется **многочленом Тейлора** функции $f(x)$ по степеням $f(x-x_0)$.

46. Необходимое и достаточное условие разложимости функции в степенный ряд. Достаточные условия представления функции рядом Тейлора.

Теорема 1

Если функция $f(x)$ раскладывается в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ на интервале $(x_0-R; x_0+R)$, то этот ряд является рядом Тейлора для своей суммы $f(x)$ и это разложение единственно.

Теорема 2 (признак разложимости функции в ряд Тейлора)

Для того, чтобы функцию $f(x)$ можно было разложить в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ на интервале $(-R;\ R)$ необходимо и достаточно, чтобы на этом интервале функция $f(x)$ имела производные всех порядков и чтобы в ее формуле Тейлора

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

остаточный член $R_n(x)$ стремился к нулю при $n \to \infty$ для всех $x \in (-R;\ R)$.

Теорема 3 (достаточный признак разложения функции в ряд Тейлора)

Для того, чтобы функцию $f(x)$ на интервале $(-R;\ R)$ можно было разложить в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ достаточно, чтобы

1) функция $f(x)$ имела на этом интервале производные всех порядков;

2) существовала постоянная $M > 0$ такая, что

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$$

для всех $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ и для всех $x \in (-R;\ R)$ (то есть производные функции $f(x)$ равномерно ограничены на $(-R;\ R)$).

47. Разложение основных функций в ряд Маклорена.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$\text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad .$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \ldots, \quad x \in (-1;1]$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots, \quad x \in [-1;1).$$

Частные случаи биномиального ряда:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

Область сходимости ряда: $t \in (-1; 1)$.

Частные случаи биномиального ряда:

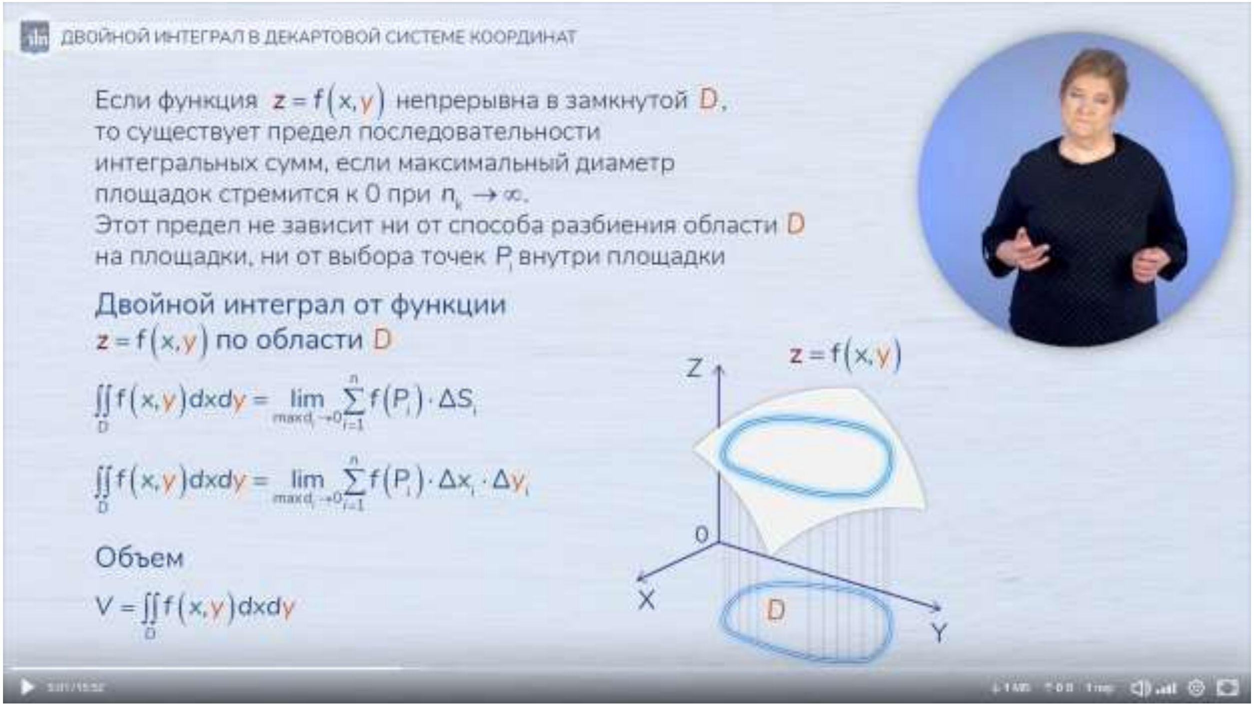
$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

Область сходимости ряда: $t \in (-1; 1)$.

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \ldots + t^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

Область сходимости ряда: $t \in (-1; 1)$.

48. Двойной интеграл в прямоугольных координатах и его свойства. Изменение порядка интегрирования в двойном интеграле.



Свойства двойного интеграла

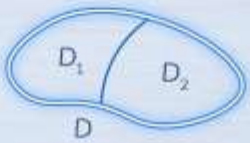
① $\iint\limits_D kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

② $\iint\limits_D (f(x,y) \pm g(x,y))dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)dxdy$

③ $f(x,y) \le g(x,y)$

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy$

④ $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$



⑤ $\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$

ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Свойства двойного интеграла

⑥ $\iint\limits_D dxdy = S_D$ $\quad S_D$ – площадь области D

⑦ $m \le f(x,y) \le M$

$m \cdot S_D \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le M \cdot S_D$

Теорема о среднем двойном интеграле

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \mu \cdot S_D \qquad m \le \mu \le M$

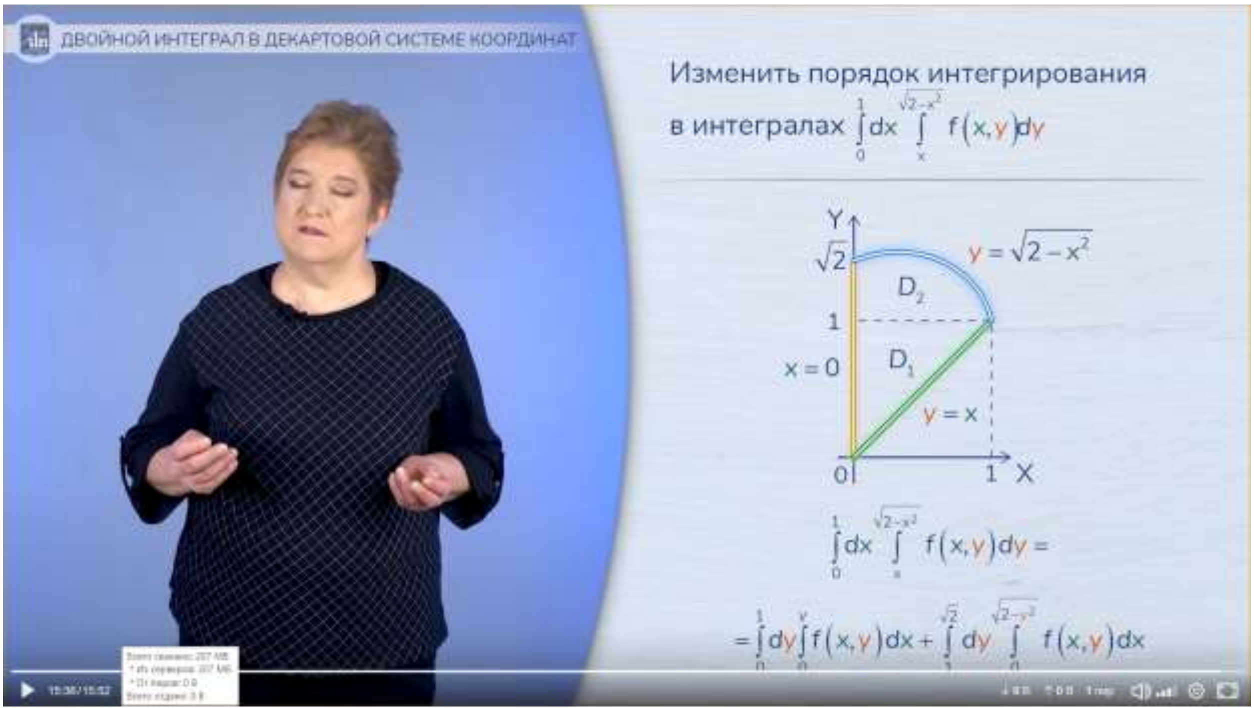
$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)S_D \qquad f(x_0,y_0) = \mu$

Среднее значение функции $f(x,y)$ в области D

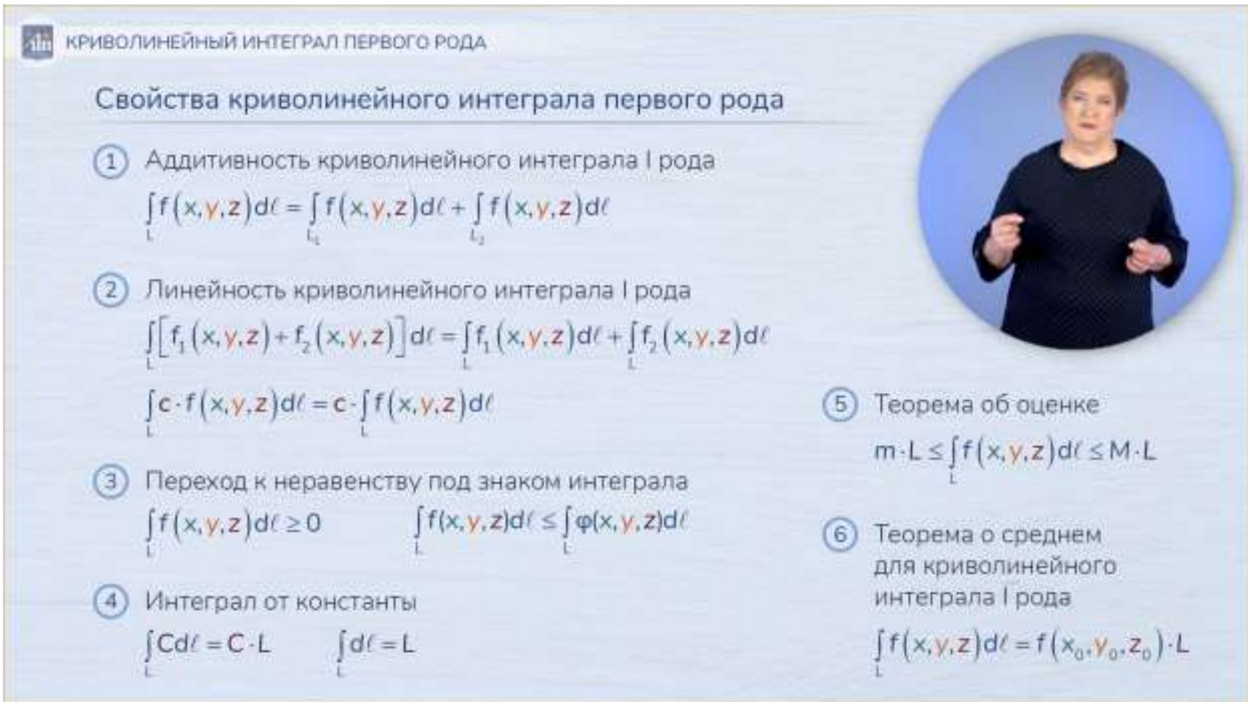
$f(x_0,y_0) = \frac{1}{S_D}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

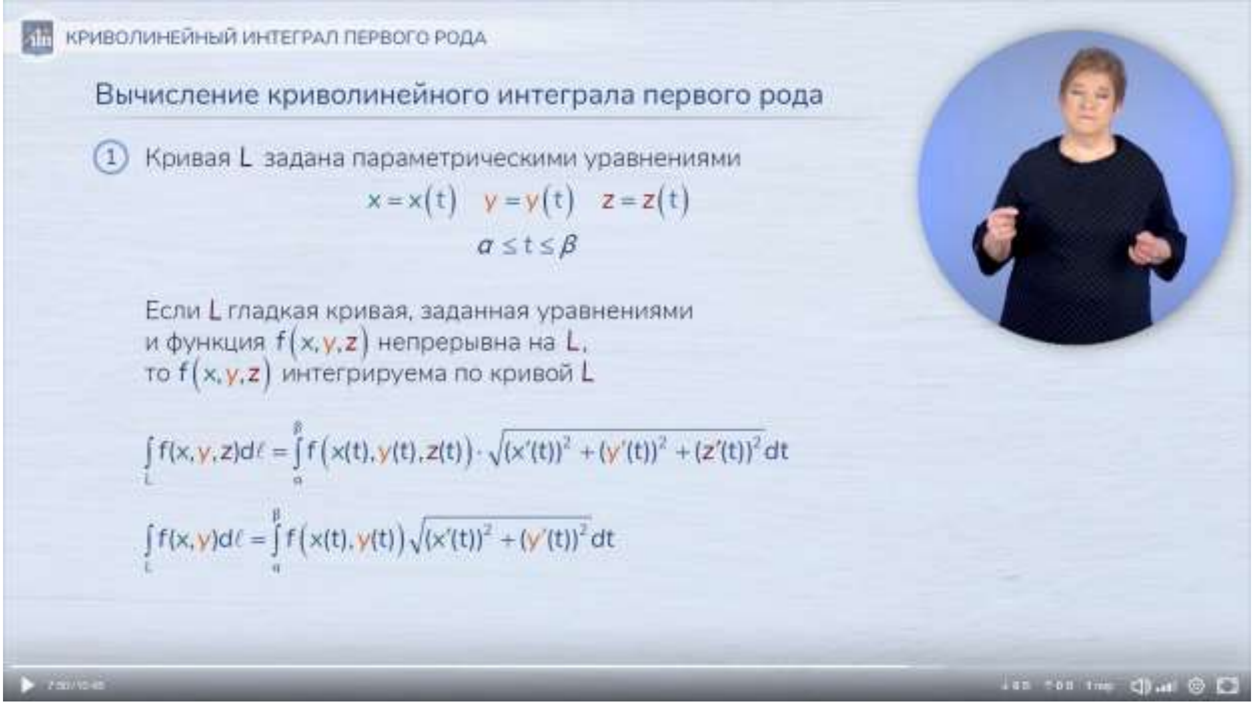
③ Если $f(x,y)$ интегрируема на D и для любого y существует $\int\limits_a^b f(x,y)dx = \psi(y)$, для любого x существует $\int\limits_c^d f(x,y)dy = \Phi(x)$ то существуют $\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy$, $\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx$

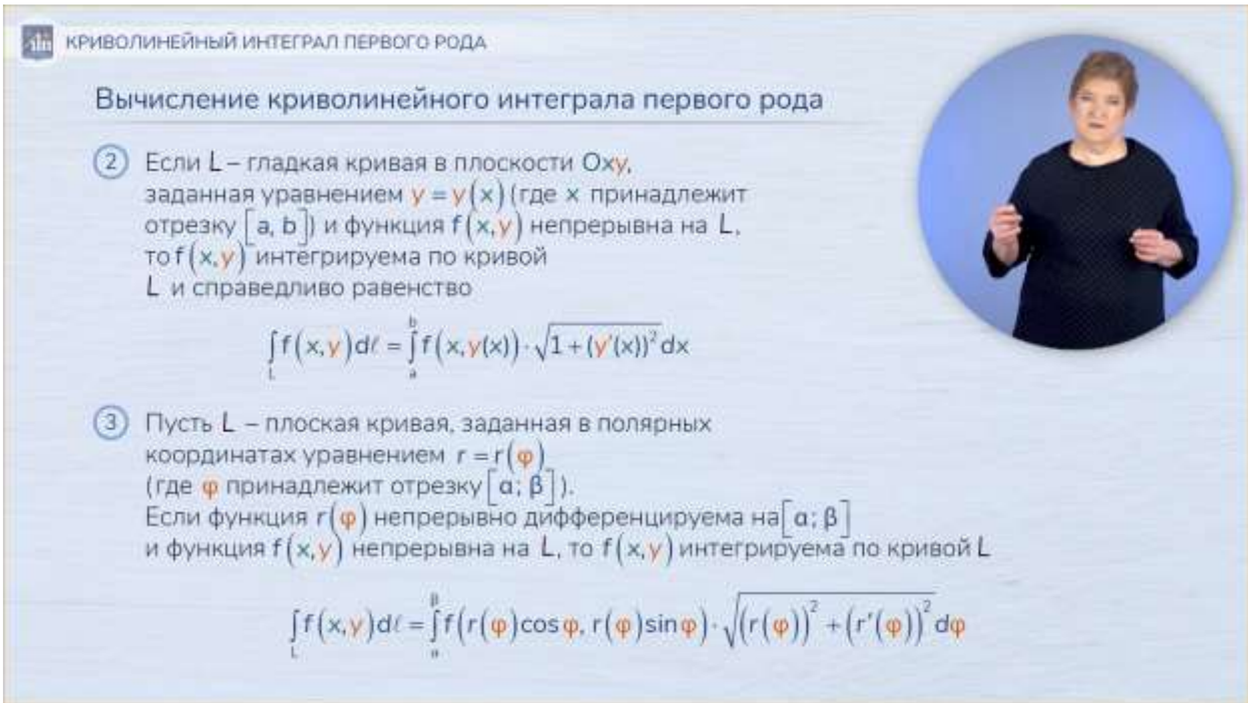
$$\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

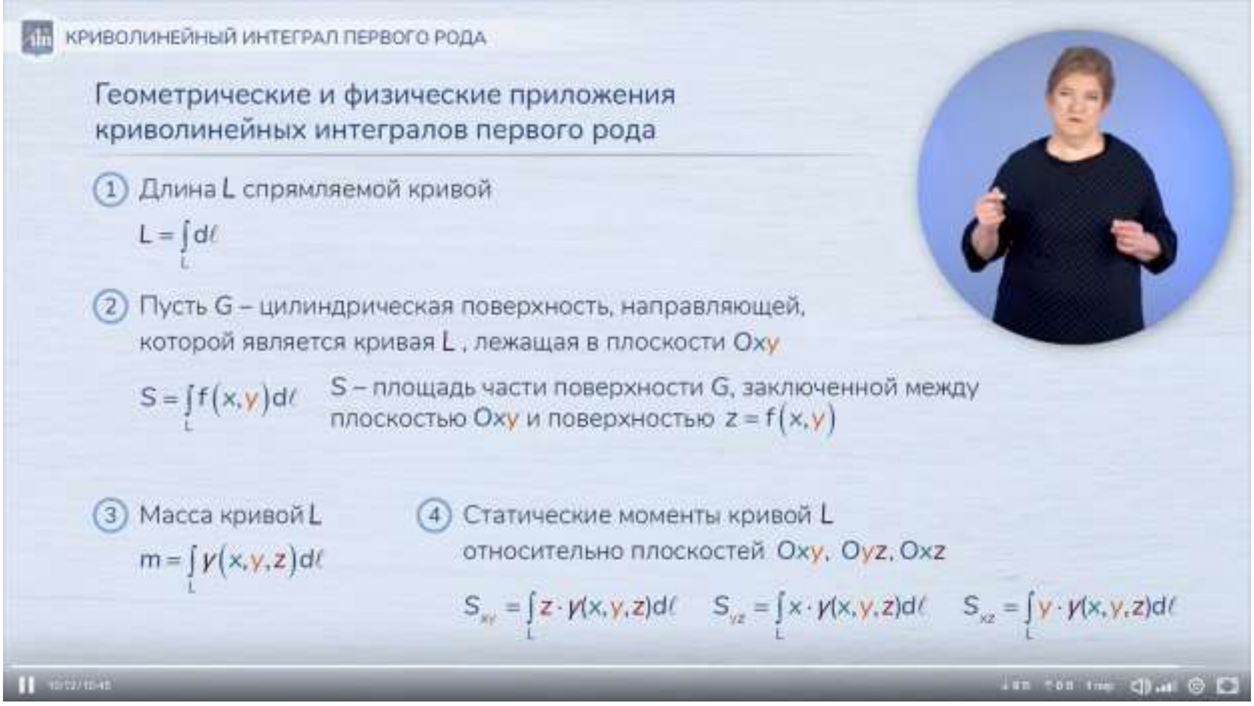


49. Свойства и вычисление криволинейных интегралов 1-го рода.

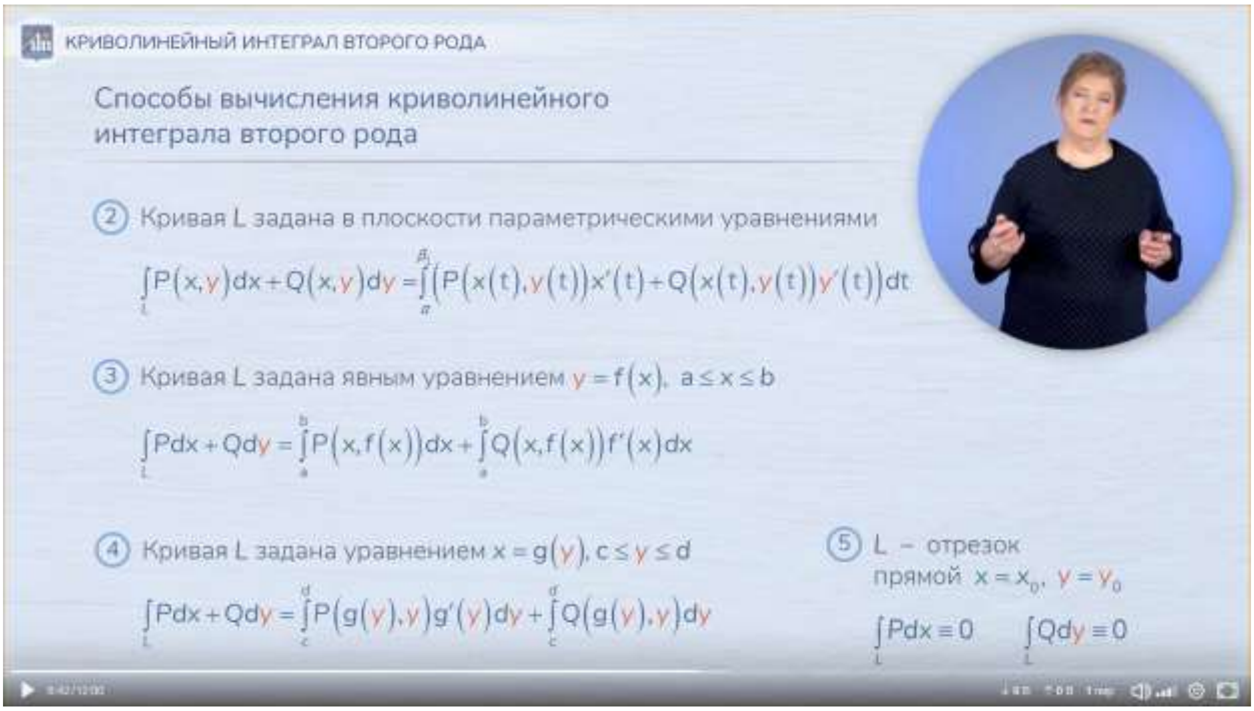


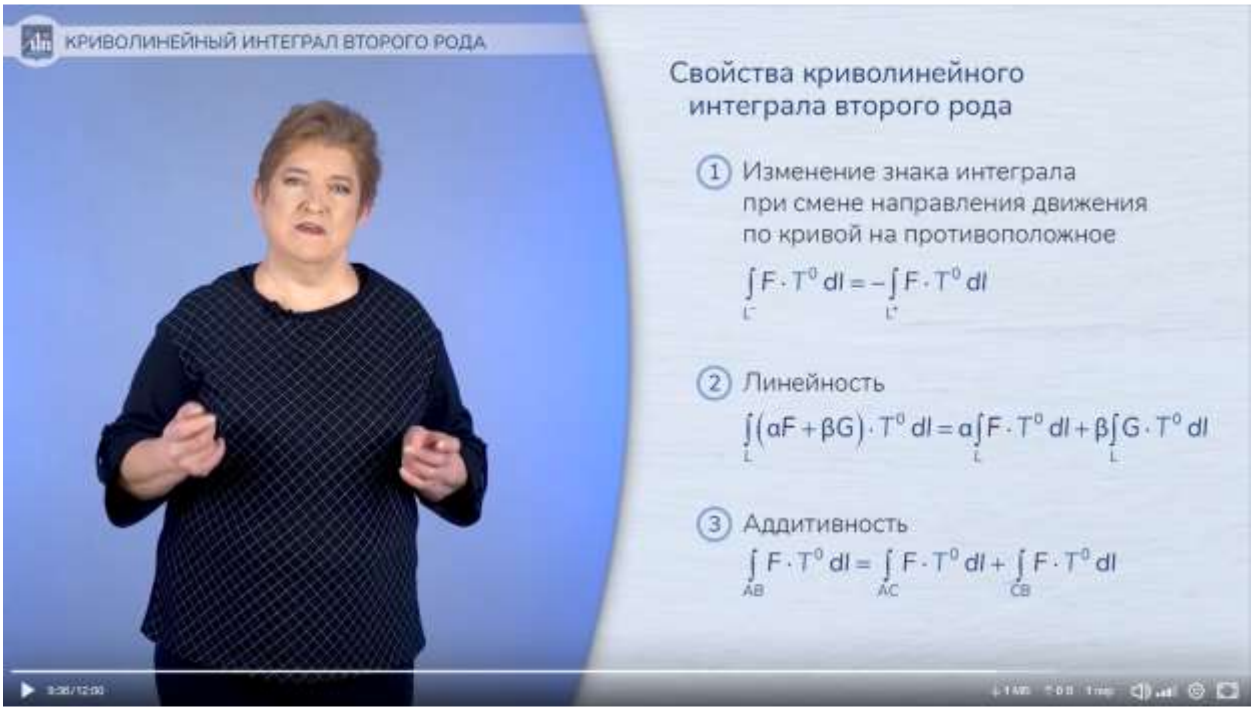

КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО РОДА
Вычисление криволинейного интеграла первого рода
① Кривая L задана параметрическими уравнениями
$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$
$\alpha \le t \le \beta$
Если L гладкая кривая, заданная уравнениями
и функция $f(x,y,z)$ непрерывна на L,
то $f(x,y,z)$ интегрируема по кривой L
$\int\limits_L f(x,y,z)d\ell = \int\limits_\alpha^\beta f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$
$\int\limits_L f(x,y)d\ell = \int\limits_\alpha^\beta f\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$


КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО РОДА
Вычисление криволинейного интеграла первого рода
② Если L – гладкая кривая в плоскости Oxy,
заданная уравнением $y = y(x)$ (где x принадлежит
отрезку $[a, b]$) и функция $f(x,y)$ непрерывна на L,
то $f(x,y)$ интегрируема по кривой
L и справедливо равенство
$\int\limits_L f(x,y)d\ell = \int\limits_a^b f\left(x,y(x)\right)\cdot\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$
③ Пусть L – плоская кривая, заданная в полярных
координатах уравнением $r = r(\varphi)$
(где φ принадлежит отрезку $[\alpha;\beta]$).
Если функция $r(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha;\beta]$
и функция $f(x,y)$ непрерывна на L, то $f(x,y)$ интегрируема по кривой L
$\int\limits_L f(x,y)d\ell = \int\limits_\alpha^\beta f\left(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi\right)\cdot\sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2+\left(r'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi$



50. Криволинейный интеграл 2-го рода. Свойства и вычисление криволинейных интегралов 2-го рода.





51. Формула Грина. Независимость криволинейных интегралов 2-го рода от пути интегрирования.

Формула Грина связывает интеграл второго рода по замкнутой кривой с двойным интегралом по области, ограниченной этой кривой.

Вспомним определение области, **правильной в направлении оси** Oy:

1) область D, ограничена снизу кривой $y=\varphi_1(x)$, сверху $y=\varphi_2(x)$ $(\varphi_1(x)\le\varphi_2(x))$ и, возможно, отрезками прямых $x=a$, $x=b$ $(a<b)$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны на $[a,b]$

2) любая прямая, параллельная координатной оси Oy и проходящая через внутреннюю точку области D, пересекает границы области в двух точках.

Теорема 1

Пусть D – область, правильная в направлении оси Oy, L – граница области D и направление обхода L выбрано так, что область D остается слева (Рисунок 6). Пусть $P(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ непрерывны в области D, тогда

$$\oint_L P\,dx = -\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy \qquad (14)$$

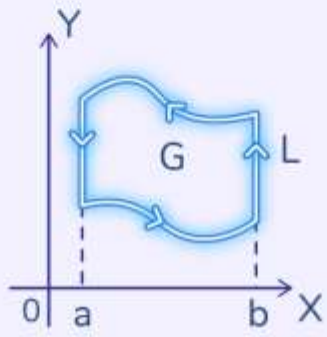


Рисунок 6

Теорема 2

Пусть D – область, правильная в направлении оси Ox, L – граница D, а направление обхода L выбрано так, что D остается слева. (Рисунок 7). Пусть $Q(x,y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ непрерывны в области D. Тогда

$$\oint\limits_L Qdy = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy \qquad (15)$$

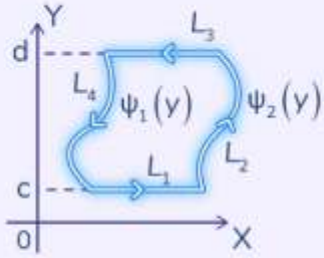


Рисунок 7

Следствие 1

Если область D можно представить как $D=\{(x,y)|\, a\le x\le b, \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$, где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – непрерывно дифференцируемые на $[a;b]$ функции, так и в виде $D=\{(x,y)|\, c\le y\le d, \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$, где $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ – непрерывно дифференцируемые на $[c;d]$ функции, L — граница D, причем при ее обходе область D остается слева, то

$$\oint\limits_L Pdx+Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \qquad (16)$$

Формулу (16) называют **формулой Грина**.

Следствие 2

Если область D можно разбить кривыми на конечное число областей, удовлетворяющих условиям следствия 1 и L – граница D причем направление обхода выбрано так, что область D остается слева, и P и Q удовлетворяют перечисленным выше условиям, то $\oint\limits_L Pdx+Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$.

Если в некоторой односвязной области D выполнены условия теорем 1, 2 и следствия 1, то равносильны приведённые ниже утверждения.

1. $\oint\limits_L Pdx+Qdy=0$, если L – любой замкнутый контуром, лежащий в D.
2. Интеграл $\int\limits_{L_{AB}} Pdx+Qdy$ не зависит от формы пути интегрирования, соединяющего точки A и B и лежащего в области D.
3. $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=du(x,y)$, где $du(x,y)$ – полный дифференциал функции $u(x,y)$
4. Во всех точках области D справедливо равенство $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.

52. Основные понятия теории дифференциальных уравнений (ДУ). ДУ 1-го порядка, задача Коши.

Дифференциальные уравнения разделяют на два вида – обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) и дифференциальные уравнения в частных производных (ДУ в ЧП). Если искомая функция зависит только от одной независимой переменной, то такое дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**. Если же искомая функция зависит от двух и более независимых переменных, то уравнение называется дифференциальным уравнением **в частных производных** (или с частными производными).

В рамках данного курса мы будем изучать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Простейшим дифференциальным уравнением является уравнение вида

$$y' = f(x)$$

где $f(x)$– заданная непрерывная функция.

Очевидно, что искомой функцией y является любая первообразная функции $f(x)$, т.е.

$$y = \int f(x)dx$$

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей (наивысшей) производной, входящей в уравнение.

Определение

Решением дифференциального уравнения n-го порядка

$$F(x,y,y',\ldots,y(n))=0$$

на интервале (a,b) называется n раз непрерывно дифференцируемая на этом интервале функция $y=\varphi(x)$ которая обращает дифференциальное уравнение в тождество на интервале (a,b), т.е.

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\ldots,\varphi(n)(x))\equiv.$$

Решение уравнения, представленное в неявном виде, т.е. $\Phi(x,y)=0$Φ(x,y)=0, также называют **интегралом** дифференциального уравнения.

Перейдем к частному случаю. Рассмотрим дифференциальные уравнения первого порядка, т.е. уравнения вида

$$F(x,y,y')=0$$

где x – независимая переменная, $y(x)$ – искомая функция, ′y′ – ее производная, F – заданная функция трех переменных.

Обыкновенным дифференциальным **уравнением первого порядка в нормальной форме** называется уравнение вида

$y'=f(x,y)$,

где f – заданная функция двух аргументов, определенная в некоторой области $D\subset R2$.

Задача отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка $y'=f(x,y)$ удовлетворяющего начальному условию $y(x_0)=y_0$, называется **задачей Коши** или **начальной задачей** для данного уравнения.

Говорят, что в точке $(x0,y0)\in D$ выполняется **единственность решения задачи Коши**, если существует такая окрестность этой точки, в которой существует только одна интегральная кривая, проходящая через точку $(x0,y0)$

Теорема Пикара (существования и единственности решения задачи Коши)

Пусть поставлена задача Коши $y'=f(x,y)$ $y(x0)=y0$. Если функция $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности $U(x0,y0)$ точки $M0(x0,y0)$ и удовлетворяет двум условиям:

1) $f(x,y)$ непрерывна в $U(x0,y0)$

2) $f(x,y)$ имеет ограниченную частную производную $\partial f\partial y$ в $U(x0,y0)$

то найдется отрезок $[x0-h,x0+h]$[x0−h,x0+h], на котором существует, и притом единственное, решение данной задачи Коши.

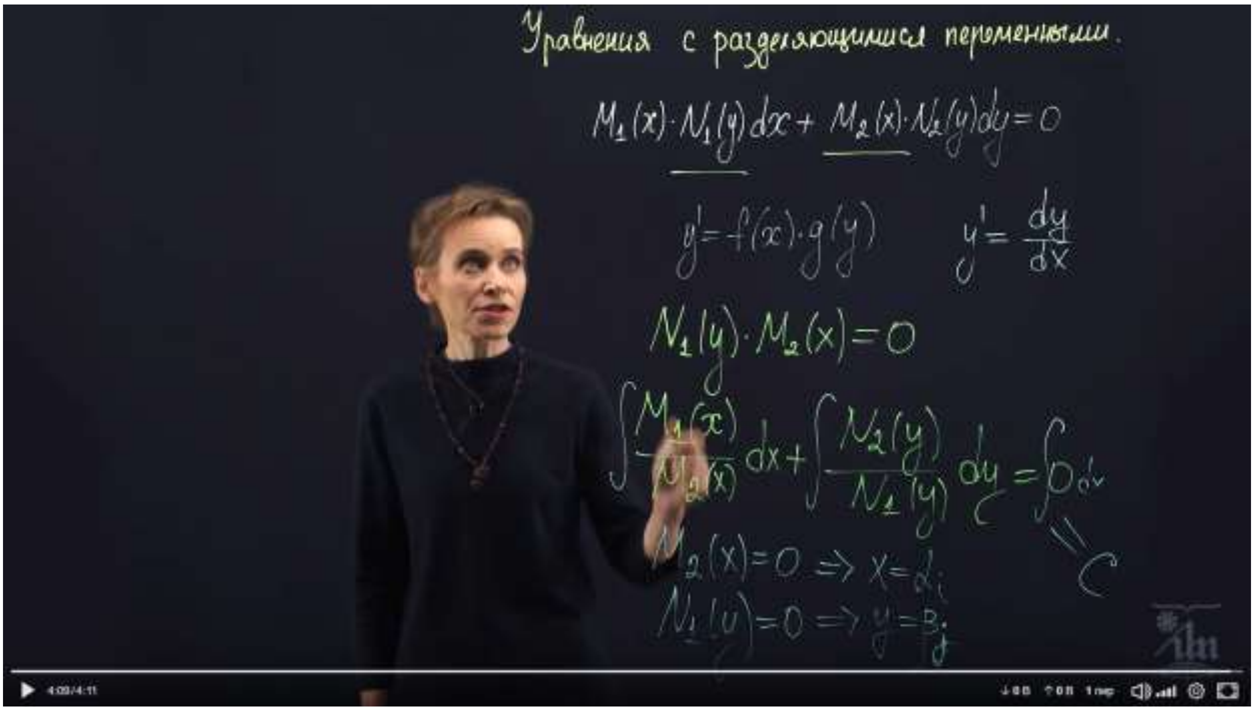
Определение

Если общее решение дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$ задано в параметрическом виде, т.е.

$$x=\phi(t,C),y=\psi(t,C),$$

то эти равенства называются **общим решением** уравнения **в параметрической форме**.

53. Основные классы ДУ 1-го порядка, интегрируемые в квадратурах: с разделяющимися переменными, однородные.



Определение

Функция $F(x1,x2,\ldots,xn)$ называется **однородной функцией степени** m (или **измерения** m), если

$$F(tx1,tx2,\ldots,txn)=tmF(x1,x2,\ldots,xn)$$

для любых допустимых значений параметра t.

Однородным дифференциальным уравнением (в нормальной форме) называется дифференциальное уравнение вида

$$y'=f(y/x)$$

Заметим, что правая часть однородного дифференциального уравнения в нормальной форме является однородной функцией нулевой степени.

Определение

Дифференциальное уравнение в симметрической форме

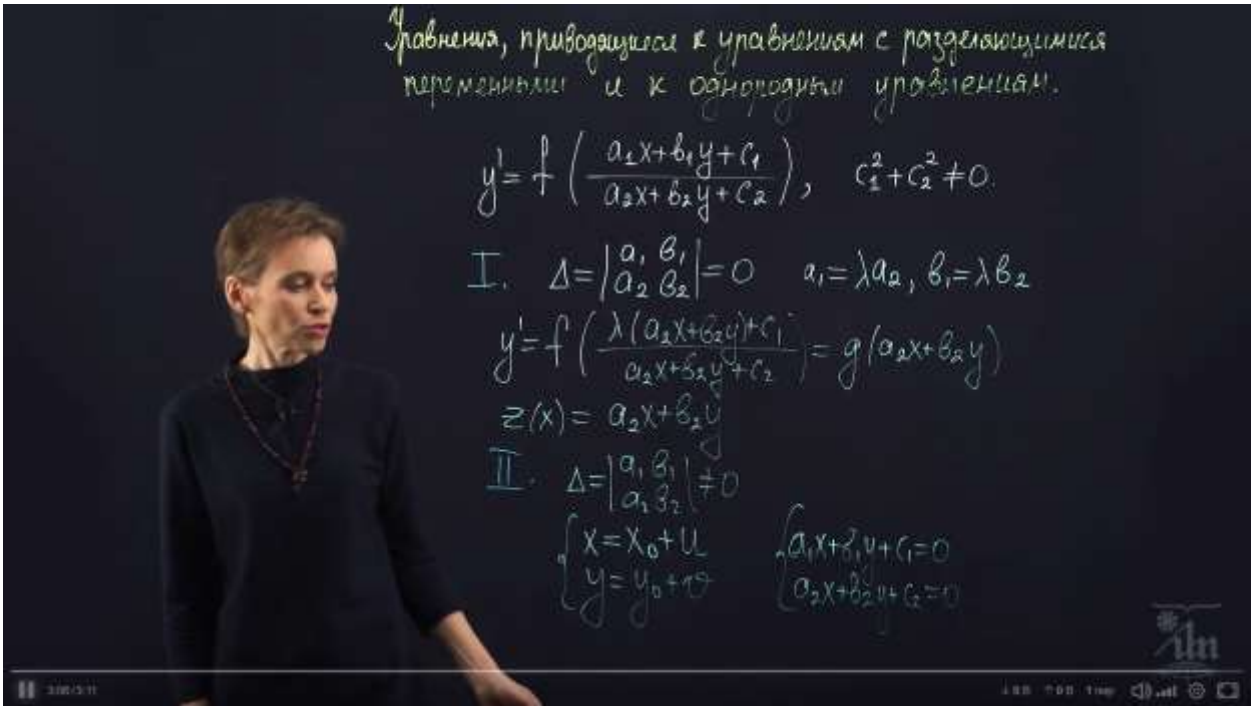
$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

называется **однородным**, если оба его коэффициента $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями одной и той же степени mm, т.е.

$$M(tx,ty)=tmM(x,y),\ N(tx,ty)=tmN(x,y)$$

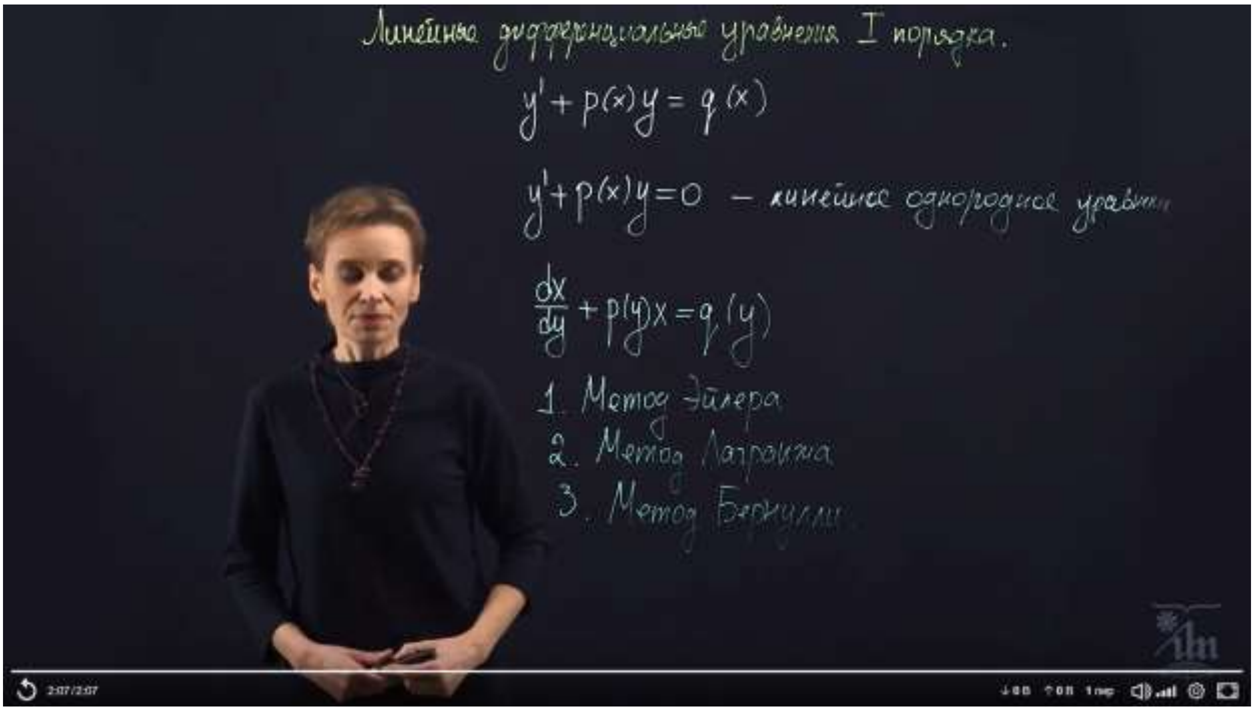
для любых (x,y), (tx,ty), принадлежащих областям определения функций $M(x,y)$ и $N(x,y)$

3. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными и к однородным уравнениям



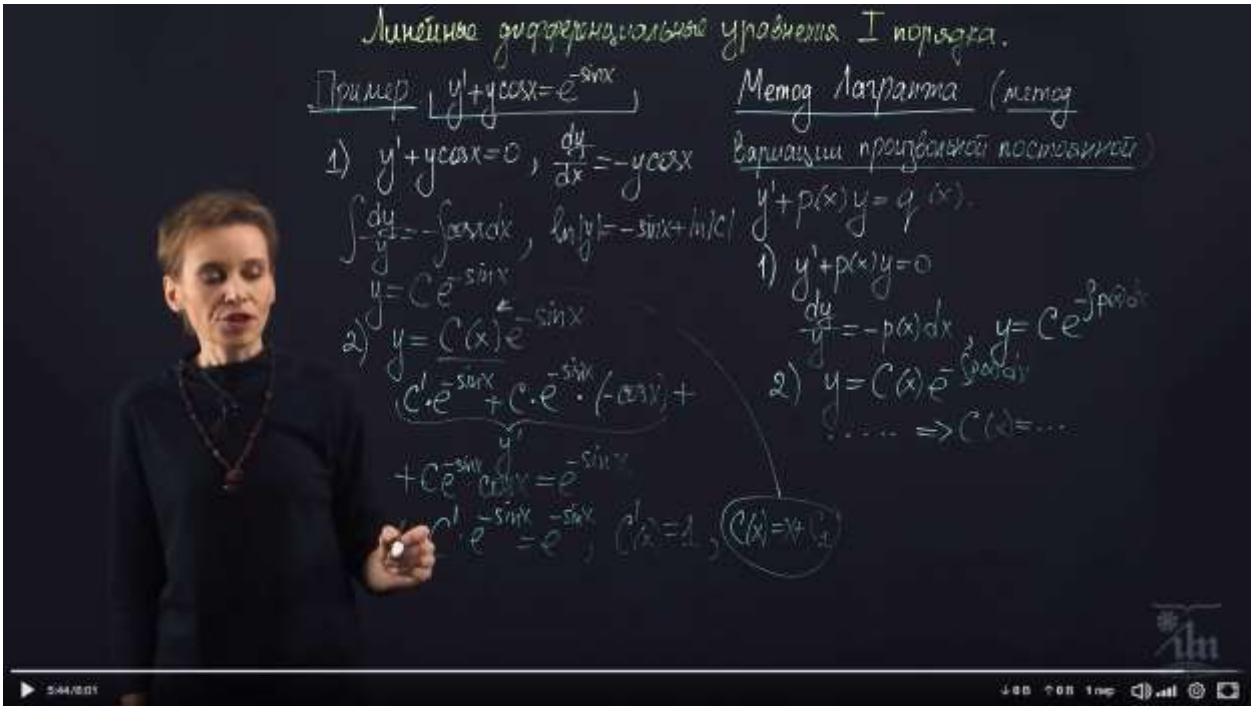
54. Основные классы ДУ 1-го порядка, интегрируемые в квадратурах: линейные уравнения.

4. Линейные дифференциальные уравнения

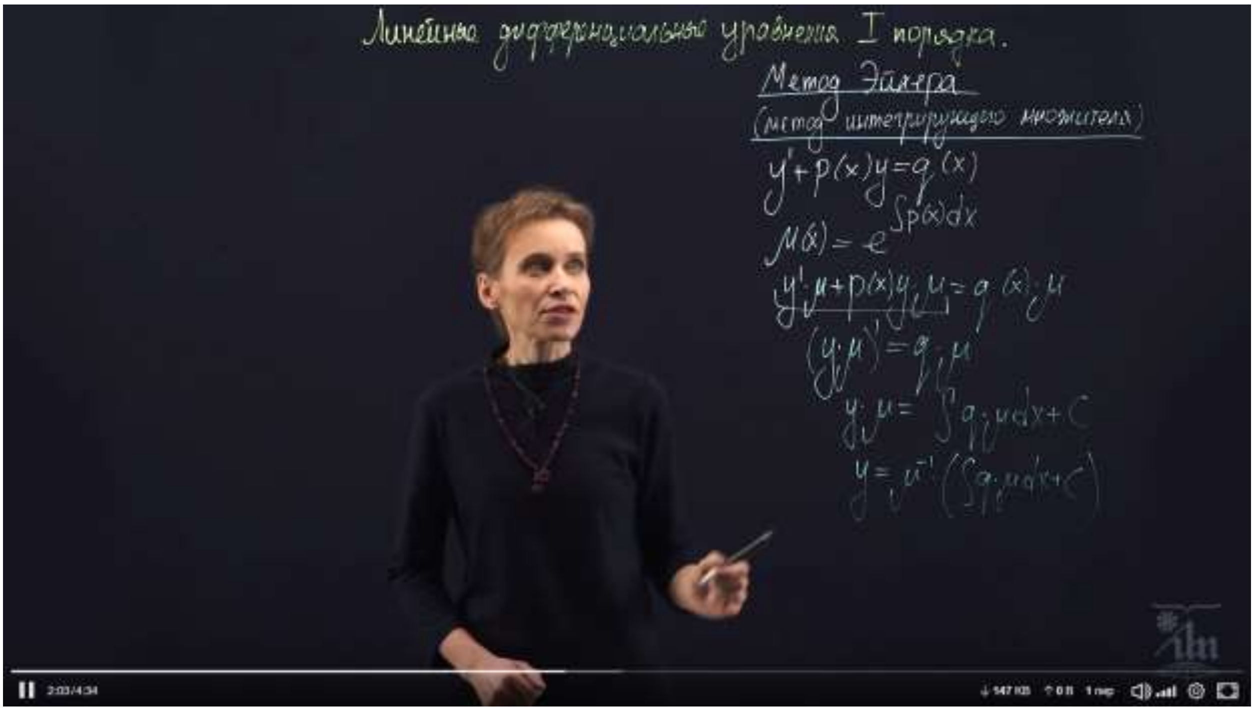


Метод Бернулли

Метод Лагранжа



Метод Эйлера

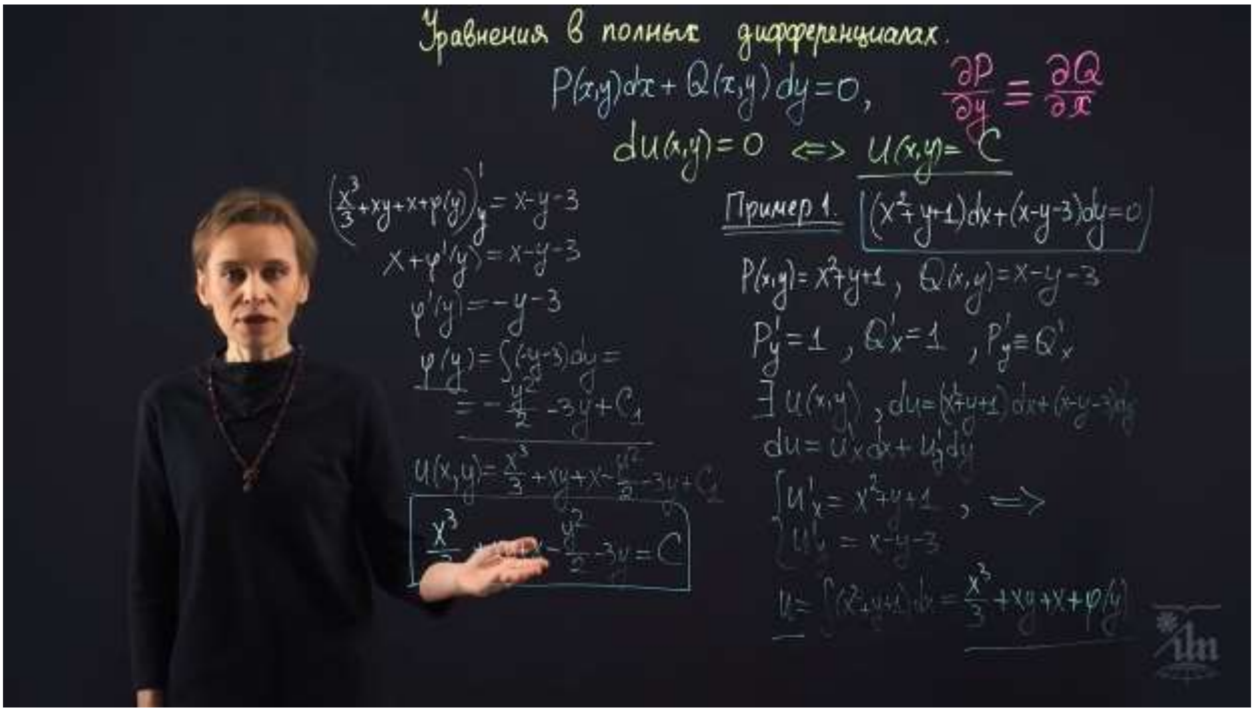


55. Основные классы ДУ 1-го порядка, интегрируемые в квадратурах: Бернулли

Уравнение Бернулли

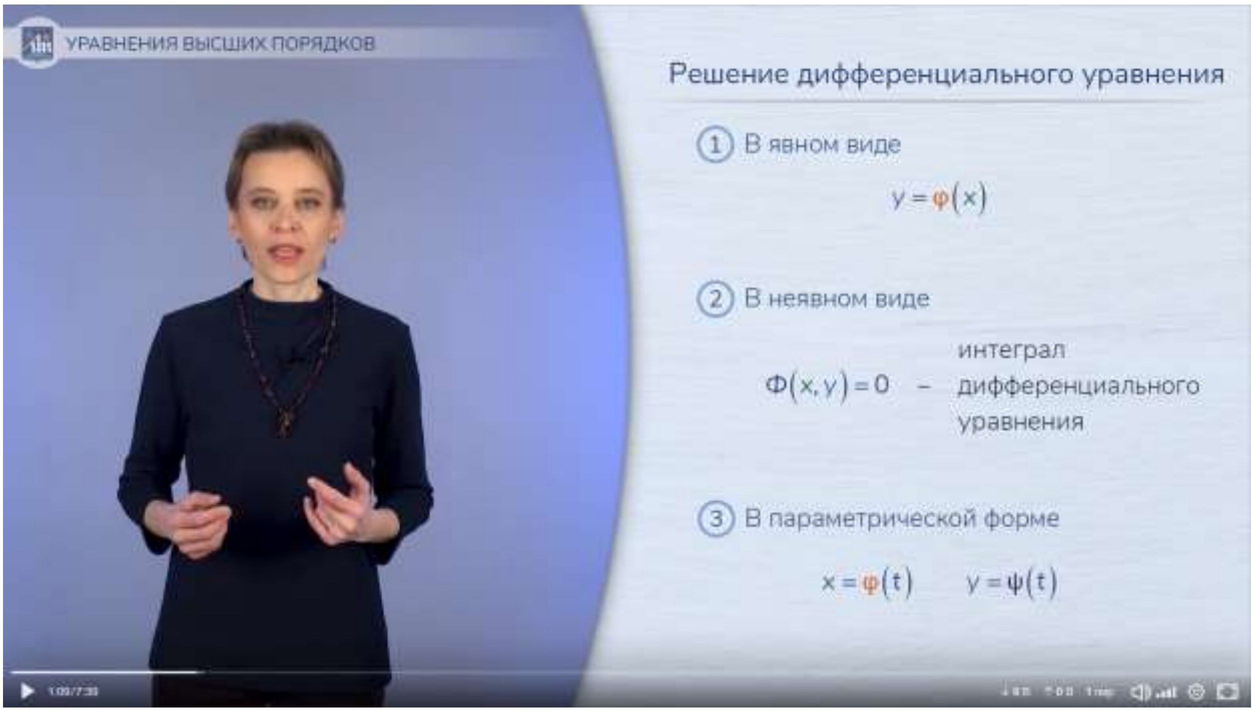
56. Основные классы ДУ 1-го порядка, интегрируемые в квадратурах: в полных дифференциалах

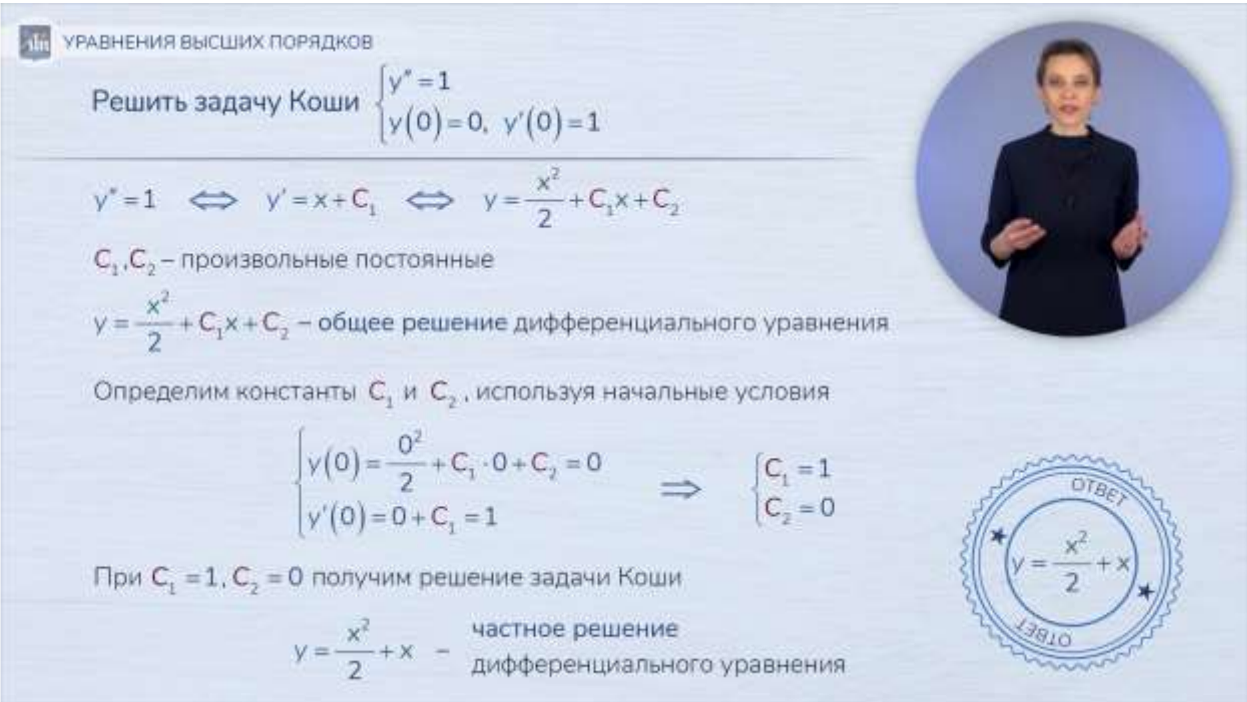
Уравнение в полных дифференциалах



57. Основные понятия о ДУ высших порядков. Уравнения допускающие понижение порядка.

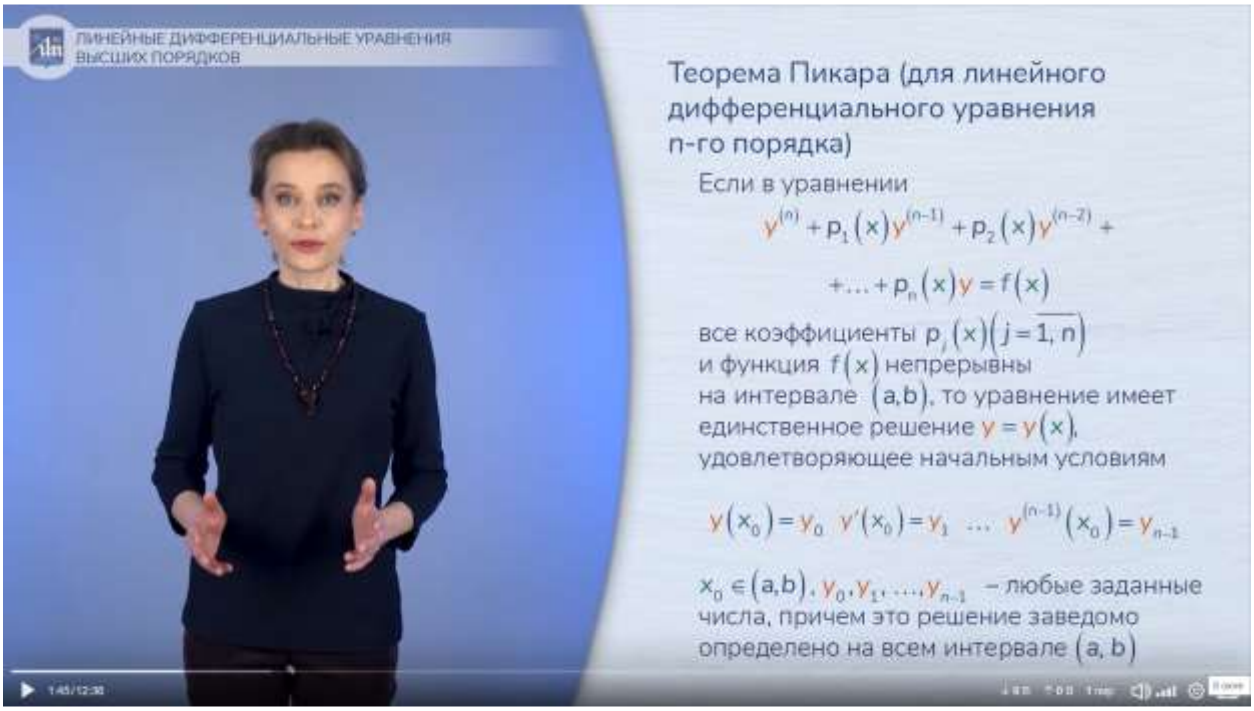
Уравнения высших порядков

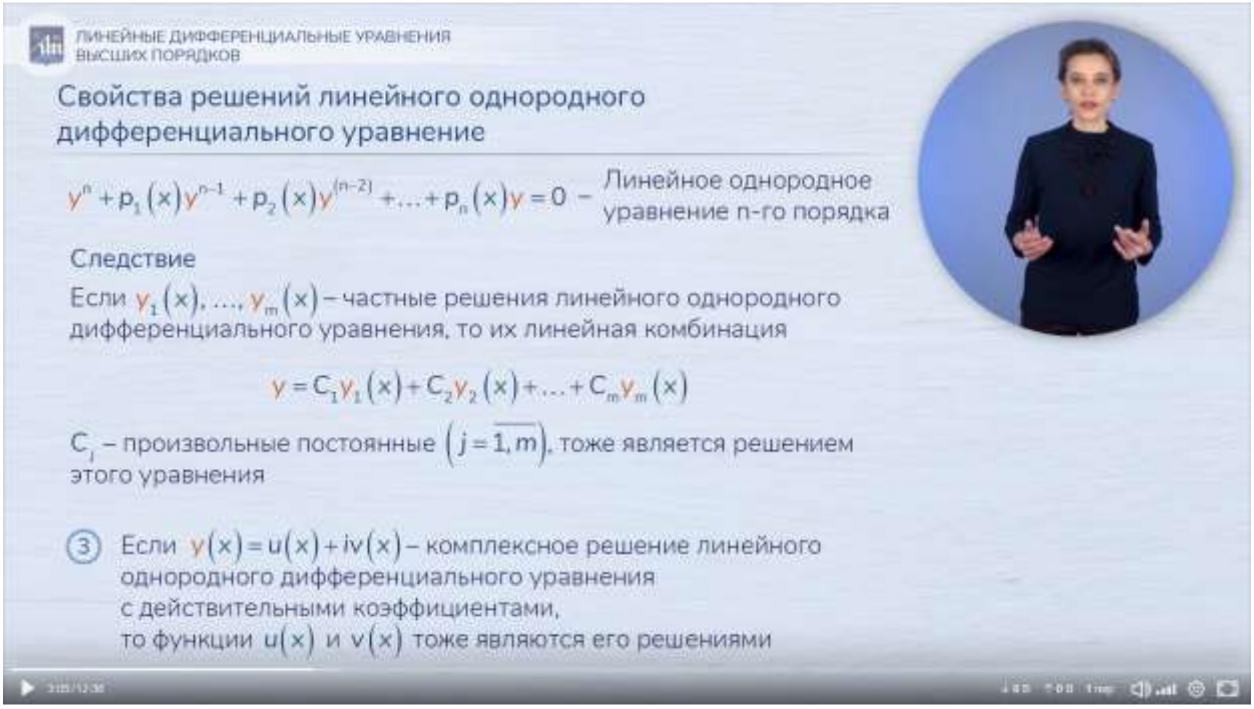


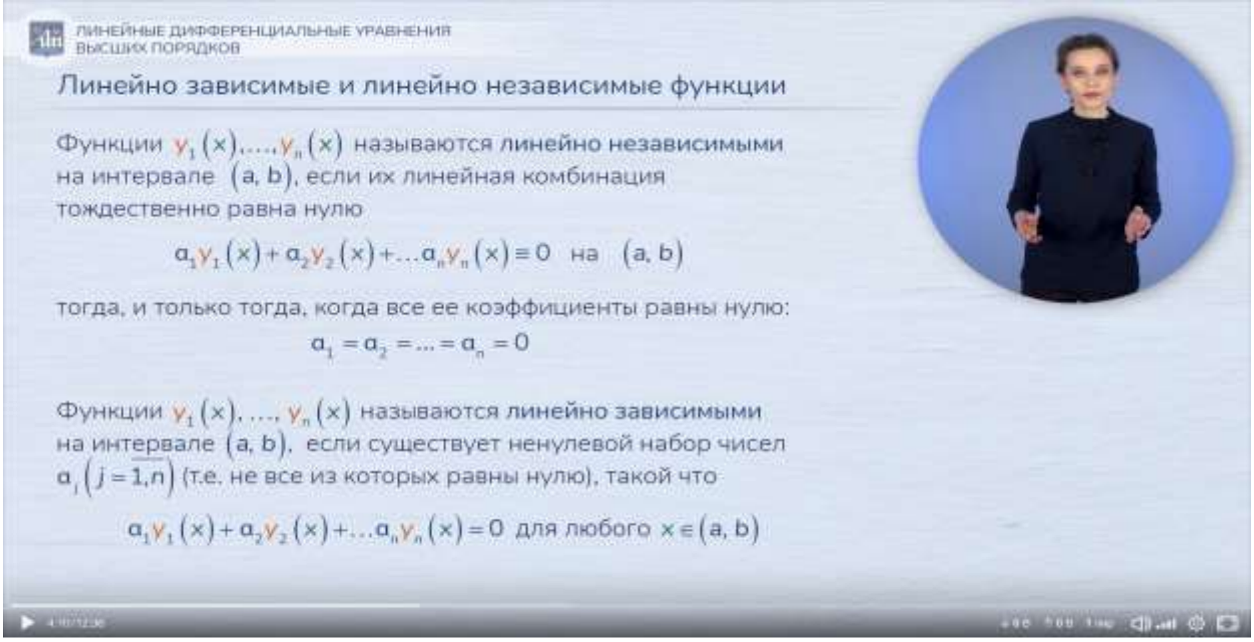


58. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков и свойства их решений. Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения.

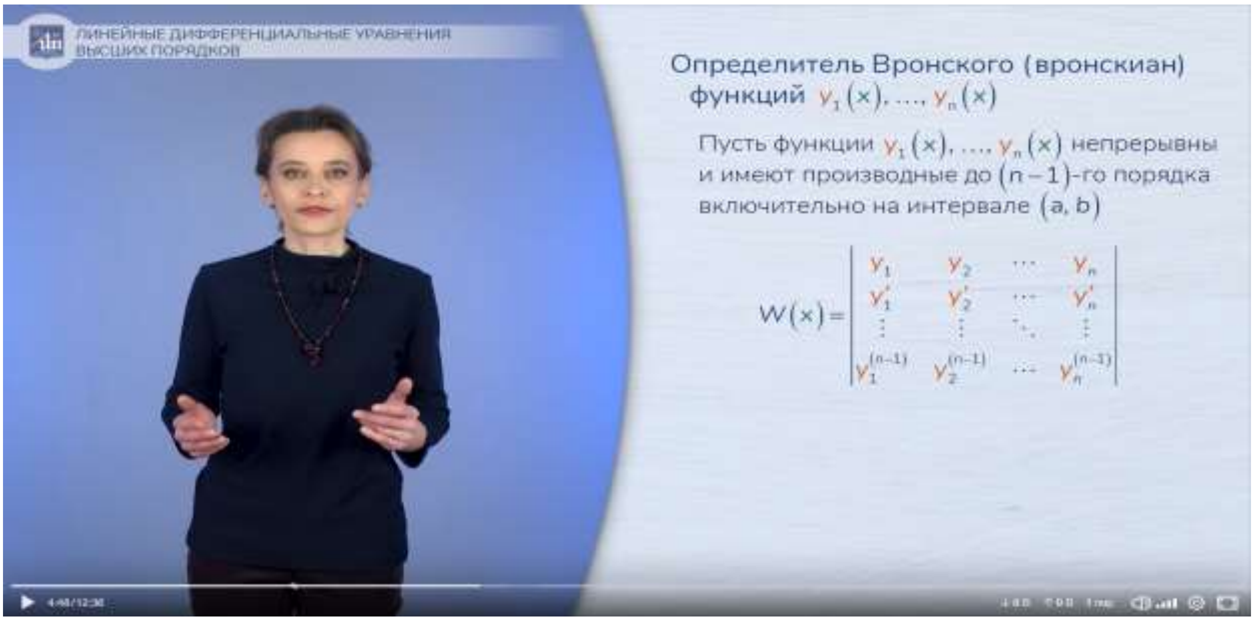
Линейные дифференциальные уравнения высших порядков



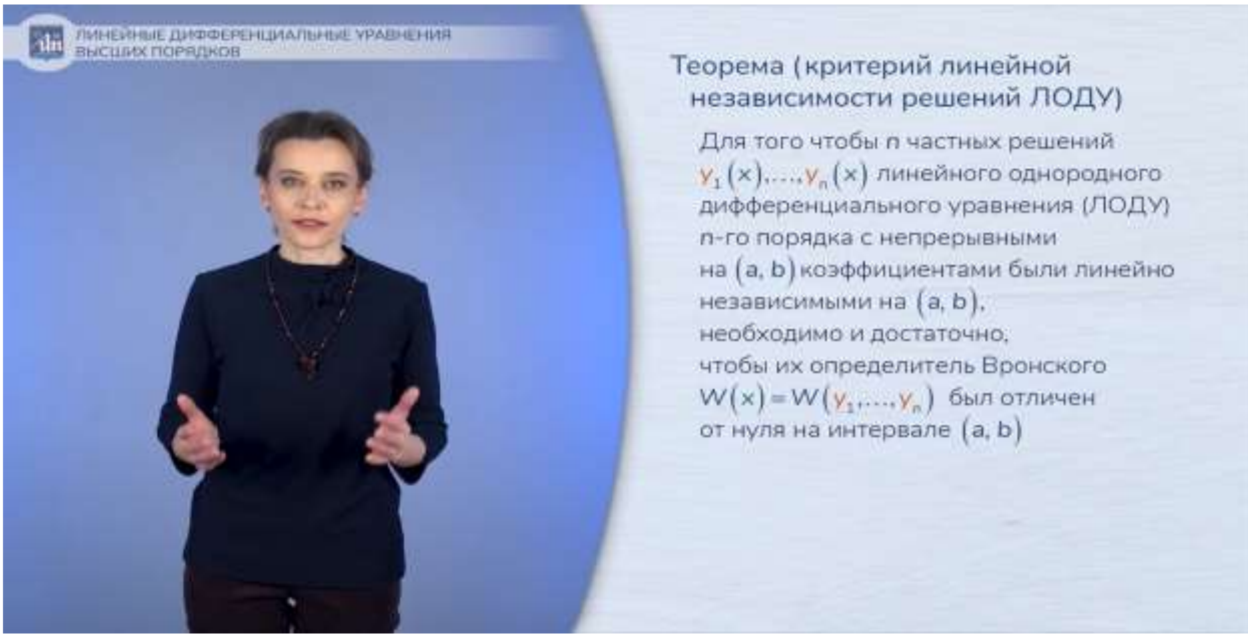




ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ
Линейно зависимые и линейно независимые функции
Функции $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ называются линейно независимыми на интервале (a, b), если их линейная комбинация тождественно равна нулю
$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\ldots\alpha_n y_n(x)\equiv 0$ на (a, b)
тогда, и только тогда, когда все ее коэффициенты равны нулю:
$\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$
Функции $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ называются линейно зависимыми на интервале (a, b), если существует ненулевой набор чисел $\alpha_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ (т.е. не все из которых равны нулю), такой что
$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\ldots\alpha_n y_n(x)=0$ для любого $x\in(a, b)$

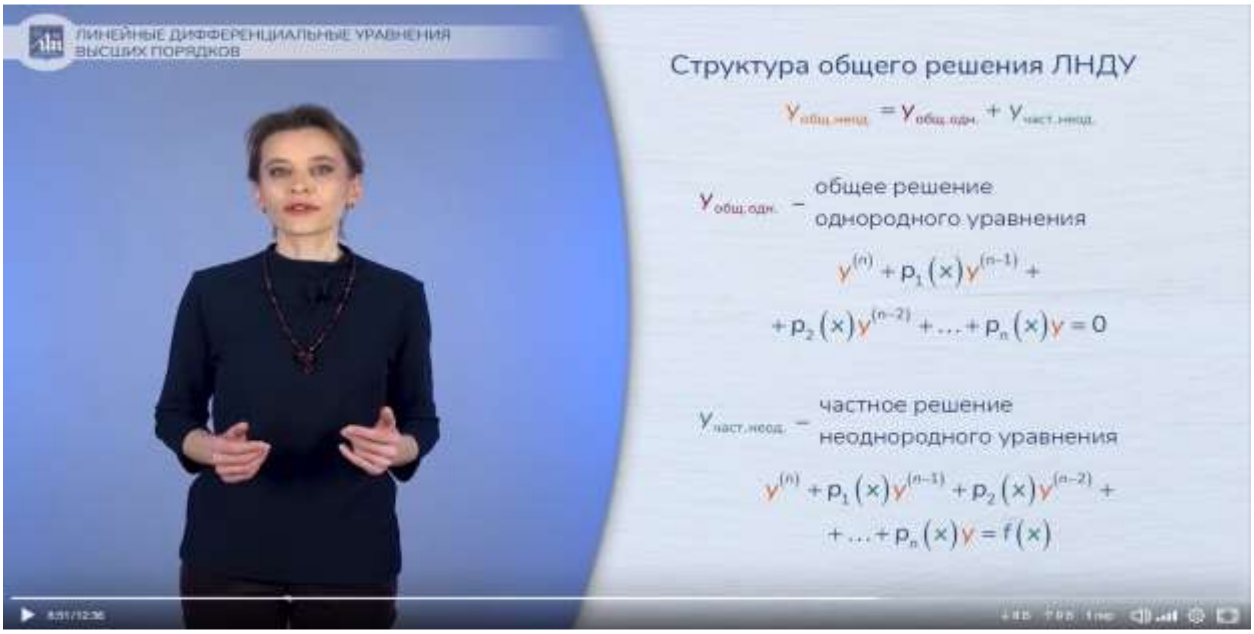


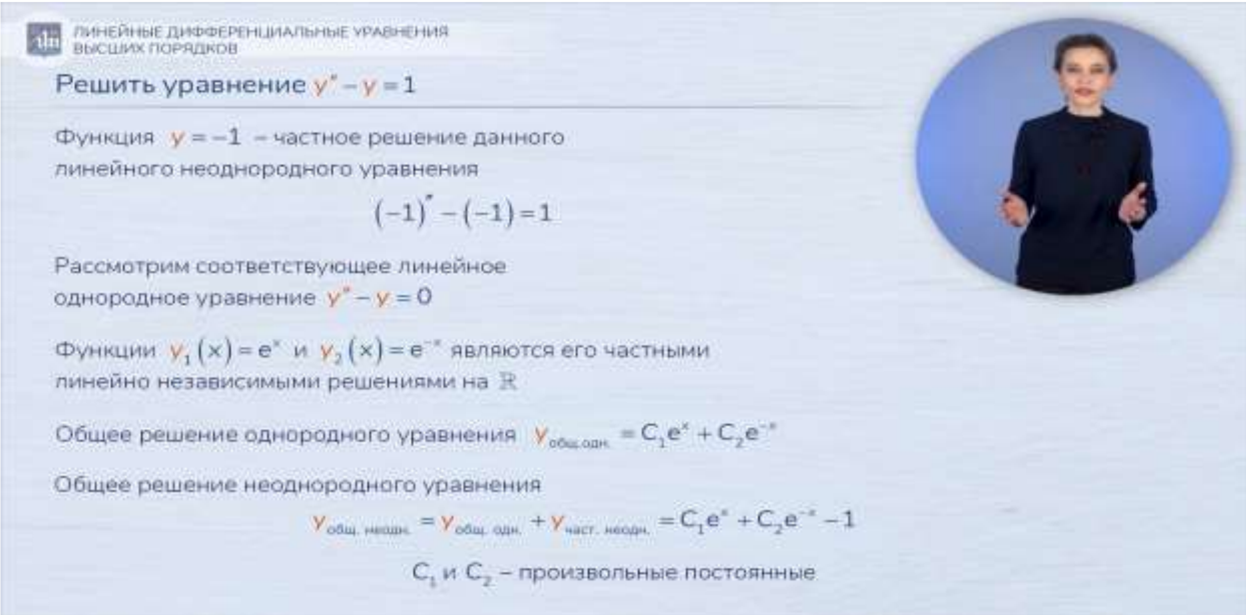
ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ
Определитель Вронского (вронскиан) функций $y_1(x),\ldots,y_n(x)$
Пусть функции $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ непрерывны и имеют производные до $(n-1)$-го порядка включительно на интервале (a, b)
$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$

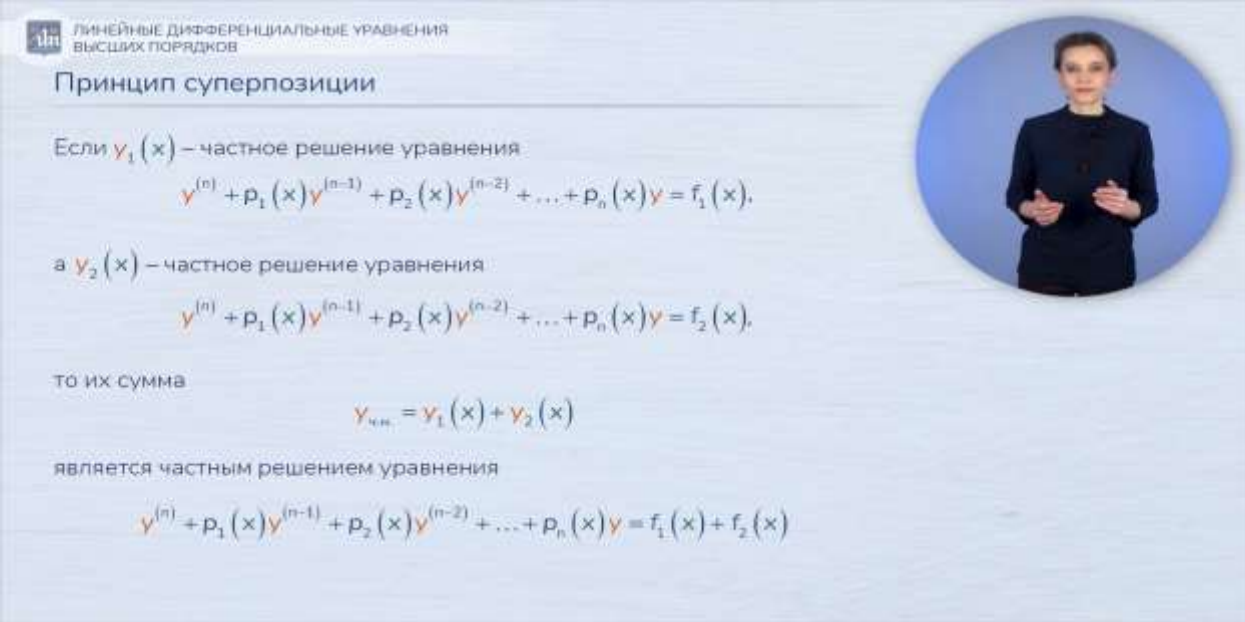


ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ
Теорема (критерий линейной независимости решений ЛОДУ)
Для того чтобы n частных решений $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ) n-го порядка с непрерывными на (a, b) коэффициентами были линейно независимыми на (a, b), необходимо и достаточно, чтобы их определитель Вронского $W(x)=W(y_1,\ldots,y_n)$ был отличен от нуля на интервале (a, b)

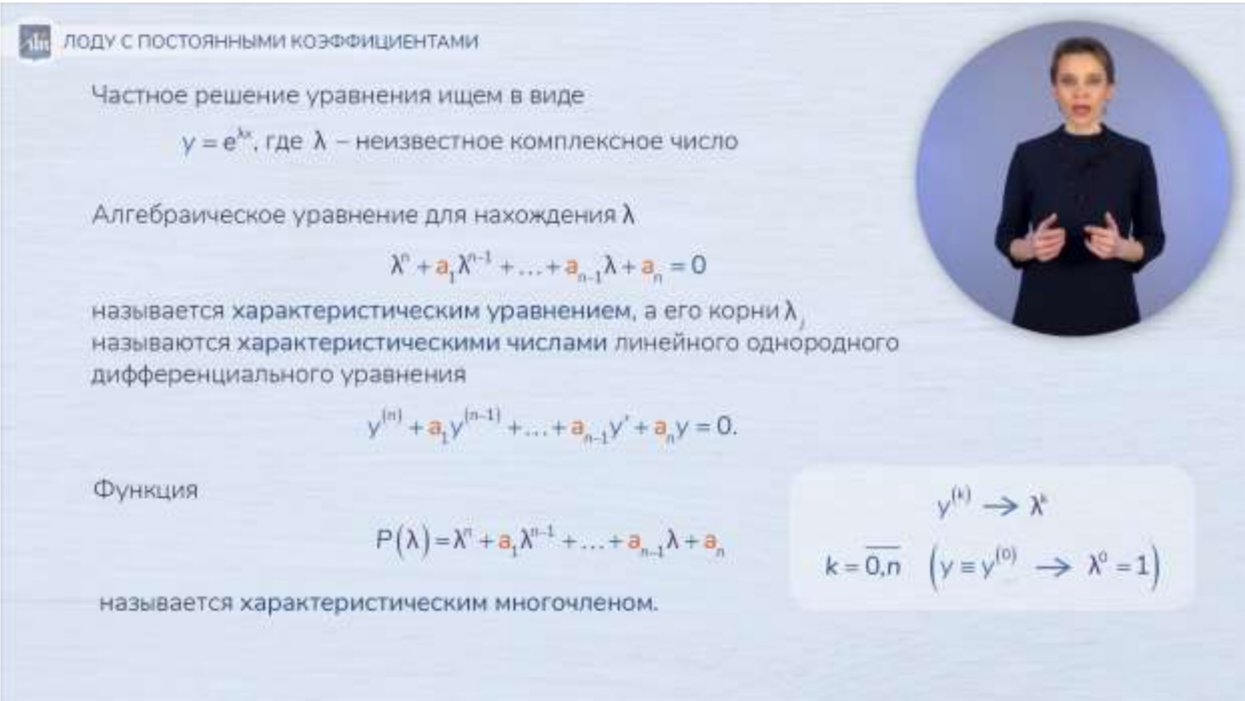
59. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков. Структура общего решения.

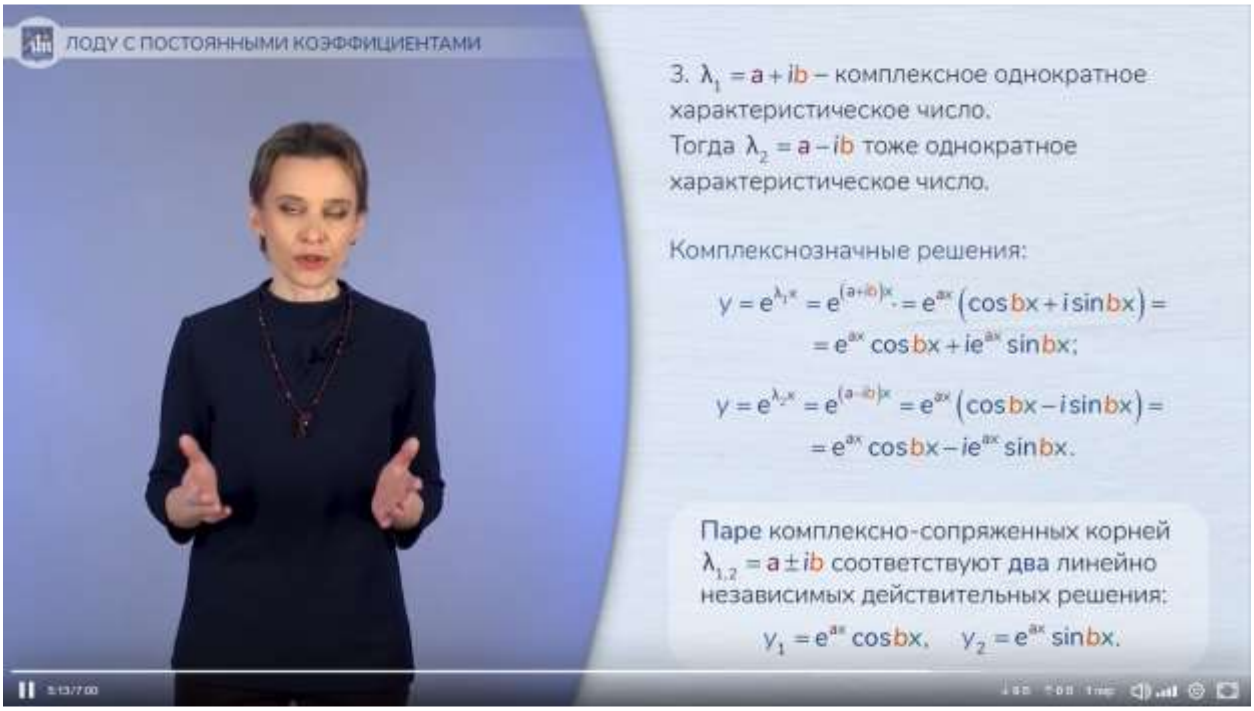






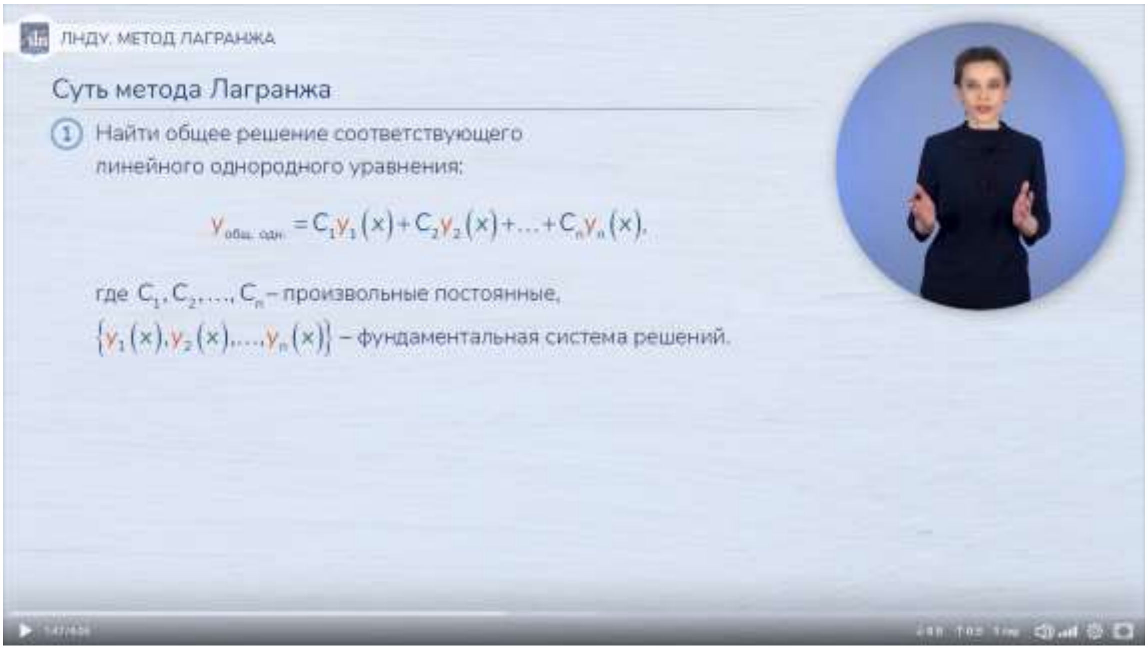
Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами





60. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков. Метод вариации произвольных постоянных.

Метод Лагранжа ЛНДУ



(2) Общее решение линейного неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x),$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ – неизвестные функции.

Система для отыскания функций $C_k'(x)$, $k = \overline{1,n}$:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \ldots + C_n'(x)y_n'(x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases}$$

(2) Общее решение линейного неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x),$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ – неизвестные функции.

Система имеет единственное решение $C_k'(x) = \varphi_k(x), k = \overline{1,n}$.

Отсюда $C_k(x) = \int \varphi_k(x)dx + \tilde{C}_k$, $\tilde{C}_k = const, k = \overline{1,n}$.

Тогда общее решение линейного неоднородного уравнения:

$$y = \left(\int \varphi_1(x)dx + \tilde{C}_1\right)y_1(x) + \left(\int \varphi_2(x)dx + \tilde{C}_2\right)y_2(x) + \ldots +$$

$$+\left(\int \varphi_n(x)dx + \tilde{C}_n\right)y_n(x), \text{ где } \tilde{C}_k = const, k = \overline{1,n}.$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения со специальной правой частью

Рассмотрим ЛНДУ вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + $$
$$+ a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

где $a_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,n}$,

функция $f(x)$ является квазиполиномом, т.е.

$$f(x) = e^{ax}\left(R_{m_1}(x)\cos bx + S_{m_2}(x)\sin bx\right),$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, $R_{m_1}(x)$ и $S_{m_2}(x)$ – многочлены степеней m_1 и m_2

Контрольным числом квазиполинома

$$f(x) = e^{ax}\left(R_{m_1}(x)\cos bx + S_{m_2}(x)\sin bx\right)$$

называется комплексное число

$$\sigma = a + ib$$

Правило

Если контрольное число σ является k-кратным $(k \geq 0)$ корнем характеристического уравнения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения,
то линейное неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

где

$$f(x) = e^{ax}\left(R_{m_1}(x)\cos bx + S_{m_2}(x)\sin bx\right),$$

имеет и притом единственное решение вида:

$$y^* = x^k e^{ax}\left(P_m(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right),$$

где $P_m(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степени $m = max\{m_1, m_2\}$
с пока еще неопределенными коэффициентами.

Частные случае квазиполинома

№	Правая часть ЛНДУ	Контрольное число	Вид частного решения ЛНДУ
1	$f(x) = R_m(x)$	$\sigma = 0$	$y^* = x^k P_m(x)$
2	$f(x) = R_m(x)e^{ax}$	$\sigma = a$	$y^* = x^k e^{ax} P_m(x)$
3	$f(x) = R_m(x)\cos bx$ $f(x) = S_m(x)\sin bx$ $f(x) = R_{m_1}(x)\cos bx +$ $+S_{m_2}(x)\sin bx$	$\sigma = bi$	$y^* = x^k\left(P_m(x)\cos bx +\right.$ $\left.+Q_m(x)\sin bx\right)$