Análise dos métodos numéricos.

Aluno: Eric Naiber - Matrícula: 00313389
IF-UFRGS

22 de setembro de 2021

Resumo

Analisando a diferença dos métodos através de um problema de ressonância em uma ponte.

1 Introdução

Utilizaremos os métodos de Euler-Cromer, Verlet e Runge-Kutta 4 com h = 0,01 e h = 0,001 para resolver o problema de valor inicial abaixo, para podermos analisar a diferença entre cada método.

2 Problema a ser resolvido

Ressonância é um fenômeno físico que ocorre quando uma força é aplicada sobre um sistema com frequência igual ou muito próxima da frequência fundamental desse sistema. Em uma tarde de verão alguns engenheiros pensam em se esconder do sol utilizando a sombra de uma ponte, quando de repente bate uma brisa. Inicialmente os engenheiros ficam muito felizes por estarem se refrescando... Momentos mais tarde percebem que a sombra em seus pés começa a oscilar de forma estranha, preocupados com isso eles começam a fazer observações. Eles percebem que ocorreu um erro de cálculo durante o planejamento da ponte, por causa da brisa a ponte consegue entrar em sincronia com o vento, causando assim, ressonância. Agora cabe a nós calcularmos a amplitude da ponte.

$$y'' + w^2 y \;=\; cos\,(wt) \;\; \textbf{com y(0) = y'(0) = 0} \tag{1}$$

Qual o valor da amplitude em t = 8? Utilize $\omega = \pi$

3 Resolvendo analíticamente

Para resolver este problema será utilizado a transformada de Laplace. Repare que para encontrar o valor final foi utilizada uma tabela, você pode conferir manualmente se quiser.

$$y'' + w^2 y \ = \ cos\,(wt) \tag{2}$$

$$L[y''] + L[w^2 y] = L[cos\,(wt)] \tag{3}$$

$$s^2 Y\,(s) - sy\,(0) - y'\,(0) + w^2 Y\,(s) = \frac{s}{s^2 + w^2} \tag{4}$$

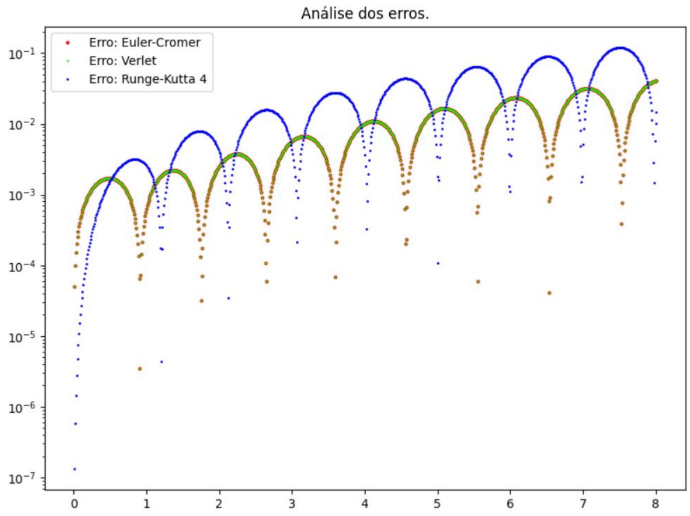
$$Y\,(s) = \frac{S}{(s^2 + w^2)\,(s^2 + w^2)} \tag{5}$$

$$y\,(t) = t\,\frac{sin\,(wt)}{2w} \tag{6}$$

A equação 6 será muito útil na próxima parte, então se atente à equação.

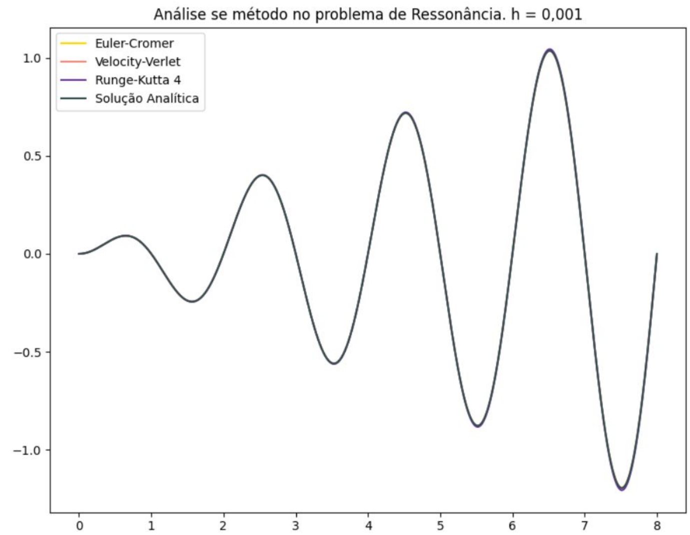
4 Analisando métodos h = 0,01

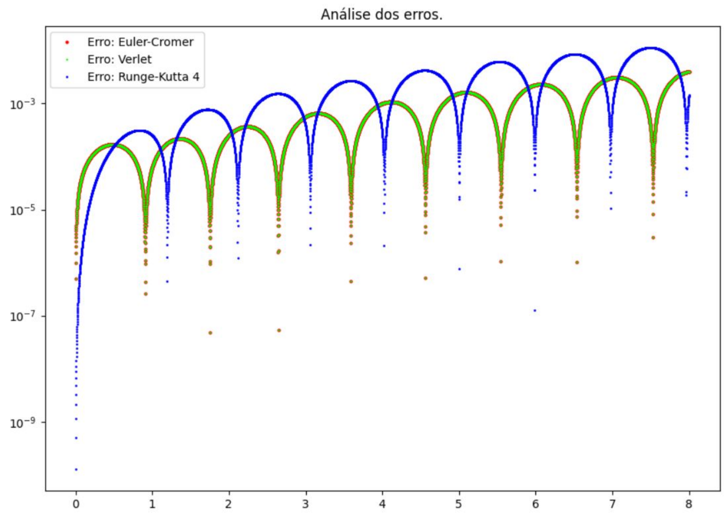
No gráfico abaixo podemos observar que os métodos de Euler-Cromer e Verlet mostraram-se satisfatórios quanto ao seu propósito de resolver a equação (1) para h = 0,01, porém o método de Runge-Kutta 4 só ficaria válido para um valor maior de h ou utilizando um h variável. Notamos também que ambos métodos Verlet e Euler-Cromer possuem um erro extremamente semelhante mas ainda assim consideravelmente alto.



5 Analisando métodos h = 0,001

Perceba que agora o método de Runge-Kutta 4 adaptou-se bem ao novo h, e todos os métodos tiveram uma mudança no seu erro (aproximadamente uma casa decimal). O erro diminui em 1 casa decimal, porém a quantidade de cálculos necessários agora foi 10x maior. Novamente percebemos que ambos métodos possuem um erro próximo, exceto o RK 4.





6 Conclusões

Ambos métodos foram capazes de resolver o problema proposto, sendo Euler-Cromer e Verlet os melhores para este tipo de programa*. Ao analisarmos o código escrito em Python percebemos que é mais coerente utilizar o método de Euler-Cromer e Verlet para resolução de problemas deste tipo*. O tamanho do erro está aceitável para um intervalo de 0 até 8.

> * Se utilizarmos um recurso computacional para variar h o método de RK4 poderia ser mais eficiente mas no momento não vem ao caso.