Problemas

Taller MAT3 GIN 24-25

2025-02-24

Problemas de teoría de la medida y conjuntos medibles

Problema 1

- Si A y B son sucesos disjuntos, determinar: $A - B$ (diferencia de conjuntos)
  2. $A \cap B$ (intersección)
  3. $A^c \cap B^c$ (intersección de los complementos)

Problema 2

- **Parte (a):** Cálculo de la intersección de intervalos en términos de números racionales y su comportamiento al infinito.
- **Parte (b):** Cálculo del **límite superior** y **límite inferior** de una sucesión de conjuntos A_n.
- **Parte (c):** Variación del problema anterior para distintos tipos de sucesiones de conjuntos.

Problema 3

- Dados $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, se pide describir explícitamente los conjuntos: $\mathcal{P}(\Omega)$ (conjunto potencia de Ω)
  2. $\Lambda = \{(i, j) \in \Omega^2 : i + j \leq 4\}$ (subconjunto del producto cartesiano de Ω)

Problema 4

- Estudio de una sucesión de subconjuntos (A_n) y la construcción de $A = \bigcup A_n$.
- Se define B_n como la unión parcial creciente de A_k, y se analiza si los conjuntos C_n son disjuntos.

Problema 5

- Se estudia el **indicador de un conjunto** cuando se tienen conjuntos disjuntos en una sucesión (A_n) con $A = \bigcup A_n$, mostrando que $I_A = \sum I_{A_n}$.

Problema 6

- Se pide clasificar diferentes familias de subconjuntos $\mathcal{A}$ según sean: σ**-álgebra**
  2. **Álgebra**
  3. π**-sistema**
  4. d**-sistema**

  Se dan distintos ejemplos de familias de subconjuntos en Ω y se debe analizar cuál de las estructuras anteriores cumple cada una.

Problema 7

- Se pregunta por la **más pequeña σ-álgebra** en Ω que contiene ciertos subconjuntos dados $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Esto lleva a la noción de **σ-álgebra generada** por un conjunto de subconjuntos.

La imagen muestra el **Problema 8**, que trata sobre la **σ-álgebra de Borel** en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$. Aquí tienes un resumen y explicación de cada apartado:

Problema 8

Parte (a): Generación de la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ La **σ-álgebra de Borel** en $\mathbb{R}$ (denotada como $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) es la **más pequeña σ-álgebra que contiene todos los conjuntos abiertos** de la recta ral $\mathbb{R}$. Se pide demostrar que también se puede engendrar por diferentes familias de intervalos: 1.Intervalos de la forma $]-\infty, x]$, con $x \in \mathbb{R}$. 2. Intervalos de la forma $]x, \infty[$, con $x \in \mathbb{R}$. 3. Intervalos de la forma $[x, \infty[$, con $x \in \mathbb{R}$. 4. Intervalos de la forma $]-\infty, r]$, con $r \in \mathbb{Q}$ (intervalos con extremos racionales).

Parte (b): Generación de la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ Similar a la parte anterior, pero ahora en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$. Si $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ es la **σ-álgebra más pequeña que contiene todos los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$**. - Se pide demostrar que también se puede engendrar por:

1. **La familia de los conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$.**
2. **La familia de los conjuntos compactos en $\mathbb{R}^n$.**
3. **La familia de los intervalos cerrados y acotados en $\mathbb{R}^n$ (es decir, cajas de la forma $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$).**
4. **Los semiespacios de la forma $\{x \in \mathbb{R}^n : x_i < a\}$ para $1 \leq i \leq n$, con $a \in \mathbb{Q}$.**

Parte (c): Producto de σ-álgebras de Borel

- Se pide probar que la **σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$ es igual al producto de n copias de la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$**:
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$$
donde el producto de σ-álgebras se define como la σ-álgebra generada por los conjuntos de la forma:
$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n, \quad A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Esto muestra que la estructura de la **σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$** puede entenderse a partir de las σ-álgebras de Borel en $\mathbb{R}$.

Este problema es fundamental en **teoría de la medida y probabilidad**, ya que establece una base para la construcción de medidas en espacios euclidianos. Si necesitas ayuda con la demostración de alguna parte en particular, dime. ### **Problema 9** - Se considera un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$ y un subconjunto no vacío $B \subset \Omega$. - Se define la **σ-álgebra inducida** en B como:

$$\mathcal{A}_B := \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}$$

y se debe probar que es una σ-álgebra de partes de B y que $\mathcal{A}_B \subset \mathcal{A}$. - Se analiza cómo la **σ-álgebra generada** por C, es decir, $\mathcal{A} = \sigma(C)$, se traduce en términos de la σ-álgebra inducida en B. - Se introduce la notación $\sigma_B(C_B)$ como la **mínima σ-álgebra en B que contiene a C_B**, siguiendo el **Ejemplo 8**.

Problema 10

- Se trabaja con el conjunto finito $\Omega = \{1, 2, 3\}$ y la σ-álgebra:

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$$

  (aunque parece haber una inconsistencia en la definición, pues $4 \notin \Omega$).
- Se debe describir explícitamente el **espacio medible producto** $(\Omega^2, \mathcal{A}^2)$, donde $\Omega^2 = \Omega \times \Omega$.

Problema 11

- **Parte (a):** Se considera un conjunto infinito no numerable Ω y la colección:

$$C = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) : A \text{ o } A^c \text{ es numerable}\}$$

  Se pide demostrar que C es una **σ-álgebra**.
- **Parte (b):** Se debe describir la **σ-álgebra generada por los conjuntos unitarios** en $\mathbb{R}$.

Problema 12

- Se pide demostrar que **una familia $\mathcal{A}$ de partes de Ω es una σ-álgebra si y solo si es un d-sistema y un π-sistema**.
- Esto se relaciona con el **Teorema de Dynkin**, el cual permite demostrar que una colección de subconjuntos es una σ-álgebra a partir de ciertas propiedades.