

El problema de la ruina del jugador

Variables Aleatorias

2024-10-03

Contents

El problema de la ruina del jugador	1
Generalicemos el problema a una probabilidad p .	2

El problema de la ruina del jugador

Supongamos que vamos a jugar a la ruleta y apostamos a que sale rojo, supongamos que la probabilidad de rojo es $p = \frac{1}{2}$ (en la ruleta francesa tiene los números del 1 al 36 números 18 rojos y 19 negros y el 0 que no tiene color).

En cada jugada apostamos una cantidad fija de dinero en cada jugada. Si ganamos, ganamos la cantidad apostada, si perdemos, perdemos la cantidad apostada.

Supongamos que la probabilidad de ganar es $p = \frac{1}{2}$ y la probabilidad de perder es $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Supongamos que empezamos con una cantidad A de dinero y que vamos a jugar hasta que tengamos ganemos algo o lo perdamos todo o 0.

Vamos a utilizar **un truco o martingala** que consiste en

1. En la primera apostamos $2^{1-1} = 2^0 = 1\text{€}$.
2. Si ganamos hemos ganado 1€ .
3. Si perdemos apostamos el doble 2€ .
4. Si ganamos dejamos de jugar, tenemos una premio de 2€ y hemos perdido un euro así que ganamos $2-1=1\text{€}$.
5. Repetimos este procedimiento hasta que ganemos.
6. Así, a largo plazo, siempre nos iremos **ganando** un euro en la jugada en la que nos retiremos.

Sea X la variable que nos da el número de veces que perdemos hasta que ganamos por primera vez.

Esta variable seguirá una ley geométrica de parámetro $p = \frac{1}{2}$: $X \sim \text{Geom}(p = \frac{1}{2})$.

Su función de probabilidad es $P(X = x) = p \cdot (1 - p)^x = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ para $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Por ejemplo la probabilidad de que ganemos en la jugada 10 es

$$P(X = 10 - 1) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0.0009766.$$

Si hemos perdido en las primeras k jugadas, hemos perdido en total

Jugada x	Apuesta	Gasto total si pierdo	Ganado
1	$2^{1-1} = 1$	1	-1
2	$2^{2-1} = 2$	3	-3
3	$2^{3-1} = 4$	7	-7
4	$2^{4-1} = 8$	15	-15
\vdots	\vdots	\vdots	
x	2^{x-1}	$\sum_{k=0}^{x-1} 2^k = \frac{2^0 - 2^{k-1} \cdot 2}{1 - 2} = 2^x - 1$	$-2^x + 1$

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-1} = \sum_{k=0}^k 2^k = \frac{2^0 - 2^{k-1}}{1-2} = 2^{k-1} - 1 \text{€}.$$

Pongamos en forma de tabla los “gastos” en varias apuestas:

Ahora en la jugada $x + 1$ apostaré 2^x€ y si gano tengo un premio de 2^x€ y un gasto de $2^x - 1$ por lo tanto he ganado 1€ .

¿Cuál es el valor esperado del dinero que tengo que llevar?

Sea D = dinero que tengo que llevar si juego hasta ganar, entonces la apuesta ganadora es $X + 1$ y el dinero que tengo que llevar es $D = 2^X - 1 \text{€}$ así será una transformación de la v.a X de la que tengo que calcular su valor esperado.

El valor esperado de D es

$$E(D) = E(2^X - 1) = E(2^X) - 1$$

y ahora hacemos

$$E(2^X) = \sum_{x=0}^{\infty} 2^x \cdot P(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} 2^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{2} = +\infty.$$

Finalmente tenemos que $E(D) = E(2^X) - 1 = +\infty - 1 = +\infty$.

Conclusión: Aunque a largo plazo siempre ganamos un euro, el valor esperado del dinero que tenemos que llevar es infinito.

Generalicemos el problema a una probabilidad p .

Ahora la probabilidad de ganar es $0 < p < 1$. Con la misma notación la función de probabilidad del número de veces que perdemos hasta que ganamos por primera vez es

$$P(X = x) = p \cdot (1 - p)^x = p \cdot (1 - p)^x \text{ para } x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Las ganancias y pérdidas de cada jugada siguen siendo las mismas. EL valor esperado de la cantidad de dinero que tenemos que llevar es:

$$\begin{aligned} E(2^X - 1) &= E(2^X) - 1 = \sum_{x=0}^{\infty} 2^x \cdot p \cdot (1 - p)^x - 1 = p \cdot \sum_{x=0}^{\infty} 2^x \cdot (1 - p)^x - 1 = p \cdot \sum_{x=0}^{\infty} (2 \cdot (1 - p))^x - 1 \\ &= p \cdot \frac{1}{1 - 2 \cdot (1 - p)} - 1. \end{aligned}$$

Ahora recordemos que si $0 < r < 1$ la serie geométrica converge $\sum_{x=0}^{\infty} r^x = \frac{1}{1-r}$, pero si $r \geq 1$ la serie diverge a $+\infty$.

Así que la serie $\sum_{x=0}^{\infty} (2 \cdot (1-p))^x$ converge si $2 \cdot (1-p) < 1$ es decir si $1-p < \frac{1}{2}$ o lo que es lo mismo si $p > \frac{1}{2}$ y diverge si $0 < p \leq 1/2$.

Así que si $\frac{1}{2} < p < 1$ el valor esperado de la cantidad de dinero que tenemos que llevar es $p \cdot \frac{1}{1-2 \cdot (1-p)} - 1$.

```
p=seq(0.51,0.99,0.05)# probabilidad de ganar
p
```

```
## [1] 0.51 0.56 0.61 0.66 0.71 0.76 0.81 0.86 0.91 0.96
```

```
Gasto_esperado=p*(1/(1-2*(1-p)))-1
Gasto_esperado
```

```
## [1] 24.50000000 3.66666667 1.77272727 1.06250000 0.69047619 0.46153846
## [7] 0.30645161 0.19444444 0.10975610 0.04347826
```

Simulación de la cantidad de dinero que tenemos que llevar en función de la probabilidad de ganar para $p = 0.9$.

```
set.seed(314)
x=rgeom(10^6,0.7)
str(x)
```

```
## int [1:1000000] 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 ...
```

```
x[1:100]
```

```
## [1] 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 3 0 0
## [38] 0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 2 1 2 0 3 0 2 0 0 0 1 2 0 0 1 0 3 0 0 0 2 0 0
## [75] 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0
```

```
mean(2^x-1)
```

```
## [1] 0.747092
```

```
p=0.7
p*(1/(1-2*(1-p)))-1
```

```
## [1] 0.75
```