ApLabAD

Apuntes de Laboratorio de Análisis de Datos

RICUIB

2025-02-01

Tabla de contenidos

Prefacio

Este libro en la web es una versión de las notas de clase de asignaturas introductorias al análisis de datos.

Ha sido elaborado con Quarto RStudio, PBC. (2022). Quarto (Version 1.0). Hemos utilizado el formato formato book.

¿Quarto book o bookdown? https://yihui.org/en/2022/04/quarto-r-markdown/

Parte I

Parte 1: Probabilidad y variables aleatorias

En esta sección, veremos la teoría básica de la probabilidad y de las variables aleatorias. Resolveremos problemas prácticos para comprender mejor los conceptos y utilizaremos R para realizar cálculos y gráficos.

También exploraremos los modelos de probabilidad discretos y continuos más conocidos.

En ocasiones, trabajaremos con problemas de cálculo más complejos.

Además, introduciremos problemas sencillos de modelización con probabilidades. Estos consistirán en un enunciado, real o inventado, en el que se pedirá modelizar el problema mediante una variable aleatoria y responder a una serie de preguntas.

1 Preliminares: conjuntos y combinatoria

Para aprender cálculo de probabilidades son necesarios conocimientos de:

1. Cálculo: Derivadas, integrales, límites, sumas de series…
2. Geometría básica y álgebra lineal : rectas, hiperplanos, volúmenes… Matrices, valores propios…
3. Teoría de conjuntos y combinatoria…..

Por experiencia sabemos que la mayoría de estudiantes tienen más conocimientos de cálculo, geometría y matrices.

Pero muchos tienen una falta de conocimientos en teoría básica de conjuntos y combinatoria (matemática discreta).

1.1 Teoría de conjuntos

Definición de conjunto

La definición de conjunto es una idea o noción primitiva. Es decir es una idea básica del pensamiento humano: un conjunto es una colección de objetos: números, imágenes… cualquier cosa, jugadores de fútbol, palabras, colores ….

La definición de conjunto es una idea o noción primitiva. Es decir es una idea básica del pensamiento humano: un conjunto es una colección de objetos: números, imágenes… cualquier cosa, jugadores de fútbol, palabras, colores ….

La teoría de conjuntos básicas es simple y natural y es la que necesitamos para este curso.

La teoría de conjuntos matemática es más compleja y presenta varias paradojas como la paradoja de Russell.

La idea o noción práctica de conjunto es la de una colección de objetos de un cierto tipo.

Estas colecciones o conjuntos se pueden definir por:

- **Comprensión**: reuniendo los objetos que cumplen una propiedad p
- **Extensión**: dando una lista exhaustiva de los miembros del conjunto

1.1.1 Conjuntos básicos

Los conjuntos suelen tener un conjunto madre como por ejemplo

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \quad \middle| \quad p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0. \right\}$
- $\mathbb{R} = \{\text{Todos los puntos de una recta.}\}$
- $\mathbb{C} = \{a + b \cdot i \quad | \quad a, b \in \mathbb{R}\}$ los números complejos $\quad a + b \cdot i$.
- Alfabeto $= \{a, b, c, ..., A, B, C, ...\}$.
- Palabras $= \{paz, guerra, amor, probabilidad, ...\}$.

Recordemos que i es la unidad imaginaria que cumple que $i = \sqrt{-1}$.

1.1.2 Características y propiedades básicas de los conjuntos

Si a cada objeto x de Ω le llamaremos **elemento del conjunto** Ω y diremos que x pertenece a Ω. Lo denotaremos por $x \in \Omega$.

Un **conjunto de un elemento**, por ejemplo $\{1\}$ recibe el nombre de **conjunto elemental** (o **singleton** del inglés).

Sea A otro conjunto diremos que A **es igual a** B si todos los elementos A están en B y todos los elementos de B están en A. Por ejemplo $A = \{1, 2, 3\}$ es igual a $B = \{3, 1, 2\}$.

Si B es otro conjunto, tal que si $x \in A$ entonces $x \in B$ diremos que A es un subconjunto de o que está contenido en B. Lo denotaremos por $A \subseteq B$.

El conjunto que no tiene elementos se denomina conjunto vacío y se denota por el símbolo $\emptyset$. Dado A un conjunto cualquiera obviamente $\emptyset \subseteq A$.

Ejemplo

Tomemos como conjunto base $\Omega = \{1, 2, 3\}$

- Ω es un conjunto de cardinal 3, se denota por $\#(\Omega) = 3$ o por $|\Omega| = 3$
- El conjunto Ω tiene $2^3 = 8$ subconjuntos.
  - el vacío $\emptyset$ y los elementales $\{1\}, \{2\}, \{3\}$
  - los subconjuntos de dos elementos: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$
  - el conjunto total de tres elementos $\Omega = \{1, 2, 3\}$.

Dado un conjunto Ω podemos construir el **conjunto de todas sus partes** (todos sus subconjuntos) al que denotamos por $\mathcal{P}(\Omega)$. También se denomina de forma directa partes de Ω.

Cardinal de las partes de un conjunto

Propiedad

Por ejemplo $\#\left(\mathcal{P}(\{1,2,3\})\right) = 2^{\#(\{1,2,3\})} = 2^3 = 8$.

Efectivamente

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Dado un subconjunto A de Ω podemos construir la función característica de A

$$\chi_A : \Omega \to \{0,1\}$$

dado un $\omega \in \Omega$

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

1.1.3 Operaciones entre conjuntos

Intersección

Sea Ω un conjunto y A y B dos subconjuntos de Ω.

El conjunto **intersección** de A y B es el formado por todos los elementos que perteneces a A **Y** B, se denota por $A \cap B$.

Más formalmente

$$A \cap B = \left\{x \in \Omega \middle| x \in A \text{ y } x \in B\right\}.$$

Unión

El conjunto **unión** de A y B es el formado por todos los elementos que perteneces a A **O** pertenecen a B, se denota por $A \cup B$.

Más formalmente

$$A \cup B = \left\{x \in \Omega \middle| x \in A \text{ o } x \in B\right\}.$$

Diferencia.

El conjunto **diferencia** de A y B es el formado por todos los elementos que perteneces a A **Y NO** pertenecen a B, se denota por $A - B = A - (A \cap B)$.

Más formalmente

$$A - B = \left\{x \in \Omega \middle| x \in A \text{ y } x \notin B\right\}.$$

Complementario

El **complementario** de un subconjunto A de Ω es $\Omega - A$ y se denota por A^c o $\overline{A}$.

Más formalmente

$$A^c = \left\{x \in \Omega \middle| x \notin A\right\}.$$

1.1.4 Más propiedades

Sea Ω un conjunto y A, B, C tres subconjuntos de Ω

- Se dice que dos conjuntos A y B **son disjuntos** si $A \cap B = \emptyset$.
- $\Omega^c = \emptyset$.
- $\emptyset^c = \Omega$.
- $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ conmutativas.
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ asociativas.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ distributivas.
- $\left(A^c\right)^c = A$ doble complementario.
- $\left(A \cup B\right)^c = A^c \cap B^c$, $\left(A \cap B\right)^c = A^c \cup B^c$ leyes de De Morgan.

1.1.5 Con R, ejemplos.

Con R los conjuntos de pueden definir como vectores

```
Omega=c(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)
A=c(1,2,3,4,5)
B=c(1,4,5)
C=c(4,6,7,8)
Omega
```

```
##  [1]  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10
```

```r
A
```

```
[1] 1 2 3 4 5
```

```r
B
```

```
[1] 1 4 5
```

```r
C
```

```
[1] 4 6 7 8
```

$A \cap B$

```r
A
```

```
[1] 1 2 3 4 5
```

```r
B
```

```
[1] 1 4 5
```

```r
intersect(A,B)
```

```
[1] 1 4 5
```

$A \cup B$

```r
A
```

```
[1] 1 2 3 4 5
```

```r
B
```

```
[1] 1 4 5
```

```r
union(A,B)
```

```
[1] 1 2 3 4 5
```

$B - C$

```r
B
```

```
[1] 1 4 5
```

```r
C
```

```
[1] 4 6 7 8
```

```r
setdiff(B,C)
```

```
[1] 1 5
```

$A^c = \Omega - A$

```r
Omega
```

```
 [1]  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10
```

```r
A
```

```
[1] 1 2 3 4 5
```

```r
setdiff(Omega,A)
```

```
[1]  6  7  8  9 10
```

1.1.6 Con python

```
Omega=set([1,2,3,4,5,6,7,8,9,10])
A=set([1,2,3,4,5])
B=set([1,4,5])
C=set([4,6,7,8])
Omega
```

```
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
```

```
A
```

```
{1, 2, 3, 4, 5}
```

```
B
```

```
{1, 4, 5}
```

```
C
```

```
{8, 4, 6, 7}
```

```
A & B   # intersección (&: and/y)
```

```
{1, 4, 5}
```

```
A | B   # unión (|: or/o)
```

```
{1, 2, 3, 4, 5}
```

```
A - C   # diferencia
```

```
{1, 2, 3, 5}
```

```
Omega-C # complementario.
```

```
{1, 2, 3, 5, 9, 10}
```

1.2 Combinatoria

La combinatoria es una rama de la matemática discreta que entre otras cosas cuenta distintas configuraciones de objetos de un conjunto.

Por ejemplo si tenemos un equipo de baloncesto con 7 jugadores ¿cuántos equipos de 5 jugadores distintos podemos formar?

1.2.1 Número Binonial

Número combinatorio o número binomial

Nos da el número de subconjuntos de tamaño k de un conjunto de tamaño n. Este número es

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Recordemos que

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Ejercicio: el paquete `gtools`

Carga el paquete `gtools` de R y investiga la función `combinations(n, r, v, set, repeats.allowed)` para calcular todas las combinaciones anteriores.

1.2.2 Combinaciones con repetición

En combinatoria, las combinaciones con repetición de un conjunto son las distintas formas en que se puede hacer una selección de elementos de un conjunto dado, permitiendo que las selecciones puedan repetirse.

Combinaciones con repetición

El número CR_n^k de multiconjuntos con k elementos escogidos de un conjunto con n elementos satisface:

- Es igual al número de combinaciones con repetición de k elementos escogidos de un conjunto con n elementos.
- Es igual al número de formas de repartir k objetos en n grupos.

$$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Ejemplo: caramelos

Vamos a imaginar que vamos a repartir 12 caramelos entre Antonio, Beatriz, Carlos y Dionisio (que representaremos como A, B, C, D). Una posible forma de repartir los caramelos sería: dar 4 caramelos a Antonio, 3 a Beatriz, 2 a Carlos y 3 a Dionisio. Dado que no importa el orden en que se reparten, podemos representar esta selección como AAAABBBCCDDD.

Otra forma posible de repartir los caramelos podría ser: dar 1 caramelo a Antonio, ninguno a Beatriz y Carlos, los 11 restantes se los damos a Dionisio. Esta repartición la representamos como ADDDDDDDDDDD

Recíprocamente, cualquier serie de 12 letras A, B, C, D se corresponde a una forma de repartir los caramelos. Por ejemplo, la serie AAAABBBBBDDD corresponde a: Dar 4 caramelos a Antonio, 5 caramelos a Beatriz, ninguno a Carlos y 3 a Dionisio.

De esta forma, el número de formas de repartir los caramelos es:

$$CR_{n=4}^{k=12} = \binom{4+12-1}{12} = 455.$$

1.2.3 Variaciones.

Con los número $\{1, 2, 3\}$ ¿cuántos números de dos cifras distintas podemos formar sin repetir ninguna cifra?

La podemos escribir

$$12, 13, 21, 23, 31, 32$$

Luego hay seis casos, estas son las variaciones de orden $k = 2$ de un conjunto de $n = 3$ elementos.

Variaciones

Denotaremos las variaciones (sin repetición) de k elementos (de orden k) de un conjunto de n elementos por V_n^k su valor es

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = (n-k+1) \cdot (n-k+2) \cdots n.$$

Ejemplo

En nuestro ejemplo con $n = 3$ dígitos podemos escribir las siguientes variaciones de orden $k = 2$

$$V_{n=3}^{k=2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6.$$

Ejercicio

Carga el paquete `gtools` de R y investiga la función `permutations(n, r, v, set, repeats.allowed)` para calcular todas las variaciones anteriores.

1.2.4 Variaciones con repetición.

¿Y si en el caso anterior permitimos que se repita algún dígito?

Variaciones on repetición

Las variaciones de orden k de un conjunto de n elementos permitiendo que se repitan los elementos. Las denotamos y valen:

$$VR_n^k = n^k$$

Ejemplo

Efectivamente en nuestro caso

$$11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33$$

$$VR_{n=3}^{k=2} = n^k = 3^2 = 9.$$

1.2.5 Permutaciones

Permutaciones

Las permutaciones de un conjunto de cardinal n son todas las variaciones de orden máximo n. Las denotamos y valen:

$$P_n = V_n^n = n!$$

Variaciones on repetición

Por ejemplo todos los números que se pueden escribir ordenando todos los dígitos $\{1, 2, 3\}$ sin repetir ninguno

```
library(combinat)
for(permutacion in permn(3)) print(permutacion)
```

```
[1] 1 2 3
[1] 1 3 2
[1] 3 1 2
[1] 3 2 1
[1] 2 3 1
[1] 2 1 3
```

Efectivamente $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Ejercicio

Carga el paquete `combinat` de R e investiga la función `permn` para calcular todas las permutaciones anteriores.

Investiga también el paquete `itertools` y la función `comb` de `scipy.misc` de Python e investiga sus funciones para todas las formas de contar que hemos visto en este tema.

Ejercicio

La función gamma de Euler, cobrará mucha importancia en el curso de estadística. Comprueba que la función `gamma(x+1)` da el mismo valor que la función `factorial(x)` en `R` para todo $x = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$.

1.2.6 Números multinomiales. Permutaciones con repetición.

Ejercicio

Consideremos un conjunto de elementos $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

Entonces, si cada uno de los objetos a_i de un conjunto, aparece repetido n_i veces para cada i desde 1 hasta k, entonces el número de permutaciones con elementos repetidos es:

$$PR_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \binom{n}{n_1 \quad n_2 \quad \ldots \quad n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!},$$

donde $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Ejercicio

¿Cuantas palabras diferentes se pueden formar con las letras de la palabra `PROBABILIDAD`?

El conjunto de letras de la palabra considerada es el siguiente: $\{A, B, D, I, L, O, P, R\}$ con las repeticiones siguientes: las letras A, B, D, e I, aparecen 2 veces cada una; y las letras L, O, P, R una vez cada una de ellas.

Por tanto, utilizando la fórmula anterior, tenemos que el número de palabras (permutaciones con elementos repetidos) que podemos formar es

$$PR_{12}^{2,2,2,2,1,1,1,1} = \frac{12!}{(2!)^4(1!)^4} = 29937600.$$

1.3 Para acabar

1.3.1 Principios básicos para contar cardinales de conjuntos

El principio de la suma

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos disjuntos dos a dos, es decir $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots n$. Entonces

$$\#(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \#(A_i).$$

Principio de unión exclusión

Consideremos dos conjuntos cualesquiera A_1, A_2 entonces el cardinal de su unión es

$$\#(A_1 \cup A_2) = \#(A_1) + \#(A_2) - \#(A_1 \cap A_2).$$

El principio del producto

Sean $A_1, A_2, \ldots A_n$

$$\begin{aligned} \#(A_1 \times A_2 \times \cdots A_n) = \; & \# \left(\{(a_1, a_2, \ldots a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots n\}\right) \\ & = \textstyle\prod_{i=1}^n \#(A_i). \end{aligned}$$

1.3.2 Otros aspectos a tener en cuenta

Evidentemente nos hemos dejado muchas otras propiedades básicas de teoría de conjuntos y de combinatoria como:

- Propiedades de los números combinatorios.
- Binomio de Newton.
- Multinomio de Newton.

Si nos son necesarias las volveremos a repetir a lo largo del curso o bien daremos enlaces para que las podáis estudiar en paralelo.

2 Teoría elemental de la probabilidad

2.1 Definiciones básicas

Definición experimento aleatorio

Un experimento que repetido en las mismas condiciones puede dar resultados diferentes, pero que a largo plazo son predecibles recibe el nombre de **experimento aleatorio**.

Daremos nombres a distintos tipos de sucesos:

Espacio muestral y tipos de sucesos

- Llamaremos **suceso elemental** a cada uno de los posibles resultados del experimento aleatorio.
- Llamaremos **espacio muestral** (Ω,E) al conjunto formado por todos los sucesos elementales del experimento aleatorio.
- Llamaremos **suceso** a cualquier subconjunto del espacio muestral.
- **Suceso seguro o cierto** $A \subseteq \Omega$
- **Suceso imposible o vacio**: $\emptyset$
- **Partes de un conjunto**: $\mathcal{P}(\Omega)$: conjunto de todos los sucesos del experimento aleatorio (es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de Ω)

A continuación describimos el clásico experimento del lanzamiento de un dado.

Ejemplo

Consideremos el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado. El espacio muestral de este experimento es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o las figuras de las caras del dado.

Si lo representamos gráficamente, tendríamos:

Por comodidad y conveniencia se opta por representar el espacio muestral por

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Recordemos la notación $\mathcal{P}(\Omega)$ que usamos para referirnos al conjunto de todos los subconjuntos de Ω. Este conjunto se llama **conjunto de partes** de Ω.

Ejercicio

¿Cuantos elementos contiene el conjunto de partes de Ω del experimento anterior?

Veamos algún ejemplo menos clásico. Podemos considerar el experimento aleatorio que consiste en calcular los n gramas de una palabra escogida al azar.

Ejemplo n-gramas

Se define un n-grama de una palabra como el conjunto de n letras consecutivas de la misma (contando los blancos de inicio y final de palabra que marcamos como "_").

Consideremos el experimento aleatorio que consiste en escoger al azar un 3-grama de la palabra "_Baleares_". Vamos a escribir el espacio muestral y algunos sucesos elementales del mismo.

En este caso, si consideramos la palabra "_Baleares_", el espacio muestral del experimento sería:

$$\Omega = \{\_Ba, Bal, ale, lea, ear, are, res, es\_\}$$

Algunos sucesos serían:

- 3-gramas que empiezan por a: $\{ale, are\}$.
- 3-gramas de inicio y final de palabra: $\{\_Ba, es\_\}$.
- 3-gramas que contengan una l: $\{Bal, ale, lea\}$.

Esiten bases de datos que estudián la frecuencias de n-grams de caracteres en textos en diferentes idiomas; generalmente de palabras. Por ejemplo, en español, los bigramas de sílabas más frecuentes son "EN" (3.01%) y "DE" (2.77%) y los trigramas de sílabas son "QUE" (1.66%) y "ENT" (1.38%). Podéis consultar más estadísticas en por ejemplo en Stefan Trost Media frecuencias de sílabas en español.

2.1.1 Operaciones con sucesos

Si tenemos dos sucesos $A, B \subseteq \Omega$, podemos definir:

- Ω: *suceso* total o *seguro*.
- $\emptyset$: suceso *vacío* o *imposible*.
- $A \cup B$: suceso *unión*; el que ocurre si sucede A o B.
- $A \cap B$: suceso *intersección*; el que ocurre si sucede A y B.
- A^c: suceso *complementario* el que sucede si NO sucede A.
- $A - B = A \cap B^c$: suceso *diferencia*, que acontece si sucede A y NO sucede B.

Sucesos incompatibles

Dos sucesos cualesquiera A y B son *incompatibles* (o *disjuntos*) cuando $A \cap B = \emptyset$.

Otro ejemplo se observa el sexo y la lateralidad de los estudiantes de una clase.

Ejemplo

Supongamos que el sexo se divide entre Mujeres y Hombres y la lateralirad en diestros y zurdos. Vamos a definir el espacio muestral, los sucesos elementales y a realizar algunas operaciones entre ellos.

Estudiantes de esta clase: Ω. - Mujeres de esta clase: A. - Estudiantes que son zurdos B.

Algunas operaciones entre los sucesos anteriores serían:

- $A \cup B$: Est. que son mujeres o que son zurdos.
- $A \cap B$: Mujeres de esta clase que son zurdas.
- A^c: Hombres de esta clase.
- $A - B$: Mujeres de la clases que NO son zurdas.
- $B - A$: Hombres de la clase que son zurdos.
- ¡Cuidado! No son incompatibles.

2.1.2 Propiedades

Propiedades

Conmutativas:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

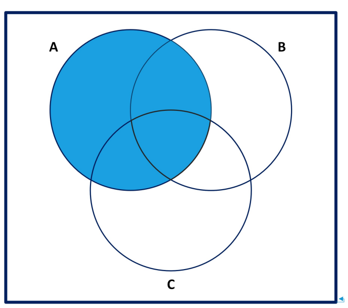
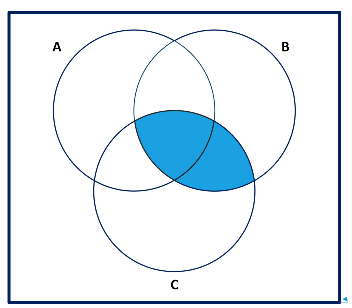
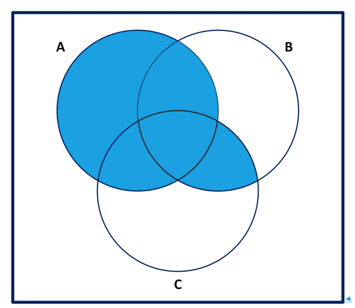
Asociativas:

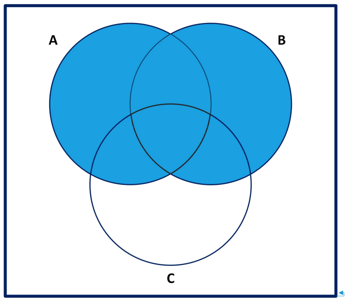
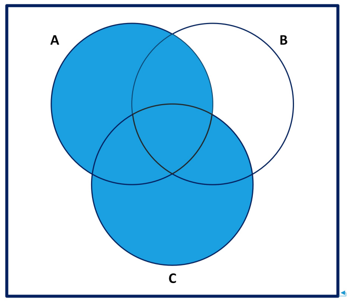
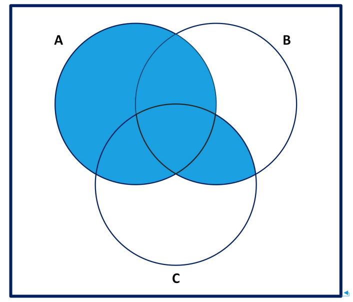
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Distributivas

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

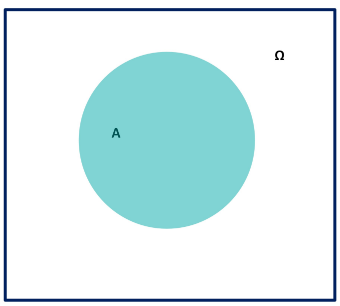
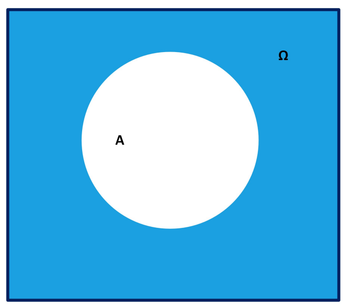
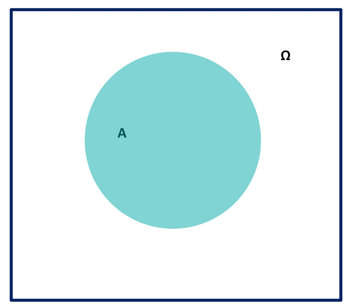
Veamos algunos diagramas que nos ayuda a demostrar las propiedades anteriores.

A	$B \cap C$	$A \cup (B \cap C)$
		

$A \cup B$	$A \cup C$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
		

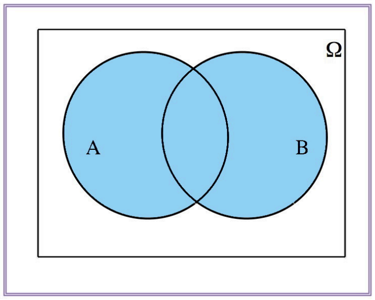
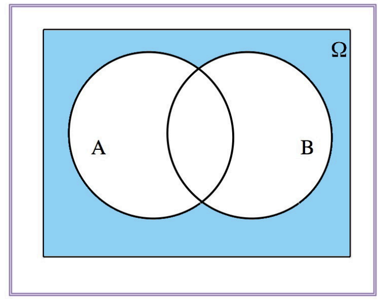
Complementario del complementario

$$(A^c)^c = A$$

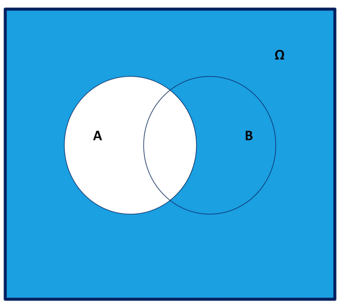
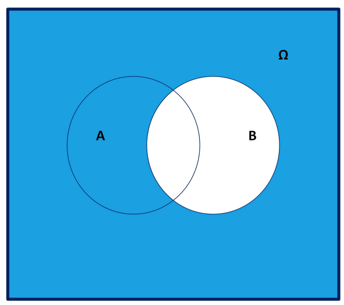
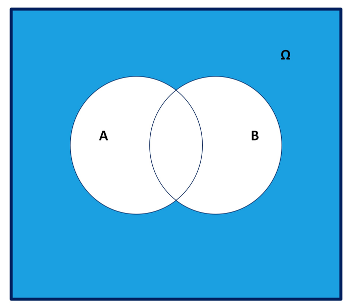
A	A^c	$(A^c)^c$
		

Leyes de De Morgan

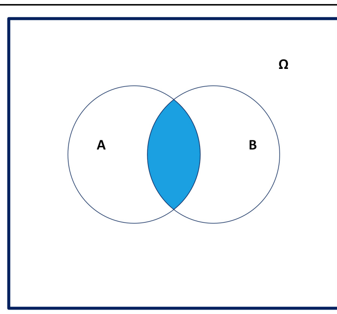
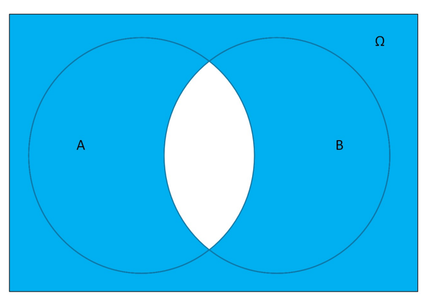
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$A \cup B$	$(A \cup B)^c$
	

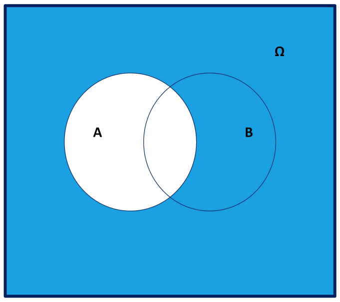
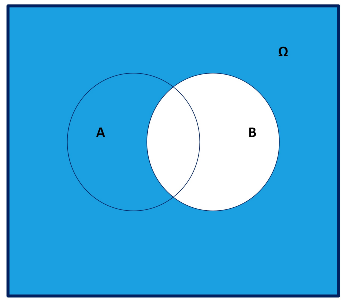
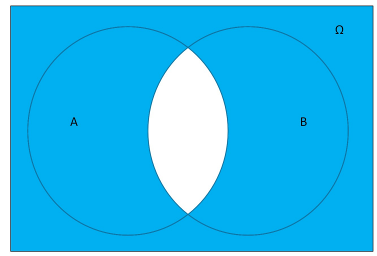
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

A^c	B^c	$A^c \cap B^c$
		

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$A \cap B$	$(A \cap B)^c$
	

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

A^c	B^c	$A^c \cup B^c$
		

2.2 Definición de probabilidad

La probabilidad de un suceso es una puntuación (*score*) numérico entre 0 y 1 que mide la verosimilitud de que este evento se produzca.

Esta verosimilitud puede estar justificada por:

- Estimación personal
- Estimación de expertos
- La frecuencia con la que se da
- Cálculo formal

Definición formal de probabilidad

Sea Ω el espacio muestral de un experimento aleatorio. Supongamos que el número de posibles resultados, por el momento, es finito.

Una probabilidad sobre Ω es una aplicación $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ con las siguientes propiedades:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo suceso A.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Si $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ son sucesos disjuntos dos a dos, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

Si $a \in \Omega$ es un suceso elemental cometeremos el abuso de notación de poner $P(a)$ en lugar de $P(\{a\})$.

Veamos un ejemplo real de cómo se calcula la probabilidad de un suceso.

Ejemplo

En la página de la Fundación Banco de Sangre y Tejidos de las Islas Baleares (17-08-2023) podemos encontrar información sobre los porcentajes de tipos de sangre de los donantes de las Islas Baleares:

$$A : 46\%;\ \ B : 7.5\%;\ \ AB : 3.5\%;\ \ O : 43\%.$$

¿Cuál es la probabilidad de que un balear donante de sangre no sea del tipo O?

Experimento aleatorio: tipo de sangre de un paciente humano:

$$\Omega = \{\text{A,B,AB,O}\}$$

Probabilidad de un suceso: se asimila al porcentaje observado de individuos.

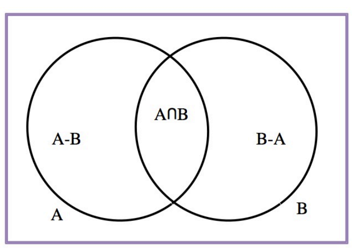
Suceso: $\{\text{O}\}^c = \{\text{A,B,AB}\}$.

$$P(\{\text{O}\}^c) = P(\{\text{A,B,AB}\}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) + P(\text{AB}) = 0.57.$$

Necesitaremos tener propiedades y fórmulas prácticas para poder calcular probabilidades de sucesos más complejos. Veamos algunas de ellas.

Propiedades básicas de la probabilidad

- $P(\emptyset) = 0$.
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ porque $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$.

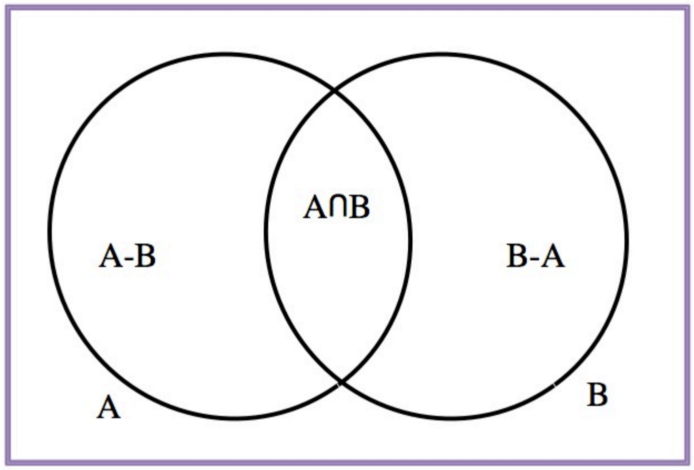


- Si $B \subseteq A$, entonces $0 \leq P(B) \leq P(A)$.
- $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Una identidad muy utilizada es la de la probabilidad de la unión de dos sucesos cualesquiera.

La Probabilidad de la unión de dos sucesos

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



La demostración analítica de esta propiedad es la siguiente:

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) - P(A \cap B) &= P(A - B) + P(A \cap B) \\ &\quad + P(B - A) + P(A \cap B) - P(A \cap B) \\ &= P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A) \\ &= P(A \cup B). \end{aligned}$$

Probabilidad de la unión de n conjuntos

Sean $A_1, A_2, \ldots A_n$ sucesos. Entonces:

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$

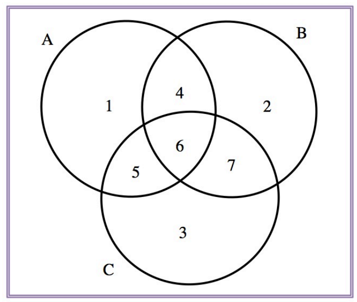
La demostración es sencilla mediante inducción: partimos del caso base de dos sucesos, suponemos que es cierta para n sucesos y luego la extendemos al caso de $n+1$ sucesos.

Como comprobación, consideremos un ejemplo genérico con tres sucesos.

$A = \{1, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 7\}$ y $C = \{3, 5, 6, 7\}$. En este caso la fórmula nos da

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Gráficamente tenemos esta situación:



Ahora podemos comprobar la fórmula para este caso.

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) \\ &\quad - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

Efectivamente tenemos que:

$$P(A \cup B \cup C) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) + P(7).$$

Una de las formas más intuitiva de asignación de probabilidades es hacer el cociente entre los casos favorables a que acontezca el vento y los casos posibles del experimento; la llmadad fórmula de Laplace.

Propiedad

- En general dado un suceso $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, entonces
$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \cdots + P(a_k).$$

- **Fórmula de Laplace**: Si todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad,
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}\Big(= \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}\Big).$$

En el procesamiento del lenguaje se suelen estudiar las frecucias de plabaras o letras de un determinado idioma. Veamos un ejemplo sobre las frecuencias de las vocales en castellano.

Ejemplo: Frecuencia de vocales

Los porcentajes de vocales de un determinado idioma (de alfabeto latino) según la Wikipedia son:

$$A : 18.7\%; \; E : 26.1\%; \; I : 25.7\%; \; O : 24.4\%; \; U : 5.1\%.$$

¿Cuál es la probabilidad que una vocal escogida al azar de este idioma sea una E o una O?

El espacio muestral del experimento es $\Omega = \{A, E, I, O, U\}$.

El suceso que deseamos analizar es $\{E, 0\}$.

Y su probabilidad es

$$P(\{E, O\}) = P(E) + P(O) = 0.261 + 0.244 = 0.505.$$

Otro ejemplo en este caso es sobre un test de drogas en el que se analiza la presencia de cocaína y cannabis en la sangre de los conductores, inspirado en un caso real.

Ejemplo: Consumo de drogas

Segun un árticulo de El País, en un control especial de la policía el 0.1% de todos los conductores analizados en un control de tráfico dan positivo en un el test en cocaína, y el 1% da positivo en cannabis. Un 1.05% da positivo en alguno de los dos test.

Pregunta: ¿Cuál es la probabilidad que un individuo analizado en el control de drogas escogido al azar no de positivo en ninguno de lo dos test?

Los sucesos elementales del enunciado del problema son:

- A: dar positivo en cocaína; $P(A) = 0.001$.
- B: dar positivo en cannabis; $P(B) = 0.01$.

En este caso nos interesa estudiar los sucesos:

- $A \cup B$: dar positivo en alguno de los dos test; $P(A \cup B) = 0.0105$.
- $(A \cup B)^c$: no dar positivo en ninguno de los test,por tanto:

$$P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.0105 = 0.9895.$$

Pregunta: ¿Cuál es la probabilidad que un analizado al azar de positivo en los dos test en cocaína y cannabis?

Los sucesos elementales son:

- A: dar positivo en cocaína; $P(A) = 0.001$.
- B: dar positivo en cannabis; $P(B) = 0.01$.

En este caso nos interesa estudiar los sucesos:

- $A \cup B$: dar positivo en algún de los dos test; $P(A \cup B) = 0.0105$.
- $A \cap B$: dar positivo en los dos test

de donde, por tanto:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 0.001 + 0.01 - 0.0105 = 0.0005. \end{aligned}$$

Pregunta: ¿Cuál es la probabilidad de que un conductor analizado de positivo en cocaína pero no en cannabis?

Los sucesos elementales son:

- A: dar positivo en cocaína; $P(A) = 0.001$.
- B: dar positivo en cannabis; $P(B) = 0.01$.

En este caso nos interesa estudiar los sucesos:

- $A \cap B$: dar positivo en los dos test; $P(A \cap B) = 0.0005$.
- $A - B$: dar positivo en cocaína pero no en cannabis, por lo tanto tenemos que :

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.001 - 0.0005 = 0.0005.$$

2.3 Probabilidad condicionada

Probabilidad condicionada

Dados dos sucesos A y B, con $P(A) > 0$, la probabilidad $P(B|A)$ de B condicionado a A es la probabilidad

- de que suceda B suponiendo que pasa A,
- de que si pasa A, entonces suceda B,
- de que un resultado de A también pertenezca a B.

Se calcula a través de la definición:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Ejemplo

En una clase de 20 hombres y 30 mujeres, 15 hombres y 18 mujeres llevan gafas. Contestemos las siguientes preguntas:

¿Cuál es la probabilidad de que un alumno lleve gafas?

$$\frac{33}{50}$$

¿Cuál es la probabilidad de que un alumno sea mujer y lleve gafas?

$$\frac{18}{50}$$

¿Cuál es la probabilidad de que un chica lleve gafas?

$$\frac{18}{30} = \frac{18/50}{30/50} = \frac{P(\text{mujer y gafas})}{P(\text{mujer})}.$$

Si escogemos un estudiante al azar ¿Cuál es la probabilidad que si es mujer, entonces lleve gafas?

$$\frac{18}{30}.$$

¿Cuál es la probabilidad de que un alumno que lleve gafas sea mujer?

$$\frac{18}{33} = \frac{18/50}{33/50} = \frac{P(\text{mujer y gafas})}{P(\text{gafas})}.$$

Si escogemos un estudiante al azar ¿Cuál es la probabilidad de que si lleva gafas, entonces sea mujer?

$$\frac{18}{33}$$

¡Atención!

Hay que distinguir bien entre

- $P(A \cap B)$: probabilidad de A y B.

Probabilidad de que sea mujer y lleve gafas.

- $P(A|B)$: probabilidad de que si pasa B, entonces pase A.

Probabilidad de que, si es mujer, lleve gafas.

Cuando utilizamos probabilidad condicional $P(A|B)$ estamos restringiendo el espacio muestral a B.

2.3.1 Probabilidad condicionada. Propiedades

La probabilidad condicionada es una probabilidad, en el setido de la siguiente propiedad.

Propiedad

Sea $A \subseteq \Omega$ un suceso tal que $P(A) > 0$, entonces

$$\begin{array}{rccl} P(-|A): & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & B & \mapsto & P(B|A). \end{array}$$

satisface las propiedades de las probabilidades, como por ejemplo:

$$\begin{array}{l} P(B^c|A) = 1 - P(B|A), \\ P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1 \cap B_2|A). \end{array}$$

También se cumpliran el resto de propiedades miestras condiciones todas ellas al mismo suceso A.

Ejercicio

Escribid el resto de propiedades que cumpliría una probabilidad condicionada al evento A.

Veamos un ejemplo donde se aplica la probabilidad condicionada, en este caso, para calcular la probabilidad de que un adulto sea hipertenso, dado que cree que lo es.

Ejemplo

Un 15% de los adultos son hipertensos, un 25% de los adultos creen que son hipertensos, y un 9% de los adultos son hipertensos y creen que lo son.

Si un adulto cree que es hipertenso, ¿cuál es la probabilidad que lo sea?

Sean los sucesos

- A: ser hipertenso, $P(A) = 0.15$,
- B: creer ser hipertenso, $P(B) = 0.25$,

Ahora podemos definir el suceso:

- $A \cap B$: ser hipertenso y creerlo, $P(A \cap B) = 0.09$.

de donde, la probabilidad condicionada de ser hipertenso creyéndonos que lo somos es:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.09}{0.25} = 0.36.$$

Otra pregunta es, si un adulto es hipertenso, ¿cuál es la probabilidad que crea que lo es?

Si tenemos los sucesos:

- A: ser hipertenso,
- B: creer ser hipertenso

entonces buscamos la probabilidad $P(B|A)$:

$$P(B|A) \quad = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.09}{0.15} = 0.6$$

Ejemplo

Otro ejemplo de probabilidad condicionada en este caso un ejemplo simple de dígito de control de error.

Un dígito de control de error toma el valor 0 en el 99% de los casos en que hay un error. Si la probabilidad de error en un mensaje es del 0.5%. ¿cuál es la probabilidad de que el mensaje sea erróneo y el código de error tenga valor 0?

- B: mensaje con error; $P(B) = 0.005$,
- A: código de error vale 0,
- $P(A|B) = 0.99$,

entonces:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = 0.005 \cdot 0.99 = 0.00495.$$

La probabilidad condicional también es útil en la resolución de problemas de clasificación, como el siguiente ejemplo.

Ejemplo: SPAM

Un 50% de correos recibidos en un servidor llevan adjuntos y un 65% son publicidad no deseada (SPAM). Sólo un 15% de estos correos no llevan adjuntos y no son SPAM.

- ¿Cuál es la probabilidad que un correo lleve adjunto si es SPAM?
- ¿Cuál es la probabilidad que un correo **no** tenga adjuntos si **no** es SPAM?
- ¿Cuál es la probabilidad que un correo lleve adjunto si es SPAM?

Asignemos sucesos y probabilidades

- A: llevar adjuntos; $P(A) = 0.5$, - S: SPAM; $P(S) = 0.65$, - $A^c \cap S^c = (A \cup S)^c$: no llevar adjunto y no ser SPAM; $P((A \cup S)^c) = 0.15$,

$$P(A|S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = ?$$

- ¿Cuál es la probabilidad que un correo lleve adjunto si es SPAM?
- $P(A) = 0.5, P(S) = 0.65, P(A^c \cap S^c) = P((A \cup S)^c) = 0.15$,
- $P(A \cup S) = 1 - P((A \cup S)^c) = 0.85$,
- $P(A \cap S) = P(A) + P(S) - P(A \cup S) = 0.3$,

$$P(A|S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{0.3}{0.65} \approx 0.46.$$

- Otra pregunta es ¿Cuál es la probabilidad de que un correo no lleve adjuntos si no es SPAM?
- $P(A) = 0.5, P(S) = 0.65, P(A^c \cap S^c) = P((A \cup S)^c) = 0.15$.

$$P(A^c|S^c) = \frac{P(A^c \cap S^c)}{P(S^c)} = \frac{P(A^c \cap S^c)}{1 - P(S)} = \frac{0.15}{0.35} \approx 0.43.$$

2.4 Teorema de la probabilidad total

Teorema de la probabilidad total

Dados dos sucesos A y B se tiene que

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap A^c) \\ &= P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c). \end{aligned}$$

Vamos a generalizar el resultado anterior a una colección de sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$ que forman una partición del espacio muestral Ω.

Partición del espacio espacio muestral

Los sucesos $A_1, A_2, \dots, A_n$ son una **partición** del espacio muestral Ω de un determinado experimento aleatorio, si cumplen las condiciones siguientes:

1. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$,
2. $A_1, A_2, \dots, A_n$ son incompatibles dos a dos ($A_i \cap A_j = \emptyset$).

Ahora podemos volver a enunciar el teorema anterior pero en esta ocasión para particiones arbitrarias.

Teorema de la probabilidad total generalizado

Sea $A_1, A_2, \dots, A_n$ una partición de Ω. Sea B un suceso cualquiera. Entonces

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A_1) + \cdots + P(B \cap A_n) \\ &= P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \dots + P(A_n) \cdot P(B|A_n). \end{aligned}$$

Revisitemos el ejemplo de los mensajes con dígitos de control de error.

Ejemplo

Un dígito de control de error toma el valor 0 en un 99% de los casos en que hay un error y en un 5% de los mensajes sin error. La probabilidad de error en un mensaje es del 0.5%.

¿Cuál es la probabilidad de que un mensaje escogido al azar tenga el dígito de control a 0?

Sean los sucesos del enunciado:

- B: mensaje con error; $P(B) = 0.005$,
- A: código de error vale 0,

entonces obtenemos las probabilidades a partir del enunciado:

- $P(A|B) = 0.99$,
- $P(A|B^c) = 0.05$

y por tanto,

$$\begin{aligned} P(A) = \quad & P(B) \cdot P(A|B) + P(B^c) \cdot P(A|B^c) \\ & = 0.005 \cdot 0.99 + 0.995 \cdot 0.05 = 0.0547. \end{aligned}$$

2.5 Clasificación o diagnostico caso binario

Consideremos alguna de las siguientes situaciones:

- Un algoritmo detecta si una transacción con tarjeta de crédito es fraude o no.
- Un algoritmo detecta si tiene o no que mostrar un anuncio en una web.
- Un prueba de embarazo.
- Una prueba médica para una enfermedad concreta.

Nos ceñiremos a la casuística más elemental el algoritmo de clasificación o la diagnosis solo da dos resultado **Positivo** (sí tienes la enfermedad, sí es un fraude) o **Negativo** (en caso contrario).

SPAM continuación

En todas estas situaciones podemos calcular lo que se llama **matriz de confusión** que representa todas las situaciones posibles. En el caso de estudiar una condición de tipo binario,

	El Test da Positivo	El Test da Negativo
Condición Positiva	Correcto	Error
Condición Negativa	Error	Correcto

En general los modelos y algoritmos de clasificación suelen aportar puntuaciones (*scores*) que determinan el grado de pertenencia a una clase, o que miden si dos objetos están en la misma clase.

Así el resultado del clasificador o del diagnóstico puede ser:

- **un número real**, en cuyo caso debe clasificador entre cada clase debe determinarse por un valor umbral (*threshold*) por ejemplo para determinar si una persona está estresado podemos dar un *scores* entre 0 y 1 (1 máximo estrés 0 estrés nulo),
- **un resultado discreto** que indica directamente una de las clases (esto es necesario si es un algoritmo que debe decidir qué hacer con el objeto.

Falsos Positivos y Negativos

Consideremos un problema de predicción de clases binario, en la que los resultados se etiquetan positivos (P) o negativos (N). Hay cuatro posibles resultados a partir de un clasificador binario como el propuesto.

- Si el resultado de una exploración es P y el valor dado es también P, entonces se conoce como un Verdadero Positivo (VP).
- Sin embargo si el valor real es N entonces se conoce como un Falso Positivo (FP).
- De igual modo, tenemos un Verdadero Negativo (VN) cuando tanto la exploración como el valor dado son N.
- Un Falso Negativo (FN) cuando el resultado de la predicción es N pero el valor real es P.

Veamos el siguiente ejemplo:

Falsos Positivos y Negativos

Un ejemplo aproximado de un problema real es el siguiente: consideremos una prueba diagnóstica que persiga determinar si una persona tiene una cierta enfermedad.

- Un falso positivo en este caso ocurre cuando la prueba predice que el resultado es positivo, cuando la persona no tiene realmente la enfermedad.
- Un falso negativo, por el contrario, ocurre cuando el resultado de la prueba es negativo, sugiriendo que no tiene la enfermedad cuando realmente sí la tiene.

En un diagnósticos de una cierta condición (por ejemplo, test embarazo, test de enfermedad), tenemos dos tipos de sucesos:

- T: el test da positivo,
- M: el sujeto satisface la condición.

Necesitamos algunas denominaciones adicionales:

Falsos Positivos y Negativos

- **Falsos positivos** $T \cap M^c$: El test da positivo, pero la condición no se da,
- **Coeficiente de falsos positivos** $P(T|M^c)$,
- **Falsos negativos** $T^c \cap M$: El test da negativo, pero la condición sí que se da,
- **Coeficiente de falsos negativos**: $P(T^c|M)$.

Falsos Positivos y Negativos

Un test diseñado para diagnosticar una determinada enfermedad tiene un coeficiente de falsos negativos de 0.06, y un coeficiente de falsos positivos de 0.04. En un estudio masivo se observa que un 15% de la población da positivo al test.

¿Cuál es la probabilidad que una persona escogida aleatoriamente tenga esta enfermedad?

Los datos del problema son:

- T: dar positivo al test; $P(T) = 0.15$,
- M: tener la enfermedad,
- $P(T) = 0.15$, $P(T^c|M) = 0.06$, $P(T|M^c) = 0.04$,

- ¿$P(M)$?

$$P(T) = P(M) \cdot P(T|M) + P(M^c) \cdot P(T|M^c).$$

donde

$$\begin{aligned} &P(T|M) = 1 - P(T^c|M) = 0.94 \\ &P(M^c) = 1 - P(M). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 0.15 &= P(M) \cdot 0.94 + (1 - P(M)) \cdot 0.04 \\ &= 0.04 + 0.9 \cdot P(M) \\ P(M) &= \frac{0.11}{0.9} \approx 0.1222. \end{aligned}$$

3 Teorema de Bayes

Teorema de Bayes para dos sucesos

Sean A y B dos sucesos. Si $P(B) > 0$, entonces

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c)}.$$

Ejemplo

Demostrar el teorema de Bayes utilizando que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \cdots$$

Generalicemos este resultado para una partición arbitraria del espacio muestral.

Teorema de Bayes para una partición

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición de Ω. Sea B un suceso tal que $P(B) > 0$. entonces(para cualquier $i = 1, 2, \ldots, n$):

$$\begin{aligned} P(A_i|B) &= \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}, \end{aligned}$$

Podéis demostrar el teorema de Bayes utilizando que

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \cdots$$

Test de VIH

Un test para detección de VIH da positivo un 99% de los casos en los que está presente y en un 5% de los casos en los que el virus está ausente. En una población con un 0.5% de infectados por VIH, ¿cuál es la probabilidad que un individuo que haya dado positivo en el test esté infectado?

Los sucesos del ejemplo son:

- A: individuo infectado,
- B: el test da positivo,

de donde podemos calcular:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)} = \frac{0.99 \cdot 0.005}{0.005 \cdot 0.99 + 0.995 \cdot 0.05} = 0.09.$$

Un test para detección de VIH da positivo un 99% de los casos en los que está presente y en un 5% de los casos en los que el virus está ausente. En una población con un 0.5% de infectados por VIH, ¿cuál es la probabilidad de que un individuo que haya dado **negativo** en el test **no** esté infectado?

Los sucesos del ejemplo son:

- A: individuo infectado,
- B: el test da positivo,

de donde podemos calcular:

$$P(A^c|B^c) = \frac{P(B^c|A^c) \cdot P(A^c)}{P(B^c|A) \cdot P(A) + P(B^c|A^c) \cdot P(A^c)} = \frac{0.95 \cdot 0.995}{0.01 \cdot 0.005 + 0.95 \cdot 0.995} = 0.999947.$$

Ejemplo: Tipos de clientes

Se ha observado que los cientes de una empresa de ventas por internet son de tres tipos, A, B y C, disjuntos dos a dos. La probabilidad que ser de cualquiera de cada uno de los tipos es 1/3, pero la probabilidad de compra de cada tipo es diferente: si es de tipo A compra un 50% de las veces, si de tipo B, un 75% de las veces, y de tipo C, un 60%.

Supongamos que llega un cliente ¿cuál es la probabilidad de que si ha comprado sea del tipo B?

Los sucesos del ejercicio son A: el cliente es de tipo A, B: el cliente es de tipo B, C: el cliente es de tipo C y

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3.$$

Buscamos estudiar el suceso E: el cliente compra, se tiene que:

$$P(E|A) = 0.5, P(E|B) = 0.75, P(E|C) = 0.6.$$

$$P(B|E)=\frac{P(E|B)\cdot P(B)}{P(E|A)\cdot P(A)+P(E|B)\cdot P(B)+P(E|C)\cdot P(C)}=...$$

Ejemplo: Fidelización de clientes

Para fidelizar a sus clientes una empresa implementa un test de detección precoz de abandono de clientes de una empresa de telefonía da positivo el 97.5% de las ocasiones en las que, posteriormente, el cliente se da de baja, y un 12% de las veces en que no se dio de baja. La probabilidad que un cliente escogido al azar se dé de baja es de un 2%.

- ¿Cuál es la probabilidad que un individuo escogido al azar de positivo en el test?
- ¿Cuál es la probabilidad que un individuo escogido al azar se de de baja y dé positivo en el test?
- ¿Cuál es la probabilidad que un individuo que dé negativo en el test se dé de baja?

Definimos los sucesos y datos del ejercicio:

- T: Dar positivo al test,
- B: darse de baja; $P(B)=0.02$,
- $P(T|B)=0.975, P(T|B^c)=0.12$.

$$P(B)=0.02, P(T|B)=0.975, P(T|B^c)=0.12.$$

- ¿Cuál es la probabilidad que un individuo escogido al azar de positivo en el test?

$$\begin{aligned} P(T)= & \ P(B)\cdot P(T|B)+P(B^c)\cdot P(T|B^c) \\ & =0.02\cdot 0.975+0.98\cdot 0.12=0.1371. \end{aligned}$$

¿Cuál es la probabilidad que un individuo escogido al azar se de de baja y dé positivo en el test?

$$P(B\cap T)=P(B)\cdot P(T|B)=0.02\cdot 0.975=0.0195.$$

$$P(B)=0.02, P(T|B)=0.975, P(T|B^c)=0.12.$$

¿Cuál es la probabilidad que un individuo que dé negativo en el test se dé de baja?

$$\begin{aligned} P(B|T^c)= & \ \frac{P(B\cap T^c)}{P(T^c)}=\frac{P(B)-P(B\cap T)}{1-P(T)} \\ & =\frac{0.02-0.0195}{1-0.1371}\approx 0.00058 \end{aligned}$$

O también se obtiene así

$$P(B|T^c) = \frac{P(T^c|B) \cdot P(B)}{P(T^c|B) \cdot P(B) + P(T^c|B^c) \cdot P(B^c)},$$

donde $P(T^c|B) = 1 - P(T|B) = 0.025$ y $P(T^c|B^c) = 1 - P(T|B^c) = 0.88$.

4 Independencia de sucesos

Sucesos Independientes

Diremos que los sucesos A y B son **independientes** si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$A_1, \dots, A_n$ son sucesos **independientes** cuando, para toda subfamilia $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$,

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}).$$

Propiedad

Dados dos sucesos A y B con $P(A), P(B)0$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. A y B son independientes.
2. $P(A|B) = P(A)$.
3. $P(B|A) = P(B)$.
4. A^c y B son independientes.
5. A y B^c son independientes.
6. A^c y B^c son independientes.

Veamos un secillo ejemplo de compras de billetes de avión y alojamiento en hotel.

Ejemplo billete avión

En la web de viajes WEBTravel, el 55% de los clientes compra billete de avión, el 20% alojamiento en hotel, y el 60% billete de avión o alojamiento en hotel. ¿Son los sucesos comprar billete de avión y comprar alojamiento en hotel independientes?

Los sucesos y datos del ejemplo son:

- A: comprar billete de avión; $P(A) = 0.55$,
- B: comprar alojamiento; $P(B) = 0.2$,

por tanto, podemos calcular las probabilidades siguientes

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.55 + 0.2 - 0.6 = 0.15$ y $P(A) \cdot P(B) = 0.55 \cdot 0.2 = 0.11$.

Concluimos que son dependientes, ya que $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$.

4.1 Sucesos independientes vs disjuntos

sucesos disjuntos e independencia

1. Dos sucesos A y B disjuntos, ¿son necesariamente independientes?
2. Dos sucesos A y B independientes, ¿son necesariamente disjuntos?
3. $\emptyset$ y un suceso cualquiera A, ¿son necesariamente independientes?
4. Ω y un suceso cualquiera A, ¿son necesariamente independientes?
5. ¿Qué condiciones se tienen que dar para que un suceso A sea independiente de si mismo?

5 Variables aleatorias

5.1 Introducción

Hasta ahora nuestros sucesos han sido de varios tipos: $\{C, +\}$ en la moneda, nombres de periódicos, ángulos en una ruleta, número de veces que sale cara en el lanzamiento de una moneda etc….

Necesitamos estandarizar de alguna manera todos estos sucesos. Una solución es asignar a cada suceso un cierto conjunto de números reales, es decir, convertir todos los sucesos en *sucesos de números reales* para trabajar con ellos de forma unificada.

Para conseguirlo utilizaremos unas funciones que transformen los elementos del espacio muestral en números; esta funciones son las variables aleatorias.

5.2 Definición de variable aleatoria

Comenzaremos dando una definición poco rigurosa, pero suficiente, de variable aleatoria.

Variable Aleatoria (definición práctica)

Una variable aleatoria (v.a.) es una aplicación que toma valores numéricos determinados por el resultado de un experimento aleatorio

Notación

- Normalmente representaremos las v.a. por letras mayúsculas $X, Y, Z \ldots$
- Los valores que "*toman*" las v.a. los representaremos por letras minúsculas (las mismas en principio) $x, y, z \ldots$

Ejemplo

Lanzamos un dado convencional de parchís el espacio muestral del experimento es

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Una v.a $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sobre este espacio queda definida por

$$X(1) = 1, X(2) = 2, X(3) = 3, (4) = 4, X(5) = 5, X(6) = 6.$$

- Ahora el suceso $A = \{2, 4, 6\}$, es decir "salir número par", es equivalente a $\{X = 2, X = 4, X = 6\}$.
- El suceso $B = \{1, 2, 3\}$, es decir "salir un número inferior o igual a 3" es en términos de la v.a. $\{X = 1, X = 2, X = 3\}$ o también $\{X \leq 3\}$.

Consideremos el experimento lanzar una anilla al cuello de una botella. Si acertamos a ensartar la anilla en la botella el resultado del experimento es **éxito** y **fracaso** en caso contrario.

El espacio muestral asociado a este experimento será $\Omega = \{\text{éxito, fracaso}\}$. Construyamos la siguiente variable aleatoria:

$$X : \{\text{éxito, fracaso}\} \to \mathbb{R}$$

definida por

$$X(\text{éxito}) = 1 \text{ y } X(\text{fracaso}) = 0.$$

5.3 Tipos de variables aleatorias

Hay dos tipos fundamentales de variables aleatorias, las discretas y las continuas.

Damos a continuación una definición informal.

Variables Aleatorias Discretas y Continuas

- Una variable aleatoria es **discreta** si sólo puede tomar una cantidad numerable de valores con probabilidad positiva.
- Las variables aleatorias **continuas** toman valores en intervalos.
- También existen las variables aleatorias **mixtas**; con una parte discreta y otra continua.

5.4 Ejemplo

Ejemplo

Son variables *aleatorias discretas*:

- Número de artículos defectuosos en un cargamento.
- Número de clientes que llegan a una ventanilla de un banco en una hora.
- Número de errores detectados en las cuentas de una compañía.

- Número de reclamaciones de una póliza de un seguro médico.

Son variables *aleatorias continuas*:

- Renta anual de una familia.
- Cantidad de petróleo importado por un país.
- Variación del precio de las acciones de una compañía de telecomunicaciones.
- Porcentaje de impurezas en un lote de productos químicos.

5.5 Variables aleatorias discretas

Pasamos ahora a describir el comportamiento de la v.a. Para ello utilizaremos distintas funciones que nos darán algunas probabilidades de la variable aleatoria.

En el caso discreto estas funciones son la de probabilidad, y la función de distribución o de probabilidad acumulada.

En el caso discreto la función de probabilidad es la que nos da las probabilidades de los sucesos elementales de la v.a. que definimos a continuación.

5.6 Distribuciones de probabilidad discretas

Función de Probabilidad

La **función de probabilidad** (*probability mass function* o incluso abusando de notación *probability density function*) de una variable aleatoria discreta X a la que denotaremos por $P_X(x)$ está definida por

$$P_X(x) = P(X = x),$$

es decir la probabilidad de que X tome el valor x.

Si X no asume ese valor x, entonces $P_X(x) = 0$.

Dominio de una variable aleatoria discreta

El conjunto

$$D_X = \{x \in \mathbb{R} \mid P_X(x) > 0\}$$

recibe el nombre de **dominio** de la v.a. y son los valores posibles de esta variable.

En el caso discreto lo más habitual es que $X(\Omega) = D_X$.

Ejemplo: Dado de parchís

Lanzamos un dado de parchís una vez, en esta ocasión representaremos los sucesos elementales por el número de puntos de la cara obtenida, tenemos que

$$\Omega = \{\text{1-puntos,2-puntos,3-puntos,4-puntos,5-puntos,6-puntos}\}$$

y la variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$ viene definida por

$$X(\text{i-puntos}) = i \text{ para } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Supongamos que el dado está bien balanceado. Entonces

$$P_X(1) = P_X(2) = P_X(3) = P_X(4) = P_X(5) = P_X(6) = \frac{1}{6}; \text{ concretamente.}$$

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{si } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Su dominio es

$$D_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Ejemplo: lanzamiento moneda

Sea X la v.a. asociada al lanzamiento de una moneda. Su espacio muestral es $\Omega = \{c, +\}$, la v.a. queda definida por:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = c \\ 0 & \text{si } \omega = + \end{cases}$$

Su función de probabilidad es:

$$P_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } x = 0, 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Finalmente su dominio es $D_X = \{0, 1\}$.

Ejemplo: urna con bolas

Tenemos una urna con tres bolas rojas, una negra y dos blancas. Realizamos una extracción y observamos el color de la bola entonces un espacio muestral es

$$\Omega = \{roja, blanca, negra\}.$$

Una variable aleatoria asociada al experimento es:

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega = roja, \\ 2, & \text{si } \omega = negra, \\ 3, & \text{si } \omega = blanca. \end{cases}$$

La función de probabilidad es

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{6}, & \text{si } x = 1, \\ \frac{1}{6}, & \text{si } x = 2, \\ \frac{2}{6}, & \text{si } x = 3, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El dominio de la v.a. X es $D_X = \{1, 2, 3\}$.

5.7 Propiedades de la función de probabilidad.

Propiedades básicas de la función de probabilidad

Sea X una v.a. discreta $X : \Omega :\to \mathbb{R}$ con dominio D_X. Su función de probabilidad P_X verifica las siguientes propiedades:

- $0 \leq P_X(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$,
- $\sum\limits_{x \in D_X} P_X(x) = 1.$

Ejemplo: urna con bolas

Lanzamos al aire tres veces, de forma independiente, una moneda perfecta. El espacio muestral de este experimento es

$$\Omega = \{ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++\}$$

(expresados en orden de aparición).

Este espacio tiene todos los sucesos elementales equiprobables.

Consideremos la variable aleatoria asociada a este experimento:

$$X = \text{ número de caras en los tres lanzamientos.}$$

Su función de probabilidad es:

$P(X=0)=P(\{+++\})=\frac{1}{8},$
$P(X=1)=P(\{c++,+c+,++c\})=\frac{3}{8},$
$P(X=2)=P(\{cc+,c+c,+cc\})=\frac{3}{8},$
$P(X=3)=P(\{ccc\})=\frac{1}{8}.$

Podemos reescribir la función de probabilidad de X de forma simplificada:

$$P_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}, & \text{si } x=0,3,\\ \frac{3}{8}, & \text{si } x=1,2,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Efectivamente los valores de la función de distribución suman 1:

$$\sum_{x=0}^{3} P_X(x)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1.$$

5.8 Función de distribución de variables aleatorias

Función de distribución de Probabilidad (acumuladada)

La función de *distribución de probabilidad* (acumulada) de la v.a. X (de cualquier tipo; discreta o continua) $F_X(x)$ representa la probabilidad de que X tome un menor o igual que x, es decir,

$$F_X(x)=P(X\leq x).$$

Esta función también se denomina función de **distribución de probabilidad o simplemente función de distribución** de una v.a., y en inglés *cumulative distribution function* por lo que se abrevia con el acrónimo `cdf`.

Propiedades de la Función de Distribución

Sea X una v.a. y F_X su función de distribución:

1. $P(X>x)=1-P(X\leq x)=1-F_X(x)$.
2. Sea a y b tales que $a<b$, $P(a<X\leq b)=P(X\leq b)-P(X\leq a)=F_X(b)-F_X(a)$.

Demostración:

Tenemos que el complementario de X mayor que x es: $\overline{\{X > x\}} = \{X > x\}^c = \{X \leq x\}$. Además,

$$P(X > x) = 1 - P(\overline{\{X > x\}}) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x),$$

lo que demuestra la primera propiedad.

Por otro lado, si X se encuentra entre dos valores a y b $\{a < X \leq b\} = \{X \leq b\} - \{X \leq a\}$. Ahora podemos hacer

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= P(\{X \leq b\} - \{X \leq a\}) \\ &= P(\{X \leq b\}) - P(\{X \leq a\}) \\ &= F_X(b) - F_X(a). \end{aligned}$$

Lo que finaliza la demistración de la propiedad.

Propiedades de la Función de Distribución

Sea F_X la función de distribución de una v.a. X entonces:

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$.
- La función F_X es no decreciente.
- La función F_X es continua por la derecha.
- Si denotamos por $F_X(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} F(x)$, entonces se cumple que $P(X < x_0) = F_X(x_0^-)$ y que $P(X = x_0) = F_X(x_0) - F_X(x_0^-)$.
- Se cumple que $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.
- Toda función F verificando las propiedades anteriores es función de distribución de alguna v.a. X.

Advertencia: Desigualdades estrictas

En las propiedades anteriores no se pueden cambiar en general las desigualdades de estrictas o no estrictas.

Veamos que propiedades tenemos cuando se cambian estas desigualdades.

Dada una F_X una función de distribución de la v.a. X y denotamos por

$$F_X(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} F_X(x),$$

,

entonces se cumplen las siguientes igualdades:

- $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-)$.
- $P(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$.
- $P(a \leq X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$.
- $P(X < a) = F_X(a^-)$,
- $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$.
- $P(X \geq a) = 1 - F_X(a^-)$.

Más propiedades de la función de distribución

- Si F_X es continua en x se tiene que $P(X = x) = 0$. Así que si la v.a. es continua $P(X \leq a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a)$ y propiedades similares.
- Sea X una variable aleatoria discreta que con dominio D_X y que tiene por función de probabilidad $P_X(x)$ entonces su función de distribución $F_X(x_0)$ es

$$F_X(x_0) = \sum_{x \leq x_0} P_X(x),$$

  donde $\sum\limits_{x \leq x_0}$ indica que sumamos todos los $x \in D_X$ tales que $x \leq x_0$.

Demostración:

Si X es continua,

$$P(X = a) = F(a) - F(a^-) = F(a) - F(a) = 0$$

por lo tanto

$$P(X \leq a) = P(X < a) + P(X = a) = P(X < a) + 0 = P(X < a),$$

lo que demuestra la primera propiedad.

Para demostrar la segunda basta hacer

$$F_X(x_0) = P(X \leq x_0) = P\left(\bigcup_{x \leq x_0; x \in D_X} \{x\}\right) = \sum_{x \leq x_0} P(X = x) = \sum_{x \leq x_0} P_X(x).$$

Lo que demuestra estas dos propiedades.

Ejemplo: dado (continuación)

En el experimento del dado se tiene que:

$$P_X(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{6}, & \text{si } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ 0, & \text{en el resto de casos.} \end{array} \right.$$

por lo tanto

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ \frac{1}{6}, & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ \frac{2}{6}, & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ \frac{3}{6}, & \text{si } 3 \leq x < 4, \\ \frac{4}{6}, & \text{si } 4 \leq x < 5, \\ \frac{5}{6}, & \text{si } 5 \leq x < 6, \\ 1, & \text{si } 6 \leq x. \end{cases}$$

Calculemos más detalladamente algún valor de F_X, por ejemplo:

$$\begin{aligned} F_X(3.5) &= P(X \leq 3.5) = P(\{X = 1\} \cup \{X = 2\} \cup \{X = 3\}) \\ &= P(\{X = 1\}) + P(\{X = 2\}) + P(\{X = 3\}) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

o de otra forma

$$F_X(3.5) = \sum_{x \leq 3.5} P_X(x) = \sum_{x=1}^{3} P(X = x) = \sum_{x=1}^{3} \frac{1}{6} = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Propiedades

Sea X una variable con función de distribución F_X entonces:

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$ para todo x,
- Si $x < x'$, entonces
$$F_X(x) \leq F_X(x').$$
  Es una función creciente,es decir, no necesariamente estrictamente creciente.
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
- Es continua por la derecha $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$.

5.9 Momentos de variables aleatorias discretas

Al igual que en la estadística descriptiva se utilizan distintas medidas para resumir los valores centrales y para medir la dispersión de una muestra, podemos definir las correspondiente medidas para variables aleatorias.

A estas medidas se les suele añadir el adjetivo **poblacionales** mientras que a las que provienen de la muestra se las adjetiva como **muestrales**.

Por ejemplo podemos buscar un valor que resuma toda la variable. Este valor es el que "*esperamos*" que se resuma la v.a. o esperamos que las realizaciones de la v.a. queden cerca de él. Demos su definición formal.

5.9.1 Esperanza de un variable aleatoria discreta

Esperanza de una variable aleatoria discreta

El valor **esperado o esperanza** (*expected value* en inglés) $E(X)$ de una v.a. discreta X, se define como

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P_X(x).$$

En ocasiones se denomina **media** (*mean* en inglés, *mitjana* en catalán) poblacional o simplemente media y muy frecuentemente se la denota $\mu_X = E(X)$ o simplemente $\mu = E(X)$.

Ejemplo: Intepretación de de la media

Ejemplo: lanzamiento de un dado n veces

Supongamos que lanzamos un dado n veces y obtenemos unas frecuencias absolutas n_i para el resultado i con $i = 1, \ldots, 6$. Sea X la v.a. que nos representa el valor de una tirada del dado.

Calculemos la media aritmética (o media muestral) de los datos

$$\overline{x} = \frac{1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + 3 \cdot n_3 + 4 \cdot n_4 + 5 \cdot n_5 + 6 \cdot n_6}{n} = \sum_{x=1}^{6} x \cdot \frac{n_x}{n}.$$

Si $n \to \infty$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n_x}{n} = P_X(x)$. Por lo tanto $E(X) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{x=1}^{6} x \cdot \dfrac{n_x}{n}$.

Entonces el valor esperado en una v.a. discreta puede entenderse como el valor promedio que tomaría una v.a. en un número grande de repeticiones.

Ejemplo: Erratas en un texto

Sea X= número de erratas en una página de un texto con dominio $D_X = \{0, 1, 2\}$.

Resulta que

$$\begin{aligned} P(X = 0) = 0.42,\ P(X = 1) = 0.4,\ P(X = 2) = 0.18,\ \text{por lo tanto,} \\ E(X) = 0 \cdot 0.42 + 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.18 = 0.76. \end{aligned}$$

Elegida una página del texto al azar esperamos encontrar 0.76 errores por página.

Supongamos que el editor nos paga 2 euros por cada página que encontremos con 1 error y 3 euros por cada página con dos errores (y nada por las páginas correctas) ¿Cuánto *esperamos* cobrar si analizamos una página?

Propiedad: Esperanzas de funciones de variables aleatorias discretas

Sea X una v.a. discreta con función de probabilidad P_X y de distribución F_X. Entonces el *valor esperado de una función* $g(x)$ es:

$$E(g(X)) = \sum_{x} g(x) \cdot P_X(x).$$

Propiedades

- $E(k) = k$ para cualquier constante k.
- Si $a \leq X \leq b$ entonces $a \leq E(X) \leq b$.
- Si X es una v.a. discreta que toma valores enteros no negativos entonces $E(X) = \sum_{x=0}^{+\infty}(1 - F_X(x))$.

La demostración de las propiedades anteriores se deja como ejercicio.

Ejemplo: paleta de colores aleatoria

Supongamos que estamos sentados delante de nuestro ordenador con un amigo y le decimos que en dos minutos podemos programar una paleta para poner colores a unos gráficos.

Queremos que la paleta tenga dos botones con las opciones color rojo y color azul. Como hemos programado a gran velocidad resulta que el programa tiene un error; cada vez que se abre la paleta los colores se colocan al azar (con igual probabilidad) en cada botón, así que no sabemos en qué color hemos de pinchar.

Además, como nos sobraron 15 segundos para hacer el programa y pensando en la comodidad del usuario, la paleta se cierra después de haber seleccionado un color y hay que volverla a abrir de nuevo.

La pregunta es ¿cuál es el valor esperado del número de veces que hemos pinchar el botón de color azul antes de obtener este color?

Llamemos X al número de veces que pinchamos en el botón azul (y nos sale rojo) hasta obtener el primer azul. La variable X toma valores en los enteros no negativos. Su función de probabilidad queda determinada por

$$P_X(x) = P(X = x) = P(\overbrace{rojo, rojo, \ldots, rojo}^{x \text{ veces}}, azul) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}.$$

:::::

5.10 Series geométricas

Series geométricas

- Una **progresión geométrica** de razón r es una sucesión de la forma

$$r^0, r^1, \ldots, r^n, \ldots.$$

- La serie geométrica es la suma de todos los valores de la progresión geométrica $\sum_{k=0}^{+\infty} r^k$.
- Las sumas parciales desde el término n_0 al n de una progresión geométrica valen

$$\sum_{k=n_0}^{n} r^k = \frac{r^{n_0} - r^n r}{1-r}.$$

Propiedades

- Si $|r| < 1$ la serie geométrica es convergente y

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$$

.

- En el caso en que se comience en n_0 se tiene que

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} r^k = \frac{r^{n_0}}{1-r}.$$

- Si $|r| < 1$ también son convergentes las derivadas, respecto de r, de la serie geométrica y convergen a la derivada correspondiente. Así tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{+\infty} r^k\right)' &= \textstyle\sum_{k=1}^{+\infty} k r^{k-1}; \qquad \left(\frac{1}{1-r}\right)' = \frac{1}{(1-r)^2} \\
\left(\sum_{k=0}^{+\infty} r^k\right)'' &= \textstyle\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) r^{k-2}; \qquad \left(\frac{1}{1-r}\right)'' = \frac{2}{(1-r)^3}
\end{aligned}$$

.

Ejemplo: paleta de colores (continuación)

Si seguimos con el ejemplo de la paleta de colores, su esperanza es:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{+\infty} x \cdot P(X = x) = \sum_{x=0}^{+\infty} x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{x=1}^{+\infty} x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 1.$$

Ahora calculemos su función de distribución

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} P(X = k) = \sum_{k=0}^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}^{x+1} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}.$$

Como la variable toma valores enteros positivos, podemos calcular su valor esperado de esta otra manera

$$E(X) = \sum_{x=0}^{+\infty} (1 - F_X(x)) = \sum_{x=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Calculad el valor esperado de la variable

$$Y = \text{número de intentos para conseguir el color azul.}$$

5.11 Momentos de una variable aleatoria. Varianza

Definición: Momentos de orden m

Llamaremos **momento de orden** m respecto al punto C a

$$E\left((X - C)^m\right).$$

- Cuando $C = 0$ los momentos reciben el nombre de **momentos respecto al origen**.
- Cuando $C = E(X)$ reciben el nombre de **momentos centrales o respecto de la media**. Luego la esperanza es el momento de orden 1 respecto al origen. Estos momentos son la versión poblacional de los momentos que vimos en el curso de estadística descriptiva, recibiendo estos último el nombre de momentos muestrales.

Resumen de conceptos:

- Hemos descrito el comportamiento aleatorio de una v.a. discreta mediante sus funciones de probabilidad P_X y de distribución F_X.
- También tenemos un valor central; el valor esperado $E(X)$.
- Como medida básica nos queda definir una medida de lo lejos que están los datos del valor central $E(X)$ una de estas medidas es la varianza de X.

5.12 Medidas de la variabilidad

Definición: Varianza

Sea X una v.a. Llamaremos **varianza** de X a

$$Var(X) = E((X - E(X))^2).$$

Por lo tanto, la varianza es el momento central de orden 2.

De forma frecuente se utiliza la notación

$$\sigma_X^2 = Var(X).$$

A la raíz cuadrada positiva de la varianza

$$\sigma_X = +\sqrt{Var(X)}.$$

se la denomina desviación típica o estándar de X.

> Propiedad

- Si X es una v.a. discreta con función de probabilidad P_X su varianza es

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_x (x - E(X))^2 \cdot P_X(x).$$

- Sea X una v.a.

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_x x^2 \cdot P_X(X) - (E(X))^2$$

Demostración

Demostración de b)

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_x (x - E(X))^2 P_X(x) = \sum_x (x^2 - 2 \cdot x \cdot E(X) + (E(X)^2) \cdot P_X(x) \\
&= \sum_x x^2 \cdot P_X(x) - E(X) \sum_x 2 \cdot x \cdot P_X(x) + (E(X)^2) \cdot \sum_x P_X(x) \\
&= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2.
\end{aligned}$$

Se deja como ejercicio la primera afirmación.

Ejemplo: número de errores (continuación)

Calculemos en el ejemplo del contero de errores la varianza de estos.

Recordemos que:

$$P(X=0)=0.42, \quad P(X=1)=0.4, \quad P(X=2)=0.18,$$

y que

$$E(X)=0.76.$$

Entonces:

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=E(X^2)-(0.76)^2.$$

Ahora necesitamos calcular

$$E(X^2)=0^2(0.41)+1^2(0.4)+2^2(0.18)=0.4+0.72=1.12$$

y por lo tanto

$$Var(X)=E(X^2)-(0.76)^2=1.12-0.5776=0.542$$

y

$$\sqrt{Var(X)}=\sqrt{0.542}$$

En resumen $\sigma_X^2=0.542$ y $\sigma_X=\sqrt{0.542}$

5.13 Propiedades de la varianza

Propiedades de la varianza

- $Var(X)\geq 0$.
- $Var(cte)=E(cte^2)-(E(cte))^2=cte^2-cte^2=0$.
- El mínimo de $E((X-C)^2)$ se alcanza cuando $C=E(X)$ y es $Var(X)$. Esta propiedad es una de las que hace útil a la varianza como medida de dispersión.

Ejercicio

Se deja como ejercicio la demostración de estas propiedades.

5.14 se la denomina desviación t

Transformación lineal

Un **cambio de variable lineal** o **transformación lineal** de una v.a. X es otra v.a. $Y = a + b \cdot X$ donde $a, b \in \mathbb{R}$.

EPorpiedad: Esperanza de una trnaformación lineal

Sea X una v.a. con $E(X) = \mu_X$ y $Var(X) = \sigma_X^2$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces si $Y = a + b \cdot X$:

- $E(Y) = E(a + bX) = a + bE(X) = a + b \cdot \mu_X$.
- $Var(Y) = Var(a + bX) = b^2 Var(X) = b^2 \cdot \sigma_X^2$-
- $\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{b^2 Var(X)} = |b| \cdot \sigma_X$-

Demostración:

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= E(a + bX) = \sum_x (a + b \cdot x) \cdot P_X(x) \\
&= a \sum_x P_X(x) + b \sum_x x \cdot P_X(x) \\
&= a + b \cdot E(X) = a + b \cdot \mu_X.
\end{aligned}
$$

Lo que demuestra esta propiedad, las emás se dejan comom ejercicio.

5.15 Variables aleatorias continuas.

Como ya hemos dicho las variables aleatorias continuas toman valores en intervalos o áreas.

Lo más habitual es que estas variables tengan función de distribución continua y derivable (salvo a los más en una cantidad finita o numerable de puntos:-)).

En lo que sigue supondremos que la función de distribución de variables aleatorias continuas cumplen estas propiedades.

Notemos que si X es una v.a. con función de distribución continua se tiene que $P(X = x_0) = F_X(x_0) - F(x_0^-) = 0$. Por lo que no tiene sentido definir *función de probabilidad*.

En general tendremos que $P(X < x_0) = P(X \leq x_0)$.

Por otra parte podemos utilizar una regla parecida del cociente entre casos favorables y casos posibles de Laplace pero en este caso el conteo se hace por la *medida* de los casos posibles partida por la *medida* de los casos favorables.

Veamos un ejemplo de v.a. continua, que ampliaremos en el tema siguiente, en el que se utilizan todos estos conceptos.

Ejemplo: Distribución uniforme en $[0,1]$

Ejemplo: distancia dardo centro de la diana

Supongamos que lanzamos un dardo a una diana de radio 1, de forma que sea *equiprobable* cualquier distancia al centro (¡Cuidado! esto no es equivalente que cualquier punto de la diana sea *equiprobable*).

Consideremos la v.a. continua $X =$ distancia al centro de la diana.

Su función de distribución es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ x, & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

consideremos

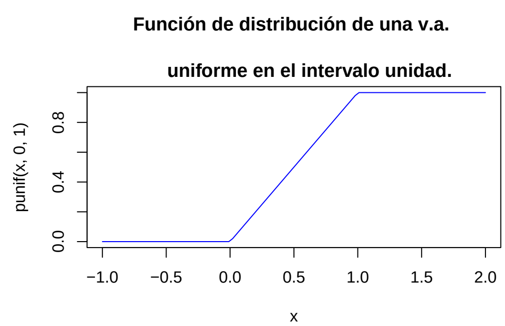
- C.F. *longitud favorable* que es $x - 0$,
- C.P. *longitud posible* que es $1 - 0$,

luego

$$P(X \leq x) = \frac{C.F.}{C.P.} = \frac{x-0}{1-0} = x.$$

el siguente código grafica la función de distribución uniforme

```
curve(punif(x,0,1),xlim=c(-1,2),col="blue",
      main="Función de distribución de una v.a. \n
      uniforme en el intervalo unidad.")
```



Propiedades

En las variables continuas los sucesos del tipo $\{X \leq x\}$ y $\{X < x\}$ tendrán la misma probabilidad. Otras identidades similares son :

- $P(X \leq b) = P(X < b)$.
- $P(X < b) = P(X < a) + P(a < X < b)$.
- $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X < a)$.

Demostración:

Algunas identidades son evidentes $P(X \leq b) = P(X < b) + P(X = b) = P(X < b)$.

Para otras, como la siguiente, podemos hacer

$$\{X \leq a\} \cap \{a < X < b\} = \emptyset$$
$$\{X \leq a\} \cup \{a < X < b\} = \{X < b\},$$

entonces

$P(X < b) = P(\{X \leq a\} \cup \{a < X < b\}) = P(X \leq a) + P(a < X < b) = P(X < a) + P(a < X < b)$.

La demostración de las otras propiedades las dejamos como ejercicio.

Propiedades de la Función de Distribución

Las propiedades anteriores y combinaciones de ellas se pueden escribir utilizando la función de distribución de X:

Dada una variable aleatoria continua se tiene que:

- $F_X(b) = F_X(a) + P(a < X < b)$.
- $P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a)$.
- $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Se deja la demostración como ejercicio.

Ejemplo Ejemplo

Ejemplo: diana (continuación)

En el ejemplo de la diana:

$$P(0.25 < X < 0.3) = F_X(0.3) - F_X(0.25) = 0.3 - 0.25 = 0.05.$$

Definición: Función de densidad

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de densidad sobre $\mathbb{R}$ si cumple que

- $f_X(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- f es continua salvo a lo más en una cantidad finita de puntos sobre cada intervalo acotado de $\mathbb{R}$.
- $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$.

Propiedad: relación entre la función de distribcuión y la densidad

Sea X una v.a. con función de distribución F_X. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de densidad tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt. \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

Entonces X es una variable aleatoria continua y f_X es la densidad de la v.a. X.

Además el los valores de F_X son continuos y derivables en los puntos donde f_X es continua y la derivada de la función de distribución es una densidad $F'_x(x) = f_X(x)$.

Definición: Dominio de una variable aleatoria continua

El conjunto $D_X = \{x \in \mathbb{R} | f_x(x) > 0\}$ recibe el nombre de soporte o dominio de la variable aleatoria continua y se interpreta como su conjunto de resultados posibles.

Ejemplo: diana (continuación)

En nuestra ejemplo de la diana, la función f es una densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ 1, & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{si } 1 \leq x. \end{cases}$$

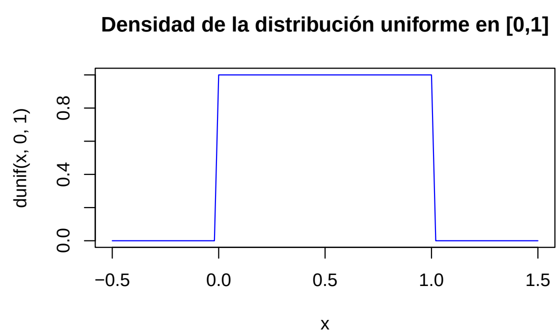
que es la densidad de X, en efecto:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ 1, & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{si } 1 \leq x. \end{cases}$$

- Si $x \leq 0$ entonces $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = 0$.
- Si $0 \leq x \leq 1$ entonces $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{0}^{x} 1dt = x$.
- Si $x \geq 1$ entonces $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{0}^{1} 1dt = 1$.

Por lo tanto, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

```r
curve(dunif(x,0,1),xlim=c(-0.5,1.5),col="blue",
      main="Densidad de la distribución uniforme en [0,1]")
```



Propiedades

La función de densidad nos permite calcular diversas probabilidades.

Propiedades de la función de densidad

- Sea X una v.a. continua con función de distribución F_X y de densidad f_X, entonces

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = \\ & P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx. \end{aligned}$$

- Si A es un subconjunto adecuado de $\mathbb{R}$ entonces

$$P(X \in A) = \int_A f(x)dx = \int_{A \cap D_X} f(x)dx.$$

Propiedades de la función de densidad

Sea X una v.a. continua con función de distribución F_X y de densidad f_X, entonces:

- Si f_x es continua en un punto x, F_X es derivable en ese punto y $F_X'(x) = f_X(x)$.
- $P(X = x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio

Comprobar estas propiedades en el ejemplo de la diana.

Ejemplo tiempo ejecución de un proceso

Sea X = tiempo de ejecución de un proceso. Se supone que X sigue una distribución uniforme en dos unidades de tiempo, si tarda más el proceso se cancela.

Calculemos la función de densidad y de distribución de la v.a X.

Entonces

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{CF}{CP} = \frac{x}{2}.$$

Luego su función de distribución es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x}{2} & \text{si } 0 < x < 2, \\ 1, & \text{si } 2 \leq x. \end{cases}$$

Su función de densidad por su lado es:

$$f_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

Efectivamente

- $f_X(x) \geq 0$, y tiene un conjunto finito de discontinuidades: en 0 y en 2
- $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$, para todo $x \in \mathbb{R}$ (Ejercicio: resolverlo gráficamente.)
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{2}dx = \left[\frac{x}{2}\right]_0^2 = \frac{2}{2} - \frac{0}{2} = 1.$

Ejercicio: Tiempo de un proceso

Calcular la probabilidad de que uno de nuestros procesos tarde más de una unidad de tiempo en ser procesado. Calcular también la probabilidad de que dure entre 0.5 y 1.5 unidades de tiempo.

5.16 Esperanza y varianza para variables aleatorias continuas

Algunas de estas propiedades ya han sido estudiadas en el caso de variables aleatorias discretas. Por ello, en esta sección nos centraremos en presentar sus definiciones, métodos de cálculo y algunos ejemplos en el contexto continuo.

A partir de ahora, salvo indicación en contrario, consideraremos que X es una variable aleatoria continua con función de densidad $f_X(x)$

Definición: Esperanza y Varianza v.a. continuas

- Su esperanza es:
$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx.$$
- Si $g(x)$ es una función de la variable X entonces:
$$E(g(X)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)dx.$$
- **Varianza**
$$\sigma_X^2 = E((X-\mu_X)^2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 \cdot f_X(x)dx.$$
- Su desviación típica es:
$$\sigma_X = +\sqrt{\sigma_X^2}.$$

Propiedades

- $\sigma_X^2 \geq 0$.
- $Var(cte) = E(cte^2) - (E(cte))^2 = cte^2 - cte^2 = 0$.
- $Var(x) = E(X^2) - \mu_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)dx - \mu_X^2$.
- El mínimo de $E((X-C)^2)$ se alcanza cuando $C = E(X)$ y es $Var(X)$.

Ejemplo: diana (continuación)

$$\mu_X = \int_0^1 xdx = \left[\frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$
$$E(X^2) = \int_0^1 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}.$$

Podemos comprobar que con la definición directa el resultado es el mismo

$$Var(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot\left(\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 - \left(0 - \frac{1}{2}\right)^3\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - \left(\right.\right.$$

5.17 Esperanza de transformaciones lineales de v.a. continuas

Propiedad

Sea X una v.a. continua con $E(X) = \mu_X$ y $Var(X) = \sigma_X^2$ sea $Y = a + bX$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, es una nueva v.a. continua obtenida mediante una transformación lineal de X. Se verifican las mismas propiedades que en el caso discreto:

- $E(Y) = E(a + b \cdot X) = a + b \cdot E(X)$.
- $Var(Y) = Var(a + b \cdot X) = b^2 \cdot Var(X)$.
- $\sigma_Y = |b| \cdot \sigma_X$.
- $Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$ es una transformación lineal de X de forma que

$$E(Z) = 0 \text{ y } Var(Z) = 1$$

Ejemplo

En una empresa de venta de vinos por internet, sea X = número de litros de vino del país vendidos en un año. Supongamos que sabemos que $E(X) = 10000$ y que $Var(X) = 100$. Supongamos que los gastos fijos de distribución son 50.000 € y el beneficio por litro es de 10 € por botella. Definimos $T = 10 \cdot X - 50000$, que será el beneficio después de gastos.

Entonces la esperanza del beneficio es

$$E(T) = 10E(X) - 50000 = 50000,$$

y

$$Var(T) = 10^2 Var(X) = 10000.$$

5.18 Transformaciones de variables aleatorias

Muchas variables aleatorias son funciones de otras v.a. En lo que sigue resumiremos diversas técnicas para dada una v.a. X y una transformación $Y = h(X)$ encontrar F_Y a partir de F_X.

Propiedad: Transformaciones de v.a. discretas

Sea X una v.a. discreta con $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, ..\}$ y sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación. Entonces $Y = h(X)$ es también una v.a. discreta. Además si P_X y F_X son las funciones de probabilidad y de distribución de X entonces

- $P_Y(y) = \displaystyle\sum_{x_i | h(x_i) = y} P_X(x_i).$
- $F_Y(y) = \displaystyle\sum_{x_i | h(x_i) \leq y} P_X(x_i).$

Desafortunadamente para variables no discretas el resultado no es tan sencillo como el anterior, pues la transformación de, por ejemplo, una v.a. continua puede ser continua, discreta, mixta,...

Propiedad: Transformación de v.a. continuas en continuas**

Sea X una v.a. continua cuya función de densidad es f_X. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una aplicación estrictamente monótona y derivable, por lo tanto $h'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $Y = h(X)$ la transformación de X por h. Entonces Y es una v.a. continua con función de densidad

$$f_Y(y) = \left. \frac{f_X(x)}{|h'(x)|} \right|_{x = h^{-1}(y)}$$

Densidad de una transformación de una v.a. continua

Sea X una v.a. continua cuya función de densidad es f_X. Sea

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

una aplicación, no necesariamente monótona tal que :

- sea derivable con derivada no nula
- la ecuación $h(x) = y$ tiene un número finito de soluciones $x_1, x_2, .., x_n$

entonces:

$$f_Y(y) = \sum_{k=1}^{n} \left. \frac{f_X(x)}{|h'(x)|} \right|_{x = x_k}.$$

5.19 Método general de transformación de v.a.

Cuando no podamos aplicar las propiedades anteriores intentaremos calcular primero la función de distribución de la transformación y luego su densidad.

Notemos que en general si $Y = g(X)$ es una v.a. transformación de la v.a. X entonces

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y).$$

Por ejemplo, si g es estrictamente creciente y continua,

$$F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)),$$

y si g es estrictamente decreciente y continua,

$$F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y)).$$

5.20 Desigualdades de Markov y de Chebychev

En esta sección distintas desigualdades que acotan determinadas probabilidades de una variable aleatoria.

Estas desigualdades sirven en algunos casos para acotar probabilidades de determinados sucesos.

También son útiles desde el punto de vista teórico, por ejemplo para justificar que la varianza es una medida de la dispersión de los datos.

5.20.1 Desigualdad de Markov

Propiedad: Desigualdad de Markov

Sea X una v.a. positiva con $E(X)$ finita. Entonces

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \text{ para todo } a > 0.$$

Demostración:

Si X es continua y solo toma valores positivos

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_X(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x\cdot f_X(x)dx = \int_{0}^{a} x\cdot f_X(x)dx + \int_{a}^{+\infty} x\cdot f_X(x)dx \\
&\geq \int_{a}^{+\infty} x\cdot f_X(x)dx \geq a\int_{a}^{+\infty} f_X(x)dx = a\cdot P(X\geq a),
\end{aligned}
$$

de donde se sigue que

$$P(X\geq a)\leq \frac{E(X)}{a}.$$

5.20.2 Desigualdad de Markov

Sea X una v.a. con $E(X)$ finita entonces para todo $a>0$

$$P(|X|\geq a)\leq \frac{E(|X|)}{a}.$$

Ejercicio

Demuestra el corolario anterior a partir de la desigualdad de Markov.

5.21 Desigualdad de Chebychev

Propiedad: Desigualdad de Chebychev

La **desigualdad de Chebychev** también se denomina de Chebyshov y en inglés *Chebyshev*.

Desigualdad de Chebychev

Sea X una v.a.con $E(X)=\mu$ y $Var(X)=\sigma^2$ entonces para todo $a>0$,

$$P(|X-\mu|\geq a)\leq \frac{\sigma^2}{a^2}.$$

Demostración

Apliquemos la consecuencia de la desigualdad de Markov a la v.a. no negativa

$$Y^2=(X-\mu)^2$$

entonces

$$P(Y^2 \geq a^2) \leq \frac{E(Y^2)}{a^2} = \frac{E((X-\mu)^2)}{a^2} = \frac{Var(X)}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a^2}.$$

Por otra parte

$$P(Y^2 \geq a^2) = P(|Y| \geq a) = P(|X-\mu| \geq a),$$

hecho que, junto con la desigualdad anterior, demuestra el resultado.

5.21.1 Uso de la desigualdad de Chebychev

Utilidad básica de la desigualdad de Chebychev

Supongamos que X es una v.a. con $Var(X) = 0$, entonces, aplicando la desigualdad anterior

$$P(|X - E(X)| \geq a) = 0 \text{ para todo } a > 0,$$

lo que implica que

$$P(X = E(X)) = 1,$$

Por lo que la probabilidad de que X sea constantemente $E(X)$ es 1, hecho que nos confirma la utilidad de la varianza como una medida de la dispersión de los datos.

Ejemplo: tiempo de respuesta

Se sabe que el tiempo de respuesta medio y la desviación típica de un sistema multiusuario son 15 y 3 unidades de tiempo respectivamente. Entonces:

$$P(|X - 15| \geq 5) \leq \frac{9}{25} = 0.36.$$

Si substituimos a por $a \cdot \sigma$ en la desigualdad de Chebychev, nos queda:

$$P(|X-\mu| \geq a \cdot \sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(a \cdot \sigma)^2} = \frac{1}{a^2},$$

que es otra manera de expresar la desigualdad de Chebychev.

k	$P(\|X-E(X)\| \geq k\cdot\sigma)$
1	≤ 1
2	≤ 0.25
3	≤ 0.111
4	≤ 0.0025

5.22 Más formas de la desgualdad de Chebychev

La desigualdad de Chebychev también se puede escribir de al menos dos maneras más:

$$P(\mu - a \leq X \leq \mu + a) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{a^2},$$

y tomado como $a = k\cdot\sigma$,

$$P(\mu - k\cdot\sigma \leq X \leq \mu + k\cdot\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

5.22.1 La varianza como medida de dispersión

Tomando la segunda expresión que hemos visto para la desigualdad de Chebychev para distintos valores de $k > 0$ obtenemos la siguiente tabla:

Por ejemplo para $k = 2$, esta desigualdad se puede interpretar como que, dada una v.a. X con cualquier distribución que tenga $E(X)$ y $Var(X)$ finitos, *la probabilidad de que un valor se aleje de la media* μ más de $a = 2$ desviaciones típicas es menor o igual que 0.25.

Es decir sólo el 25% de los valores estarán alejados de la media más de $2\cdot\sigma$ ¡*Sea cual sea la distribución de la v.a.*!

6 Distribuciones notables 1

7 Distribuciones notables 2