

Variables aleatorias

Laboratorio de software y problemas 2. 2021-2022

Contents

1 Variables aleatorias continuas	1
1.1 Problema 1.	1
1.1.1 Solución	1
1.2 Problema 2.	2
1.2.1 Solución	2
1.3 Problema 3.	2
1.3.1 Solución	2
1.4 Problema 4.	2
1.4.1 Solución	3
1.5 Problema 5.	5
1.5.1 Solución	5

1 Variables aleatorias continuas

1.1 Problema 1.

Verificar que:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < -1, \\ \frac{t+1}{2}, & \text{si } -1 \leq t \leq 1, \\ 1, & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

es una función de distribución y hallar la función de densidad para X . Calcular también $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$.

1.1.1 Solución

La función de densidad de variables aleatorias continuas se puede obtener derivando la función de distribución respecto de la variable t :

$$f_X(t) = (F_X(t))' = \begin{cases} 0, & \text{si } t < -1, \\ (\frac{t+1}{2})' = \frac{1}{2}, & \text{si } -1 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{si } t > 1, \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } -1 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

1.2 Problema 2.

Sea Y una variable continua con función de densidad:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y), & \text{si } 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

Hallar la función de distribución $F_Y(t)$.

1.2.1 Solución

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \int_{-\infty}^t f_Y(y) \cdot dy \\ &= \begin{cases} \int_{-\infty}^t 0 \cdot dy = 0 & \text{si } t < 0 \\ \int_0^t 2 \cdot (1-y) = [2 \cdot y - y^2]_{y=0}^{y=t} = t - t^2, & \text{si } 0 < y < 1, \\ 1, & \text{en los otros casos.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t - t^2, & \text{si } 0 < y < 1, \\ 1, & \text{en los otros casos.} \end{cases} \end{aligned}$$

1.3 Problema 3.

Verificar que:

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0, \\ \sqrt{t}, & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

es una función de distribución y especificar la función de densidad para Y . Usar este resultado para hallar $P\left(-\frac{1}{2} < Y < \frac{3}{4}\right)$.

1.3.1 Solución

Evidentemente $F_Y(t) > 0$ para todo t y $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_Y(t) = 0$ y

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F_Y(t) = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} \cdot dt = \left[\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_{t=0}^{t=1} = 1 - 0 = 1.$$

La probabilidad que nos piden es

$$P\left(-\frac{1}{2} < Y < \frac{3}{4}\right) = F_Y\left(\frac{3}{4}\right) - F_Y\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} - 0 = \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{0.75}.$$

1.4 Problema 4.

Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

1. Representar gráficamente dicha función.
2. Hallar y dibujar la función de distribución.
3. Calcular las siguientes probabilidades: $P(X \geq 0)$ y $P(|X| < \frac{1}{2})$.

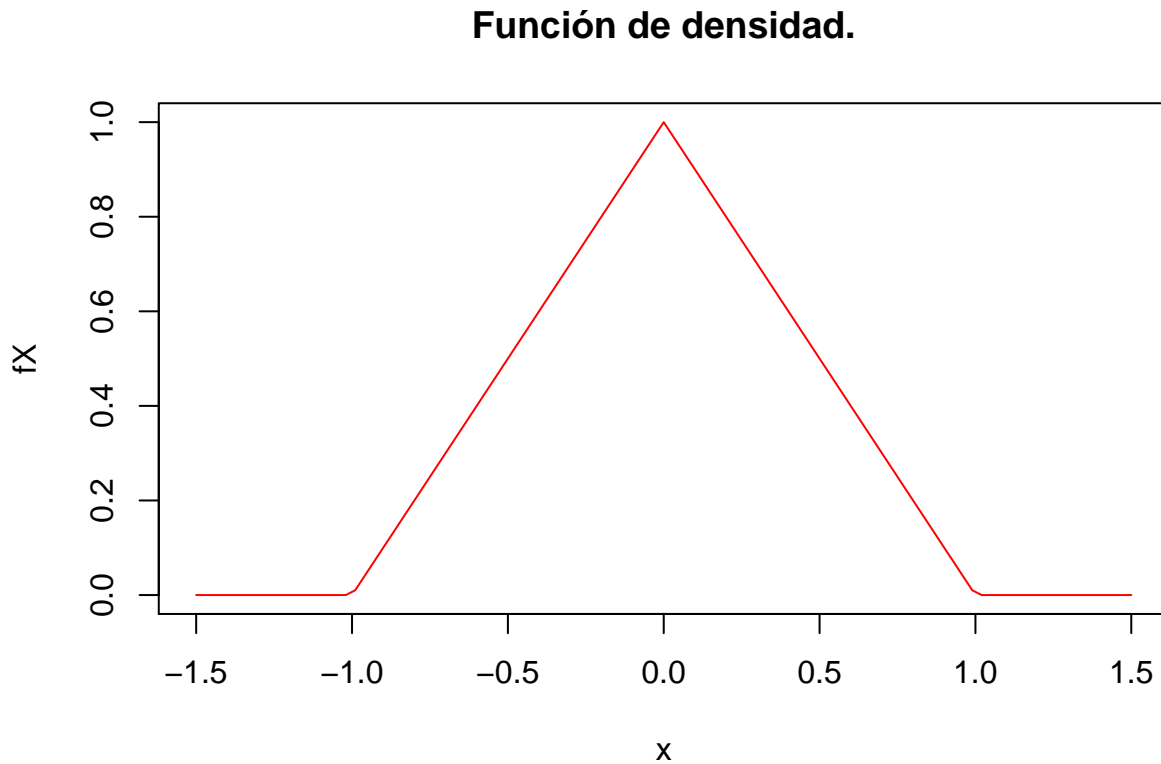
1.4.1 Solución

La representaremos con R

```
fX=function(x){sapply(x,
  FUN=function(x){if(abs(x)<=1){1-abs(x)}
  else {0}})
fX(c(-1,-1/2,0,1/2,1))
```

```
## [1] 0.0 0.5 1.0 0.5 0.0
```

```
curve(fX,from=-1.5,to=1.5,col="red",ylab="fX",xlab="x",main="Función de densidad.")
```



para calcular la función de distribución hacemos

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t) \cdot dy \\
&= \begin{cases} \int_{-\infty}^x 0 \cdot dy = 0 & \text{si } x < -1 \\ \int_{-1}^x 1 - |t| \cdot dt = \int_{-1}^x 1 + t \cdot dt = \left[t + \frac{t^2}{2} \right]_{t=-1}^{t=x} = & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \int_{-1}^x (1 - |t|) \cdot dt = \int_{-1}^0 (1 + t) \cdot dt + \int_0^x (1 - t) \cdot dt = \frac{1}{2} + \left[t - \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=x}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \left(x + \frac{x^2}{2} \right) - \left(-1 + \frac{(-1)^2}{2} \right) = \left(x + \frac{x^2}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{x^2 + 2 \cdot x + 1}{2} = \frac{(x+1)^2}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + \left[\left(x - \frac{x^2}{2} \right) - 0 \right] = \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{(x+1)^2}{2}, & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{(1-x)^2}{2}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Su gráfica es

```

FX=function(x){sapply(x,
  FUN=function(x){
    ifelse(x<=-1,0,ifelse(x>=1,1,ifelse(x<0 & x>-1, (x+1)^2/2, 1/2+x-x^2/2)))
  })
}

```

```

FX(c(-20,-1,-1/2,0,1/2,1,20))

```

```

## [1] 0.000 0.000 0.125 0.500 0.875 1.000 1.000

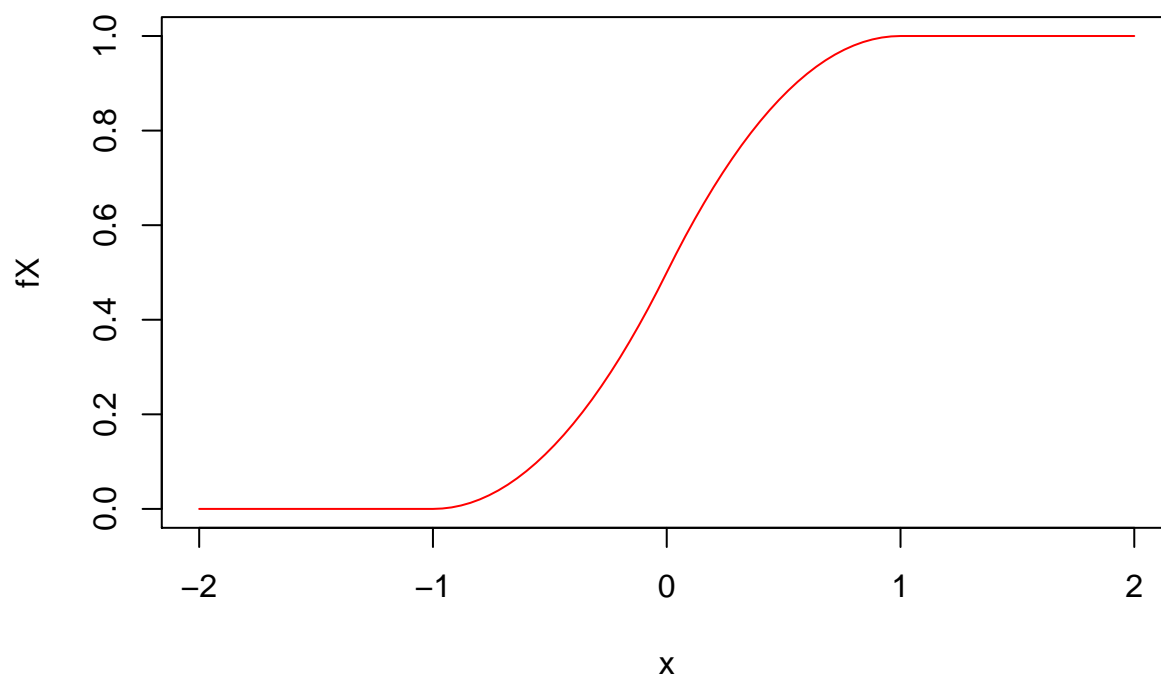
```

```

curve(FX,from=-2,to=2,col="red",ylab="fX",xlab="x",main="Función de densidad.")

```

Función de densidad.



1.5 Problema 5.

Hallar la esperanza y la varianza de las variables de los ejercicios anteriores.

1.5.1 Solución

Estas integrales se dejan como ejercicio.