# Tema 4 - Variables aleatorias continuas multidimensionales

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

# Variables aleatorias bidimensionales continuas

# Variables aleatorias bidimensionales continuas
# Introducción

DEFINICIÓN DE VARIABLE ALEATORIA BIDIMENSIONAL CONTINUA.

Recordemos que una v.a. bidimensional **continua** cuando su conjunto de valores en $\mathbb{R}^2$, $(X, Y)(\Omega)$ es un producto de intervalos.

DEFINICIÓN FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN CONJUNTA

La función de distribución acumulada conjunto o simplemente distribución conjunta se define como

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

# Función de distribución acumulada, función de densidad

### Definición función de densidad conjunta

Sea $f_{XY}: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto [0, +\infty)$ diremos que es una densidad bidimensional del vector aleatorio bidimensional $(X, Y)$ si

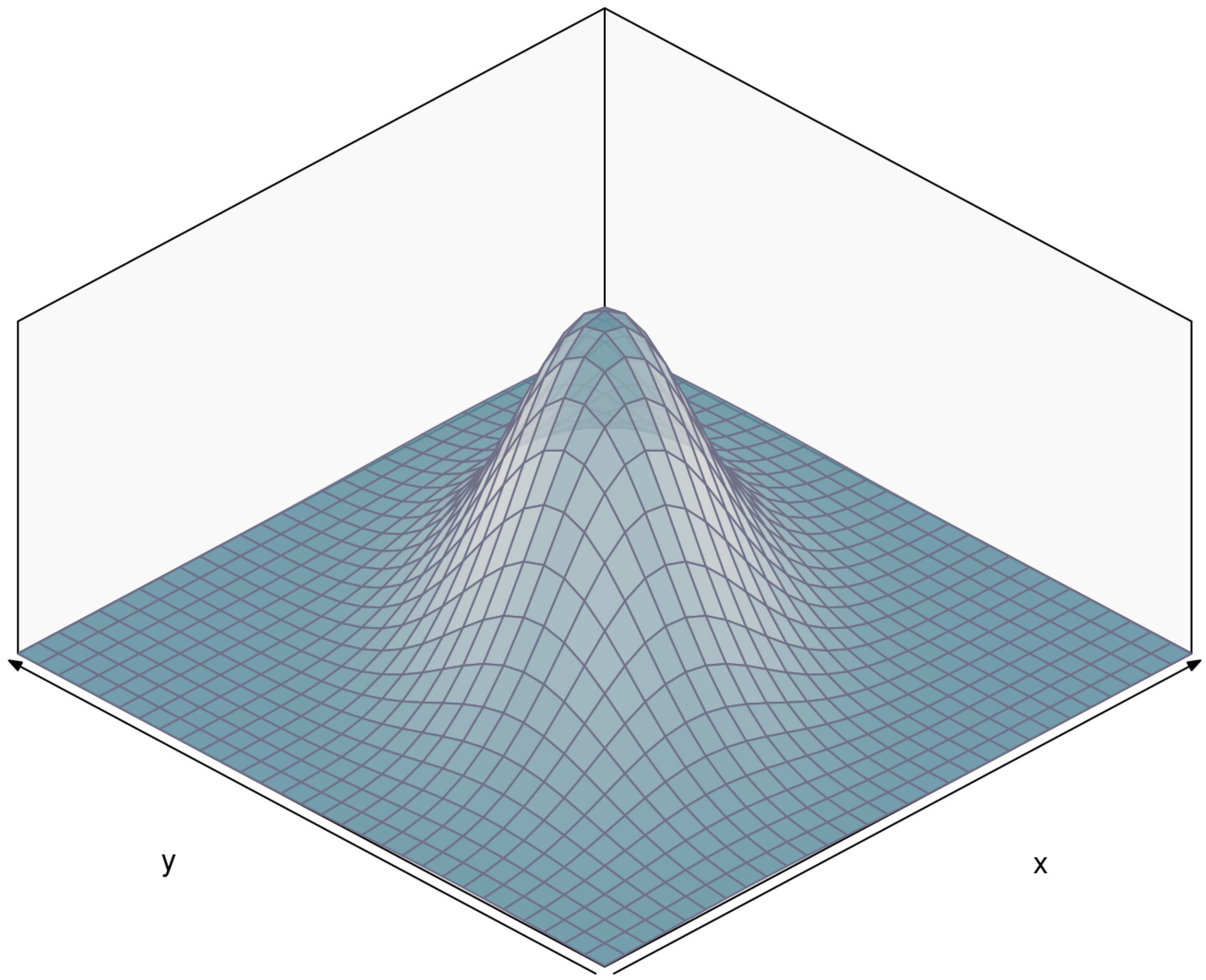
$$F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(t_x, t_y) dt_x dt_y.$$

Llamaremos dominio de la variable conjunta a

$$D_{XY} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f_{XY}(x, y) > 0\}.$$

Es decir es el conjunto de valores posibles que toma la v.a. $(X, Y)$.

# Gráfica de una función de densidad




## Gráfica

```
library(tidyverse)
```

# Propiedades de la función de densidad conjunta

Sea $(X, Y)$ una **variable aleatoria bidimensional continua** con dominio $D_{XY} \subset \mathbb{R}^2$.

Su **función de densidad conjunta** verifica las siguientes propiedades:

- $$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) \quad dxdy = 1.$$

- Sea $B$ un subconjunto cualquiera del dominio $D_{XY}$. El valor de la probabilidad $P((X, Y) \in B)$ se puede calcular de la forma siguiente:

$$P((X, Y) \in B) = \int\int_B f_{XY}(x, y) \quad dxdy.$$

Es decir, la probabilidad de que la variable bidimensional tome valores en $B$ es igual al volumen que genera la densidad conjunta sobre el recinto $B$.

# Distribuciones marginales

# Variables aleatorias marginales y su distribución

Consideremos una variable aleatoria **bidimensional continua** $(X,Y)$ con **función de densidad conjunta** $f_{XY}(x,y)$ y con dominio $D_{XY}$.

La de la **función de densidad conjunta** contiene suficiente información para obtener las **funciones de densidad** de las variables $X$ e $Y$.

Dichas variables $X$ e $Y$ se denominan **variables marginales** y sus correspondientes **funciones de densidad**, **funciones de densidad marginales** $f_X$ de la variable $X$ con dominio$D_X$ y $f_Y$ de la variable $Y$ con dominio $D_Y$.

Veamos cómo obtener $f_X$ y $f_Y$ a partir de la densidad conjunta $f_{XY}$.

# Funciones de probabilidad marginales

PROPOSICIÓN. CÁLCULO DE LAS FUNCIONES DE DENSIDAD MARGINALES.

Sea $(X, Y)$ una variable aleatoria **bidimensional continua** con **función de densidad conjunta** $f_{XY}(x, y)$, con $(x, y) \in D_{XY}$.

Las **funciones de densidad marginales** $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ se calculan usando las expresiones siguientes:

- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) \quad dy.$
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) \quad dx.$

# Independencia de variables aleatorias continuas

Recordemos que dos sucesos $A$ y $B$ son independientes si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

¿Cómo trasladar dicho concepto al caso de variables aleatorias continuas?

Dada una variable aleatoria bidimensional continua $(X, Y)$ con dominio $D_{XY}$

Así que al menos todos los sucesos de la forma $P\left(X \leq x,\ Y \leq y\right)$ deberán ser independientes.

Esto implicará que cualesquiera dos sucesos de cada variables con independientes.

# Independencia de variables aleatorias continuas

## Condiciones para independencia de variables aleatorias bidimensionales continuas

Dada $(X, Y)$ una **variable aleatoria bidimensional continua** con **función de densidad** $f_{XY}$ y **funciones de probabilidad marginales** $f_X$ y $f_Y$.

Diremos que $X$ e $Y$ son independientes si se cumple al menos una de las siguientes condiciones:

- $f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ para todo $(x, y) \in D_{XY}$
- $F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ para todo $(x, y) \in D_{XY}$

# Esperanza y varianza de las distribuciones marginales

- $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_X(x)\quad dx.$
- $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f_Y(y)\quad dy.$
- $\sigma_X^2=Var(X)=E\left((X-E(X))^2\right)=E(X^2)-E(X)^2.$
- $\sigma_Y^2=Var(Y)=E\left((Y-E(Y))^2\right)=E(Y^2)-E(Y)^2.$

# Distibuciones condicionales

- Dado un valor fijo $y \in D_Y$ definimos la distribución condicional de la v.a. $X$ condicionada a que $Y = y$ como

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)},\ \text{para todo } x \in D_X.$$

- Dado un valor fijo $y \in D_Y$ definimos la distribución condicional de la v.a. $Y$ condicionada a que $X = x$ como

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)},\ \text{para todo } Y \in D_Y.$$

# Distibuciones condicionales e independencia

PROPIEDAD

Si las variables $X$ e $Y$ son independientes se cumple que

- $f_{X|Y=y}(x) = f_X(x)$
- $f_{Y|X=x}(y) = f_Y(y)$

# Esperanzas condicionales

$$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_{X|Y=y}(x)\quad dx.$$

$$E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f_{Y|X=x}(y)\quad dy.$$

PROPIEDAD

Si las variables $X$ e $Y$ son independientes se cumple que

1. $E(X|Y=y)=E(X)$
2. $E(Y|X=x)=E(Y)$

# Esperanzas de funciones de v.a. continuas bidimensionales. Covarianza y correlación

# Esperanzas de funciones de v.a. continuas bidimensionales

DEFINICIÓN:

Sea $(X, Y)$ una variable aleatoria bidimensional continua y $g(X, Y) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ una función de esa variable bidimensional entonces

$$E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \cdot f_{XY}(x, y) \quad dxdy.$$

# Esperanzas de funciones de v.a. continuas bidimensionales

PROPIEDAD: En particular:

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)\cdot f_{XY}(x,y)\quad dxdy=\mu_X+\mu_Y.$$

$$\begin{aligned}Var(X+Y)&\\&=E\left((X+Y-E(X+Y))^2\right)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y-(\mu_X+\mu_Y))^2\cdot f_{XY}(x,y)\quad dxdy.\end{aligned}$$

# Esperanzas de funciones de v.a. continuas bidimensionales

PROPIEDAD: Sea $(X, Y)$ una variable aleatoria bidimensional entonces se cumple que:

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \mu_X + \mu_Y$.
- Si $X$ e $Y$ son independientes entonces $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) = \mu_X \cdot \mu_Y$.
- Si $X$ e $Y$ son independientes entonces $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = \sigma_X^2 + \sigma_y^2$.

# Covarianza y correlación

# Medida de la variación conjunta: covarianza

Se denomina **covarianza** entre las variables $X$ e $Y$:

$$\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)).$$

La covarianza puede calcularse también con:

$$Cov(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y) = E(X\cdot Y) - \mu_X\cdot\mu_Y,$$

PROPIEDAD. Si las variables $X$ e $Y$ son **independientes**, entonces $Cov(X,Y) = 0$.

Es una consecuencia de que si $X$ e $Y$ son independientes entonces que vimos que $E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y) = \mu_X\cdot\mu_Y$.

# Covarianza entre las variables

La **covarianza** es una medida de lo relacionadas están las variables $X$ e $Y$:

- Si cuando $X \geq \mu_X$, también ocurre que $Y \geq \mu_Y$ o viceversa, cuando $X \leq \mu_X$, también ocurre que $Y \leq \mu_Y$, el valor $(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ será positivo y la **covarianza** será positiva.
- Si por el contrario, cuando $X \geq \mu_X$, también ocurre que $Y \leq \mu_Y$ o viceversa, cuando $X \leq \mu_X$, también ocurre que $Y \geq \mu_Y$, el valor $(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)$ será negativo y la **covarianza** será negativa.
- En cambio, si a veces ocurre una cosa y a veces ocurre otra, la **covarianza** va cambiando de signo y puede tener un valor cercano a 0.

# Propiedades de la covarianza

- Sea $(X, Y)$ una variable aleatoria bidimensional. Entonces la **varianza de la suma/resta** se calcula usando la expresión siguiente:

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2 \cdot Cov(X, Y).$$

- Sea $(X, Y)$ una variable aleatoria bidimensional donde las variables $X$ e $Y$ son **independientes**. Entonces:

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y).$$

# Coeficiente de correlación entre las variables

DEFINICIÓN DEL COEFICIENTE DE CORRELACIÓN. Sea $(X, Y)$ una variable aleatoria bidimensional. Se define el **coeficiente de correlación** entre las variables $X$ e $Y$ como:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}} = \frac{E(X \cdot Y) - \mu_X \cdot \mu_Y}{\sqrt{E\left(X^2\right) - \mu_X^2} \cdot \sqrt{E\left(Y^2\right) - \mu_Y^2}}.$$

# Coeficiente de correlación entre las variables

OBSERVACIÓN: Si las variables $X$ e $Y$ son **independientes**, su **coeficiente de correlación** $\rho_{XY} = 0$ es nulo ya que su **covarianza** lo es.

Notemos también que la **correlación** no tiene unidades y es invariante a cambios de escala.

Además, la **covarianza** de las **variables tipificadas** $\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}$ y $\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$ coincide con la **correlación** de $X$ e $Y$.

El **coeficiente de correlación** es un valor normalizado ya que siempre está entre -1 y 1: $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.

# Coeficiente de correlación entre las variables

OBSERVACIÓN. Si las variables $X$ e $Y$ tiene dependencia lineal, por ejemplo si $Y = a \cdot X + b$ para algunas constantes $a, b \in \mathbb{R}$, entonces su **coeficiente de correlación** $\rho_{XY} = \pm 1$, es decir toma el valor $1$ si la pendiente $a > 0$ y $-1$ si $a < 0$.

De forma similar:

- si $Cor(X, Y) = +1$ $X$ e $Y$ tienen relación lineal con pendiente positiva.
- si $Cor(X, Y) = -1$ $X$ e $Y$ tienen relación lineal con pendiente negativa.

# Matriz de varianzas-covarianzas y matriz de correlaciones

Sea $(X,Y)$ una variable bidimensional Notemos que

- $Cov(X,X) = \sigma_{XX} = \sigma_X^2$.
- $Cov(Y,Y) = \sigma_{YY} = \sigma_Y^2$.
- $\sigma_{XY} = Cov(X,Y) = Cov(Y,X) = \sigma_{YX}$.

Se denomina matriz de varianzas-covarianzas y se suele denotar como $\Sigma$ a

$$\Sigma = \begin{pmatrix} Cov(X,X) & Cov(X,Y) \\ Cov(Y,X) & Cov(Y,Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$$

# Matriz de varianzas-covarianzas y matriz de correlaciones

Sea $(X,Y)$ una variable bidimensional Notemos que

- $Cor(X,X)=\rho_{XX}=1.$
- $Cor(Y,Y)=\rho_{YY}=1.$
- $\rho_{XY}=Cor(X,Y)=Cor(Y,X)=\rho_{YX}.$

# Matriz de varianzas-covarianzas y matriz de correlaciones

Se denomina matriz de correlaciones a

$$R = \begin{pmatrix} Cor(X,X) & Cor(X,Y) \\ Cor(Y,X) & Cor(Y,Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{XY} \\ \rho_{YX} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{XY} \\ \rho_{XY} & 1 \end{pmatrix}.$$

# La distribución normal bivariante

# Definición de distribción normal bivariante

Sea $(X, Y)$ una variable continua bidimensional con $E(X) = \mu_X$, $E(Y) = \mu_X$

$\sigma_X^2 = Var(X)$, $\sigma_Y^2 = Var(Y)$, $\sigma_{XY} = Cov(X, Y)$.

Y si denotamos por

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}$$

y por

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$

# Definición de distribución normal bivariante

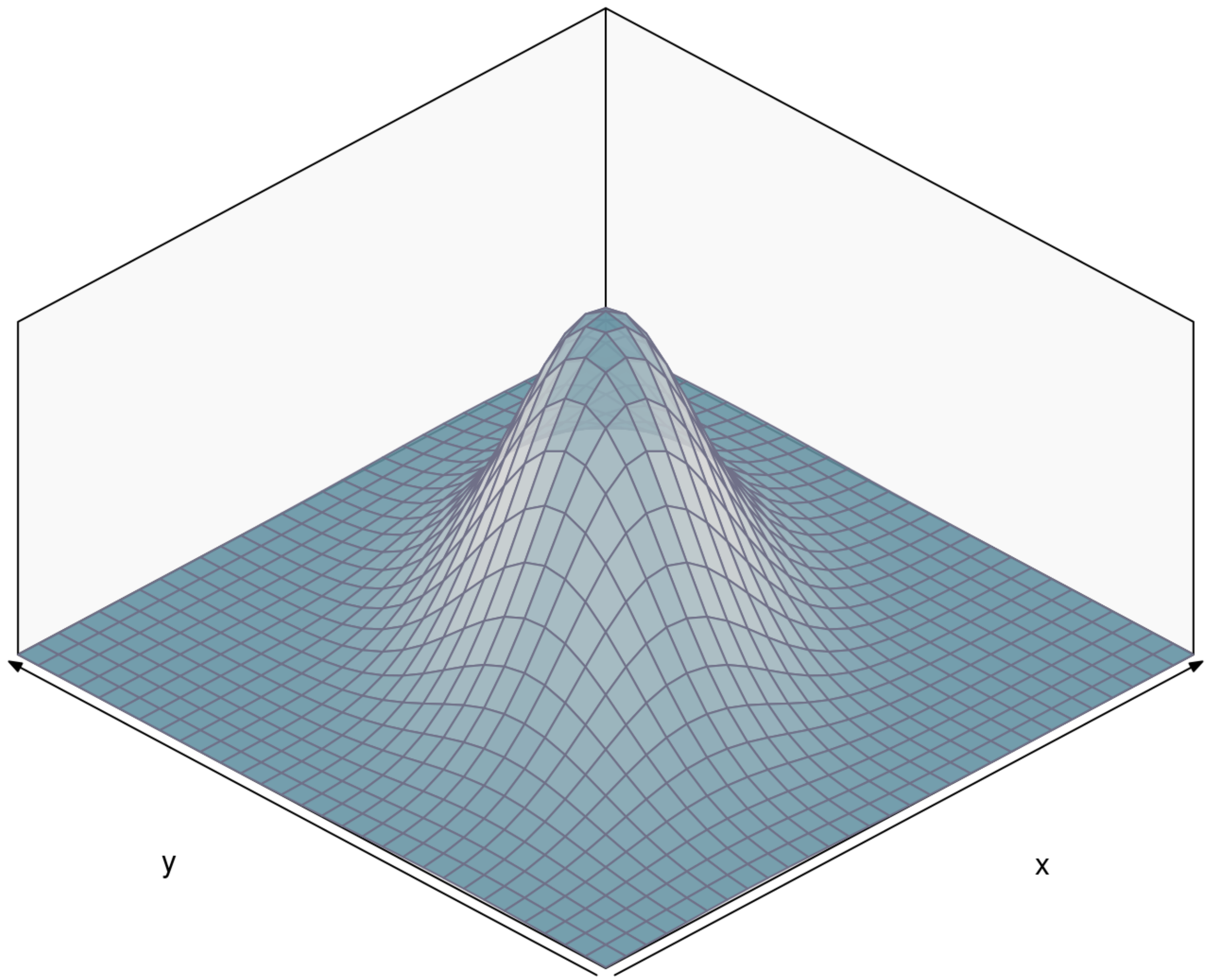
Diremos que el vector $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ sigue una ley **normal o gaussiana bidimensional**

$$N\left(\mu = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}\right)$$

si su densidad es

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \cdot \det(\Sigma)}} \cdot e^{-\frac{1}{2}((x,y)-\mu)^t \cdot \Sigma^{-1} \cdot ((x,y)-\mu)}.$$

# Gráfica de la distribución gaussiana $(X, Y)$.



# Distribuciones multidimensionales

# Conceptos básicos. Función de probabilidad y de distribución.

Consideremos un vector compuesto de $n$ variables aleatorias continuas $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

Su **función de densidad de probabilidad** es una función $f_{X_1,X_2,\ldots,X_n} : \mathbb{R}^n \mapsto [0, +\infty)$ tal que

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots , x_n) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n) \\ &= \int_{-\infty}^{x1} \int_{-\infty}^{x2} \cdots \int_{-\infty}^{xn} f(t_1, t_3, \ldots, t_n) \quad dt_1 dt_2 \cdots dt_n. \end{aligned}$$

# Independencia

DEFINICIÓN INDEPENDENCIA

Diremos que la variables continuas $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son **INDEPENDIENTES** cuando

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n).$$

PROPIEDAD

Las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son **INDEPENDIENTES** si y solo si

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n).$$

# Conceptos básicos

### Vector de medias

Si denotamos $E(X_i) = \mu_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ el **vector de medias** es

$$E(X_1, X_2, \ldots, X_n) = (E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_n)) = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n).$$

### Covarianza y varianzas

Si denotamos $\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j)$ para todo $i, j$ en $1, 2, \ldots n$ entonces tenemos que

- $\sigma_{ii} = Cov(X_i, X_i) = \sigma_{ii} = \sigma_i^2.$
- $\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j) = Cov(X_j, X_i) = \sigma_{ji}.$

# Conceptos básicos

Si denotamos $\rho_{ij} = Cor(X_i, X_j)$ para todo $i, j$ en $1, 2, \ldots n$ entonces tenemos que

- $\rho_{ii} = Cor(X_i, X_i) = 1.$
- $\rho_{ij} = Cor(X_i, X_j) = Cor(X_j, X_i) = \rho_{ji}.$

# Matrices de varianzas-covarianzas y de correlaciones

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$