

Nombre:

Grupo:

MATEMÁTICAS III. GIN2. CONTROL PARCIAL ABRIL 2020-2021.

1) Consideremos los siguientes sucesos  $A$ ,  $B$  tales que  $P(A|B) = 0.4$ ,  $P(A|B^c) = 0.7$ ,  $P(B^c) = 0.2$ . Calcular  $P(A)$  y  $P(B|A)$ . (1 punto).

**Solución:**

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c) = 0.4 \cdot (1 - 0.2) + 0.7 \cdot 0.2 = 0.46.$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{0.4 \cdot (1 - 0.2)}{0.46} = 0.173913.$$

2) **PUNTO EXTRA EN ESTE EXAMEN.** Tiramos 10 dados de parchís hasta obtener exactamente 5 cincos incluido ese último lanzamiento. Sea  $X$  el número de tiradas necesarias ¿Cuál es la distribución de  $X$  su valor esperado y su varianza? (1 punto).

**Solución:**

Sea  $Y$  el número de cincos obtenidos al tirar  $n = 10$  dados de 6 caras con probabilidad de 5  $p_5 = \frac{1}{6}$ , sabemos que  $Y$  sigue una ley  $B(n = 10, p = p_5 = \frac{1}{6})$ . Con R la probabilidad de obtener exactamente 5 cincos, es decir  $P(Y = 5)$ , es:

```
dbinom(5,size=10,prob=1/6)
```

```
## [1] 0.01302381
```

O también haciendo

$$P(Y = 5) = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Posibles}} = \frac{\binom{10}{5} \cdot 5^5}{6^{10}},$$

con R

```
choose(10,5)*5^5/6^10
```

```
## [1] 0.01302381
```

Ahora  $X$  número de veces que hay que tirar los 10 dados hasta obtener una tirada con exactamente 5 cincos ("éxito") claramente es la repetición de un experimento  $Ber(p = 0.0130238)$  luego  $X$  sigue una ley  $Ge(p = P(Y = 5) = 0.0130238)$ .

Sabemos que en este caso  $E(X) = \frac{1-p}{p} = \frac{1-0.0130238}{0.0130238} = 75.7824457$  y  $Var(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-0.0130238}{0.0130238^2} = 5818.7615242$ .

3) La probabilidad de que un cierto anuncio de una página web reciba un *clic* de un usuario y lo vea es de  $p = 0.75$  por cada acceso a la página web. Si pongamos que 20 personas, de forma independiente, visitan esa página con ese anuncio, contestar a las siguientes preguntas (**UTILIZAD EL CÓDIGO DE LA PÁGINA SIGUIENTE**):

- a) Sea  $X$  la variable aleatoria que cuenta el número de clientes que no visitan el anuncio e  $Y$  la de clientes que sí visitan el anuncio ¿Cuáles son las distribuciones de  $X$  y de  $Y$ ? (**1.25 punto**).
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que ningún cliente vea el anuncio?.(**1.25 punto**).
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que vean el anuncio más de 2 clientes y menos de 5?(**1 punto**).
- d) ¿Cuál es el número esperado de visualizaciones?(**1 punto**).

### Solución:

Bajo estas condiciones

La variable  $X$ = número de clientes que NO visitan el anuncio es una  $B(n = 20, p_{\text{no}} = 1 - p = 0.25)$  y la del número de clientes que SÍ lo visitan  $Y$  sigue una distribución  $B(n = 20, p_{\text{sí}} = p = 0.75)$ .

$$P(\text{ningún cliente entre los 20 vea el anuncio}) = P(X = 0) = 0.0031712.$$

lo hemos calculado con R

```
dbinom(0,size=20,prob=1-0.75)

## [1] 0.003171212
```

$$P(\text{vean el anuncio más de 2 clientes y menos de 5}) = P(Y = 3) + P(Y = 4),$$

utilizando el código adjunto de la hoja 2 del examen

```
dbinom(0:4,size=20,p=0.75)

## [1] 9.094947e-13 5.456968e-11 1.555236e-09 2.799425e-08 3.569266e-07
```

tenemos que

$$P(Y = 3) + P(Y = 4) = 2.799425 \times 10^{-8} + 3.569266 \times 10^{-7} = 3.8492085 \times 10^{-7}.$$

También se podía calcular de esta otra forma

$$\begin{aligned} P(\text{vean el anuncio más de 2 clientes y menos de 5}) &= P(2 < Y < 5) \\ &= P(2 < Y \leq 4) = P(Y \leq 4) - P(Y \leq 2) \\ &= 3.8653161 \times 10^{-7} - 1.6107151 \times 10^{-9} \\ &= 3.849209 \times 10^{-7}, \end{aligned}$$

con el código siguiente:

```
pbinom(2,size=20,prob=0.75)

## [1] 1.610715e-09

pbinom(4,size=20,prob=0.75)

## [1] 3.865316e-07

pbinom(4,size=20,prob=0.75)-pbinom(2,size=20,prob=0.75)

## [1] 3.849209e-07
```

El número esperado de visualizaciones es

$$E(Y) = 20 \cdot 0.75 = 15.$$

4) Una variable aleatoria sigue una ley de distribución en el intervalo  $(0, 1]$  si función de densidad es, para algún número real  $\alpha > 0$ :

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha \cdot (1 - x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Calcular  $\alpha$  para que  $X$  sea densidad (**1.25 punto.**)
- Calcular su función de distribución (**1.25 punto.**).
- Calcular  $E(X)$  y  $E\left(\frac{X-1}{2}\right)$  (**1 punto.**).
- Calcular el cuantil  $x_{0.5}$  (**1 punto.**).

**Solución:**

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_0^1 \alpha \cdot (1 - x) dx \\ &= \left[ \alpha \cdot \left( x - \frac{x^2}{2} \right) \right]_{x=0}^{x=1} = \alpha \cdot \left( \left( 1 - \frac{1^2}{2} \right) - \left( 0 - \frac{0^2}{2} \right) \right) = \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Luego  $\frac{\alpha}{2} = 1$  y entonces  $\alpha = 2$ . La función de densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 \cdot (1 - x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La función de distribución es  $F_X(x) = \inf_{-\infty}^c f_X(t) dt$  tenemos tres casos:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x \leq 0 \\ \int_0^x 2 \cdot (1-t) dt = \left[ 2 \cdot \left( t - \frac{t^2}{2} \right) \right]_{t=0}^{t=x} = 2 \cdot \left( x - \frac{x^2}{2} \right) & , \text{ si } 0 < x < 1 \\ 1 & , \text{ si } x \geq 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 x \cdot 2 \cdot (1-x) dx = \int_0^1 2 \cdot (x - x^2) dx \\ &= \left[ 2 \cdot \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \right]_{x=0}^{x=1} = 2 \cdot \left( \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) = 2 \cdot \left( \frac{3-2}{6} \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ahora

$$E\left(\frac{X-1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot E(X) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Nos piden el cuantil 0.5  $x_{0.5}$  es el valor tal que

$$0.5 = F_X(x_{0.5}) = 2 \cdot \left( x_{0.5} - \frac{x_{0.5}^2}{2} \right)$$

Operando obtenemos la ecuación de segundo grado

$$x_{0.5}^2 - 2 \cdot x_{0.5} + 0.5 = 0,$$

sus soluciones son

$$x_{0.5} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0.5}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} = \begin{cases} 1.7071068 \\ 0.2928932 \end{cases},$$

luego  $x_{0.5} = 0.2928932$  pues la otra solución es mayor que 1 y no está en el dominio de  $X$ .

## Código problema 2

```
choose(100,5)*5^5

## [1] 235273500000

6^10

## [1] 60466176

dbinom(5,size=10,prob=1/6)

## [1] 0.01302381
```

## Código problema 3:

```
dbinom(0:4,size=20,prob=0.75)

## [1] 9.094947e-13 5.456968e-11 1.555236e-09 2.799425e-08 3.569266e-07

1-dbinom(0:4,size=20,prob=0.75)

## [1] 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000 0.9999996

dbinom(0:4,size=20,prob=1-0.75)

## [1] 0.003171212 0.021141413 0.066947808 0.133895615 0.189685455

1-dbinom(0:4,size=20,prob=1-0.75)

## [1] 0.9968288 0.9788586 0.9330522 0.8661044 0.8103145

pbinom(1,size=20,prob=0.75,lower.tail = FALSE)

## [1] 1

pbinom(3,size=20,prob=0.75,lower.tail = FALSE)

## [1] 1

pbinom(4,size=20,prob=0.75,lower.tail = TRUE)

## [1] 3.865316e-07

pbinom(5,size=20,prob=0.75,lower.tail = TRUE)

## [1] 3.813027e-06

pbinom(4,size=20,prob=0.75)

## [1] 3.865316e-07

pbinom(5,size=20,prob=0.75)

## [1] 3.813027e-06
```