

Matemáticas III. Ejercicios resueltos

Ricardo Alberich

Contenidos

1	Matemáticas III. Algunos EJERCICIOS para ENTRENAR el examen de los temas de: Probabilidad, Variables Aleatorias y Distribuciones Notables.	1
1.1	Ejercicio 1	1
1.1.1	Solución:	2
1.2	Ejercicio 2	2
1.2.1	Solución:	2
1.3	Ejercicio 3	2
1.3.1	Solución:	2
1.4	Ejercicio 4	2
1.4.1	Solución:	2
1.5	Ejercicio 5	2
1.5.1	Solución:	3
1.6	Ejercicio 6	4
1.6.1	Solución:	4
1.7	Ejercicio 7	5
1.7.1	Solución:	5
1.8	Ejercicio 8	6
1.8.1	Solución:	6
1.9	Ejercicio 9	6
1.9.1	Solución:	6
1.10	Ejercicio 10	6
1.10.1	Solución:	6
1.11	Ejercicio 11	7
1.11.1	Solución:	7
1.12	Ejercicio 12	7
1.12.1	Solución:	7
1.13	Ejercicio 13	8
1.13.1	Solución:	8
1.14	Ejercicio 14	8
1.14.1	Solución	8

1 Matemáticas III. Algunos EJERCICIOS para ENTRENAR el examen de los temas de: Probabilidad, Variables Aleatorias y Distribuciones Notables.

1.1 Ejercicio 1

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A \cap B^c) = P(B \cap A^c) = P(A \cap B) = 0.2$ ¿Qué vale $P(A \cup B)$?

1.1.1 Solución:

Tenemos que $P(A \cap B^c) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.2$ y también $P(B \cap A^c) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.2$. De donde, utilizando que $P(A \cap B) = 0.2$ tenemos que $P(A) = P(B) = 0.4$. Y ahora calculamos lo que se pide

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.4 - 0.2 = 0.6.$$

1.2 Ejercicio 2

¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos de dos dados de parchís perfectos sea 7 en los siguientes tres casos?

- a). Tiro un dado dos veces y sumo los resultados.
- b). Tiro a la vez dos dados blancos y sumo los resultados.
- c). Tiro a la vez un dado rojo y uno azul y sumo los resultados.

1.2.1 Solución:

En las tres situaciones a), b) y c) los casos posibles son los siguientes pares donde el primer elemento es el Dado 1 (sea del color que sea) y el segundo es el Dado 2 (de cualquier color) $\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$.

Así que $P(\text{La suma es } 7) = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Posibles}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

1.3 Ejercicio 3

Sea X una variable aleatoria que cuenta el número de **CARAS** de una moneda trucada una distribución $B(n = 100, p = \frac{1}{4})$. Sabemos que $P(X \leq 40) = 0.9997$ ¿Cuál es la probabilidad de obtener 59 **CRUCES** o menos? (Indicación construíd la variable $Y = 100 - X$ que cuenta el número de **CRUCES**.)

1.3.1 Solución:

Sea Y la variable que cuenta el número de cruces en el mismo experimento. Obviamente tenemos que $Y = 100 - X$. Así que

$$P(Y \leq 59) = P(100 - X \leq 59) = P(X \geq 41) = 1 - P(X < 41) = 1 - P(X \leq 40) = 1 - 0.9997 = 3.2397 \times 10^{-4}.$$

1.4 Ejercicio 4

Si X es una variable aleatoria con distribución $Exp(\lambda)$ y sabemos que $P(X > 4) = 0.5$ ¿Qué vale $P(X \geq 8/X > 4)$?

1.4.1 Solución:

Sabemos que la distribución exponencial carece de memoria lo que quiere decir que $P(X > x + y/X > x) = P(X > y)$. En nuestro caso

$$P(X > 8/X > 4) = P(X > 4 + 4/X > 4) = P(X > 4) = 0.5.$$

1.5 Ejercicio 5

Cuatro personas con cuatro gorras diferentes las lanzan al aire para celebrar la victoria de su equipo. Cuando caen las recogen al azar. Estudiar la distribución de la variable que nos da el número de gorras que se quedan con su dueño (**1 punto**).

1.5.1 Solución:

```
library(combinat)
Casos=as.data.frame(matrix(unlist(permn(1:4)),byrow=TRUE,ncol=4))
names(Casos)=paste("Persona",1:4,sep="")
Casos$Aciertos=unlist(apply(Casos[,1:4],MARGIN=1,FUN=function(x) sum(x==c(1:4))))
Casos
```

```
##      Persona1 Persona2 Persona3 Persona4 Aciertos
## 1           1         2         3         4         4
## 2           1         2         4         3         2
## 3           1         4         2         3         1
## 4           4         1         2         3         0
## 5           4         1         3         2         1
## 6           1         4         3         2         2
## 7           1         3         4         2         1
## 8           1         3         2         4         2
## 9           3         1         2         4         1
## 10          3         1         4         2         0
## 11          3         4         1         2         0
## 12          4         3         1         2         0
## 13          4         3         2         1         0
## 14          3         4         2         1         0
## 15          3         2         4         1         1
## 16          3         2         1         4         2
## 17          2         3         1         4         1
## 18          2         3         4         1         0
## 19          2         4         3         1         1
## 20          4         2         3         1         2
## 21          4         2         1         3         1
## 22          2         4         1         3         0
## 23          2         1         4         3         0
## 24          2         1         3         4         2
```

```
table(Casos$Aciertos)
```

```
##
## 0 1 2 4
## 9 8 6 1
```

Sea X = número de personas con su propio sombrero, el dominio es $D_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Como son equiprobables y los casos posibles son $4! = 24$ tenemos que

$$P(X = k) = \frac{\text{Casos favorables a } k \text{ aciertos}}{\text{Casos posibles}} = \frac{\text{Casos favorables a } k \text{ aciertos}}{24}$$

Contando los casos tenemos que

Aciertos	Frecuencia
0	9
1	8
2	6
4	1

por lo tanto

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{9}{24} & k = 0 \\ \frac{8}{24} & k = 1 \\ \frac{6}{24} & k = 2 \\ \frac{1}{24} & k = 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calculemos la esperanza y la varianza

$$E(X) = 0 \cdot \frac{9}{24} + 1 \cdot \frac{8}{24} + 2 \cdot \frac{6}{24} + 4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{8+12+4}{24} = 1$$

$$E(X^2) = 0 \cdot \frac{9}{24} + 1^2 \cdot \frac{8}{24} + 2^2 \cdot \frac{6}{24} + 4^2 \cdot \frac{1}{24} = \frac{8+24+16}{24} = 2$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - 1^2 = 1.$$

1.6 Ejercicio 6

Diseñamos un examen tipo test de $n = 10$ preguntas con $k > 2$ opciones cada una de la que sólo una es correcta. Cada pregunta vale un punto. Supongamos que un estudiante contesta todas las preguntas al azar. Se pide

a). Si cada pregunta vale un punto y cada fallo 0 puntos ¿Cuál es el valor esperado de la nota del estudiante en función de k ? **(0.5 puntos)**.

b). En función de k ¿cuál es el valor que tenemos que asignar a cada respuesta incorrecta para que la nota esperada del estudiante que contesta al azar sea 0? **(0.5 puntos)**

c). Puntuando como decidáis en el apartado anterior ¿Cuál es la varianza de la nota de un estudiante que contesta al azar? **(0.5 puntos)**

1.6.1 Solución:

Sea X el número de preguntas que acierta el estudiante que contesta al azar. Tiene como probabilidad de acertar $p = \frac{1}{k}$. Como contesta al azar y de forma independiente cada pregunta X sigue una distribución $B(n = 10, p = \frac{1}{k})$.

La nota es $N = 1 \cdot X$. Así que el valor esperado es $E(N) = E(X) = n \cdot p = \frac{10}{k}$.

Ahora puntuamos restando c por cada pregunta incorrecta. Entonces la nota es $N = X + c(10 - X) = (1 - c)X + 10 \cdot c$. Por lo tanto el valor esperado es

$$E(N) = E((1 - c)X + 10 \cdot c) = (1 - c)E(X) + 10 \cdot c = (1 - c)\frac{10}{k} + 10 \cdot c.$$

Así que el valor c que hace la esperanza cero debe cumplir

$$0 = E(N) = (1 - c)\frac{10}{k} + 10 \cdot c$$

de donde obtenemos que $c = -\frac{1}{k-1}$.

Así que la nota penalizando es $N = \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)X - \frac{10}{k-1}$.

Ahora nos piden la varianza de la nota cuando penalizamos las respuestas incorrectas

$$Var(N) = Var\left(\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)X - 10 \cdot \frac{1}{k-1}\right) = \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^2 Var(X) = \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{10}{k-1}.$$

1.7 Ejercicio 7

Consideremos la función de densidad de una cierta variable continua X

$$f(x) = \begin{cases} -k \cdot x & \text{si } -1 < x < 0 \\ k \cdot x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Se pide

- Calcular k . (**0.5 puntos**)
- Calcular la función de distribución de X . (**0.5 puntos**)
- Calcular $Var(X)$. (**0.5 puntos**)

1.7.1 Solución:

Para calcular utilizaremos que una densidad es positiva y que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Por lo tanto tenemos que

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 -k \cdot x dx + \int_0^1 k \cdot x dx = \left[-k \frac{x^2}{2} \right]_{x=-1}^0 + \left[k \frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^1 = 0 - \frac{-k}{2} + \frac{k}{2} - 0 = k$$

Por lo tanto $k = 1$

Así que la función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Calculemos su función de distribución

$$F(X) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \int_{-1}^x |t| dt = \int_{-1}^x -t dt = \left[-\frac{t^2}{2} \right]_{t=-1}^x = \frac{-x^2}{2} - \frac{-1}{2} = \frac{1-x^2}{2} & \text{si } -1 < x < 0 \\ \int_{-1}^x |t| dt = \int_{-1}^0 -t dt + \int_0^x t dt = \frac{1}{2} + \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^x = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} - 0 = \frac{x^2+1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

En definitiva la función de distribución es

$$F(X) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x^2-1}{2} & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{x^2+1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

El valor esperado es

$$E(X) = \int_{-1}^0 x \cdot (-x) dx + \int_0^1 x \cdot x dx = \left[-\frac{x^3}{3} \right]_{x=-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^1 = 0.$$

y la varianza

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-1}^0 x^2 \cdot (-x) dx + \int_0^1 x^2 \cdot x dx - 0 = \left[-\frac{x^4}{4} \right]_{x=-1}^0 + \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^1 = 0 - \frac{-1}{4} + \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{2}.$$

1.8 Ejercicio 8

Si A , B y C son tres sucesos tales que $P(A/C) = 0.3$, $P(B/C) = 0.8$ y que $P((A \cap B)/C) = 0.1$. Calculad $P((A - B)/C)$. (0.5 puntos)

1.8.1 Solución:

La probabilidad pedida es $P((A - B)/C) = P(A/C) - P(A \cap B/C) = 0.3 - 0.1 = 0.2$.

1.9 Ejercicio 9

Lanzamos un dado de 12 caras numeradas con enteros del 1 al 12 sobre una mesa plana. Observamos el número superior del dado. Suponiendo equiprobabilidad de todas las caras calcular la probabilidad de que salga mayor que 8 si el resultado es par. (1 punto)

1.9.1 Solución:

$$P(X > 8/X \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) = \frac{P(X \in \{10, 12\})}{P(X \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\})} = \frac{2/12}{6/12} = \frac{1}{3}.$$

1.10 Ejercicio 10

Lanzamos una moneda con probabilidad de cara $p = \frac{1}{2}$ hasta que sale cara dos veces o bien la hemos lanzamos 5 veces, lo primero que ocurra.

Denotemos por X la variable aleatoria que determina el número de tiradas de la moneda.

Se pide:

- Describid adecuadamente el espacio muestral de la variable X . (0.5 puntos)
- Calcular su función de densidad. (1 punto)
- Calcular $E(X)$. (0.5 puntos)

1.10.1 Solución:

De notemos los sucesos elementales por C = cara +=cruz así el espacio muestral es

$$\Omega = \{CC, C + C, +CC, ++CC, +C + C, C + +C, +++CC, ++C + C, +C + +C, C + + + C, + + + + +, C + + + +, +C + + +, ++C + +, +++C +, + + + + C\}.$$

Si X es el número de tiradas su dominio queda determinado por $D_X = \{2, 3, 4, 5\}$.

Calculemos los valores de su función de probabilidad

$$P(X = 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2, P(X = 3) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3, P(X = 4) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4, P(X = 5) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

$$f_x(x) = P(X = x) = \begin{cases} (x-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x & \text{si } x = 2, 3, 4 \\ \frac{10}{32} & \text{si } x = 5 \\ 0 & \text{en el resto de casos.} \end{cases}$$

$$E(X) = 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{3}{16} + 5 \cdot \frac{10}{32} = \frac{57}{16}.$$

1.11 Ejercicio 11

Sea X una variable con distribución uniforme en el intervalo $(1, 10)$. Consideremos la variable $Y = \log_{10}(X)$. Se pide

- a). Calcular la función de distribución de Y (**1 punto**)
- b). Calcular la función de densidad de Y . (**0.5 puntos**)
- c). Calcular el cuantil 0.95 de Y es decir un valor y_0 tal que $P(Y \leq y_0) = 0.95$. (**0.5 puntos**)

1.11.1 Solución:

Recordemos que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x-1}{9} & \text{si } 1 < x < 10 \\ 1 & \text{si } x \geq 10 \end{cases}$$

La variable Y tendrá por dominio $D_Y = (0, 1)$.

Sea $y \in (0, 1)$ entonces $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\log_{10}(X) \leq y) = P(X \leq 10^y) = \frac{10^y - 1}{9}$ ya que como $0 < y < 1$ entonces $1 = 10^0 < 10^y < 10^1 = 10$. Así que la función de distribución es

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{10^y - 1}{9} & \text{si } 0 < y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

su densidad es

$$f_y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{10^y \cdot \log_e(10)}{9} & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

El cuantil 0.95 es el valor y_0 tal que $F_y(y_0) = P(Y \leq y_0) = 0.95$. Por lo tanto

$$F_y(y_0) = \frac{10^{y_0} - 1}{9} = 0.95$$

así que $10^{y_0} = 9 \cdot 0.95 + 1 = 9.55$, de donde $y_0 = \log_{10}(9.55) = 0.98$.

1.12 Ejercicio 12

Sea X una v.a. discreta de dominio $D_X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Sabemos que $P(X = x) = p$ para $x \in D_X$. Calculad $Var(X)$. (**0.5 puntos**)

1.12.1 Solución:

Obviamente $p = \frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{x=-2}^2 x^2 \cdot P(X = x) - \left(\sum_{x=-2}^2 x \cdot P(X = x) \right)^2 \\ &= (-2)^2 \cdot p + (-1)^2 \cdot p + 0^2 \cdot p + 1^2 \cdot p + (2)^2 \cdot p - (-2 \cdot p - 1 \cdot p + 0 \cdot p + 1 \cdot p + 2 \cdot p)^2 \\ &= 10 \cdot p + 0^2 = 10 \cdot p = 10 \cdot \frac{1}{5} = 2. \end{aligned}$$

1.13 Ejercicio 13

Sea Z una variable aleatoria normal estándar. Tenemos que $\text{pnorm}(-0.2)=0.4207$. Calculad $P(|Z| \geq 0.2)$.
(0.5 puntos)

1.13.1 Solución:

Por simetría de la normal estándar sabemos que $P(Z > 0.2) = p(Z < -0.2)$ por lo tanto

$$P(|Z| \geq 0.2) = P(Z > 0.2) + p(Z < -0.2) = 2 \cdot P(Z < -0.2) = 2 \cdot 0.4207 = 0.8415.$$

Con R

```
2*pnorm(-0.2)
```

```
## [1] 0.8415
```

1.14 Ejercicio 14

(3 puntos) Consideremos la v.a. X con función densidad

$$f(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{x-1}{2} & \text{si } 1 \leq x < a \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}.$$

- a). Calculad el valor de a para que f sea función de densidad.
- b). Para el anterior valor de a calculad la función de distribución de X .
- c). Para el anterior valor de a calculad $E(X)$.
- d). Para el anterior valor de a calculad $Var(X)$.

1.14.1 Solución

Concurso redactar y subir al foro ¡¡¡décimas extra.!!!