Nombre: *Grupo:*

Matemáticas III. GIN2. Control Parcial abril 2020-2021.

1) Consideremos los siguientes sucesos A, B tales que $P(A|B) = 0.4$, $P(A|B^c) = 0.7$, $P(B^c) = 0.2$. Calcular $P(A)$ y $P(B|A)$. (**1 punto**).

Solución:

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c) = 0.4 \cdot (1 - 0.2) + 0.7 \cdot 0.2 = 0.46.$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{0.4 \cdot (1 - 0.2)}{0.46} = 0.6956522.$$

2) PUNTO EXTRA EN ESTE EXAMEN. Tiramos 10 dados de parchís hasta obtener exactamente 5 cincos incluido ese último lanzamiento. Sea X el número de tiradas necesarias ¿Cuál es la distribución de X su valor esperado y su varianza? (**1 punto**).

Solución:

Sea Y el número de cincos obtenidos al tirar $n = 10$ dados de 6 caras cop probabilidad de 5 $p_5 = \frac{1}{6}$, samemos que Y sigue una ley $B(n = 10, p = p_5 = \frac{1}{6})$. Con R la probabilidad de obtener exactamente 5 cincos, es decir $P(Y = 5)$, es:

```
dbinom(5,size=10,prob=1/6)

## [1] 0.01302381
```

O tambien haciendo

$$P(Y = 5) = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Posibles}} = \frac{\binom{10}{5} \cdot 5^5}{6^{10}},$$

con R

```
choose(10,5)*5^5/6^10

## [1] 0.01302381
```

Ahora X número de veces que hay que tirar los 10 dados hasta obtener una tirada con exactamente 5 cincos ("éxito") claramente es la repetición de un experimento $Ber(p = 0.0130238)$ luego X sigue una ley $Ge(p = P(Y = 5) = 0.0130238)$.

Sabemos que en este caso $E(X) = \frac{1-p}{p} = \frac{1-0.0130238}{0.0130238} = 75.7824457$ y $Var(X) = \frac{1-0.0130238}{0.0130238^2} = 5818.7615242$.

3) La probabilidad de que un cierto anunció de una página web reciba un *clic* de un usuario y lo vea es de $p = 0.75$ por cada acceso a la página web. Su pongamos que 20 personas, de forma independiente, visitan esa página con ese anuncio, contestar a las siguientes preguntas (**UTILIZAD EL CÓDIGO DE LA PÁGINA SIGUIENTE**):

a) Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de clientes que no visitan el anuncio e Y la de clientes que sí visitan el anuncio ¿Cuáles son las distribuciones de X y de Y? (**1.25 punto**).

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ningún cliente vea el anuncio?.(**1.25 punto**).

c) ¿Cuál es la probabilidad de que vean el anuncio más de 2 clientes y menos de 5?(**1 punto.**)

d) ¿Cuál es el número esperado de visualizaciones?(**1 punto**).

Solución:

Bajo estas condiciones

La variable X= número de clientes que NO visitan el anuncio es una $B(n = 20, p_{\text{no}} = 1 - p = 0.25)$ y la del número de clientes que SÍ lo visitan Y sigue una distribución $B(n = 20, p_{\text{SÍ}} = p = 0.75)$.

$$P(\text{ningún cliente entre los 20 vea el anuncio}) = P(Y = 0) = 9.094947 \times 10^{-13}.$$

lo hemos calculado con R

```
dbinom(0,size=20,prob=0.75)

## [1] 9.094947e-13
```

$$P(\text{vean el anuncio más de 2 clientes y menos de 5}) = P(Y = 3) + P(Y = 4),$$

utilizando el código adjunto de la hoja 2 del examen

```
dbinom(0:4,size=20,p=0.75)

## [1] 9.094947e-13 5.456968e-11 1.555236e-09 2.799425e-08 3.569266e-07
```

tenemos que

$$P(Y = 3) + P(Y = 4) = 2.799425 \times 10^{-8} + 3.569266 \times 10^{-7} = 3.8492085 \times 10^{-7}.$$

También se podía calcular de esta otra forma

$$\begin{aligned} P(\text{vean el anuncio más de 2 clientes y menos de 5}) &= P(2 < Y < 5) \\ &= P(2 < Y \leqslant 4) = P(Y \leqslant 4) - P(Y \leqslant 2) \\ &= 3.8653161 \times 10^{-7} - 1.6107151 \times 10^{-9} \\ &= 3.849209 \times 10^{-7}, \end{aligned}$$

con el código siguiente:

```r
pbinom(2,size=20,prob=0.75)

## [1] 1.610715e-09

pbinom(4,size=20,prob=0.75)

## [1] 3.865316e-07

pbinom(4,size=20,prob=0.75)-pbinom(2,size=20,prob=0.75)

## [1] 3.849209e-07
```

El número esperado de visualizaciones es

$$E(Y) = 20 \cdot 0.75 = 15.$$

4) Una variable aleatoria sigue una ley de distribución en el intervalo $(0,1]$ si función de densidad es, para algún número real $\alpha > 0$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha \cdot (1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Calcular α para que X sea densidad (**1.25 punto.**)

b) Calcular su función de distribución (**1.25 punto.**).

c) Calcular $E(X)$ y $E\left(\frac{X-1}{2}\right)$(**1 punto.**).

d) Calcular el cuantil $x_{0.5}$ (**1 punto**).

Solución:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_0^1 \alpha \cdot (1-x)dx \\ &= \left[\alpha \cdot \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\right]_{x=0}^{x=1} = \alpha \cdot \left(\left(1 - \frac{1^2}{2}\right) - \left(0 - \frac{0^2}{2}\right)\right) = \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Luego $\frac{\alpha}{2} = 1$ y entonces $\alpha = 2$. La función de densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2 \cdot (1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La función de distribución es $F_X(x) = \text{ínf}_{-\infty}^{c} f_X(t)dt$ tenemos tres casos:

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } x \leqslant 0 \\ \int_0^x 2\cdot(1-t)dt = \left[2\cdot\left(t - \frac{t^2}{2}\right)\right]_{t=0}^{t=x} = 2\cdot\left(x - \frac{x^2}{2}\right) & \text{, si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{, si } x \geqslant 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx = \int_0^1 x\cdot 2\cdot(1-x)dx = \int_0^1 2\cdot(x-x^2)dx \\ &= \left[2\cdot\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\right]_{x=0}^{x=1} = 2\cdot\left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) = 2\cdot\left(\frac{3-2}{6}\right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ahora

$$E\left(\frac{X-1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot E(X) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Nos piden el cuantil 0.5 $x_0.5$ es el valor tal que

$$0.5 = F_X(x_{0.5}) = 2\cdot\left(x_{0.5} - \frac{\overset{2}{0.5}}{2}\right)$$

Operando obtenemos la ecuación de segundo grado

$$x_{0.5}^2 - 2\cdot x_{0.5} + 0.5 = 0,$$

sus soluciones son

$$x_{0.5} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 0.5}}{2\cdot 1} = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 1.7071068 \\ 0.2928932 \end{array} \right. ,$$

luego $x_{0.5} = 0.2928932$ pues la otra solución es mayor que 1 y no está en el dominio de X.

Código problema 2

```
choose(100,5)*5^5

## [1] 235273500000

6^10

## [1] 60466176

dbinom(5,size=10,prob=1/6)

## [1] 0.01302381
```

Código problema 3:

```
dbinom(0:4,size=20,prob=0.75)

## [1] 9.094947e-13 5.456968e-11 1.555236e-09 2.799425e-08 3.569266e-07

1-dbinom(0:4,size=20,prob=0.75)

## [1] 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000 0.9999996

dbinom(0:4,size=20,prob=1-0.75)

## [1] 0.003171212 0.021141413 0.066947808 0.133895615 0.189685455

1-dbinom(0:4,size=20,prob=1-0.75)

## [1] 0.9968288 0.9788586 0.9330522 0.8661044 0.8103145

pbinom(1,size=20,prob=0.75,lower.tail = FALSE)

## [1] 1

pbinom(3,size=20,prob=0.75,lower.tail = FALSE)

## [1] 1

pbinom(4,size=20,prob=0.75,lower.tail = TRUE)

## [1] 3.865316e-07

pbinom(5,size=20,prob=0.75,lower.tail = TRUE)

## [1] 3.813027e-06

pbinom(4,size=20,prob=0.75)

## [1] 3.865316e-07

pbinom(5,size=20,prob=0.75)

## [1] 3.813027e-06
```