Tema 3 - Variables Aleatorias discretas multidimensionales

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

Variables aleatorias bidimensionales discretas

Variables aleatorias bidimensionales discretas. Introducción

DEFINICIÓN DE VARIABLE ALEATORIA BIDIMENSIONAL.

Sea Ω es espacio muestral de un experimento. Diremos que (X, Y) es una **variable aleatoria bidimensional** cuando tanto X como Y toman valores reales para cada elemento del espacio Ω.

Diremos que es **discreta** cuando su conjunto de valores en $\mathbb{R}^2$, $(X, Y)(\Omega)$ es un conjunto finito o numerable.

Diremos que es **continua** cuando su conjunto de valores en $\mathbb{R}^2$, $(X, Y)(\Omega)$ es un producto de intervalos.

Diremos que es **heterogénea** cuando X e Y no compartan ser continuas o discretas.

Función de probabilidad conjunta

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN DE PROBABILIDAD CONJUNTA: Dada una **variable aleatoria bidimensional discreta** (X,Y)

definimos la función de **probabilidad discreta bidimensional** como

$$\begin{aligned} P_{XY}:\mathbb{R}^2 &\longrightarrow [0,1] \\ (x,y) &\longrightarrow P_{XY}(x,y)=P(X=x,\ Y=y). \end{aligned}$$

Llamaremos dominio de la variable conjunta a

$$D_{XY}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | P_{XY}(x,y)=P(X=x,\ Y=y)>0\}.$$

Es decir es el conjunto de valores posibles que toma la v.a. (X,Y).

Función de probabilidad conjunta

Por tanto, de cara a calcular P_{XY} basta calcular $P_{XY}(x_i, y_j)$ para $(x_i, y_j) \in D_{XY}$:

X/Y	y_1	y_2	$\dots$	y_N
x_1	$P_{XY}(x_1, y_1)$	$P_{XY}(x_1, y_2)$	$\dots$	$P_{XY}(x_1, y_N)$
x_2	$P_{XY}(x_2, y_1)$	$P_{XY}(x_2, y_2)$	$\dots$	$P_{XY}(x_2, y_N)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_M	$P_{XY}(x_M, y_1)$	$P_{XY}(x_M, y_2)$	$\dots$	$P_{XY}(x_M, y_N)$

Propiedades de la función de probabilidad conjunta

Sea (X,Y) una **variable aleatoria bidimensional discreta** con dominio $D_{XY}=\{(x_i,y_j)\, i=1,2,\ldots,\ j=1,2,\ldots\}$.

Su **función de probabilidad conjunta** verifica las siguientes propiedades:

La suma de todos los valores de la **función de probabilidad conjunta** sobre el conjunto de valores siempre vale 1:

$$\sum_i \sum_j P_{XY}(x_i,y_j)=1.$$

Propiedades de la función de probabilidad conjunta

Sea B un subconjunto cualquiera del dominio D_{XY}. El valor de la probabilidad $P((X,Y)\in B)$ se puede calcular de la forma siguiente:

$$P((X,Y)\in B)=\sum_{(x_i,y_j)\in B} P_{XY}(x_i,y_j).$$

Es decir, la probabilidad de que la variable bidimensional tome valores en B es igual a la suma de todos aquellos valores de la función de probabilidad conjunta que están en B.

Función de distribución acumulada

Definición función de distribución conjunta

La función de distribución acumulada conjunto o simplemente distribución conjunta se define como

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Propiedad

La **función de distribución conjunta** se puede obtener conociendo la **función de probabilidad conjunta**

$$F_{XY}(x,y) = \sum_{x_i \leq x, y_j \leq y} P_{XY}(x_i, y_j).$$

Distribuciones marginales

Variables aleatorias marginales y su distribución

Consideremos una variable aleatoria **bidimensional discreta** (X,Y) con **función de probabilidad conjunta** $P_{XY}(x_i,y_j)$, para cada $(x_i,y_j)\in D_{XY}$.

La tabla de la **función de probabilidad conjunta** contiene suficiente información para obtener las **funciones de probabilidad** de las variables X e Y.

Dichas variables X e Y se denominan **variables marginales** y sus correspondientes **funciones de probabilidad**, **funciones de probabilidad marginales** P_X de la variable X y P_Y de la variable Y.

Veamos cómo obtener P_X y P_Y a partir de la tabla P_{XY}.

Funciones de probabilidad marginales

PROPOSICIÓN. CÁLCULO DE LAS FUNCIONES DE PROBABILIDAD MARGINALES.

Sea (X, Y) una variable aleatoria **bidimensional discreta** con **función de probabilidad conjunta** $P_{XY}(x_i, y_j)$, con $(x_i, y_j) \in D_{XY}$.

Las **funciones de probabilidad marginales** $P_X(x_i)$ y $P_Y(y_j)$ se calculan usando las expresiones siguientes:

$$
\begin{aligned}
P_X(x_i) &= \sum_j P_{XY}(x_i, y_j),\ i = 1, 2, \ldots, \\
P_Y(y_j) &= \sum_i P_{XY}(x_i, y_j),\ \ j = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Variables aleatorias marginales

- Podemos representar P_{XY} como una tabla bidimensional en la primera fila están los valores de la variable Y ($y_1, y_2, \ldots$) y en la primera columna están los valores de la variable X ($x_1, x_2, \ldots$)
- Para obtener la **función de probabilidad marginal** de la variable X en el valor x_i, $P_X(x_i)$, hay que sumar todos los valores de $P_{XY}(x_i, y_j)$ correspondientes a la fila i-ésima
- De forma análoga para obtener la **función de probabilidad marginal** de la variable Y en el valor y_j, $P_Y(y_j)$, hay que sumar todos los valores de $P_{XY}(x_i, y_j)$ correspondientes a la columna j-ésima.

Variables aleatorias marginales

$X\backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_N	$P_X(x_i) = \sum_j P_{XY}(x_i, y_j)$
x_1	$P_{XY}(x_1, y_1)$	$P_{XY}(x_1, y_2)$	$\dots$	$P_{XY}(x_1, y_N)$	$P_X(x_1)$
x_2	$P_{XY}(x_2, y_1)$	$P_{XY}(x_2, y_2)$	$\dots$	$P_{XY}(x_2, y_N)$	$P_X(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_M	$P_{XY}(x_M, y_1)$	$P_{XY}(x_M, y_2)$	$\dots$	$P_{XY}(x_M, y_N)$	$P_X(x_M)$
$P_Y(y_j) = \sum_i P_{XY}(x_i, y_j)$	$P_Y(y_1)$	$P_Y(y_2)$	$\dots\dots$	$P_Y(y_N)$	1

Independencia de variables aleatorias discretas

Recordemos que dos sucesos A y B son independientes si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

¿Cómo trasladar dicho concepto al caso de variables aleatorias?

Dada una variable aleatoria bidimensional discreta (X, Y) con $D_{XY} = \{(x_i, y_j),\ i = 1, 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots\}$

Así que al menos todos los sucesos de la forma $\{X = x_i,\ Y = y_j\}$ deberán ser independientes.

Independencia de variables aleatorias discretas

DEFINICIÓN DE INDEPENDENCIA PARA VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONALES DISCRETAS.

Dada (X,Y) una **variable aleatoria bidimensional discreta** con **función de probabilidad** P_{XY} y **funciones de probabilidad marginales** P_X y P_Y.

Diremos que X e Y son independientes si:

$$P_{XY}(x_i,y_j) = P_X(x_i)\cdot P_Y(y_j),\ i=1,2,\ldots,j=1,2,\ldots$$

o dicho de otra forma:

$$P(X=x_i,\ Y=y_j) = P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j),\ i=1,2,\ldots,j=1,2,\ldots$$

PROPIEDAD

Las v.a. X e Y son independientes si y solo si $F_{XY}(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$.

Esperanza y varianza de las distribuciones marginales

- $E(X) = \sum_{x \in D_X} x \cdot P_X(x) = \sum_{x \in D_X} x \cdot P(X = x).$
- $E(Y) = \sum_{y \in D_Y} y \cdot P_Y(y) = \sum_{y \in D_Y} y \cdot P(Y = y).$
- $\sigma_X^2 = Var(X) = E(X - E(X)) = E(X) - E(X)^2.$
- $\sigma_Y^2 = Var(Y) = E(Y - E(Y)) = E(Y) - E(Y)^2.$

Distibuciones condicionales

- Dado un valor fijo $y \in D_Y$ definimos la distribución condicional de la v.a. X condicionada a que $Y = y$ como

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P_{XY}(x, y)}{P_Y(y)} = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}, \text{ para todo } x \in D_X.$$

- Dado un valor fijo $y \in D_Y$ definimos la distribución condicional de la v.a. Y condicionada a que $X = x$ como

$$P(Y = y|X = x) = \frac{P_{XY}(x, y)}{P_X(x)} = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}, \text{ para todo } y \in D_Y.$$

Distibuciones condicionales e independencia

PROPIEDAD

Si las variables X e Y son independientes se cumple que

1. $P(X = x|Y = y) = P(X = x)$
2. $P(Y = y|X = x) = P(Y = y)$.

Esperanzas condicionales

$$E(X|Y=y) = \sum_{x \in D_X} x \cdot P(X=x|Y=y)$$

$$E(Y|X=x) = \sum_{y \in D_Y} y \cdot P(Y=y|X=x)$$

PROPIEDAD

Si las variables X e Y son independientes se cumple que

1. $E(X|Y=y) = E(X)$
2. $E(Y|X=x) = E(Y)$

Esperanzas de funciones de v.a. discretas bidimensionales. Covarianza y correlación

Esperanzas de funciones de v.a. discretas bidimensionales

DEFINICIÓN:

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional discreta y $g(X, Y)$ una función de esa variable bidimensional entonces
$E(g(X, Y)) = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) \cdot P(X = x_i, Y = y_j)$.

En particular:

- $E(X+Y) = \sum_i \sum_j (x_i + y_j) \cdot P(X = x_i, Y = y_j) = \mu_X + \mu_Y$.
- $Var(X+Y) = E\left((X+Y-E(X+Y))^{\,2}\right) = \sum_i \sum_j (x_i + y_j - (\mu_X + \mu_Y))^2 \cdot P(X = x_i, Y = y_j)$.

Esperanzas de funciones de v.a. discretas bidimensionales

PROPIEDAD: Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional entonces se cumple que:

- $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \mu_X + \mu_y$
- Si X e Y son independientes entonces $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) = \mu_X \cdot \mu_y$
- Si X e Y son independientes entonces $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = \sigma_X^2 + \sigma_y^2$

Covarianza y correlación

Medida de la variación conjunta: covarianza

El **momento conjunto centrado en las medias para** $k = 1$ **y** $l = 1$ se denomina **covarianza** entre las variables X e Y:

$$\sigma_{XY} = Cov(X, Y) = E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)).$$

La covarianza puede calcularse también con:

$$Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = E(X \cdot Y) - \mu_X \cdot \mu_Y,$$

PROPIEDAD. Si las variables X e Y son **independientes**, entonces $Cov(X, Y) = 0$.

Es una consecuencia de que si X e Y son independientes entonces que vimos que $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) = \mu_X \cdot \mu_y$.

Covarianza entre las variables

La **covarianza** es una medida de lo relacionadas están las variables X e Y:

- Si cuando $X \geq \mu_X$, también ocurre que $Y \geq \mu_Y$ o viceversa, cuando $X \leq \mu_X$, también ocurre que $Y \leq \mu_Y$, el valor $(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$ será positivo y la **covarianza** será positiva.
- Si por el contrario, cuando $X \geq \mu_X$, también ocurre que $Y \leq \mu_Y$ o viceversa, cuando $X \leq \mu_X$, también ocurre que $Y \geq \mu_Y$, el valor $(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$ será negativo y la **covarianza** será negativa.
- En cambio, si a veces ocurre una cosa y a veces ocurre otra, la **covarianza** va cambiando de signo y puede tener un valor cercano a 0.

Propiedades de la covarianza

- Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional. Entonces la **varianza de la suma/resta** se calcula usando la expresión siguiente:

$$Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2 \cdot Cov(X, Y).$$

- Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional donde las variables X e Y son **independientes**. Entonces:

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y).$$

Coeficiente de correlación

La **covarianza** depende de las unidades en las que se midan las variables X e Y ya que si $a > 0$ y $b > 0$, entonces:

$$Cov(a \cdot X, b \cdot Y) = a \cdot b \cdot Cov(X, Y).$$

Por tanto, si queremos “medir” la relación que existe entre las variables X e Y tendremos que “normalizar” la **covarianza** definiendo el **coeficiente de correlación** entre las variables X e Y:

Coeficiente de correlación entre las variables

DEFINICIÓN DEL COEFICIENTE DE CORRELACIÓN. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional. Se define el **coeficiente de correlación** entre las variables X e Y como:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}} = \frac{E(X \cdot Y) - \mu_X \cdot \mu_Y}{\sqrt{E\left(X^2\right) - \mu_X^2} \cdot \sqrt{E\left(Y^2\right) - \mu_Y^2}}.$$

Coeficiente de correlación entre las variables

OBSERVACIÓN. Si las variables X e Y son **independientes**, su **coeficiente de correlación** $\rho_{XY} = 0$ es nulo ya que su **covarianza** lo es.

Notemos también que la **correlación** no tiene unidades y es invariante a cambios de escala.

Además, la **covarianza** de las **variables tipificadas** $\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}$ y $\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}$ coincide con la **correlación** de X e Y.

El **coeficiente de correlación** es un valor normalizado ya que siempre está entre -1 y 1: $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.

Coeficiente de correlación entre las variables

OBSERVACIÓN. Si las variables X e Y tiene dependencia lineal, por ejemplo si $Y = a \cdot X + b$ para algunas constantes $a, b \in \mathbb{R}$, entonces su **coeficiente de correlación** $\rho_{XY} = \pm 1$, es decir toma el valor 1 si la pendiente $a > 0$ y -1 si $a < 0$.

De forma similar:

- si $Cor(X, Y) = +1$ X e Y tienen relación lineal con pendiente positiva.
- si $Cor(X, Y) = -1$ X e Y tienen relación lineal con pendiente negativa.

Matriz de varianzas-covarianzas y matriz de correlaciones

Sea (X, Y) una variable bidimensional Notemos que

- $Cov(X, X) = \sigma_{XX} = \sigma_X^2$.
- $Cov(Y, Y) = \sigma_{YY} = \sigma_Y^2$.
- $\sigma_{XY} = Cov(X, Y) = Cov(Y, X) = \sigma_{YX}$.

Se denomina matriz de varianzas-covarianzas y se suele denotar como Σ a

$$\Sigma = \begin{pmatrix} Cov(X, X) & Cov(X, Y) \\ Cov(Y, X) & Cov(Y, Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{XX} & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$$

Matriz de varianzas-covarianzas y matriz de correlaciones

Sea (X,Y) una variable bidimensional Notemos que

- $Cor(X,X)=\rho_{XX}=1.$
- $Cor(Y,Y)=\rho_{YY}=1.$
- $\rho_{XY}=Cor(X,Y)=Cor(Y,X)=\rho_{YX}.$

Se denomina matriz de correlaciones a

$$R=\begin{pmatrix} Cor(X,X) & Cor(X,Y) \\ Cor(Y,X) & Cor(Y,Y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \rho_{XY} \\ \rho_{YX} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \rho_{XY} \\ \rho_{XY} & 1 \end{pmatrix}.$$

Distribuciones multidimensionales

Conceptos básicos. Función de probabilidad y de distribución.

Consideremos un vector compuesto de n variables aleatorias discretas $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

Su **función de probabilidad** es

$$\begin{aligned} P_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= P\Big((X_1, X_2, \ldots, X_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big) \\ &= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n). \end{aligned}$$

Su función de **distribución de probabilidad** es

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n).$$

Independencia

Definición independencia

Diremos que la variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son **INDEPENDIENTES** cuando

$$P_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P_{X_1}(x_1) \cdot P_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot P_{X_n}(x_n).$$

Propiedad

Las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son **INDEPENDIENTES** si y solo si

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n).$$

Conceptos básicos

Vector de medias

Si denotamos $E(X_i) = \mu_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ el **vector de medias** es

$$E(X_1, X_2, \ldots, X_n) = (E(X_1), E(X_2), \ldots, E(X_n)) = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n).$$

Covarianza y varianzas

Si denotamos $\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j)$ para todo i, j en $1, 2, \ldots n$ entonces tenemos que

- $\sigma_{ii} = Cov(X_i, X_i) = \sigma_{ii} = \sigma_i^2$.
- $\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j) = Cov(X_j, X_i) = \sigma_{ji}$.

Conceptos básicos

Si denotamos $\rho_{ij} = Cor(X_i, X_j)$ para todo i, j en $1, 2, \dots n$ entonces tenemos que

- $\rho_{ii} = Cor(X_i, X_i) = 1.$
- $\rho_{ij} = Cor(X_i, X_j) = Cor(X_j, X_i) = \rho_{ji}.$

Matrices de varianzas-covarianzas y de correlaciones

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$