Matemáticas III. Ejercicios resueltos

Ricardo Alberich

Table of Contents

# Matemáticas III. Algunos EJERCICIOS para ENTRENAR el examen de los temas de: Probabilidad, Variables Aleatorias y Distribuciones Notables.

## Ejercicio 1

Sean y dos sucesos tales que ¿Qué vale ?

### Solución:

Tenemos que y también . De donde, utilizando que tenemos que . Y ahora calculamos lo que se pide

## Ejercicio 2

¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos de dos dados de parchís perfectos sea en los siguientes tres casos?

a). Tiro un dado dos veces y sumo los resultados.

b). Tiro a la vez dos dados blancos y sumo los resultados.

c). Tiro a la vez un dado rojo y uno azul y sumo los resultados.

### Solución:

En las tres situaciones a), b) y c) los casos posibles son los siguientes pares dónde el primer elemento es el Dado1 (sea del color que sea) y el segundo es el Dado 2 (de cualquier color) .

Así que

## Ejercicio 3

Sea una variable aleatoria que cuenta el número de de una moneda trucada una distribución . Sabemos que ¿Cuál es la probabilidad de obtener **CRUCES** o menos? (Indicación construid la variable que cuenta el número de **CRUCES**.)

### Solución:

Sea la variable que cuenta el número de cruces en el mismo experimento. Obviamente tenemos que . Así que

## Ejercicio 4

Si es una variable aleatoria con distribución y sabemos que ¿Qué vale ?

### Solución:

Sabemos que la distribución exponencial carece de memoria lo que quiere decir que . En nuestro caso

## Ejercicio 5

Cuatro personas con cuatro gorras diferentes las lanzan al aire para celebrar la victoria de su equipo. Cuando caen las recogen al azar. Estudiar la distribución de la variable que nos da el número de gorras que se quedan con su dueño.

### Solución:

library(combinat)  
Casos=as.data.frame(matrix(unlist(permn(1:4)),byrow=TRUE,ncol=4))  
names(Casos)=paste("Persona",1:4,sep="")  
Casos$Aciertos=unlist(apply(Casos[,1:4],MARGIN=1,FUN=function(x) sum(x==c(1:4))))  
Casos

## Persona1 Persona2 Persona3 Persona4 Aciertos  
## 1 1 2 3 4 4  
## 2 1 2 4 3 2  
## 3 1 4 2 3 1  
## 4 4 1 2 3 0  
## 5 4 1 3 2 1  
## 6 1 4 3 2 2  
## 7 1 3 4 2 1  
## 8 1 3 2 4 2  
## 9 3 1 2 4 1  
## 10 3 1 4 2 0  
## 11 3 4 1 2 0  
## 12 4 3 1 2 0  
## 13 4 3 2 1 0  
## 14 3 4 2 1 0  
## 15 3 2 4 1 1  
## 16 3 2 1 4 2  
## 17 2 3 1 4 1  
## 18 2 3 4 1 0  
## 19 2 4 3 1 1  
## 20 4 2 3 1 2  
## 21 4 2 1 3 1  
## 22 2 4 1 3 0  
## 23 2 1 4 3 0  
## 24 2 1 3 4 2

table(Casos$Aciertos)

##   
## 0 1 2 4   
## 9 8 6 1

Sea número de personas con su propio sombrero, el dominio es .

Como son equiprobables y los casos posibles son tenemos que

Contando los casos tenemos que

|  |  |
| --- | --- |
| Aciertos | Frecuencia |
| 0 | 9 |
| 1 | 8 |
| 2 | 6 |
| 4 | 1 |

por lo tanto

Calculemos la esperanza y la varianza

.

## Ejercicio 6

Diseñamos un examen tipo test de preguntas con opciones cada una de la que sólo una es correcta. Cada pregunta vale un punto. Supongamos que un estudiante contesta todas las preguntas al azar. Se pide

a). Si cada pregunta vale un punto y cada fallo 0 puntos ¿Cuál es el valor esperado de la nota del estudiante en función de ?.

b). En función de ¿cuál es la el valor que tenemos que asignar a cada respuesta incorrecta para que la nota esperada del estudiante que contesta al azar sea ?

c). Puntuando como decidáis en el apartado anterior ¿Cuál es la varianza de la nota de un estudiante que contesta al azar?

### Solución:

Sea el número de preguntas que acierta el estudiante que contesta al azar. Tiene como probabilidad de acertar . Como contesta al azar y de forma independiente cada pregunta sigue una distribución .

La nota es . Así que el valor esperado es

Ahora puntuamos restando por cada pregunta incorrecta. Entonces la nota es . Por lo tanto el valor esperado es

Así que el valor que hace la esperanza cero debe cumplir

de donde obtenemos que .

Así que la nota penalizando es

Ahora nos piden la varianza de la nota cuando penalizamos las respuestas incorrectas

## Ejercicio 7

Consideremos la función de densidad de una cierta variable continua

Se pide

a). Calcular

b). Calcular la función de distribución de .

c). Calcular .

### Solución:

Para calcular utilizaremos que una densidad es positiva y que .

Por lo tanto tenemos que

Por lo tanto

Así que la función de densidad es

Calculemos su función de distribución

En definitiva la función de distribución es

El valor esperado es

y la varianza

## Ejercicio 8

Si , y son tres sucesos tales que , y que . Calculad .(*0.5 puntos*)

### Solución:

La probabilidad pedida es P(A/C)-

## Ejercicio 9

Lanzamos un dado de 12 caras numeradas con enteros del 1 al 12 sobre una mesa plana. Observamos el número superior del dado. Suponiendo equiprobabilidad de todas las caras calcular la probabilidad de que salga mayor que 8 si el resultado es par. (*1 punto*)

### Solución:

## Ejercicio 10

Lanzamos una moneda con probabilidad de cara hasta que sale cara dos veces o bien la hemos lanzamos 5 veces, lo primero que ocurra.

Denotemos por la variable aleatoria que determina el número de tiradas de la moneda.

Se pide:

a). Describid adecuadamente el espacio muestral de la variable . (**0.5 puntos**)

b). Calcular su función de densidad. (**1 punto**)

c). Calcular . (**0.5 puntos**)

### Solución:

De notemos los sucesos elementales por = cara =cruz así el espacio muestral es

Si es el número de tiradas su dominio queda determinado por

Calculemos los valores de su función de probabilidad

## Ejercicio 11

Sea una variable con distribución uniforme en el intervalo . Consideremos la variable . Se pide

* a). Calcular la función de distribución de (**1 punto**)
* b). Calcular la función de densidad de . (**0.5 puntos**)
* c). Calcular el cuantil 0.95 de es decir un valor tal que . (**0.5 puntos**)

### Solución:

Recordemos que

La variable tendrá por dominio .

Sea entonces ya que como entonces . Así que la función de distribución es

su densidad es

El cuantil es el valor tal que . Por lo tanto

así que , de donde

## Ejercicio 12

Sea una v.a. discreta de dominio . Sabemos que para . Calculad . (**0.5 puntos**)

### Solución:

Obviamente

## Ejercicio 13

Sea una variable aleatoria normal estándar. Tenemos que pnorm(-0.2)=0.4207. Calculad . (**0.5 puntos**)

### Solución:

Por simetría de la normal estándar sabemos que por lo tanto

Con R

2\*pnorm(-0.2)

## [1] 0.8415

## Ejercicio 14

**(3 puntos)** Consideremos la v.a. con función densidad

a). Calculad el valor de para que sea función de densidad.

b). Para el anterior valor de calculad la función de distribución de .

c). Para el anterior valor de calculad .

d). Para el anterior valor de calculad .

### Solución

Concurso redactar y subir al foro ¡¡¡décimas extra.!!!