Taller 2 entrega problemas - Probabilidad, Variables aleatoria , distribuciones notables y Teorema Central del Límite

SOLUCIONES DEL TALLER 2

Table of Contents

# Taller 2 evaluable. Entrega de problemas

Taller en grupo entregad las soluciones en Rmd y html o pdf, o si lo hacéis mano escaneado …

## Problema 1

Encuentra un ejemplo de tres sucesos tales que y sean independientes, pero en cambio no sean condicionalmente independientes dado .

### Solución

Recordemos las definiciones

* Sucesos independientes: los sucesos y son independientes si .
* Independencia condicional: y son sucesos condicionalmente independientes respecto de otro suceso si .

Consideremos el espacio muestral en el que

Sean los sucesos , y tenemos que

Además tenemos que

, , y

* Los sucesos y son independientes pues y .
* Los sucesos y NO son sucesos condicionalmente independientes respecto a ya que $P(A\cap B/C)\not =P(A/C)\cdot P(B/C)$. Efectivamente que es distinta de .

## Problema 2

Verificar que:

es una función de distribución y hallar la función de densidad para . Calcular también .

### Solución

Hay que comprobar que:

* : evidente
* : evidente
* : evidente
* Y que es continua (por la derecha): es continua así que lo es a derecha e izquierda

La densidad es la derivada de la distribución

Nos piden esta probabilidad

## Problema 3

Sea una variable continua con función de densidad:

Hallar la función de distribución .

### Solución

La punción de distribución es

Haremos tres casos

* Si entonces
* Si entonces
* Si entonces

En resumen la función de distribución de es

## Problema 4

Se lanza una moneda al aire hasta que sale cara. Supongamos que cada tirada es independiente de las otras y que la probabilidad de que salga cara cada vez es .

* 1. Demostrar que la probabilidad de que hagan falta un número impar de lanzamientos es donde .
  2. Encontrar el valor de tal que la probabilidad de que necesitemos un número impar de intentos sea .
  3. ¿Existe un valor de tal que la probabilidad de que haga falta un nombre impar de intentos sea ?

### Solución

La variable numero de intentos PARA conseguir la primera cara sigue una ley pero empezando en 1 pues contamos el intento en el que se obtiene cara. Entonces sabemos que su función de probabilidad es para y cero en el resto de casos.

En el apartado a) nos piden la probabilidad de lanzamientos impares que es

En el apartado b) nos piden el valor de tal que ; resolviendo la ecuación obtenemos que

En el apartado c) nos piden para que la probabilidad de impar y par sea la misma despejando obtenemos que que NO es un valor posible para la variable; dejaría de ser variable aleatoria. Así que si contamos el intento del éxito/cara no es posible que la probabilidad de par e impar sean iguales.

## Problema 5

La proporción de niños pelirrojos es 1 cada 10.000. En una gran ciudad se produjeron 5.000 nacimientos en 2020, aproximar por la distribución de Poisson la probabilidad que ninguno de los nacidos ese año sea pelirrojo. Aproximar la probabilidad de que nazca exactamente 1 niño pelirrojo y la de que hayan nacido al menos 2 pelirrojos.

### Solución

Con los datos del problema sabemnos que . Suponiendo independencia entre el color del pelo de los 5000 nacimientos la variable número de pelirrojos entre 5000 nacimientos sigue una distribución binomial . Esta distribución se puede aproximar por una .

Aproximando por una Poisson tenemos que

Con R podemos calcular el valor exacto y el aproximando

dbinom(1,size = 5000,prob =1/10000)

## [1] 0.3032881

dpois(1,5000/10000)

## [1] 0.3032653

Ahora probabilidad de al menos dos Pelirrojos es

Con R podemos calcular el valor exacto y el aproximando

1-pbinom(1,size = 5000,prob =1/10000)

## [1] 0.09019643

1-ppois(1,5000/10000)

## [1] 0.09020401

## Problema 6

Las peticiones a un servidor informático llegan a un ritmo de medio de 15 peticiones por segundo. Sabemos que el nombre de peticiones que llegan en un segundo es una variable aleatoria de Poisson.

* 1. Calcular la probabilidad que no lleguen peticiones en un segundo.
  2. Calcular la probabilidad que lleguen más de 10 peticiones en un segundo.

### Solución

La variables = número de peticiones por segundo y nos dicen sigue una ley ) luego la función de probabilidad es para

En el apartado a) nos piden

Con R

dpois(0,15)

## [1] 3.059023e-07

round(dpois(0,15),7)

## [1] 3e-07

En el apartado a) nos piden

Es un cálculo farragoso, lo podemos hacer con las tablas de la Poisson o con R

1-ppois(10,15)

## [1] 0.8815356

El cálculo manual

x=0:10  
x

## [1] 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

probabilidades=(15^x)/factorial(x)\*exp(-15)  
probabilidades

## [1] 3.059023e-07 4.588535e-06 3.441401e-05 1.720701e-04 6.452627e-04  
## [6] 1.935788e-03 4.839470e-03 1.037029e-02 1.944430e-02 3.240717e-02  
## [11] 4.861075e-02

1-sum(probabilidades)

## [1] 0.8815356

Como se observa se obtiene el mismo resultado.

## Problema 7

Tenemos que elegir entre dos tarjetas gráficas (TG1 y TG2) para entrenar su red neuronal. El tiempo de vida del la TG1 se ha modelado según una (la probabilidad de un tiempo de vida negativo es despreciable) y en TG2 según una .

* 1. ¿Qué tarjeta elegimos si el tiempo de duración objetivo del sistemas es de 20000 horas?
  2. ¿Y si es de 24000 horas?

### Solución

Tenemos dos variables que sigue una ley y otra que tiene una distribución

En el apartado a) nos piden que comparemos contra que

En ambos casos para

Con R la probabilidad de que es

1-pnorm(20000,mean=120000, sd=140000)

## [1] 0.7624747

y en el segundo caso

1-pnorm(20000,mean=22000, sd=1000)

## [1] 0.9772499

Así que la opción 2 es mejor.

Para el apartado b). procediendo de manera similar, la opción 1 es mejor

la probabilidad de que es

1-pnorm(24000,mean=120000, sd=140000)

## [1] 0.7535534

y en el segundo caso

1-pnorm(24000,mean=22000, sd=1000)

## [1] 0.02275013

## Problema 8

La probabilidad de que un jugador de básquet enceste es . ¿Cuántos lanzamientos tiene que hacer como mínimo (aproximadamente) para que la probabilidad de que la media de aciertos esté a distancia 0.01 de sea de 0.99?

### Solución

Sea

Entonces sigue una ley Binomial la proporción de éxitos para es . Nos piden encontrar tal que

Ahora utilizaremos las propiedades básicas de la probabilidad y algunas manipulaciones algebraicas

Por el Teorema central del límite sabemos que se aproxima a una distribución cuando . Utilizando esta aproximación y las propiedades una normal estándar tenemos que

Hemos reducido el problema a encontrar tal que

operando

Entonces lo que buscamos es un cuantil de la normal que es igual al menos a .

qnorm(0.995)

## [1] 2.575829

Luego tengo la ecuación elevando al cuadrado toda la ecuación

operando obtenemos que

Ahora resulta que es desconocida pero como ya vimos en las presentaciones esta función alcanza su máximo en .

Así que en el peor de los casos

Así que tomando el entero superior es el número de canastas que el jugador debe lanzar para, en el peor de los casos, estimar su proporción de tiros acertados con un error inferior a y con una probabilidad superior al . Son MUCHOS TIROS, realmente el TCL hace una aproximación bastante grosera, y en el peor de los casos, pero es un sencillo ejemplo para comprender la utilizad de esta aproximación.

## Problema 9

Sea con , una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria uniforme en el intervalo . Aplicando el Teorema Central del Límite, hallar la probabilidad aproximada de que .

### Solución

Tenemos una muestra aleatoria simple de una v.a. con distribución uniforme entonces y por lo tanto .

Entonces , y por lo tanto la deviación típica de la suma es

Límite sabemos que Bajo estas condiciones y por el Teorema Central del Límite sabemo que sigue aproximadamente una distribución

Luego