Taller 1 entrega problema en grupo. MAT3 (estadística) GIN2 2020-2021 - Probabilidad, Variables Aleatorias, Distribuciones Notables 28-03-2020.

nombre1, apellido1\_1 apellido1\_22; nombre2, apellido2\_1 apellido2\_2;…

# Taller1 evaluable. Entrega de problemas

Taller en grupo entregad las soluciones en .Rmd y .html o .pdf. o escribidlas de forma manual y escanear el resultado, en un solo fichero.

## Problema 1

Sean , y tres sucesos tales que , y . Calcular .

### Solución

## Problema 2

Consideremos la v.a. continua que tiene por función de densidad para a alguna constante :

1. Calculad para que sea densidad y especificad su dominio .
2. Calculad la función de distribución de la v.a. ; .
3. Calculad y .
4. Calcula en cuantil de .

### Solución

Apartado 1.

luego tenemos que y

Apartado 2.

Apartado 4

Nos piden el cuantil

despejando de la ecuación

finalmente

## Problema 3

Sea una variable discreta con función de probabilidad :

1. Hallad para que sea función de probabilidad.
2. Hallad la función de distribución .
3. Calculad y .
4. Calculad el cuantil 0.5 de de .

### Solución

Apartado 1.

Luego y la función de probabilidad es

Apartado 2.

Apartado 3.

## Problema 4

Tenemos un dado, bien equilibrado, de doce caras numeradas del 1 al 12 ([dodecaedro dados de rol](https://es.wikipedia.org/wiki/Dados_de_rol)).

1. Calcular la función de probabilidad de la variables número de la cara superior del dado en un lanzamiento, calcular E(X) y .
2. Calcular la función de distribución de y el cuantil .
3. Si es al v.a. que cuenta el número de veces que tiramos el dado hasta obtener el primer calcular la función de distribución de .

### Solución

Apartado 1.

## Problema 5

La proporción de niños pelirrojos es 1 cada 100. En una ciudad se produjeron 500 nacimientos (independientes) nacimientos en 2020, modelad mediante una distribución binomial la variable = número de niños pelirrojos nacidos entre los 500 niños. Utilizad R para calcular de forma exacta

1. La probabilidad de que ninguno de los nacidos ese año sea pelirrojo.
2. La probabilidad de que nazcan más de 2 niños pelirrojos
3. Repetir los cálculos con R utilizando una aproximación Poisson

### Solución

La probabilidad de pelirrojo es , tener un hijo con el pelo pelirrojo se puede interpretar como un experimento Bernouilli , en el que el éxito es que el niño sea pelirrojo. Si consideramos los nacimientos sucesos independientes del mimo experimento tenemos que número de niños pelirrojos entre nacimientos seguirá una ley de distribución .

Nos piden la probabilidad de ningún pelirrojo entre 500

Con R hacemos

n=500  
p=0.01  
choose(5,0)\*0.01^0\*(1-0.01)^500

## [1] 0.006570483

dbinom(0,size=n,prob=p)

## [1] 0.006570483

se observa que, de cualquier forma, obtenemos el mismo resultado.

La probabilidad de que nazcan más de 2 niños pelirrojos es

n=500  
p=0.01  
1-pbinom(2,size=n,p=p,lower.tail = TRUE)# por complementario

## [1] 0.8766142

pbinom(2,size=n,p=p,lower.tail = FALSE)# agrupando a derecha

## [1] 0.8766142

1-sum(dbinom(c(0,1,2),size=n,prob=p))

## [1] 0.8766142

La aproximación por Poisson consiste en suponer que sigue, aproximadamente, una ley

dpois(0,lambda=5)

## [1] 0.006737947

1-ppois(2,lambda=n\*p,lower.tail = TRUE)# por complementario

## [1] 0.875348

ppois(2,lambda=n\*p,lower.tail = FALSE)# agrupando a derecha

## [1] 0.875348

1-sum(dpois(c(0,1,2),lambda=n\*p))

## [1] 0.875348

Como se ve los resultados son similares a los exactos con la distribución binomial.

## Problema 6

Las consultas a una base datos llegan a un ritmo de medio peticiones por segundo. Sabemos que el nombre de peticiones que llegan en un segundo es una variable aleatoria que aproximadamente tienen una distribución de Poisson.

1. Calcular la probabilidad que lleguen más de 10 peticiones en 3 segundos utilizad R.
2. Calcular que entre una consulta y la siguiente pasen más de segundos.
3. Calcular el cuantil 0.5 de numero de peticiones en 10 segundos utilizad R.

### Solución

Tenemos que es el rimo de peticiones **por segundo**. Así en segundos el número de peticiones en el intervalo tendrá un ritmo peticiones.

En general número de peticiones en el intervalo seguirá una ley .

Apartado 1. Aquí nos piden donde sigue una ley , .

Para el cálculo final hemos utilizado R

ppois(10,lambda=15)# P(X<=10)

## [1] 0.1184644

1-ppois(10,lambda=15) # 1-P(X<=10) por complementario

## [1] 0.8815356

ppois(10,lambda=15,lower.tail=FALSE)# sumando la "cola" superior

## [1] 0.8815356

Apartado 2.

Sabemos que el tiempo en segundos entre dos eventos consecutivos de un proceso Poisson de parámetro eventos por segundo sigue una ley con proporción el ritmo o la ratio (*rate*) por segundo (para la exponencial en R el parámetro es rate=5)

Nos piden

$$P(T>0.5)=1-P(T\leq 0.5)=1-\left(1-\mathbb{e}^{-5\cdot 0.5}\right)
`1-(1-exp(-5\*0.5))`=`r 1-(1-exp(-5\*0.5)).$$

1-(1-exp(-5\*0.5))

## [1] 0.082085

pexp(0.5,rate = 5)

## [1] 0.917915

1-pexp(0.5,rate=5)# por complementario, rate=lambda=5

## [1] 0.082085

pexp(0.5,rate=5,lower.tail=FALSE)# acumulado a derecha

## [1] 0.082085

Apartado 3.

Nos piden el cuantil 0.5 de numero de peticiones en 10 segundos. Al ser la v.a. discreta el cuantil es el primer valor entero tal que donde sigue una ley

Si lo calculamos con , el código es el siguiente:

qpois(p = 0.5,lambda=50)

## [1] 50

**EXTRA**

Podemos también calcular una lista grande de valores de por ejemplo de a

# El primer valor que supere 0.5 es el cuantil 0.5  
round(ppois(0:60,lambda=50),4)

## [1] 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000  
## [11] 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000  
## [21] 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0001 0.0001 0.0003 0.0005 0.0009  
## [31] 0.0016 0.0027 0.0044 0.0070 0.0108 0.0162 0.0238 0.0340 0.0474 0.0646  
## [41] 0.0861 0.1123 0.1435 0.1798 0.2210 0.2669 0.3167 0.3697 0.4249 0.4812  
## [51] 0.5375 0.5927 0.6458 0.6959 0.7423 0.7845 0.8221 0.8551 0.8836 0.9077  
## [61] 0.9278

# Ejercicio interpretar el siguiente código   
c(0:60)[which(round(ppois(0:60,lambda=50),4)>=0.5)][1]

## [1] 50

## Problema 7

Tenemos que elegir entre dos programas (Prog1 y Prog2), el objetivo es elegir el programa más rápido en tiempo de respuesta en nuestro cluster de ordenadores. El tiempo de ejecución del Prog1 se ha modelado según una (la probabilidad de un tiempo de ejecución negativo es despreciable) y en Prog2 según una . Utilizad R para el cálculo final de las probabilidades de la normal. (Utilizad R para el cálculo final)

1. ¿Qué Programa elegimos si queremos que el el 90% de los casos el tiempo de respuesta sea menor ?
2. Calcular la probabilidad de que el tiempo de ejecución sea mayor que 130 para cada algoritmo.

### Solución

**Apartado 1.**

Para responder tenemos que calcular el cuantil para y y que escoger el algoritmo con el menor cuantil

El cuantil para es

qnorm(p=0.9,mean=100,sd=300)

## [1] 484.4655

en el de los casos el tiempo e ejecución del algoritmo 1 es menor que 484.4655.

El cuantil para es

qnorm(p=0.9,mean=90,sd=300)

## [1] 474.4655

en el de los casos el tiempo e ejecución del algoritmo 1 es menor que 474.4655.

Así que respecto al cuantil 90% el algoritmo con menor cuantil 0.9 y por lo tanto mejor será el algoritmo 2.

**Apartado 2.**

Nos piden

Lo hemos calculado con R de diversas formas:

pnorm(130,100,300)# P(X\_1 <= 130), función de distribución

## [1] 0.5398278

1-pnorm(130,100,300)# 1\_P(X\_1 <= 130), cálculo por complementario

## [1] 0.4601722

pnorm(130,100,300,lower.tail=FALSE)# P(X\_1 >130), cálculo directo por cola derecha

## [1] 0.4601722

Nos piden

pnorm(130,90,300)# P(X\_2 <= 130), función de distribución

## [1] 0.5530351

1-pnorm(130,90,300)# 1\_P(X\_2 <= 130), cálculo por complementario

## [1] 0.4469649

pnorm(130,90,300,lower.tail=FALSE)# P(X\_2 >130), cálculo directo por cola derecha

## [1] 0.4469649

## Problema 8

En la NBA el [José Calderón](https://es.wikipedia.org/wiki/Jos%C3%A9_Manuel_Calder%C3%B3n) fue en la temporada [2008-09 el jugador de baloncesto](https://es.wikipedia.org/wiki/L%C3%ADderes_en_porcentaje_de_tiros_libres_de_la_NBA) con mejor porcentaje tiros libres anotados un 98.05%.

Justificar los cálculos con notación matemática y haced el cálculo final con R.

1. ¿Cual es el valor esperando y la varianza del número tiros hasta acertar 10 tiros libres?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte al menos 40 tiros libres de forma consecutiva?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que haga una serie de 100 tiros hasta obtener el tercer fallo?

### Solución

**Apartado 1** La probabilidad de que Calderón acierte canasta es .

Sea el número de tiros fallados (así que es el número de tiros) hasta acertar 10 tiros libres, esta variable tendrá una distribución binomial negativa pues cuanta el número de intentos para obtener 10 “éxitos” y se para. Si la definimos así sabemos que

Luego de media, incluidos los 10 aciertos, necesitará no llega a 0.2 tiros antes de acertar los 10. Dicho de otra manera la media de tiros que necesita no llega 10.2 tiros libres para acertar 10.

Si hacemos la varianza del número de tiros es

**Apartado 2**

En este caso la v.a. número de tiros acertados hasta el primer fallo sigue una distribución geométrica que cuenta el número de aciertos (“fracasos”) antes del primer fallo (“éxito” con probabilidad ).

Bajo estas condiciones sabemos que

si (no contamos el fallo).

Nos piden

Con R

0.9805^(40+1) #P(X>40)P(X>=41) acertar más de 40 es acertar 41 o más X>=41

## [1] 0.4460171

1-(1-(1-0.0195)^(40+1)) #P(X>40)=1-P(X<= 40)=1-(1-(1-0.0195)^(40+1))

## [1] 0.4460171

1-pgeom(40,prob=1-0.9805) #1-P(X<=40)

## [1] 0.4460171

pgeom(40,prob=1-0.9805,lower.tail=FALSE) # P(X>40)=P(X=41)+P(X=42)+.....

## [1] 0.4460171

# .... acumulado la cola superior

**Apartado 3**

Ahora nos piden la probabilidad de que haga una serie de 100 tiros antes de tener tres fallos. Es decir que tire 100 veces acabando en fallo en el 100 y que el resto de de los 99 primero tiros tengan 2 fallos y 97 aciertos.

La variable que puede responder a esta pregunta es = número de tiros hasta obtener el tercer fallo. Esta variable sigue una ley .

Bajo estas condiciones sabemos que

para .

La probabilidad pedida es

Con R, se puede hacer de varias maneras:

choose(97+3-1,3-1)\*0.9805^97\*(1-0.9805)^3

## [1] 0.005325399

dnbinom(97,size=3,prob=1-0.9805)

## [1] 0.005325399