

Plan du chapitre « Magnétostatique »

1. Action du champ magnétique
2. Rappels de magnétostatique du vide
3. Dipôle magnétique

- Certains effets magnétiques sont connus depuis l'Antiquité, en particulier l'attraction exercée sur le fer par la magnétite (Aristote)
 - Le cas des milieux magnétiques sera vu au chapitre suivant
- Le lien avec l'électricité date du 19^e siècle
- Pour les mêmes raisons qu'en électrostatique, l'action à distance décrivant les effets magnétostatiques a été progressivement remplacée par une action locale, à l'aide du champ magnétique

- Quelques ordres de grandeur

□ Etoile à neutron	10^8 T
□ Bobine supraconductrice	$10 - 50$ T
□ Electroaimant	2 T
□ Petit barreau aimanté	10^{-2} T
□ Espace interstellaire	10^{-10} T
□ Blindage magnétique	10^{-14} T
- On utilise souvent le Gauss : $1 G = 10^{-4}$ T
- En France, B terrestre vaut environ 400 mG (horizontal) et 40 mG (vertical)

Plan du chapitre « Magnétostatique »

1. Action du champ magnétique
 1. Action d'un champ B sur une charge
 2. Action d'un champ B sur un courant
2. Rappels de magnétostatique du vide
3. Dipôle magnétique

Force de Lorentz

- Peut servir de définition à B : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$
 - B créé par toutes les charges en mouvement, autres que q
- Le champ B est un pseudo-vecteur, ou vecteur axial
- Le champ E est le champ électrique (et non électrostatique) car cette loi reste valable pour les champs dépendants du temps
- La dimension de B est $[B] = \text{M I}^{-1} \text{T}^{-2}$ et son unité est le kg/A/s^2 ou Wb/m^2 ou T
 - Le Tesla est l'induction magnétique qui, répartie normalement et uniformément sur 1 m^2 , produit à travers cette surface un flux de 1 Wb

Plan du chapitre « Magnétostatique »

1. Action du champ magnétique
 1. Action d'un champ B sur une charge
 2. Action d'un champ B sur un courant
2. Rappels de magnétostatique du vide
3. Dipôle magnétique

Action de B sur une distribution volumique de courant

- Pour une distribution volumique de charges ρ constituée d'une seule espèce de charges de vitesse moyenne v , la force qui s'exerce sur un élément de volume dV s'écrit:

$$d\vec{F} = \vec{F}_v dV \quad \text{avec} \quad \vec{F}_v = \rho (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

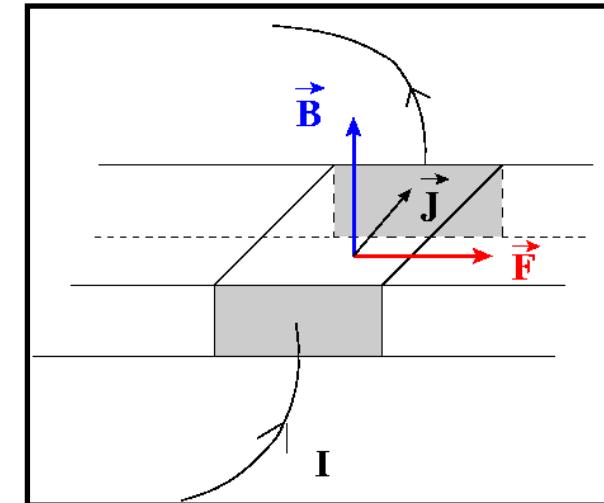
Densité volumique
de force

- Equation linéaire en fonction de ρ . Donc pour un milieu constitué de plusieurs charges :

$$\vec{F}_v = \rho_{tot} \vec{E} + \vec{J}_{tot} \times \vec{B}$$

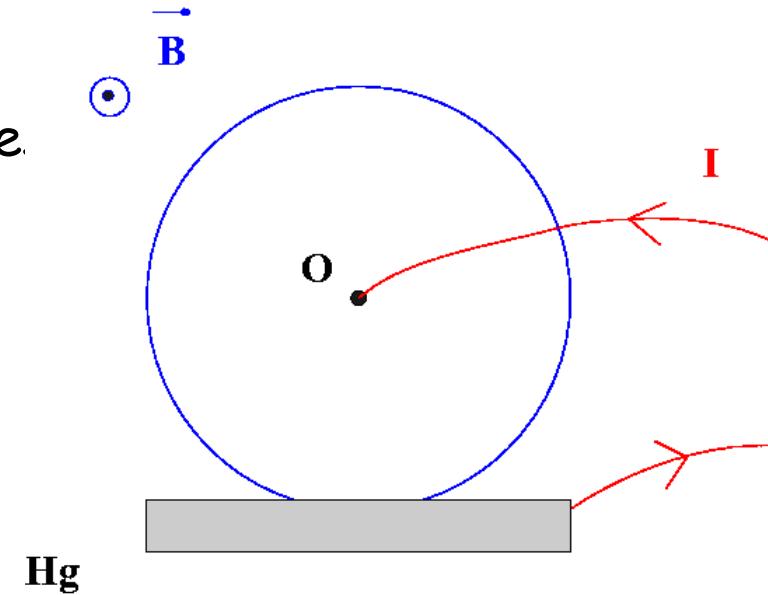
Application : Pompe électromagnétique

- La force magnétique s'exerce également sur les liquides
- On considère un tube isolant avec deux électrodes en regard
- Les porteurs de charge sont soumis à la force magnétique qu'ils transmettent au liquide, le mettant ainsi en mouvement
- Ces méthodes sont à la base de la « propulsion MHD » ou des systèmes de pompage sur la plupart des satellites



Application : roue de Barlow

- La **roue de Barlow** est le plus simple de moteurs électriques. Un disque circulaire conducteur de rayon R est plongé dans un champ B uniforme parallèle à l'axe de rotation du disque. Un courant d'intensité I traverse le disque depuis son axe vers un bain de mercure



- On peut montrer que le disque est soumis à une force qui tend à le faire tourner et que le moment par rapport au centre du disque vaut :

$$\Gamma = \frac{R^2 I B}{2}$$

Action de B sur une distribution surfacique et linéique de courant

- Un élément de surface dS de densité surfacique de courant J_s est soumis à la force :

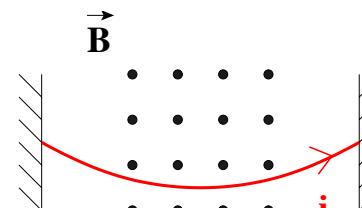
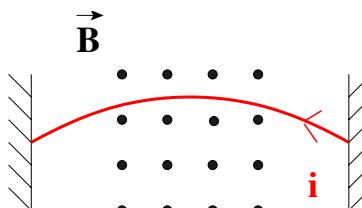
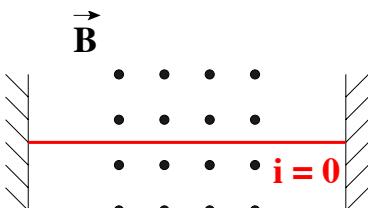
$$d\vec{F} = \vec{F}_s dS \quad \text{avec} \quad \vec{F}_s = \frac{dq}{dS} \vec{v} \times \vec{B} = \vec{J}_s \times \vec{B}$$

Densité surfacique
de force

- Un élément dl parcouru par un courant I est soumis à la force :

Force de Laplace

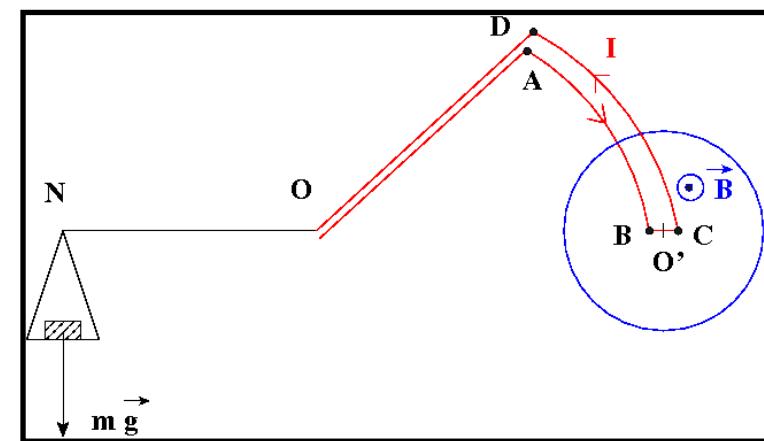
$$d\vec{F} = dq \vec{v} \times \vec{B} = I dl \times \vec{B}$$



Action d'un
champ B sur un
fil parcouru par
un courant

Application : balance de Cotton

- Dispositif permettant la mesure absolue de $0.01 \text{ T} < B < \text{quelques T}$
- Utilise la force de Laplace pour équilibrer par une masse la force créée par le champ B dans un conducteur
- On peut facilement montrer que la condition d'équilibre permet d'obtenir :
$$B = \frac{m g}{I a} \frac{ON}{OO'}$$
- De nos jours, on utilise plutôt des fluxmètres pour mesurer un champ absolu



Action d'un champ magnétique sur un circuit fermé

- On considère un circuit indéformable (C) filiforme fermé. Dans un champ magnétique uniforme, la résultante \vec{F} des forces vaut :

$$\vec{F} = \oint_C I d\vec{l} \times \vec{B} = I \left(\oint_C d\vec{l} \right) \times \vec{B} = \vec{0}$$

- Le circuit n'est soumis qu'à un couple dont on peut montrer que le moment par rapport à O s'écrit :

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \times \vec{B} \quad \text{avec} \quad \vec{m} = I \vec{S}$$



Moment dipolaire magnétique du circuit

Plan du chapitre « Magnétostatique »

1. Action du champ magnétique
2. Rappels de magnétostatique du vide
 1. Champ B produit par un courant : loi de Biot et Savart
 2. Forces d'interaction entre courants permanents
 3. Théorème d'Ampère - Equations locales de la magnétostatique
 4. Expressions intégrées de A et B
 5. Méthodes de calcul en magnétostatique
 6. Quelques calculs classiques
3. Dipôle magnétique

- La magnétostatique est l'étude des champs magnétiques constants, créés par des aimants permanents ou par des courants constants
- Des charges électriques se déplaçant à vitesse constante créent des courants permanents dont les effets magnétiques entrent dans le cadre de la magnétostatique
- La conservation de la charge impose $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$
 - qui exprime le caractère conservatif du flux de J , c'est-à-dire de l'intensité

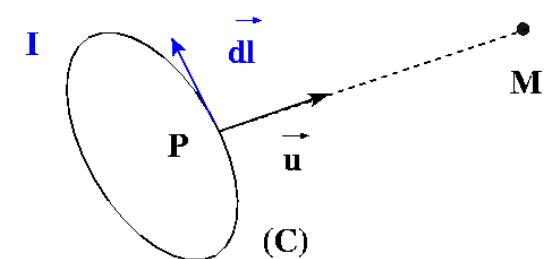
- On décrira principalement la magnétostatique à l'aide de conducteur parcourus par des courants
 - La structure du conducteur n'a pas d'influence
- On peut représenter les champs magnétiques par des lignes de champ, en utilisant le même formalisme qu'en électrostatique :
 - Champ tangent à la ligne de champ
 - Espacement entre les lignes relié à la valeur du champ

Circuit filiforme parcouru par un courant constant

- 1819 : Oersted observe qu'un courant dans un fil dévie l'aiguille d'une boussole aux alentours
- 1820 : Biot et Savart établissent la loi expérimentale qui relie B au courant

Biot et Savart $\longrightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C)} \frac{I \, d\vec{l} \times \vec{PM}}{PM^3}$

Perméabilité du vide $\longrightarrow \mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m ou N/A}^2$



- Pour une densité volumique de courant, Biot et Savart s'écrit :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V)} \vec{J}(P) \times \frac{\vec{PM}}{PM^3} \, dV$$

Remarques sur la loi de Biot et Savart

- Biot et Savart n'est pas une loi fondamentale de l'EM
- La loi de Biot et Savart ne dépend que du courant, et est **valable quelque soit la vitesse des particules qui créent le courant** : très faible dans un conducteur ohmique, mais voisine de c pour le faisceau de protons ultrarelativistes du LHC
 - Loi **phénoménologique** valable sur > 10 ordres de grandeur !

Remarque sur la loi de Biot et Savart

- Ne pas donner de forme différentielle à cette loi : **un élément de courant isolé n'existe pas en magnétostatique** (au contraire de l'électrostatique où on peut imaginer une charge ponctuelle isolée)

- La forme intégrale n'entraîne pas la forme différentielle :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I \, d\vec{l} \times \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

~~⇒~~

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \, d\vec{l} \times \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

- Ce n'est pas parce que $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx$ que $f(x) = g(x)$
 - La loi de Biot et Savart est une loi intégrale !

B est donné par l'intégrale sur un contour fermé de $\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\ell \wedge \mathbf{u}}{r^2}$, contribution élémentaire, que l'on désigne souvent par $d\mathbf{B}$ (fig. 1) :

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\ell \wedge \mathbf{u}}{r^2}.$$

On peut, sans changer le résultat de l'intégration, ajouter à $d\mathbf{B}$ la différentielle (vectorielle) $d\mathbf{a}$ d'un champ de vecteur $\mathbf{a}(P)$ quelconque. Le choix fait ci-dessus est celui correspondant à l'expression de $d\mathbf{B}$ la plus simple.

On peut être tenté de considérer $d\mathbf{B}$ comme le champ magnétique créé par l'élément de courant $I d\ell$; il faut bien s'en garder; on ne peut isoler un morceau d'un circuit et le considérer comme parcouru par un courant permanent. Nous préciserons ce point en 1.3.

Considérons un matériau conducteur formant un circuit fermé parcouru par des charges mobiles de densité ρ_m et de vitesse moyenne \mathbf{v} au point P (Fig. 11 . 3). La charge totale d'un élément de volume dV de ce matériau est nulle puisque la charge ρ_m est compensée par la charge volumique des ions fixes du cristal. En un point M suffisamment éloigné de P , la charge $\rho_m dV$ apparaît comme une charge ponctuelle mobile avec la vitesse \mathbf{v} ; cette charge en mouvement crée le champ magnétique élémentaire :

$$d\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \rho_m(P) dV \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{PM}}{PM^3} \quad \text{soit} \quad d\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{J} \times \frac{\mathbf{PM}}{PM^3} dV$$
Perez

Remarque : Il convient de ne pas attribuer à la contribution $d\mathbf{B}$ une autre signification que celle d'une étape dans le calcul du champ \mathbf{B} produit par une distribution stationnaire de courant. Par exemple, on ne confondra pas cette contribution avec le champ magnétique produit par une charge se déplaçant dans le vide à la vitesse \mathbf{v} .

La direction de $d\vec{B}$, qui entre dans la page à la figure 9.1 b), est celle du produit vectoriel $d\vec{s} \times \vec{u}$. On peut donc écrire l'équation 9.3 sous forme vectorielle :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{s} \times \vec{u}}{r^2} \quad (\text{la loi de Biot-Savart}). \quad (9.5)$$

Cette équation vectorielle et sa forme scalaire (voir l'équation 9.3) sont connues sous le nom de **loi de Biot-Savart**. Cette loi, qui est déduite expérimentalement, correspond à la loi de l'inverse des carrés. Elle permet de calculer le champ magnétique résultant \vec{B} produit en un point par différentes distributions de courant.

Attention : ce n'est pas parce que c'est écrit dans un livre que c'est vrai ! Vous devez garder un esprit critique

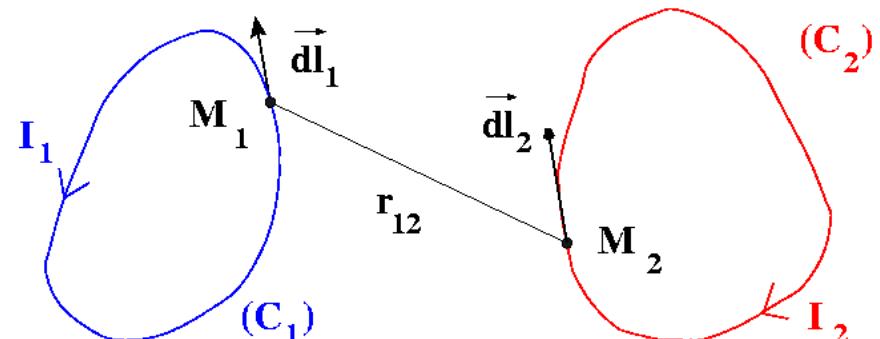
Plan du chapitre « Magnétostatique »

1. Action du champ magnétique
2. Rappels de magnétostatique du vide
 1. Champ B produit par un courant : loi de Biot et Savart
 2. Forces d'interaction entre courants permanents
 3. Théorème d'Ampère - Equations locales de la magnétostatique
 4. Expressions intégrées de A et B
 5. Méthodes de calcul en magnétostatique
 6. Quelques calculs classiques
3. Dipôle magnétique

Interaction entre circuits filiformes

- Biot et Savart permet de calculer le champ créé en M_2 par I_1 dans (C_1) :

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{(C_1)} \oint_{(C_2)} (\vec{dl}_1 \cdot \vec{dl}_2) \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

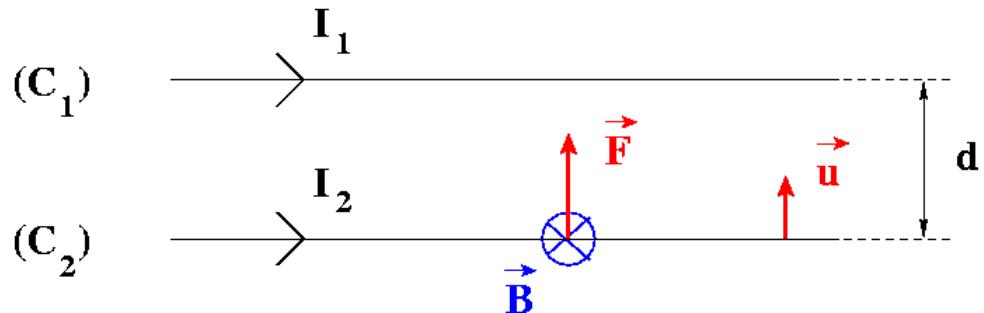


- En permutant les indices, on obtient l'expression de la force exercée par (C_2) sur (C_1) : $\Rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$
- Les forces totales s'exerçant entre deux circuits parcourus par des courants constants obéissent au principe de l'action et de la réaction
- Cette loi est une loi intégrale et n'est pas valable si on considère des portions de circuit !

Interaction entre deux courants parallèles

- Sur une longueur l :

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 l}{d} \vec{u}$$



La force est attractive si I_1 et I_2 sont de même signe, répulsive dans le cas contraire

- Définition de l'ampère : Un ampère correspond à l'intensité nécessaire pour que la force par mètre entre deux fils parallèles espacés de 1 m soit égale à $2,0 \cdot 10^{-7}$ N/m

Plan du chapitre « Magnétostatique »

1. Action du champ magnétique

2. Rappels de magnétostatique du vide

1. Champ B produit par un courant : loi de Biot et Savart
2. Forces d'interaction entre courants permanents
3. Théorème d'Ampère - Equations locales de la magnétostatique
4. Expressions intégrées de A et B
5. Méthodes de calcul en magnétostatique
6. Quelques calculs classiques

3. Dipôle magnétique

Conservation du flux magnétique

- La loi de Biot et Savart implique que le flux de \vec{B} à travers toute surface fermée est nul (\vec{B} est à flux conservatif) :

$$\oint\!\oint(S)\vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint(V) \vec{\nabla} \cdot \vec{B} dV = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \equiv 0$$

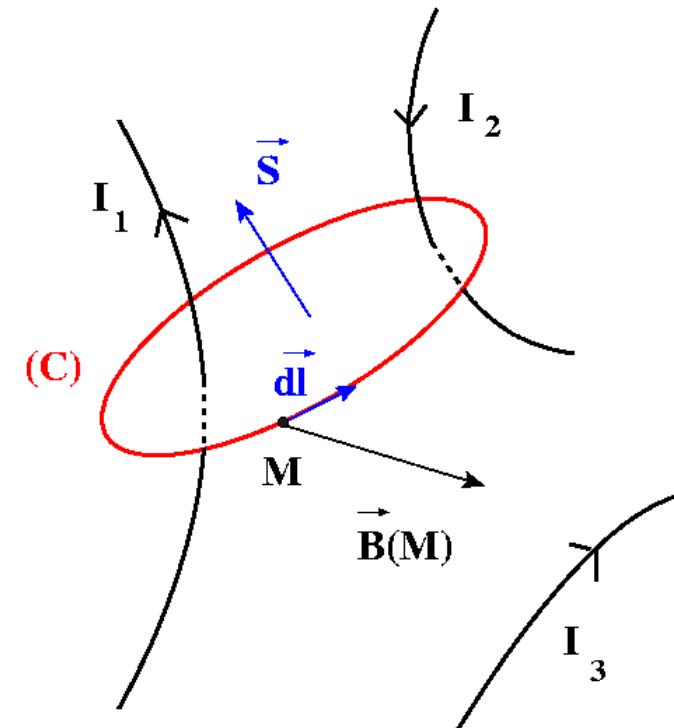
- Ceci implique qu'il n'existe pas de monopôles magnétiques

Théorème d'Ampère

- La circulation de B sur un contour fermé quelconque vérifie le **théorème d'Ampère**:

$$\underbrace{\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{\text{Expression intégrale}} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} = \iint_{(S)} \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}_{\text{Expression locale}}$$

- Loi reliant le courant total traversant une surface à l'intégrale du champ B sur le contour sur lequel s'appuie la surface
- Permet dans la pratique de déterminer B si le système présente un degré de symétrie suffisant



- Le théorème d'Ampère n'est rigoureusement valable que pour les phénomènes indépendants du temps
 - On l'appliquera également dans l'ARQS puisque J est à flux conservatif

Les équations de Maxwell de la magnétostatique (courants permanents)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0}$$

(MG)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{libre}$$

(MA)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

(MF)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

(MΦ)

- MΦ : le flux de B est conservatif
- MA : la circulation de B n'est pas conservative en présence de courants
- MF : la circulation de E (permanent) est conservative
- MG : le flux de E n'est pas conservatif en présence de charges libres

- On peut représenter un champ B par des lignes de champ, comme pour un champ électrique
- Les **lignes de champ** sont les courbes tangentes en chaque point au champ B
- Un **tube de champ** est une surface fermée constituée par l'ensemble des lignes de champ qui s'appuient sur un contour fermé
- Pour trouver les lignes de champ, on écrit souvent que $d\vec{l} \times \vec{B} = \vec{0}$

Lignes de champ

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{libre}}{\epsilon_0}$$

(MG)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{libre}$$

(MA)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$$

(MF)

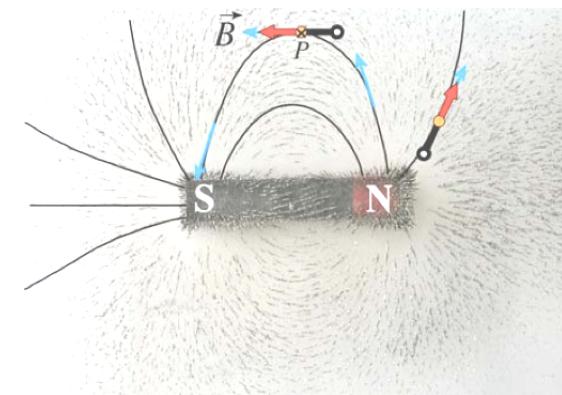
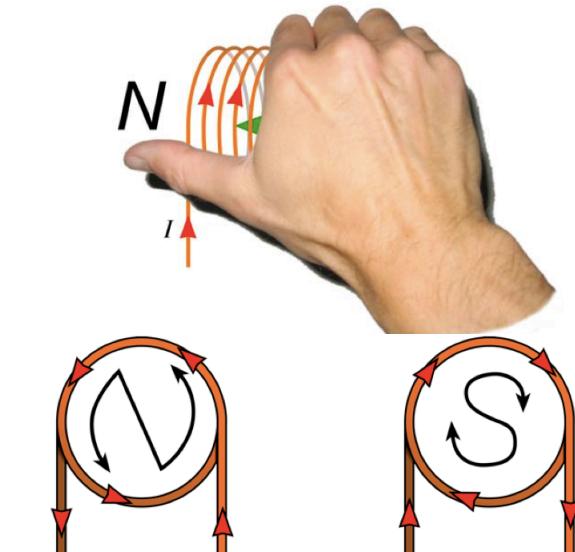
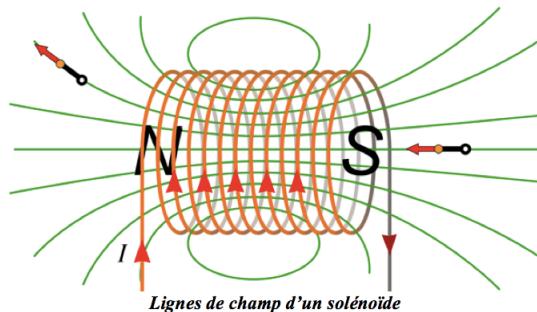
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

(MΦ)

- Les lignes de E sont issues des charges « + » et aboutissent sur les charges « - » (MG), ce ne sont pas des courbes fermées (MF)
 - Les lignes de B ne divergent pas à partir de points sources qui joueraient le rôle de *charge magnétique* (MΦ), ce sont des courbes fermées qui tournent autour des courants (MA)
- D'où l'invention des termes *divergence* (E diverge à partir de sa source ρ) et *rotationnel* (B tourbillonne autour de sa source J)

Lignes de champ d'un solénoïde ou d'un aimant permanent

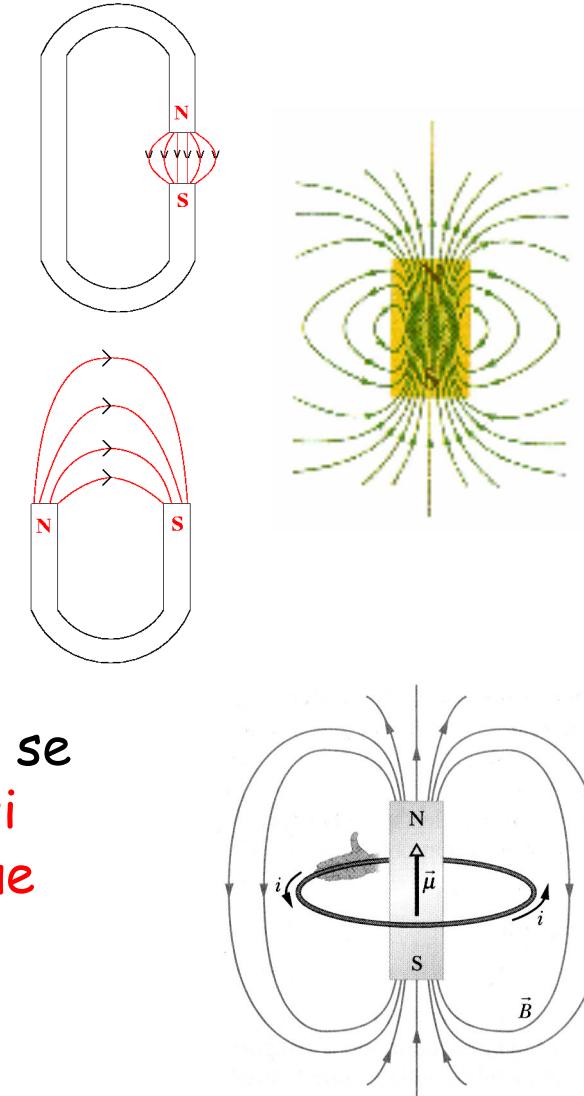
- Orientation du champ d'un solénoïde :
 - La règle de la main droite indique le pôle N
 - Une autre façon de procéder est de se placer selon l'axe et d'observer le sens de rotation du courant
- Orientées dans le sens N → S pour un aimant permanent/solénoïde



- Les lignes de champ traversent l'aimant et forment des boucles fermées, orientées du pôle Nord au pôle Sud (voir plus loin)
 - En dehors du matériau : magnétostatique
 - Au sein du matériau : milieux magnétiques (cours suivant)
- Hypothèse d'Ampère : on admet que tout élément de volume dV d'un matériau aimanté se comporte comme une boucle de courant aussi bien du point de vue du champ B qu'il crée que des actions mécaniques qu'il subit

$$dm = M \, dV$$

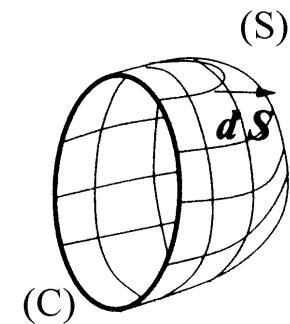
M : Aimantation



Potentiel vecteur

- On peut définir le **potentiel vecteur A** tel que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\text{Stokes} \Rightarrow \iint_{(S)} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$



- Le flux de B ne dépend que de (C)
- Le potentiel vecteur est un vrai vecteur (vecteur polaire)

Jauge de Coulomb

- En considérant un champ scalaire f , le rotationnel du champ vectoriel $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}f$ redonne le même champ magnétique
- Le potentiel vecteur est défini à un gradient près
- On admettra qu'il est possible de définir A par la **condition de jauge** :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \xleftarrow{\hspace{1cm}} \text{Jauge de Coulomb}$$

- On a alors :

$$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{J} = \vec{0} \quad \xleftarrow{\hspace{1cm}} \text{Analogue à l'équation de Poisson !}$$

- On pourra retenir que le potentiel-vecteur d'un champ B uniforme est

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$$

$$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{J} = \vec{0}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

■ Cas général

- En imposant le potentiel vecteur nul à l'infini, en plus de la jauge de Coulomb, on obtient :

$$\underbrace{\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{J}(P)}{PM} d^3 P}_{\text{Courant réparti en volume}}$$

$$\underbrace{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{J}(P) \times \vec{PM}}{PM^3} d^3 P}_{\text{Courant réparti en volume}}$$

- On retrouve Biot et Savart !

■ Cas d'un circuit filiforme

- On néglige les variations de J sur la section s
du conducteur :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C)} \frac{I(P)}{PM} d\vec{l}$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C)} I(P) \frac{d\vec{l} \times \vec{PM}}{PM^3}$$

$$I d\vec{l} = j s d\vec{l}$$

$$\vec{A}(M) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{J}(P)}{PM} d^3 P}_{\text{Courant réparti en volume}}$$

$$\vec{B}(M) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{J}(P) \times \vec{PM}}{PM^3} d^3 P}_{\text{Courant réparti en volume}}$$

- Attention, on n'est pas dans le cas d'une « approximation dipolaire »
- Le point M peut être contenu dans le volume de la distribution de courant - Il n'est pas forcément éloigné

Plan du chapitre « Magnétostatique »

1. Action du champ magnétique

2. Rappels de magnétostatique du vide

1. Champ B produit par un courant : loi de Biot et Savart
2. Forces d'interaction entre courants permanents
3. Théorème d'Ampère - Equations locales de la magnétostatique
4. Expressions intégrées de A et B
5. Méthodes de calcul en magnétostatique
6. Quelques calculs classiques

3. Dipôle magnétique

Plan du chapitre « Magnétostatique »

1. Action du champ magnétique

2. Rappels de magnétostatique du vide

1. Champ B produit par un courant : loi de Biot et Savart
2. Forces d'interaction entre courants permanents
3. Théorème d'Ampère - Equations locales de la magnétostatique
4. Expressions intégrées de A et B
5. Méthodes de calcul en magnétostatique
6. Quelques calculs classiques

3. Dipôle magnétique

- En résumé, la magnétostatique se traite à l'aide de :

Formulation différentielle en champ

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Formulation différentielle en potentiel

$$\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{J} = \vec{0} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0)$$

Formulation intégrée en champ

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad \oint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Méthodes de calcul du champ B

- **Calcul direct :**
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{J}(P) \times \vec{PM}}{PM^3} d^3P$$
- **Calcul indirect à l'aide du potentiel vecteur :**
$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(D)} \frac{\vec{J}(P)}{PM} d^3P \quad \text{puis} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$
- **Calcul direct à l'aide du théorème d'Ampère :**
$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{S}$$
- **Calcul indirect à l'aide du potentiel scalaire magnétique (voir plus loin) :**
$$\Phi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad \text{puis} \quad \vec{B} = -\vec{\nabla}(\Phi_m)$$

Analogie magnétostatique - hydrodynamique

- Au sein d'un fluide, le champ $v(r)$ des vitesses et le champ $\Omega(r)$ des tourbillons sont liés par

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = 2 \vec{\Omega}$$

- Si le fluide est incompressible : $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$
- En magnétostatique : $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ et $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- La fonction $v(\Omega)$ est formellement identique à $B(J)$. On peut donc résoudre certains problèmes par substitution
- Historiquement, Ampère, Maxwell et Faraday disaient que B tourbillonnait autour de sa source

Plan du chapitre « Magnétostatique »

1. Action du champ magnétique

2. Rappels de magnétostatique du vide

1. Champ B produit par un courant : loi de Biot et Savart
2. Forces d'interaction entre courants permanents
3. Théorème d'Ampère - Equations locales de la magnétostatique
4. Expressions intégrées de A et B
5. Méthodes de calcul en magnétostatique
6. Quelques calculs classiques

3. Dipôle magnétique

Quelques calculs classiques (1/2)

- Champ du fil infini

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

- En prenant $I = 10 \text{ A}$ et $R = 10 \text{ cm}$, on obtient

$$B = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

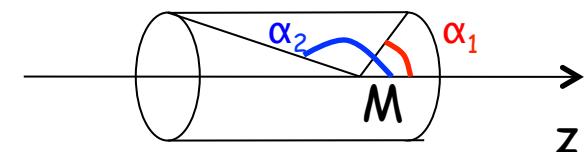
- ↗ Il faut réaliser des bobinages pour augmenter le champ

Savoir
refaire ce
calcul



- Champ du solénoïde infini $\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n I \vec{u}_z$ et $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$

- Très utile dans la pratique

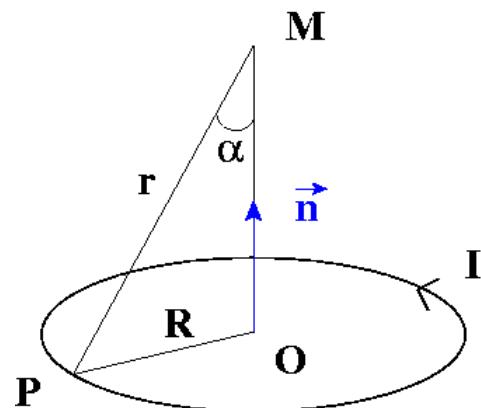


- Champ du solénoïde fini

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)) \vec{u}_z$$

Quelques calculs classiques (2/2)

- Champ sur l'axe d'une spire circulaire

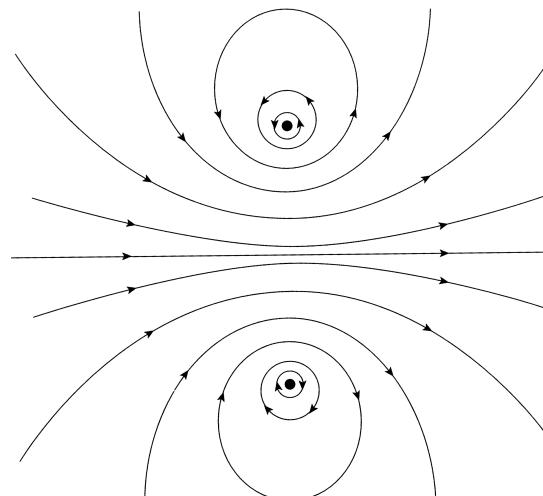


$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha) \vec{u}_z$$



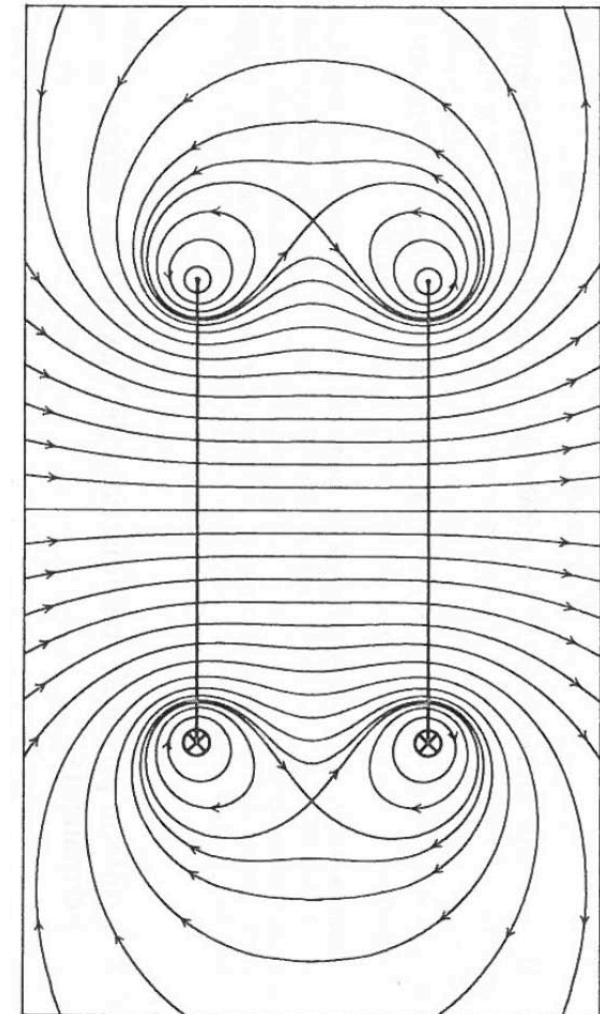
Savoir
refaire ce
calcul

Lignes de champ →



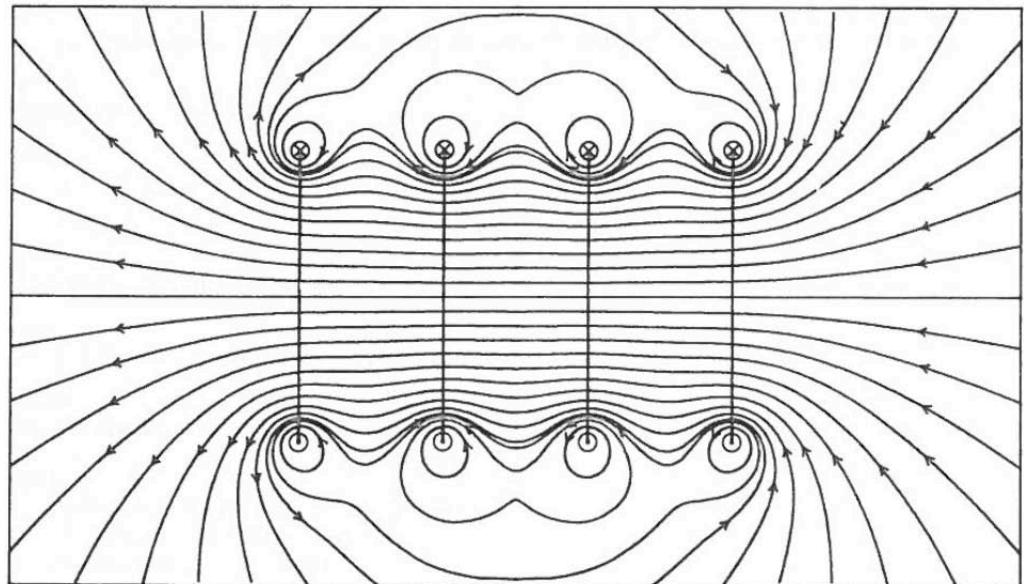
Bobines de Helmholtz

- Deux spires de même rayon R , de même axe, distantes de R , parcourues dans le même sens par le même courant
- Champ quasi-uniforme au centre et très tourmenté à l'extérieur (ligne de champ singulière passant par un point double où $B = 0$)



Système à quatre bobines

- Encore plus flagrant avec 4 bobines
 - Près d'une spire, une ligne de B l'entoure
 - Plus loin, une ligne entoure 2 spires
 - Encore plus loin, une ligne entoure les 4 spires
- A l'intérieur, on se rapproche du champ d'un solénoïde



Plan du chapitre « Magnétostatique »

1. Action du champ magnétique
2. Rappels de magnétostatique du vide
3. Dipôle magnétique

- On appellera **dipôle magnétique** toute distribution de courants permanents de moment magnétique non nul dont les dimensions sont petites par rapport à la distance à laquelle on étudie le champ

- Cette définition ressemble à celle du dipôle électrique, mais attention aux différences :
 - Seule une distribution de charge nulle et de moment électrique dipolaire non nul est assimilable à un dipôle électrique
 - Toute distribution de courants permanents « vue de loin » est assimilable à un dipôle
 - ▲ En effet, l'homologue de la charge totale $Q = \iiint \rho dV$ est $\vec{C} = \iiint \vec{J} dV = \sum (\oint I d\vec{l}) = \sum I (\oint d\vec{l}) = \vec{0}$

Ceci vient du fait qu'il n'existe pas de monopôle magnétique

- Importance théorique justifiée car :
 - A grande distance, un circuit localisé se comporte comme un dipôle
 - Pas de monopôle magnétique. Les uniques sources du magnétisme de la matière sont les électrons atomiques
 - Electrons, protons et neutrons portent un moment magnétique : description ponctuelle
 - Modélisation du champ magnétique terrestre (Gauss)

- Quelques ordres de grandeur :

□ Moment magnétique terrestre	$8.0 \cdot 10^{22} \text{ J/T}$ (ou Am^2)
□ Petit barreau aimanté	5 J/T
□ Electron	$9.3 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$
□ Proton	$1.4 \cdot 10^{-26} \text{ J/T}$

↗ Description utilisée sur près de 50 ordres de grandeur !

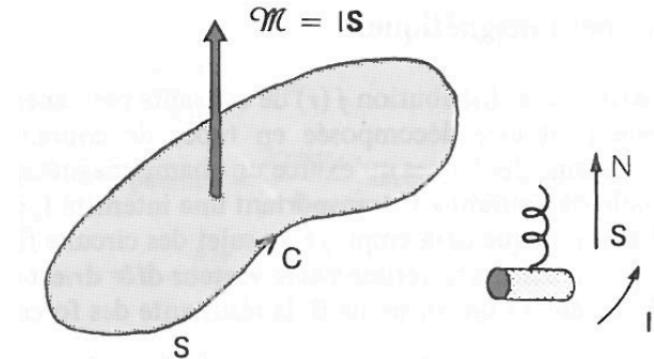
Moment magnétique

- Cas d'une spire :

- Le moment vaut

$$\vec{m} = I \vec{S} = I S \vec{n}$$

Am^2



- Cas d'une distribution volumique :

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint_V (\vec{r} \times \vec{J}) dV$$

- m est indépendant du choix de l'origine (même si sa définition contient r)

Lien avec le moment cinétique

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint_{(V)} \vec{r} \times \vec{J} dV$$

- Analogie avec le moment cinétique en O d'une distribution de masse volumique $\mu(r)$ et de vitesse $v(r)$ $\vec{\sigma} = \iiint_{(V)} \vec{r} \times (\mu \vec{v}) dV$
- On met en rotation un objet à l'intérieur duquel la masse m et la charge q sont distribuées de la même manière : $\rho(r)/\mu(r) = q/m$. Au mouvement des charges correspond $J = \rho v$.
- On obtient : $\vec{m} = \gamma \vec{\sigma}$ avec $\gamma = \frac{q}{2 m}$
- Pour un électron, on obtient expérimentalement $\gamma \approx -e/m$ au lieu de $-e/2m$

Plan du chapitre « Magnétostatique »

1. Action du champ magnétique
2. Rappels de magnétostatique du vide
3. Dipôle magnétique
 1. Potentiel et champ d'un dipôle
 2. Action mécanique d'un champ sur un dipôle
 3. Champ magnétique terrestre

Champ et potentiel du dipôle (1/4)

- A grande distance, pour une distribution avec $m \neq 0$:

$$\vec{A} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\vec{m} \times \vec{u}_r}{r^2} \right) + \text{Ordre 2}$$

\vec{m} Moment dipolaire magnétique de la spire

- Attention : le potentiel et le champ d'une distribution de moment magnétique nul ne sont pas nuls
 - Cette expression n'est que le 1^{er} terme du développement en $1/r$
 - Les termes d'ordre supérieurs (termes multipolaires) sont à prendre en compte si $m = 0$

Champ et potentiel du dipôle (2/4)

- A grande distance :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{m}}{r^3} = \frac{\mu_0 m \cos(\theta)}{2\pi r^3} \vec{u}_r + \frac{\mu_0 m \sin(\theta)}{4\pi r^3} \vec{u}_\theta$$

- Dans le plan défini par m et OM , l'équation des lignes de champ s'obtient par :

$$\frac{dr}{\frac{\mu_0 m \cos(\theta)}{2\pi r^3}} = \frac{r d\theta}{\frac{\mu_0 m \sin(\theta)}{4\pi r^3}} \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{2 \cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta \Rightarrow \begin{cases} r = C \sin^2(\theta) \\ C > 0 \end{cases}$$

- L'expression du champ à grande distance est analogue à celle du champ E d'un dipôle électrique en remplaçant $1/\epsilon_0$ par μ_0 et p par m :

- La topographie des lignes de champ doit être identique à celle du dipôle électrostatique

$$\vec{E}(M) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{p}}{r^3}$$

Champ et potentiel du dipôle (3/4)

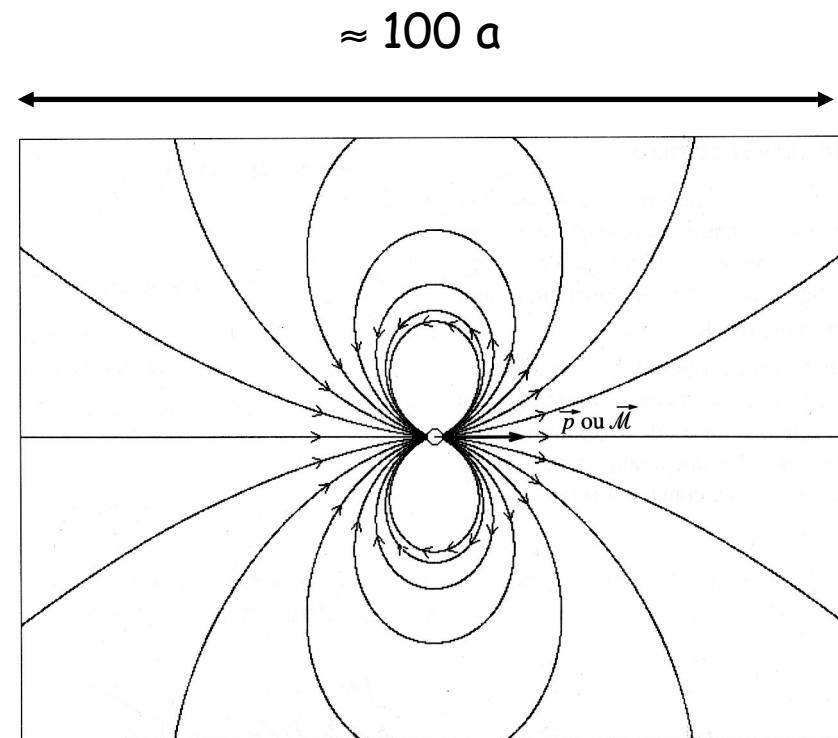
- Doublet de charges $-q$ et $+q$ distantes de a d'axe (Oz) :
 - Tout plan contenant (Oz) est un plan de symétrie : E est contenu dans ce plan

$$\vec{p} = q a \vec{u}_z$$

- Spire circulaire de rayon a , d'axe (Oz) :

$$\vec{m} = I \pi a^2 \vec{u}_z = m \vec{u}_z$$

- Tout plan contenant (Oz) est un plan d'antisymétrie : B est contenu dans ce plan



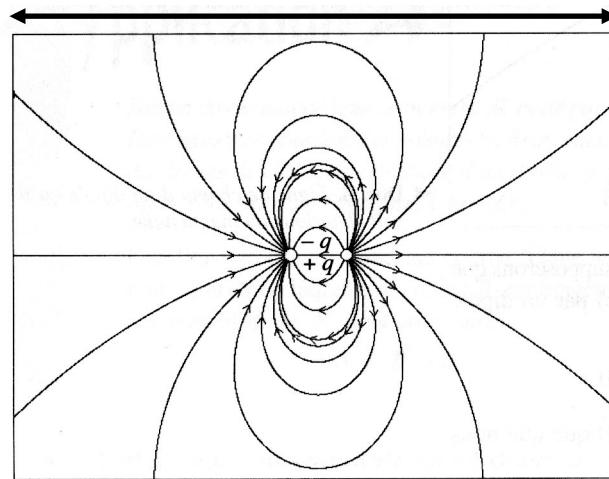
Lignes du champ E ou du champ B à grande distance

Champ et potentiel du dipôle (4/4)

- Attention à ne pas pousser trop loin la comparaison :
 - Le champ E **diverge** à partir des charges
 - Le champ B **tourbillonne** autour des courants

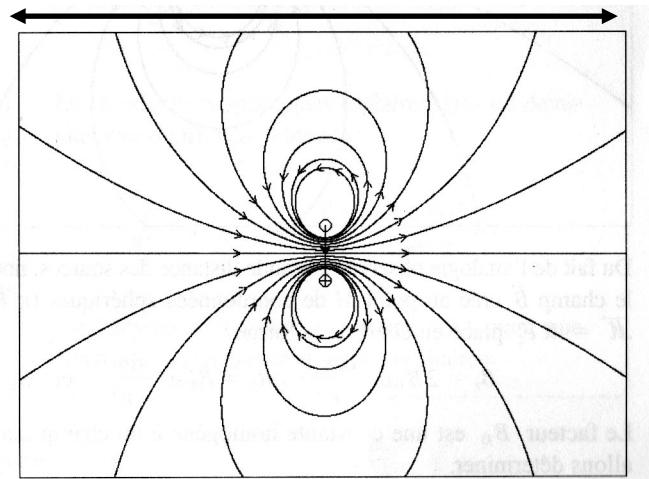
Electrostatique

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \approx 10 \text{ a}$$



Magnétostatique

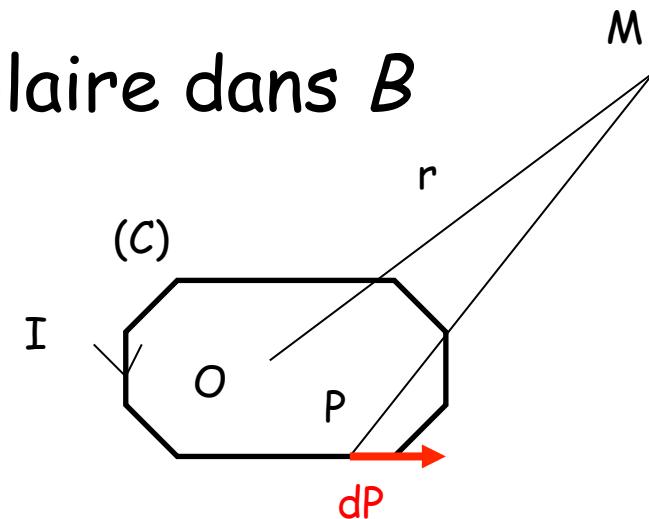
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \approx 10 \text{ a}$$



Absence de terme monopolaire dans B

- D'après Biot et Savart :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C)} I d\vec{P} \times \frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2}$$



- Si $r \gg d$, l'approximation la plus forte consiste à remplacer $\frac{\vec{u}_{PM}}{PM^2}$ par $\frac{\vec{r}}{r^3}$
- On obtient le champ : $\vec{B}_0(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left(\oint_{(C)} d\vec{P} \right) \times \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{0}$
- Le 1^{er} terme non nul de B (en $1/r^3$) est obtenu en faisant une approximation moins forte. **Il n'y a pas de terme monopolaire magnétique**

Différence fondamentale entre un doublet de charges et une spire de courant (1/2)

- L'analogie entre les comportements des dipôles électrique et magnétique est si forte qu'historiquement, on a cherché à mettre en évidence de causes similaires pour interpréter les champs
 - Un dipôle électrique est caractérisé par son moment $\vec{p} = q \vec{d}$
 - Une distribution de courant se comportant comme un dipôle magnétique doit-elle son existence à un doublet de charges magnétiques ?
- L'expérience a montré que NON. Il faut utiliser les boucles de courant pour retrouver les propriétés des dipôles magnétiques

Différence fondamentale entre un doublet de charges et une spire de courant (2/2)

- Différences profondes entre un champ E (dont les lignes de champ partent de la charge + pour aller vers la charge -) et un champ B (dont les lignes de champ se referment sur elles-mêmes)
- Visible dans l'étude des milieux :
 - La polarisation se traduit par l'existence (à l'échelle macroscopique) d'un moment dipolaire électrique volumique
 - ✗ **Correctement interprétée par le modèle du doublet de charges** à l'échelle microscopique
 - L'aimantation se traduit par l'existence (à l'échelle macroscopique) d'un moment dipolaire magnétique volumique
 - ✗ **Correctement interprétée par le modèle de la spire de courant** à l'échelle microscopique

Potentiel scalaire magnétique

- Hors des courants, on aura :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = -\vec{\nabla}(\Phi_m) \quad \text{avec} \quad \Phi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

- Φ_m est le **potentiel scalaire magnétique**
- Permet de pousser plus loin l'analogie avec l'électrostatique
- Pratique dans certains cas
- NB : B dérive d'un potentiel donc son rotationnel est nul : on vérifie néanmoins le théorème d'Ampère !

Plan du chapitre « Magnétostatique »

1. Action du champ magnétique
2. Rappels de magnétostatique du vide
3. Dipôle magnétique
 1. Potentiel et champ d'un dipôle
 2. Action mécanique d'un champ sur un dipôle
 3. Champ magnétique terrestre

Effet mécanique subit par une boucle de courant

- On considère un circuit indéformable assimilable à une boucle de courant de moment M , plongé dans un champ B
- Si B est uniforme sur le circuit, l'action mécanique se ramène à un couple de moment

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \times \vec{B}$$

qui tend à orienter le moment suivant les lignes du champ B

- Si on tient compte de l'inhomogénéité du champ B , un calcul (délicat) montre que cette fois la résultante des forces n'est pas nulle et vaut

$$\vec{F} = (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

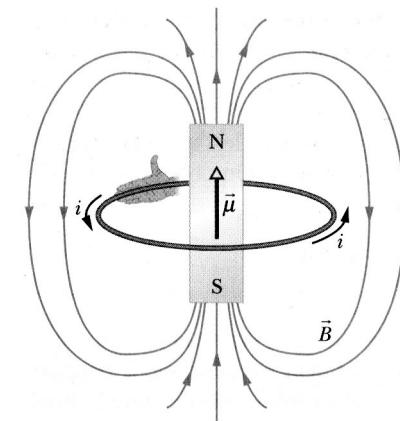
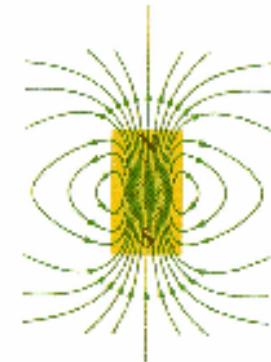
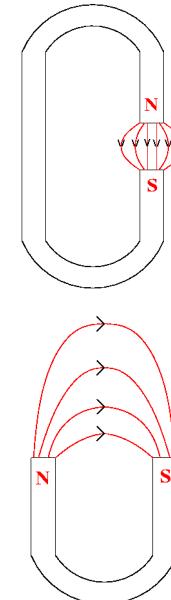
□ Analogie complète avec le dipôle électrostatique

Lien avec les aimants permanents

- Les lignes de champ traversent l'aimant et forment des boucles fermées
 - En dehors du matériau : magnétostatique
 - Au sein du matériau : milieux magnétiques (cours suivant)
- Hypothèse d'Ampère : on admet que tout élément de volume dV d'un matériau aimanté se comporte comme une boucle de courant aussi bien du point de vue du champ B qu'il crée que des actions mécaniques qu'il subit

$$dm = M \, dV$$

M : Aimantation

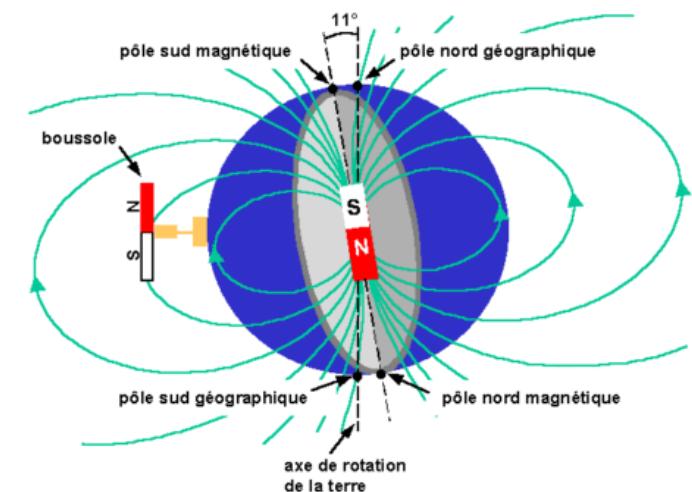
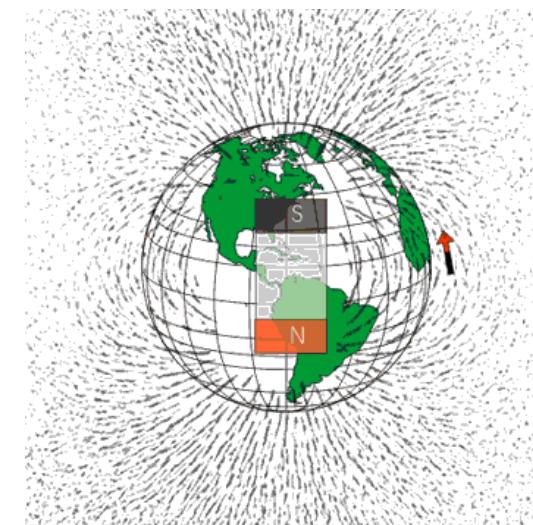


Plan du chapitre « Magnétostatique »

1. Action du champ magnétique
2. Rappels de magnétostatique du vide
3. Dipôle magnétique
 1. Potentiel et champ d'un dipôle
 2. Action mécanique d'un champ sur un dipôle
 3. Champ magnétique terrestre

Champ magnétique terrestre (1/2)

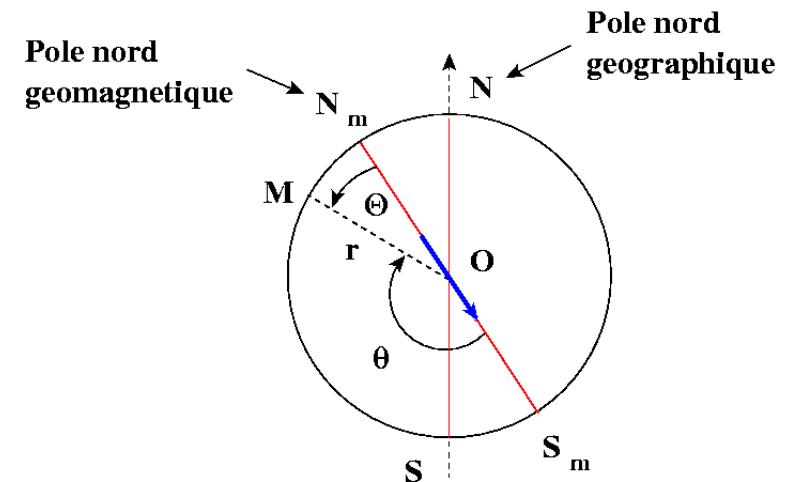
- Le pôle Nord géomagnétique est équivalent, sur le plan du magnétisme, au pôle Sud d'un aimant
- Gauss a montré que le champ magnétique terrestre pouvait être modélisé par un dipôle placé au centre de la Terre, et incliné par rapport à l'axe géographique
- L'axe magnétique se déplace d'environ 40 km/an ($\Delta\theta = 35^\circ$ à Londres entre 1580 et 1820)



Champ magnétique terrestre (2/2)

- A la surface de la Terre (R_T grand) on utilise le champ du dipôle

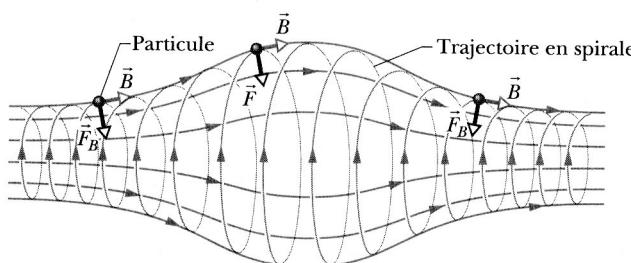
$$B(R_T, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M_T}{R_T^3} \frac{\sqrt{1 + 3 \cos^2(\Theta)}}{\sin^6(\Theta)}$$



- On déduit le moment dipolaire magnétique M_T de la Terre de la mesure du champ magnétique terrestre

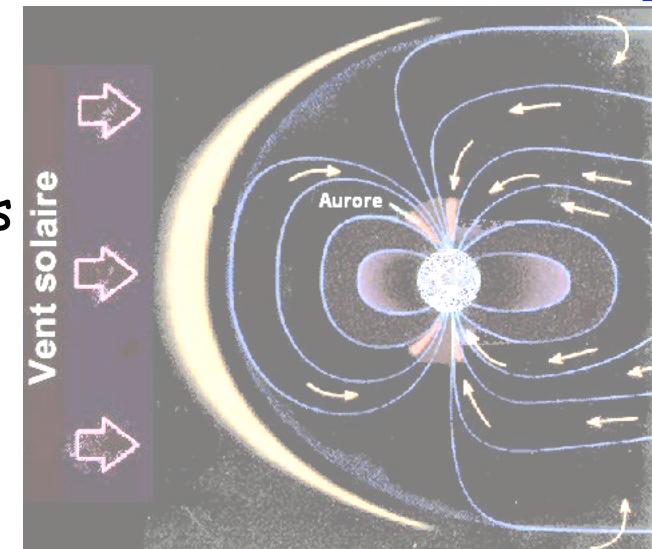
Bouteilles magnétiques

- Si la vitesse d'une particule chargée comporte une composante parallèle à la direction du champ magnétique, la particule est entraînée selon une trajectoire hélicoïdale suivant la direction du champ
- Si le champ B est plus fort sur les bords, on peut créer un piège magnétique (**bouteille magnétique**) qui réfléchit les particules chargées vers les zones de champ faible. Les seules particules qui peuvent s'échapper sont celles qui ont une vitesse transverse nulle



Applications : Aurores boréales (1/2)

- Des particules chargées (e^- , p , ions) issues des éruptions solaires interagissent avec les molécules neutres de la haute atmosphère
 - Ionisation et/ou excitation, puis retour à l'état fondamental par émission d'un rayonnement dont la longueur d'onde est caractéristique du l'atome (vert pour O_2 , rose pour N_2)



Portion de la Terre
éclairée par le Soleil

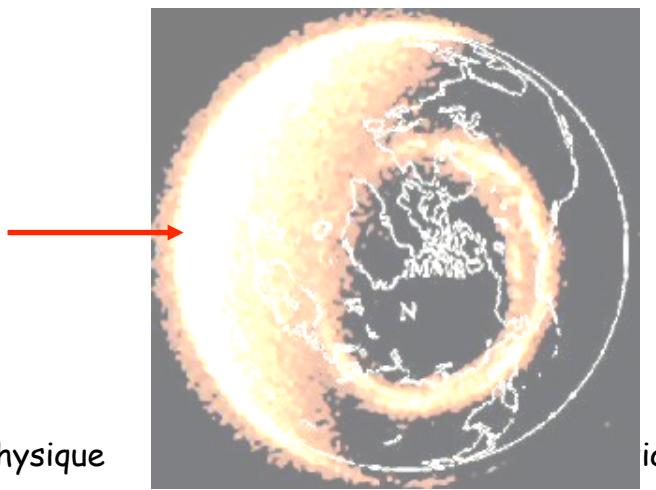
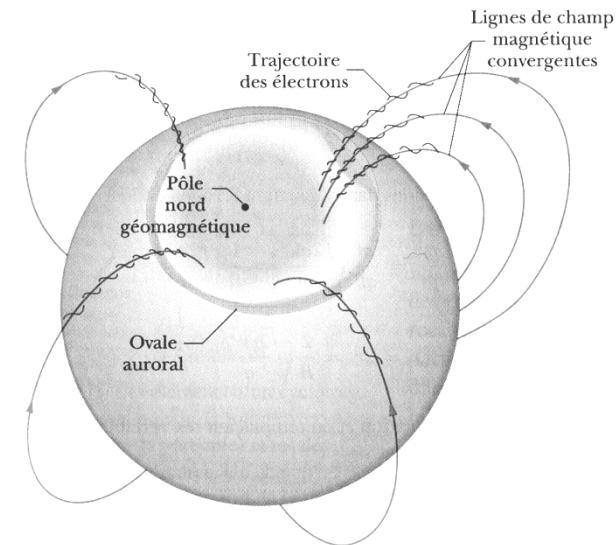


Image numérisée de
Dynamic Explorer
(1981) de la lumière
UV émise par les
atomes d' O_2

Applications : Aurores boréales (2/2)

- Pour l'essentiel, le champ B terrestre joue le rôle d'un bouclier, mais une petite fraction des particules est canalisée par les lignes du champ dipolaire terrestre (bouteille magnétique)
- L'émission aurorale se produira lorsque ces particules rentrent en collision avec les atomes/molécules de l'atmosphère vers 100-300 km
 - Périmètre ovale centré sur les pôles magnétiques
 - Aurores boréales



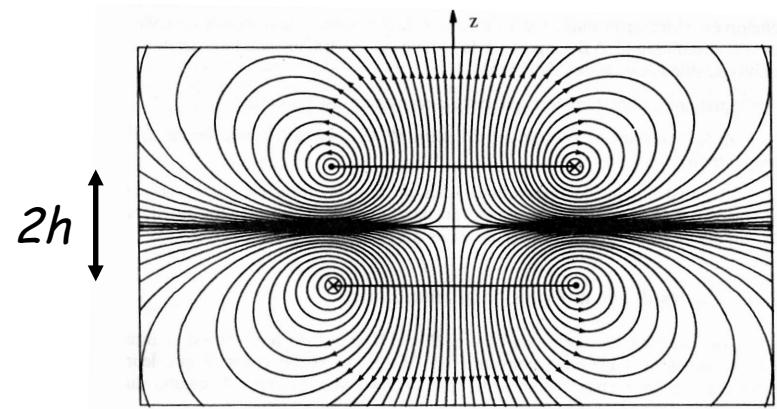
Aurore photographiée par le laboratoire de planétologie de Grenoble

Distribution quadrupolaire

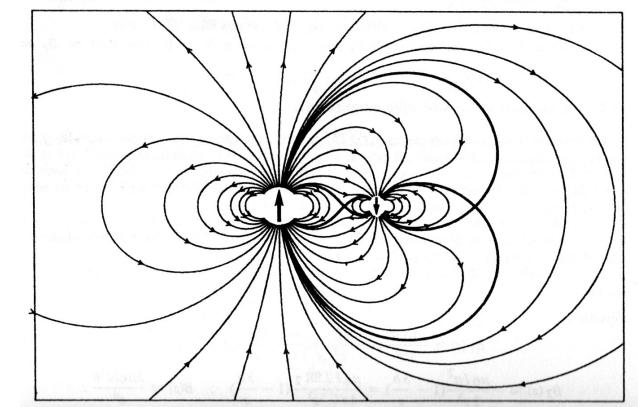
- Bobines de Helmholtz en inversant le sens du courant dans une des deux spires de rayon a parcourue par I :
 - Le moment magnétique total est nul $\vec{m}_1 + \vec{m}_2 = \vec{0}$

Sur l'axe ($z \gg h$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_1(z) \approx \frac{\mu_0 I}{4 \pi} \frac{2 m_1}{z^3} \left(1 + \frac{3h}{z}\right) \vec{u}_z \\ \vec{B}_2(z) \approx \frac{\mu_0 I}{4 \pi} \frac{2 m_2}{z^3} \left(1 - \frac{3h}{z}\right) \vec{u}_z \\ \vec{B}(z) = \vec{B}_1(z) + \vec{B}_2(z) \approx \frac{3 \mu_0 I a^2 h}{4 \pi z^4} \vec{u}_z \end{array} \right.$$



« Bobines de Holtzhelm »



Modélisation de Gemina :
Magnéto: système de 2 étoiles à neutrons