Plan du chapitre « Propagation des ondes électromagnétiques »

- Dans un diélectrique, on a :

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{libre}} \qquad \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}_{libre} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \qquad \boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}} \qquad \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0}$$

(MG) (MA) (MF) (MΦ)

- Comme dans le vide, on associe un transport d'énergie à la propagation d'une onde dans un milieu
  - Noter la différence car la réponse du milieu va modifier le champ effectivement perçu par le milieu

- On admettra que le flux d'énergie est donné par $\vec{R} = \vec{E}\times\vec{H}$

Plan du chapitre « Propagation des ondes électromagnétiques »

1. Concepts généraux sur les ondes
2. Ondes électromagnétiques dans le vide

3. Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique
    1. Equations de Maxwell et vecteur de Poynting
    2. Ondes monochromatiques dans un milieu lhi
    3. Onde plane progressive harmonique dans un milieu lhi
    4. Dispersion et absorption dans le domaine optique
    5. Interface entre deux diélectriques

4. Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur
5. Propagation d'une onde électromagnétique le long d'un fil
6. Propagation dans un plasma
7. Propagation guidée

- Pour une excitation sinusoïdale, les champs sont de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_\omega \exp(-i\,\omega\,t) \qquad \vec{B} = \vec{B}_\omega \exp(-i\,\omega\,t) \qquad \vec{D} = \vec{D}_\omega \exp(-i\,\omega\,t)$$

- On montre facilement que les équations de Maxwell deviennent pour un lhi non magnétique ($\mu_r = 1$) sans charges libres ($\rho_{libre} = 0$) :

$$\vec{\nabla}\,.\vec{D}_\omega = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}_\omega + i\,\omega\,\varepsilon\,\mu_0\,\vec{E}_\omega = \vec{0} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}_\omega - i\,\omega\,\vec{B}_\omega = \vec{0} \qquad \vec{\nabla}\,.\vec{B}_\omega = 0$$

(MG) (MA) (MF) (MΦ)

Savoir refaire ce calcul

- Les ondes qui se propagent dans un lhi sont formellement semblables à celles qui se propagent dans le vide

- D'après (MF) :

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = -\frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\omega^2\,\varepsilon_r}{c^2}\,\vec{E}$$

$$= \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\,.\vec{E}\right) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E} \quad \text{si} \quad \vec{\nabla}\,.\vec{E} = 0$$

Savoir refaire ces calculs

$$\Rightarrow \quad \Delta\vec{E} + \frac{\omega^2\,\varepsilon_r}{c^2}\,\vec{E} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{E}_\omega + \frac{\omega^2\,\varepsilon_r}{c^2}\,\vec{E}_\omega = \vec{0}$$

- Finalement :

$$\frac{\varepsilon_r}{c^2} = \varepsilon_r\,\varepsilon_0\,\mu_0 = \varepsilon\,\mu_0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{E}_\omega + \omega^2\,\varepsilon\,\mu_0\,\vec{E}_\omega = \vec{0}$$

- On montre également que (MA) entraîne : $\Delta\vec{B}_\omega + \omega^2\,\varepsilon\,\mu_0\,\vec{B}_\omega = \vec{0}$

- Les équations de propagation des champs deviennent donc dans un milieu :

$$\boxed{\Delta\vec{E}_\omega + \omega^2\, \varepsilon\, \mu_0\, \vec{E}_\omega = \vec{0}} \qquad \boxed{\Delta\vec{B}_\omega + \omega^2\, \varepsilon\, \mu_0\, \vec{B}_\omega = \vec{0}}$$

- Deux différences fondamentales wrt au vide :
  - ❑ ε dépend généralement de ω (entraîne la dispersion)
  - ❑ ε est généralement complexe (entraîne l'absorption)

Plan du chapitre « Propagation des ondes électromagnétiques »

1. Concepts généraux sur les ondes
2. Ondes électromagnétiques dans le vide
3. Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique
   1. Equations de Maxwell et vecteur de Poynting
   2. Ondes monochromatiques dans un milieu lhi
   3. Onde plane progressive harmonique dans un milieu lhi
   4. Dispersion et absorption dans le domaine optique
   5. Interface entre deux diélectriques
4. Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur
5. Propagation d'une onde électromagnétique le long d'un fil
6. Propagation dans un plasma
7. Propagation guidée

- En écrivant $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)$ pour une onde harmonique, la relation de dispersion est alors :

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_r(\omega) = 0$$

Savoir refaire ce calcul

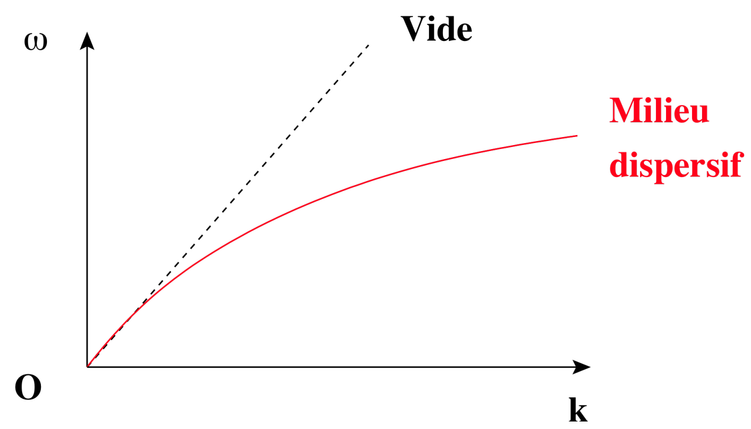
  - Les ondes qui se propagent sont celles qui vérifient la relation de dispersion et sont entièrement déterminées par $\varepsilon_r(\omega)$

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r(\omega)}$$

1er cas : $\varepsilon_r(\omega) > 0$ (1/3)

- Dans cette configuration, k^2 est positif. L'onde a les caractéristiques d'une onde plane qui se propage dans le vide. Il n'y a pas d'atténuation

- La vitesse de phase est : $$v_\varphi = \frac{\omega}{k(\omega)} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r(\omega)}}$$
  - Le milieu est dispersif !
  - La courbe $\omega(k)$ n'est plus une droite comme dans le vide



$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_r(\omega)}$$

1^{er} cas : $\varepsilon_r(\omega) > 0$ (2/3)

- La comparaison avec l'indice de réfraction en optique incite à définir :

  Indice du milieu $\longrightarrow$ $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r(\omega)}$

- La longueur d 'onde dans le diélectrique est $\lambda = \lambda_0/n$ où λ_0 est la longueur d'onde de l'onde de même fréquence qui se propagerait dans le vide illimité

- La relation de structure de l'onde s'écrit : $\vec{B} = \frac{n}{c}\,\vec{u}_x \times \vec{E}$

- Le vecteur de Poynting vaut alors :

$$\left\langle \vec{R} \right\rangle = \frac{1}{2}\, c\, n\, \varepsilon_0\, E_\omega^2\, \vec{u}_x$$

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_r(\omega)}$$

1er cas : $\varepsilon_r(\omega) > 0$ (3/3)

- On peut toujours mettre les équations de Maxwell sous la forme :

$$\vec{k}\,.\vec{E}_\omega = 0 \qquad \vec{k}\times\vec{B}_\omega = -\frac{\omega}{c^2}\,\varepsilon_r(\omega)\,\vec{B}_\omega \qquad \vec{k}\times\vec{E}_\omega = \omega\,\vec{B}_\omega \qquad \vec{k}\,.\vec{B}_\omega = 0$$

- La relation :

$$\vec{B}_\omega = \frac{\vec{k}\times\vec{E}_\omega}{\omega}$$

montre que E et B sont en phase puisque k est réel !

- Il faut avoir $k''(\omega) = 0$. Ces zones sont dites zones transparentes car l'onde se propage dans le milieu sans atténuation
  - Les résultats établis dans le vide sont alors directement transposables en remplaçant c par $v_\varphi = c\,/\,n$

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_r(\omega)}$$

2^e cas : $\varepsilon_r(\omega) < 0$

- Dans cette configuration, k^2 est négatif. On a :

$$k(\omega) = \pm\, i\, k''(\omega)$$

- Les champs E et B deviennent :

$$\vec{E} = \vec{E}_\omega \exp(\pm\, k''\, x)\exp(-\, i\, \omega\, t) \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}_\omega \exp(\pm\, k''\, x)\exp(-\, i\, \omega\, t)$$

  - L'onde est évanescente. Il n'y a pas propagation

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_r(\omega)}$$

3e cas : $\varepsilon_r(\omega)$ complexe (1/5)

- Dans cette configuration, k est complexe :

$$k(\omega) = k'(\omega) + i\, k''(\omega)$$

- En introduisant les parties réelles et imaginaires de la susceptibilité :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\mu_0\,\varepsilon''\varepsilon_r(\omega) \quad \Rightarrow \quad k'^2 - k''^2 = \omega^2\,\mu_0\,\varepsilon'(\omega) \quad \text{et} \quad 2\,k'\,k'' = \omega^2\,\mu_0\,\varepsilon''(\omega)$$

- On sait que $\varepsilon''(\omega) > 0$ car traduit l'absorption d'énergie par le milieu (cours sur les milieux diélectriques)

- En choisissant $k' > 0$ (propagation vers les $x > 0$), on obtient $k'' > 0$

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_r(\omega)}$$

3e cas : $\varepsilon_r(\omega)$ complexe (2/5)

- Les champs *E* et *B* s'écrivent :

$$\vec{E} = \vec{E}_\omega \exp(-\,k''\,x)\exp(i\,(k'\,x - \omega\,t)) \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{B}_\omega \exp(-\,k''\,x)\exp(i\,(k'\,x - \omega\,t))$$

  - Propagation atténuée avec la distance (milieu absorbant)

- Les propriétés d'absorption sont caractérisées par l'indice complexe :

$$n^2(\omega) = \frac{c^2\,k^2(\omega)}{\omega^2} \quad \Rightarrow \quad [n'(\omega) + i\,n''(\omega)]^2 = \varepsilon_r(\omega)$$

Indice de réfraction

Indice d'extinction
(dû à l'amplitude de l'onde qui décroît comme exp[-n''ωx/c])

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_r(\omega)}$$

3^e cas : $\varepsilon_r(\omega)$ complexe (3/5)

- On en déduit 2 relations :

$$n'^2(\omega) - n''^2(\omega) = \varepsilon_r{}'(\omega) \quad \text{et} \quad 2\,n'(\omega)\,n''(\omega) = \varepsilon_r{}''(\omega)$$

- On note $k_0 = \omega/c$. De manière équivalente, on a :

$$\frac{k}{k_0} = \sqrt{\varepsilon_r(\omega)} = n'(\omega) + i\,n''(\omega)$$

- Remarques
  - La condition de propagation est $k' = k_0\, n \neq 0$ (le cas $k' = 0$ correspond à une onde évanescente)
  - La condition d'atténuation s'écrit : $\vec{k}'\,.\vec{k}'' > 0$
  - L'onde serait amplifiée si $\vec{k}'\,.\vec{k}'' = k_0^2\; n'(\omega)\,n''(\omega) < 0$ (se produit dans les cavités laser)

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r(\omega)$$

3e cas : $\varepsilon_r(\omega)$ complexe (4/5)

- On définit une vitesse de phase par :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'(\omega)} = \frac{c}{n'(\omega)}$$

Formule de Rayleigh

- La vitesse de groupe est :

$$\omega = \frac{c}{n}k \quad \Rightarrow \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n} - \frac{c\,k}{n^2}\frac{dn}{dk} = v_\varphi\left(1 - \frac{k}{n}\frac{dn}{dk}\right) = v_\varphi\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right) = v_\varphi\left(1 + \frac{\lambda}{v_\varphi}\frac{dv_\varphi}{d\lambda}\right)$$

- Lorsque λ_0 décroît, n croît et $\lambda = \lambda_0/n$ décroît donc $dn/d\lambda < 0$. On a donc :

$$v_g < v_\varphi$$

- $\dfrac{\lambda}{n}\dfrac{dn}{d\lambda}$ caractérise la dispersion et atteint au maximum environ - 10%

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon_r(\omega)$$

3e cas : $\varepsilon_r(\omega)$ complexe (5/5)

- Le vecteur de Poynting s'écrit alors :

$$\left\langle \vec{R} \right\rangle = \frac{\varepsilon_0\, E_\omega^2}{2}\, c\, n' \exp\left(-\, 2\, n'' \, \frac{\omega}{c}\, x \right) \vec{u}_x$$

  - Décroît avec le coefficient d'extinction $2\,k'' = 2\,n''\,\omega/c$

Cas particulier de l'onde longitudinale (1/2)

- En fait, (MG) entraîne : $\vec{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\vec{E}_\omega\right)=0$

- On ne va plus supposer $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_\omega=0$ mais au contraire $\varepsilon_r\equiv 0$ avec $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_\omega\neq 0$

- (MA) entraîne :

$$\left.\begin{array}{r}\vec{\nabla}\times\vec{B}_\omega+i\,\dfrac{\omega}{c^2}\,\varepsilon_r\,\vec{E}_\omega=\vec{\nabla}\times\vec{B}_\omega=\vec{0}\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}_\omega=0\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\vec{B}_0=\vec{0}$$

L'onde est purement électrique !!

- Une solution en OPPM de la forme $\vec{E}=\vec{E}_\omega\,e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}$ doit vérifier (MF) :

$$\vec{k}\times\vec{E}_\omega=\omega\,\vec{B}_\omega=\vec{0}$$

L'onde est également longitudinale !!

Cas particulier de l'onde longitudinale (2/2)

- Les ondes qui vérifient l'équation de dispersion sont les ondes longitudinales

- On peut remarquer qu'il existe une polarisation dans le milieu puisque

$$\vec{D} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = -\,\varepsilon_0\,\vec{E}$$

Plan du chapitre « Propagation des ondes électromagnétiques »

1. Concepts généraux sur les ondes
2. Ondes électromagnétiques dans le vide

3. Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique
    1. Equations de Maxwell et vecteur de Poynting
    2. Ondes monochromatiques dans un milieu lhi
    3. Onde plane progressive harmonique dans un milieu lhi
    4. Dispersion et absorption dans le domaine optique
    5. Interface entre deux diélectriques

4. Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur
5. Propagation d'une onde électromagnétique le long d'un fil
6. Propagation dans un plasma
7. Propagation guidée

- Les bandes d'absorption sont caractérisées par $|\omega-\omega_0| \approx 1/\tau$

- En dehors de la bande d'absorption ($|\omega-\omega_0| \gg 1/\tau$), on a :

$$\alpha(\omega) \approx \frac{q^2}{\varepsilon_0\, m}\,\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}$$

Milieux dilués (1/2)

- On suppose que le champ local est égal au champ appliqué
  - Si $\chi = N\,\alpha$ (N oscillateurs d'un même type par unité de volume) :

$$n^2 - 1 \approx \frac{N\,q^2}{\varepsilon_0\,m}\,\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

- Si le diélectrique présente plusieurs régions d'absorption (de pulsation ω_i) :

$$n^2 = 1 + \sum_i \frac{C_i}{\omega_i^2 - \omega^2} \quad \text{ou} \quad n^2 = 1 + \sum_i \frac{D_i}{\lambda_i^2 - \lambda^2} \qquad \lambda = 2\,\pi\,\frac{c}{\omega}$$

  - Où C_i et D_i sont des constantes

Formule de Sellmeier
(empirique)

Milieux dilués (2/2)

$$\boxed{n^2 = 1 + \sum_i \frac{D_i}{\lambda_i^2 - \lambda^2}}$$

- Deux développements particuliers dans le visible :
  - Fréquences de résonance dans l'UV ($\lambda \gg \lambda_i$) :

$$n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} \longleftarrow$$

Formule de Cauchy
(empirique)

  - Fréquences de résonance dans l'IR ($\lambda \ll \lambda_i$) :

$$n^2 = A'\,\lambda^2 + A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} \longleftarrow$$

Formule de Briot
(empirique)

- On peut ainsi modéliser les indices des gaz (et parfois des liquides) dans le domaine visible jusqu'à la 4e décimale !

Milieux denses

- On doit utiliser le champ local
  - Une des formes les plus usitées est celle de Lorentz $\boxed{\vec{E}_l = \vec{E} + \dfrac{\vec{P}}{3\,\varepsilon_0}}$

- On suppose que cette expression reste valable, on doit remplacer

$$\boxed{\varepsilon_r - 1 = \sum_i N_i\,\alpha_i \quad \text{par} \quad \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \sum_i \frac{N_i\,\alpha_i}{3}}$$

- En écrivant que $n^2 = \varepsilon_r$, on obtient la formule de Lorentz-Lorenz :

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \sum_i \frac{N_i\,\alpha_i}{3}$$

- Un développement limité permet de repasser aux formules de Cauchy et Briot (milieux dilués)

Plan du chapitre « Propagation des ondes électromagnétiques »

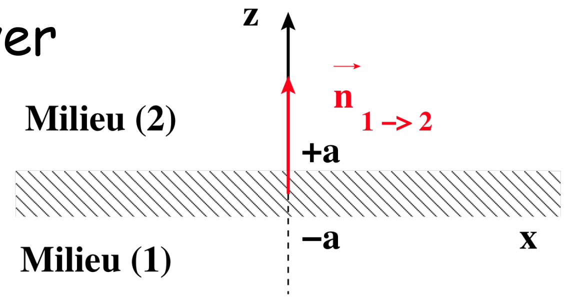
1. Concepts généraux sur les ondes
2. Ondes électromagnétiques dans le vide

3. Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique
    1. Equations de Maxwell et vecteur de Poynting
    2. Ondes monochromatiques dans un milieu lhi
    3. Onde plane progressive harmonique dans un milieu lhi
    4. Dispersion et absorption dans le domaine optique
    5. Interface entre deux diélectriques

4. Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur
5. Propagation d'une onde électromagnétique le long d'un fil
6. Propagation dans un plasma
7. Propagation guidée

- Lorsque des ondes électromagnétiques se propagent dans un milieu matériel limité dans l'espace, elles subissent sur ces limites une réflexion et une réfraction (ou transmission)

- Les relations de passage permettent de retrouver les lois de la réflexion et de la réfraction
  - Tant que λ > défauts de planéité, on confondra la surface et son plan tangent
  - Utilité des relations de passage dans un modèle surfacique



- On se limitera au cas des milieux lhi, isolants ou conducteurs possédant une constante diélectrique complexe :

$$\vec{D} = \varepsilon_0\ \varepsilon_r\ \vec{E} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_r = n^2$$

n : indice du milieu

- On a toujours :

$$(M\Phi) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla}\,.\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_{1\to 2}\,.(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$(MF) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_{1\to 2}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$$

Conservation des composantes normales de *B* et tangentielles de *E*

- Si on considère 2 milieux vides de charges et courants libres :

$$(MA) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_{1\to 2}\times(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \vec{0}$$

$$(MG) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla}\,.\vec{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_{1\to 2}\,.(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 0$$

Conservation des composantes tangentielles de *B* et normales de *D*

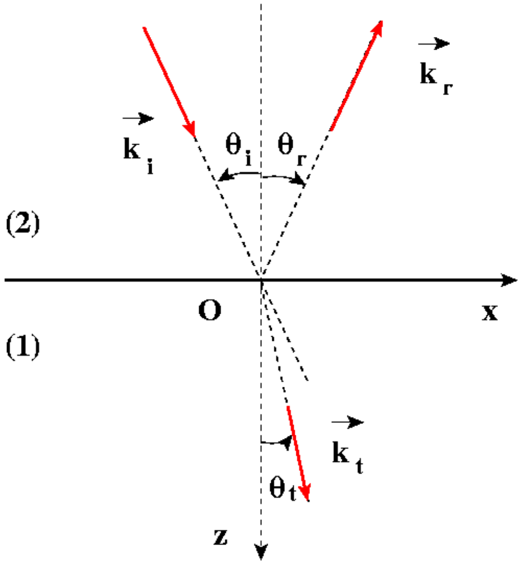
- Finalement :

$$\vec{E}_{T2} = \vec{E}_{T1} \qquad \varepsilon_{r2}\,\vec{E}_{N2} = \varepsilon_{r1}\,\vec{E}_{N1} \qquad \vec{B}_2 = \vec{B}_1$$

- On suppose que l'onde réfléchie n'agit pas sur la source

- La propagation dans le milieu (1) est régie par l'équation d'onde :

$$\Delta\vec{E}_1 + \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 \, \vec{E}_1 = \vec{0}$$



- Si E_1 est de la forme $\vec{E}_1 = \vec{E}_{1m}(z)\, e^{-i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}$

- On obtient : $$\frac{d^2\vec{E}_{1m}}{dz^2} + \underbrace{\left(\frac{\omega^2}{c^2} n_1^2 - k_x^2\right)}_{k_{1z}^2} \vec{E}_{1m} = \vec{0}$$

- Finalement :

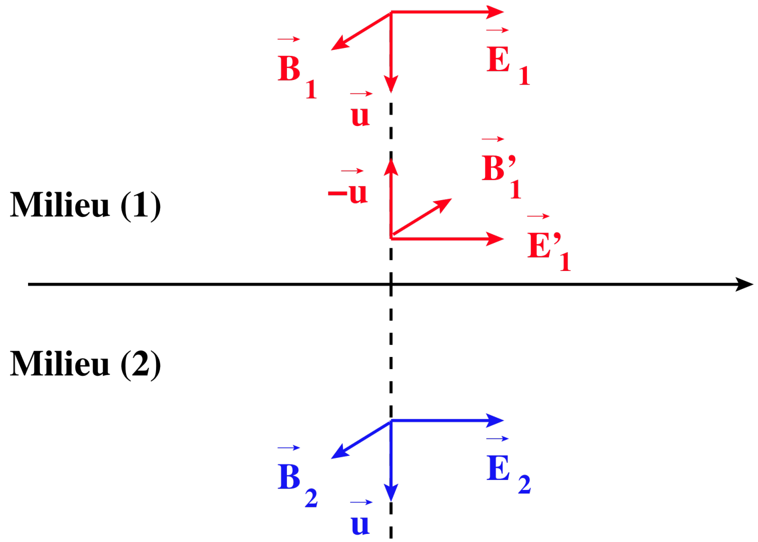
$$\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r \quad \text{avec} \quad \vec{E}_i = \vec{E}_{im}\, e^{-i\,\varphi} \quad \text{et} \quad \vec{E}_r = \vec{E}_{rm}\, e^{-i\,\varphi}$$

$$\varphi = \omega\, t - k_x\, x - k_{1z}\, z$$

A l'interface entre deux milieux

- Une onde incidente crée une onde réfléchie et une onde transmise ou réfractée

Exemple d'une incidence normale



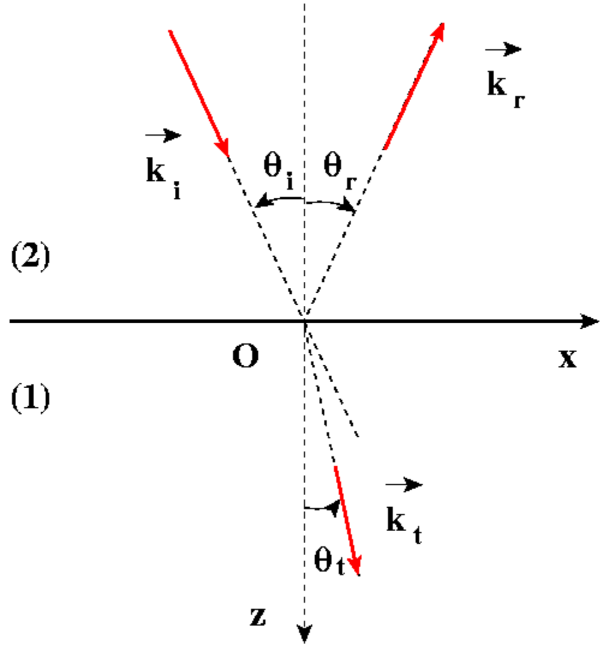
- Si les milieux sont linéaires, ces différentes ondes ont la même pulsation ω
  - L'onde incidente met en vibration les charges liées du diélectrique qui oscillent en régime forcé à la pulsation ω et réémettent des champs de même pulsation

Lois de Snell-Descartes pour la réflexion (1/2)

- 1re loi : l'onde réfléchie se propage dans le plan d'incidence

$$\Rightarrow \quad k_i = k_r = k_1 = \frac{\omega}{c} n_1$$

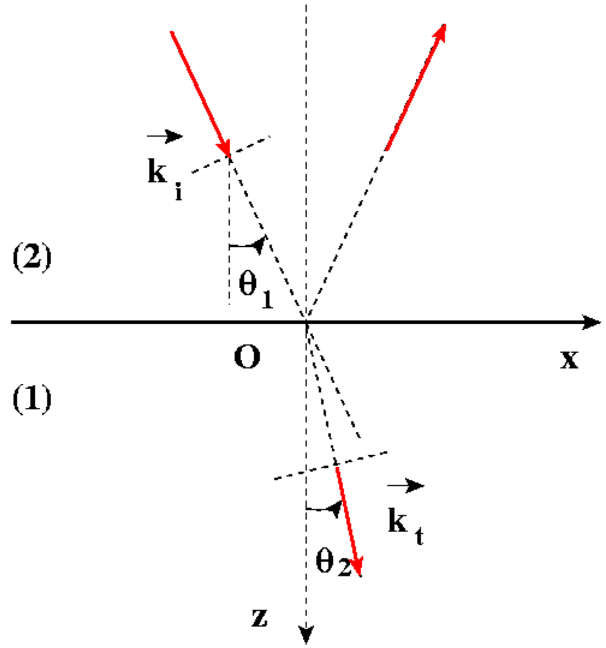
- 2e loi : $\theta_i = -\theta_r$



Lois de Snell-Descartes pour la réflexion (2/2)

- Les lois de la réflexion sont :
  - Indépendantes des propriétés du milieu (2). Elles ne sont liées qu'à la planéité de la surface de séparation. Elles ne sont bien vérifiées que lorsque les défauts de planéités sont < λ (« surface polie à $\lambda/4$, $\lambda/20$, .. »). Si les défauts de planéités sont > λ, on a une réflexion diffuse (exemple du verre dépoli)
  - Indépendantes de la pulsation ω si la surface de séparation est immobile
  - Dépendantes de la pulsation ω si la surface de séparation est mobile (effet Doppler)

Lois de Snell-Descartes pour la réfraction



- 1re loi : l'onde transmise se propage dans le plan d'incidence

- 2e loi :

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$$

- On a toujours propagation dans le milieu (2) s'il est plus réfringent que le milieu (1) - si $n_2 > n_1$. Dans le cas contraire, l'angle d'incidence doit être inférieur à l'angle limite θ_l tel que :

$$\sin(\theta_l) = \frac{n_2}{n_1}$$

Facteurs de réflexion et de transmission en amplitude et en énergie (1/3)

- On appelle facteurs de réflexion et de transmission en amplitude les quantités r et t définies par :

$$E_{r,z} \equiv r\, E_{i,z} \quad \text{et} \quad E_{t,z} \equiv t\, E_{i,z}$$

- En incidence normale, on a par exemple : $r = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ et $t = \dfrac{2\, n_1}{n_1 + n_2}$
  - L'onde transmise
    - Sans déphasage puisque $t > 0$
    - On peut avoir $t < 1$ ou $t > 1$
  - Onde réfléchie
    - Si $n_1 > n_2$, pas de déphasage. Déphasage de π si $n_1 < n_2$
    - $|r| < 1$

- Dans le cas général, des valeurs complexes rendent compte de déphasages à la réflexion ou à la transmission de l'onde incidente

Facteurs de réflexion et de transmission en amplitude et en énergie (2/3)

- On note respectivement $<P_i>$, $<P_r>$ et $<P_t>$ les valeurs moyennes dans le temps des vecteurs de Poynting associés aux ondes incidentes, réfléchies et transmises

- On appelle facteurs de réflexion et de transmission en énergie les quantités *R* et *T* définies par :

$$R \equiv \frac{-<P_r>}{<P_i>} \quad \text{et} \quad T \equiv \frac{<P_t>}{<P_i>}$$

- On a évidemment (conservation de l'énergie sans énergie dissipée à la surface) :

$$R + T = 1$$

- En incidence normale :

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{4\, n_1\, n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

Facteurs de réflexion et de transmission en amplitude et en énergie (3/3)

- On pourrait montrer que :

$$R = |r|^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{n_2}{n_1}|t|^2 \neq |t|^2$$

  - *T* diffère de *tt** car le débit d'énergie à travers des sections de plan d'onde dans des milieux différents se produit à des vitesses différentes. Ce n'est pas le cas pour la réflexion
  - *R* et *T* ne dépendent pas du sens de propagation (invariants par permutation de n_1 et n_2)

Plan du chapitre « Propagation des ondes électromagnétiques »

1. Concepts généraux sur les ondes
2. Ondes électromagnétiques dans le vide
3. Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique

4. Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur
    1. Equation de propagation
    2. Propagation d'une onde plane
    3. Champ à la séparation entre le vide et un conducteur
    4. Réflexion sur un plan parfaitement conducteur
    5. Approximation des fréquences radio
    6. Pertes dans un conducteur

5. Propagation d'une onde électromagnétique le long d'un fil
6. Propagation dans un plasma

- Il faut tenir compte de la conductivité σ dans (MA). Pour un conducteur ohmique :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon\, \mu_0\, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma\, \mu_0\, \vec{E}$$

- On a ρ = 0 dans un conducteur, donc (MF) entraîne que :

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon\, \mu_0\, \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \sigma\, \mu_0\, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- En régime harmonique : $\Delta \vec{E} = \left(-\varepsilon\, \mu_0\, \omega^2 - i\, \sigma\, \mu_0\, \omega\right) \vec{E} = -\mu_0\, \omega^2 \left(\varepsilon + i\, \frac{\sigma}{\omega}\right) \vec{E}$

- Rappel : si σ = 0, on a : $\Delta \vec{E} = -\varepsilon\, \mu_0\, \omega^2\, \vec{E}$

- On utilisera les mêmes solutions que dans un milieu avec ε_r, en utilisant :

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon - i\, \frac{\sigma}{\omega}$$

Plan du chapitre « Propagation des ondes électromagnétiques »

1. Concepts généraux sur les ondes
2. Ondes électromagnétiques dans le vide
3. Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique

4. Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur
   1. Equation de propagation
   2. Propagation d'une onde plane
   3. Champ à la séparation entre le vide et un conducteur
   4. Réflexion sur un plan parfaitement conducteur
   5. Approximation des fréquences radio
   6. Pertes dans un conducteur

5. Propagation d'une onde électromagnétique le long d'un fil
6. Propagation dans un plasma

La solution en régime sinusoidal et en l'absence de réflexion s'écrit :

$$E_x = E_0 \exp\left(i\,\omega\,(t - \frac{z}{v})\right) \;=\; E_0 \exp\left(i\,\omega\,(t - \frac{n\,z}{c})\right) \tag{7.88}$$

avec $n = \sqrt{\epsilon_r}$. Dans le cas d'un conducteur, on doit remplacer ϵ_r par ϵ_{eff}, donc l'indice n va devenir complexe et vérifier :

$$n^2 \;=\; \epsilon_{eff} \;=\; \epsilon_r - i\,\frac{\sigma}{\omega} \tag{7.89}$$

En séparant les parties réelles et imaginaires ($n = \nu - i\,\kappa$), on obtient immédiatement :

$$\nu^2 - \kappa^2 \;=\; \epsilon_r \qquad \text{et} \qquad 2\,\nu\,\kappa \;=\; \frac{\sigma}{\omega} \tag{7.90}$$

L'onde électromagnétique dans le conducteur va se mettre sous la forme :

$$E_x \;=\; E_0 \exp\left(i\,\omega\,(t - \frac{\nu\,z}{c})\right) \exp\left(-\frac{\omega\,\kappa}{c}\,z\right) \tag{7.91}$$

La 1^{re} exponentielle caractérise une propagation avec une vitesse c/ν, soit l'équivalent d'un milieu d'indice ν. La 2^{e} exponentielle montre une atténuation dans le conducteur. Le coefficient de l'atténuation $\omega\,\kappa/c$ peut se mettre sous la forme $2\,\pi\,\kappa/\lambda_0$ où λ_0 est la longueur d'onde de la vibration dans le vide. On appelle κ l'*indice d'extinction* du milieu.

Plan du chapitre « Propagation des ondes électromagnétiques »

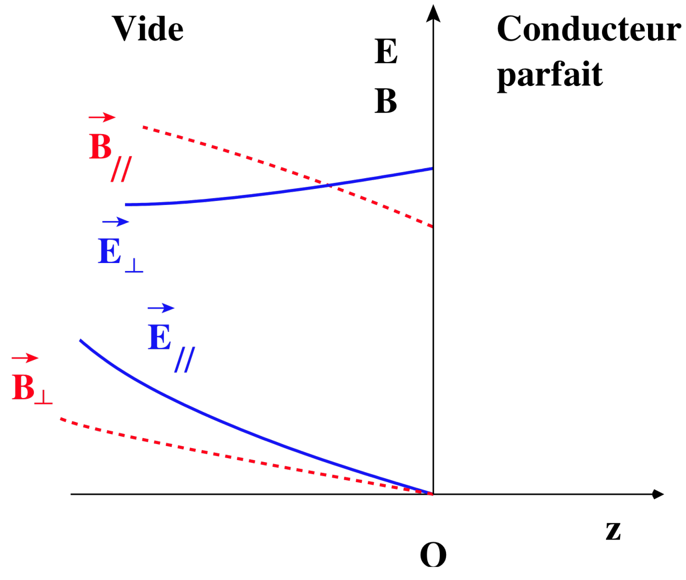
Cas d'un conducteur parfait

- Les champs E et B variables à l'extérieur du conducteur créent instantanément des densités surfaciques de charges (σ_{libre}) et de courants (K_{libre}) dont les effets, ajoutés à ceux des champs externes, donnent un champ total nul dans le conducteur

- Les conditions aux limites sont (n normale sortante du conducteur) :

$$\vec{E} = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon_0}\vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{K}_{libre} \times \vec{n}$$

Champs statiques au voisinage de la surface d'un conducteur parfait



Cas d'un conducteur réel (1/2)

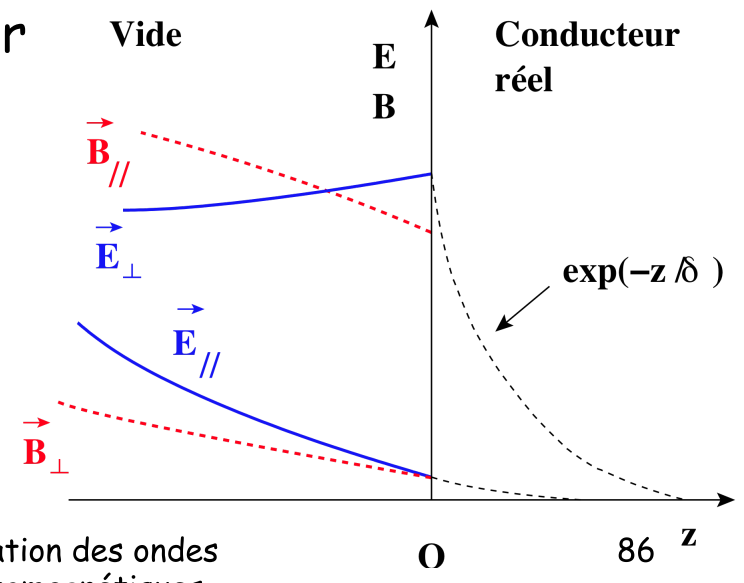
δ du Cu

fréquence	δ
50 Hz	9,38 mm
60 Hz	8.57 mm
10 kHz	0.66 mm
100 kHz	0.21 mm
1 MHz	66 μm
10 MHz	21 μm

- Dans un conducteur réel, les champs s'atténuent exponentiellement à l'intérieur du conducteur sur une distance caractéristique appelée épaisseur de peau

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \, \sigma_{libre} \, \omega}}$$

- Les conditions au limites du conducteur parfait sont vérifiées en dehors d'une fine couche surfacique



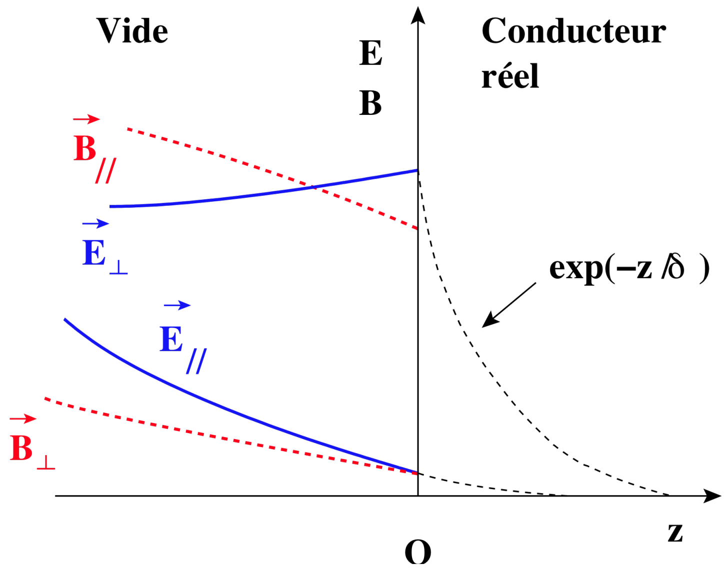
Champs statiques au voisinage de la surface d'un conducteur réel

Cas d'un conducteur réel (2/2)

- On pourrait montrer que les champs E_c et B_c dans le conducteur vérifient :

$$\vec{E}_c \approx \frac{1}{\mu_0}\sqrt{\frac{\mu_0\,\omega}{2\,\sigma}}\,(1-i)\,(\vec{n}\times\vec{B}_{//})\,\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\exp\left(i\,\frac{z}{\delta}\right)$$

$$\vec{B}_c \approx \vec{B}_{//}\,\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\exp\left(i\,\frac{z}{\delta}\right)$$



- Les champs internes s'expriment uniquement en fonction du champ $B_{//}$ sur la surface du conducteur et ne sont plus en phase

- A l'aide des conditions aux limites, on pourrait montrer qu'il existe $E_{//}$ et $B_{\perp}$ à l'extérieur du conducteur

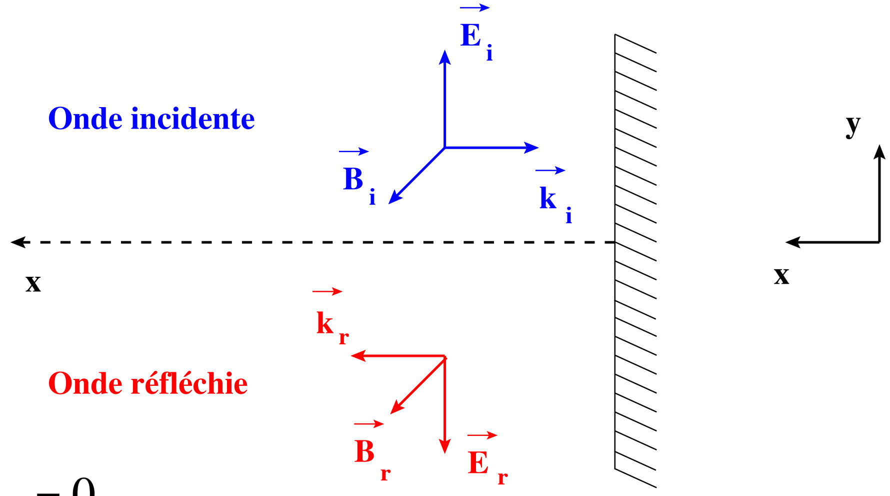
Plan du chapitre « Propagation des ondes électromagnétiques »

1. Concepts généraux sur les ondes
2. Ondes électromagnétiques dans le vide
3. Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique

4. Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur
    1. Equation de propagation
    2. Propagation d'une onde plane
    3. Champ à la séparation entre le vide et un conducteur
    4. Réflexion sur un plan parfaitement conducteur
    5. Approximation des fréquences radio
    6. Pertes dans un conducteur

5. Propagation d'une onde électromagnétique le long d'un fil
6. Propagation dans un plasma

Réflexion sous incidence normale



- Onde plane se propageant selon Ox
  - Les champs s'écrivent :

$$\vec{E}_i = \begin{vmatrix} E_{x,i} = 0 \\ E_{y,i} = E_0 \cos(\omega t + k x) \\ E_{z,i} = 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{B}_i = \begin{vmatrix} B_{x,i} = 0 \\ B_{y,i} = 0 \\ B_{z,i} = - B_0 \cos(\omega t + k x) \end{vmatrix}$$

- Le respect des conditions aux limites impose des champs E_r et B_r tels que près de la surface :

$$\vec{E}_i + \vec{E}_r = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon_0}\, \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}_i + \vec{B}_r = \mu_0\, \vec{K}_{libre} \times \vec{u}_x$$

- En admettant que le champ réfléchit a également une structure d'onde plane, il s'écrit :

$$\vec{E}_r = \begin{vmatrix} E_{x,r} = 0 \\ E_{y,r} = -\,E_0 \cos(\omega\, t - k\ x) \\ E_{z,r} = 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{B}_i = \begin{vmatrix} B_{x,i} = 0 \\ B_{y,i} = 0 \\ B_{z,i} = -\,B_0 \cos(\omega\, t - k\ x) \end{vmatrix}$$

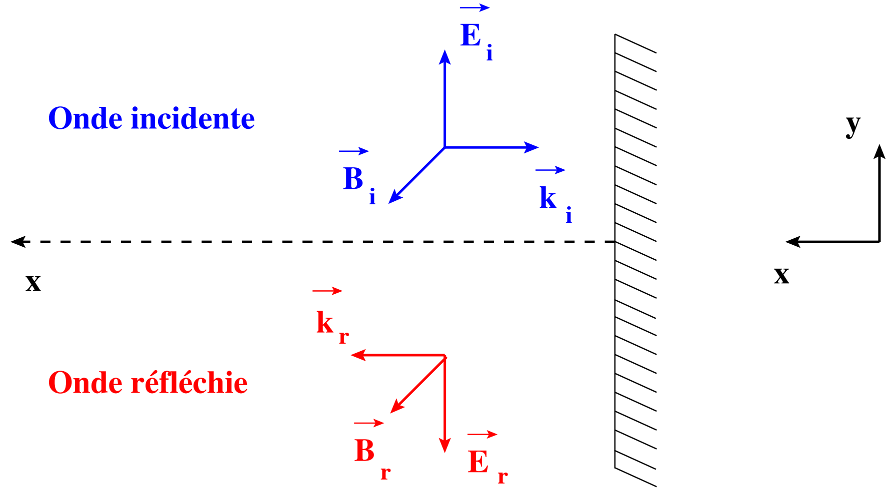
- La densité K_{libre} vaut :

$$\vec{K}_{libre} = \frac{2\ B_0}{\mu_0} \cos(\omega\, t)\ \vec{u}_y$$

- Les charges libres (surfaciques) sont telles que par leurs effets, elles créent l'onde réfléchie

Création d'une onde stationnaire

- Pour $x > 0$, il y a superposition des ondes incidentes et réfléchies



  - Le champ total vaut :

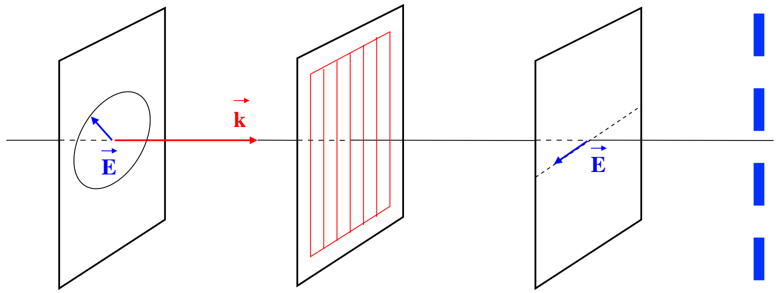
$$\vec{E} = -2\,E_0 \sin(k\,x)\sin(\omega\,t)\,\vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{B} = -2\,B_0 \cos(k\,x)\cos(\omega\,t)\,\vec{u}_z$$

- C'est une onde stationnaire pour laquelle la densité volumique d'énergie et le vecteur de Poynting s'écrivent :

$$u = \left\langle \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,E^2 + \frac{B^2}{2\,\mu_0} \right\rangle = \varepsilon_0\,E_0^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0} \quad \text{et} \quad \vec{R} = \frac{E_0\,B_0}{\mu_0}\sin(2\,k\,x)\sin(2\,\omega\,t)\,\vec{u}_x$$

Réflexion sur une grille parfaitement conductrice

- Fils parallèles de faible écartement devant la longueur d'onde



- Les e- de conduction sont mis en mouvement par $E_{//}$ (et créent l'onde réfléchie)
  - S'ils étaient mis en mouvement dans le volume, il y aurait à la fois une onde transmise et une onde réfléchie
  - L'effet de peau fait qu'ils se concentrent du côté de l'onde incidente
  - Un champ $E_{//}$ est totalement réfléchi

- La grille est sans incidence sur la composante orthogonale de E qui est intégralement transmise

Plan du chapitre « Propagation des ondes électromagnétiques »

1. Concepts généraux sur les ondes
2. Ondes électromagnétiques dans le vide
3. Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique

4. Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur
    1. Equation de propagation
    2. Propagation d'une onde plane
    3. Champ à la séparation entre le vide et un conducteur
    4. Réflexion sur un plan parfaitement conducteur
    5. Approximation des fréquences radio
    6. Pertes dans un conducteur

5. Propagation d'une onde électromagnétique le long d'un fil
6. Propagation dans un plasma

- On utilise les solutions du vide en remplaçant ε par $\varepsilon_{eff} = \varepsilon - i\sigma/\omega$

- Même pour des mauvais métaux (toujours considérés comme ohmiques), $\sigma \approx 10^6$ S/m. Pour ω < IR ou optique (approximation des fréquences radio), $\sigma/\omega \gg \varepsilon$

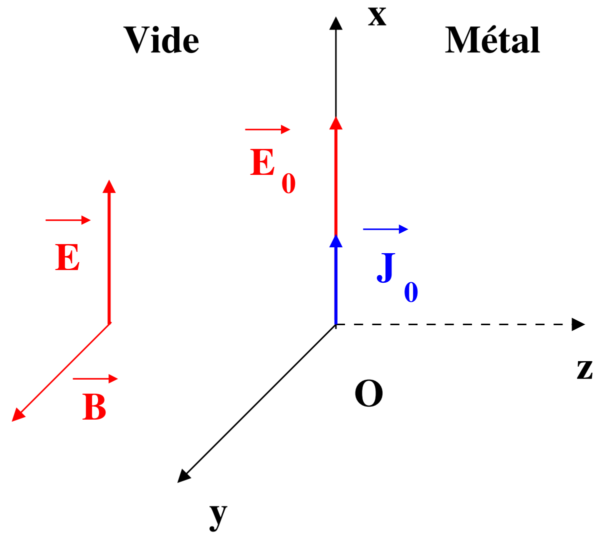
$$\Delta\vec{E} = \varepsilon\,\mu_0\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \sigma\,\mu_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{E} \approx \sigma\,\mu_0\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

- C'est une équation de diffusion (et non plus de propagation)

- En régime harmonique :

$$\Delta\vec{J} + \gamma^2\,\vec{J} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \gamma^2 = i\,\omega\,\sigma\,\mu_0$$

1er cas : Onde plane sous incidence normale



- Selon Ox, on a :

$$\frac{d^2 J_x}{dz^2} + \gamma^2 \, J_x = 0$$

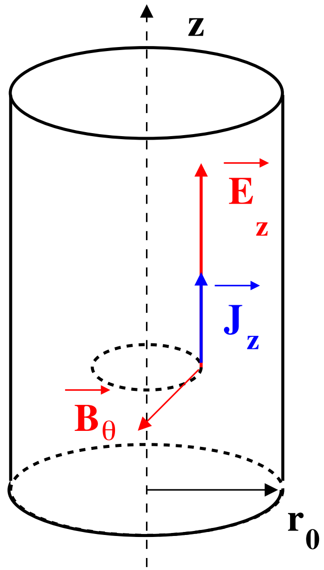
- Solutions générale :

$$J_x = \left(A \exp(-i\,\gamma\, z) + B \exp(i\,\gamma\, z)\right) \exp(-i\,\omega\, t) \quad \text{avec} \quad \gamma = \sqrt{\omega\,\sigma\,\mu_0}\,\sqrt{i} = \sqrt{\frac{\omega\,\sigma\,\mu_0}{2}}\,(1-i)$$

- La limite *z >> 1* entraîne *B = 0*. Finalement :

$$J_x = A \exp\left(i\,(\omega\, t - \frac{z}{\delta})\right) \exp(-\frac{z}{\delta}) \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\,\sigma\,\mu_0}}$$

2^e cas : Champ dans un conducteur cylindrique en régime harmonique (1/3)



- Conducteur de rayon r_0

$$\vec{J} = J_z\,\vec{u}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}\,.\vec{J} = 0 \Rightarrow \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0$$

- Par symétrie : $\dfrac{\partial J_z}{\partial \theta} = 0$

- (MF) : $\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\times\left(\dfrac{\vec{J}}{\sigma}\right) = i\,\omega\,\vec{B} \quad \Rightarrow \quad B_\theta = \dfrac{i}{\omega\,\sigma}\,\dfrac{\partial J_z}{\partial r}$

- On connaît donc *E* et *B* dès qu'on connaît *J* :

$$\Delta\vec{J} + \gamma^2\,\vec{J} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 J_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dJ_z}{dr} + \gamma^2\,J_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 J_z}{d(\gamma\,r)^2} + \frac{1}{\gamma\,r}\,\frac{dJ_z}{d(\gamma\,r)} + J_z = 0$$

Résolution des équations de Bessel

- Equation de Bessel d'ordre *m* :

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)R=0$$

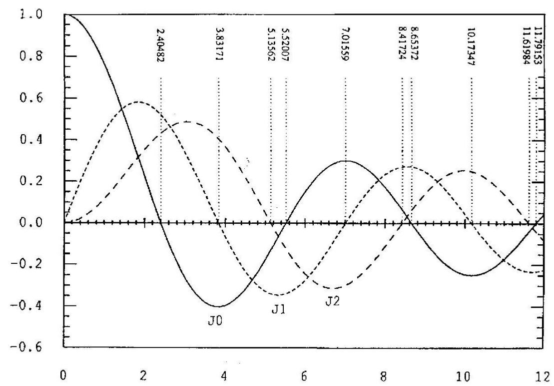
- Lorsque *m* n'est pas entier, la solution est une combinaison linéaire de fonctions de Bessel $J_m(x)$ et $J_{-m}(x)$ (fonctions tabulées) :

$$R(x)=A\,J_m(x)+B\,J_{-m}(x)$$

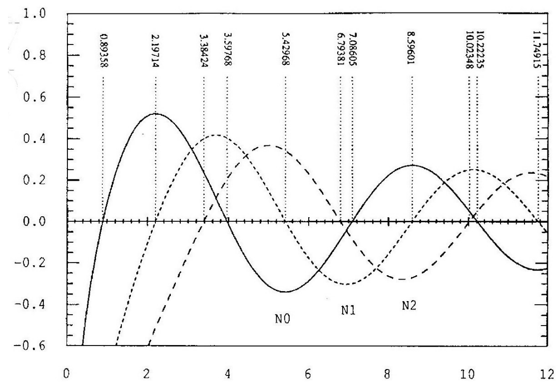
- Lorsque *m* est entier, la solution est une combinaison linéaire de fonctions de Bessel $J_m(x)$ et de fonctions de Neumann $N_m(x)$:

$$R(x)=A\,J_m(x)+B\,N_m(x)$$

Les 1res fonctions de Bessel $J_m(x)$



Les 1res fonctions de Neumann $N_m(x)$



2^e cas : Champ dans un conducteur cylindrique en régime harmonique (2/3)

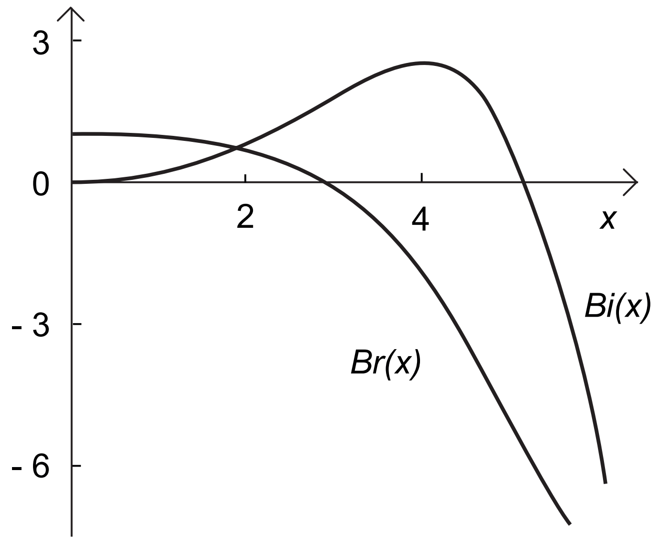
$$\boxed{\frac{d^2 J_z}{d(\gamma\, r)^2} + \frac{1}{\gamma\, r}\,\frac{dJ_z}{d(\gamma\, r)} + J_z = 0}$$

- C'est une équation de Bessel d'ordre 0 de la variable γr qui a pour solution :

$$J_z = A\, J_0(\gamma\, r) + B\, N_0(\gamma\, r)$$

  - La théorie des fonctions de Bessel impose *B = 0*
  - Changement de variable :

$$\gamma\, r = \sqrt{\omega\,\sigma\,\mu_0}\,\sqrt{i}\, r = \sqrt{i}\, u \quad \text{avec} \quad u = \frac{r\sqrt{2}}{\delta}$$



- Finalement :

$$J_z = A\, J_0(u\sqrt{i})$$

- On admettra qu'on peut écrire :

$$J_0(u\sqrt{i}) = Br(u) + i\, Bi(u)$$

2^e cas : Champ dans un conducteur cylindrique en régime harmonique (3/3)

- Le module J_z est proportionnel à

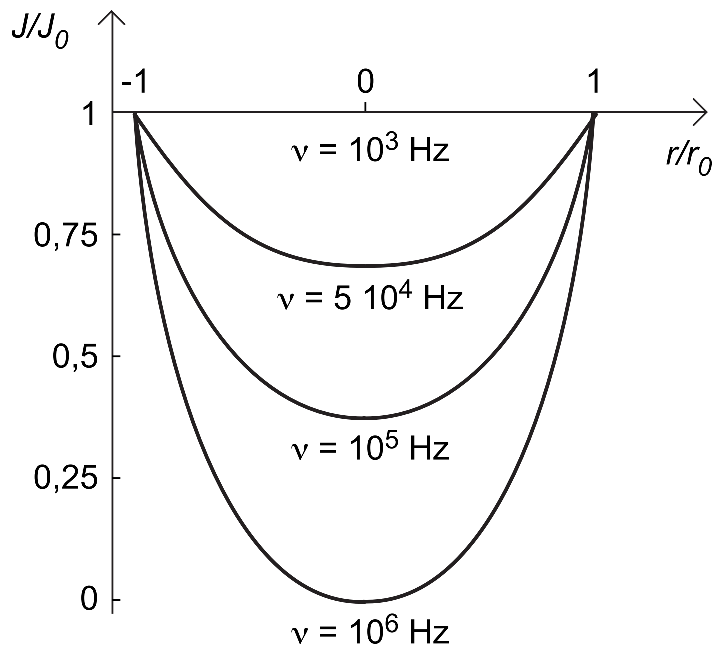
$$M^2 = Br^2(u) + Bi^2(u)$$

- En notant $u_0 = r_0\sqrt{2}/\delta$, on a finalement :

$$\frac{J_z}{J_0} = \frac{M(u)}{M(u_0)}$$

- Le courant est minimal au centre du fil
  - Pellicule annulaire à haute fréquence
  - Augmentation de la résistance à haute fréquence

J_z/J_0 en fonction de la position dans le fil, pour diverses fréquences



Plan du chapitre « Propagation des ondes électromagnétiques »

Pertes dans un conducteur parfait

- Pas de pertes car les champs *E* et *B* sont nuls :
  - Le flux du vecteur de Poynting est nul

Pertes dans un conducteur réel (1/2)

- Une certaine fraction de la puissance transportée par l'onde est portée par les champs au delà des parois du conducteur
  - Cette puissance pénètre dans le conducteur et vaut après calculs :

$$\left\langle \frac{dP}{dS} \right\rangle = \frac{\mu_0\ \omega\ \delta}{4\ \mu_0^2} \left| \vec{B}_{//}^2 \right|$$

  par unité de surface du conducteur

- Par ailleurs, on peut dire qu'il existe une densité volumique de courant J_c (dans l'épaisseur du conducteur) donnée par :

$$\vec{J}_c(z) = \sigma\ \vec{E}_c \approx \frac{1}{\mu_0\ \delta} (1-i)\,(\vec{n} \times \vec{B}_{//})\, \exp\left(-\frac{z}{\delta} (1-i) \right)$$

Pertes dans un conducteur réel (2/2)

$$\boxed{\vec{J}_c(z) \approx \frac{1}{\mu_0\, \delta} (1-i)\,(\vec{n} \times \vec{B}_{//})\, \exp\left(-\frac{z}{\delta}(1-i)\right)}$$

- Cette densité est confinée sur une épaisseur si petite (quelques δ) qu'on peut dans la pratique l'assimiler à une densité surfacique K_{eff} :

$$\vec{K}_{eff} = \int_0^\infty \vec{J}_c\, dz = \vec{n} \times \frac{\vec{B}_{//}}{\mu_0}$$

- On retombe sur l'expression de la densité surfacique K_{libre} du conducteur parfait ! L'avantage de ce formalisme est qu'avec les densités du conducteur parfait, on peut calculer les pertes dans les conducteurs réels

- On écrit parfois :

$$\left\langle \frac{dP}{dS} \right\rangle = \frac{1}{2\,\sigma\,\delta} \left| \vec{K}_{eff}^2 \right|$$

$1/(\sigma\delta)$: résistance de surface

Plan du chapitre « Propagation des ondes électromagnétiques »

1. Concepts généraux sur les ondes
2. Ondes électromagnétiques dans le vide
3. Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique
4. Ondes électromagnétiques dans un milieu conducteur

5. Propagation d'une onde électromagnétique le long d'un fil
    1. Propriétés caractéristiques du fil
    2. Equation des télégraphistes
    3. Cas des lignes sans pertes
    4. Cas des lignes avec pertes en régime sinusoïdal

6. Propagation dans un plasma
7. Propagation guidée

Caractéristiques localisées ou réparties

- A basse fréquence, on considère des éléments physiques distincts (résistance, self, ..) car le courant et la phase sont les mêmes partout (ARQS)

- Lorsque la longueur d'onde devient petite devant les dimensions des composants du circuit (résistance, self, ..), on observe en leur sein des déphasages dus à la propagation
  - Le courant $I(x, t)$ varie d'un point à un autre du circuit
  - Un fil est à la fois une résistance, une self, une armature de condensateur, ..
  - Les propriétés du fil sont évaluées en chaque point et réparties le long du fil

- On considère un fil conducteur isolé, parcouru par un courant à haute fréquence, dont la longueur d'onde est >> dimensions du fil

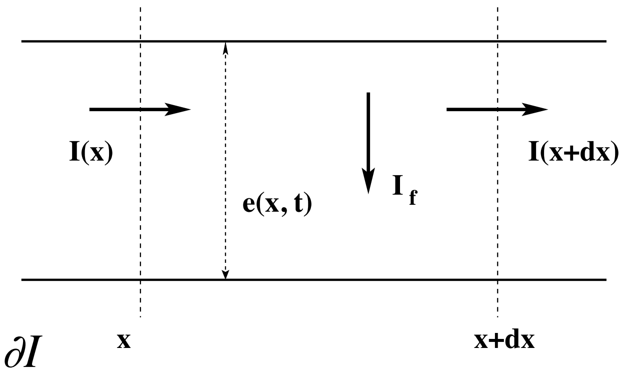
- On note :
  - *e(x, t)* : différence de potentiel avec une masse de référence
  - *L* : inductance (self) par unité de longueur
  - *C* : capacité de l'unité de longueur de fil wrt la masse
  - *r* : résistance par unité de longueur
  - *1/g* : résistance de fuite à travers l'isolant (*g* : conductance ou perductance). Le courant de fuite I_f (par unité de longueur) vaut :

$$I_f = g\,e$$

- *L* et *C* caractérisent un stockage d'énergie à l'abscisse *x* ; *r* et *g* correspondent à une dissipation d'énergie sous forme de chaleur

Plan du chapitre « Propagation des ondes électromagnétiques »

- On considère une section de fil comprise entre *x* et *x+dx*. La loi d'Ohm s'écrit :



$$e(x,t) - e(x+dx,t) = r\ I\ dx + L\ dx\ \frac{\partial I}{\partial t}$$

- Comme *de* est évalué à t constant : $-\dfrac{\partial e}{\partial x} = r\ I + L\ \dfrac{\partial I}{\partial t}$

- La loi du condensateur (Q=CV) s'écrit ici pour une variation sur l'intervalle *dt* :

$$\frac{\partial q}{\partial t}\ dt = C\ dx \times \frac{\partial e}{\partial t}\ dt$$

- La conservation de la charge totale s'écrit :

$$I(x,t) - I(x+dx,t) - I_f\, dx = C\, dx \times \frac{\partial e}{\partial t}$$

- Ou encore : $$-\frac{\partial I}{\partial x} = g\, e + C\, \frac{\partial e}{\partial t}$$

- En combinant, on obtient l'équation des télégraphistes :

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{-\dfrac{\partial e}{\partial x} = r\, I + \lambda\, \dfrac{\partial I}{\partial t}} \\ \boxed{-\dfrac{\partial I}{\partial x} = g\, e + \gamma\, \dfrac{\partial e}{\partial t}} \end{array}\right\} \quad L\, C\, \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (r\, C + g\, L)\, \frac{\partial I}{\partial t} + r\, g\, I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$$

Savoir refaire ce calcul

Plan du chapitre « Propagation des ondes électromagnétiques »

$$\boxed{L\,C\,\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}+(r\,C+g\,L)\,\frac{\partial I}{\partial t}+r\,g\,I=\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}}$$

- On utilise l'équation des télégraphistes avec *r = g = 0* : $L\,C\,\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$

- C'est une équation de d'Alembert dont la solution est de la forme :

$$I(x)=F(t-x/v)+G(t+x/v) \quad \text{avec} \quad v=1/\sqrt{L\,C}$$

- On a de plus :

$$\boxed{-\frac{\partial I}{\partial x}=g\,e+C\,\frac{\partial e}{\partial t}} \qquad \Rightarrow \qquad C\,\frac{\partial e}{\partial t}=\frac{1}{v}\left[F'(t-x/v)-G'(t+x/v)\right]$$

- En intégrant wrt *t* :

$$e(x,t)=\sqrt{\frac{L}{C}}\,\left[F(t-x/v)-G(t+x/v)\right]=\sqrt{\frac{L}{C}}\,\,I(x)$$

- La quantité Z_0 :

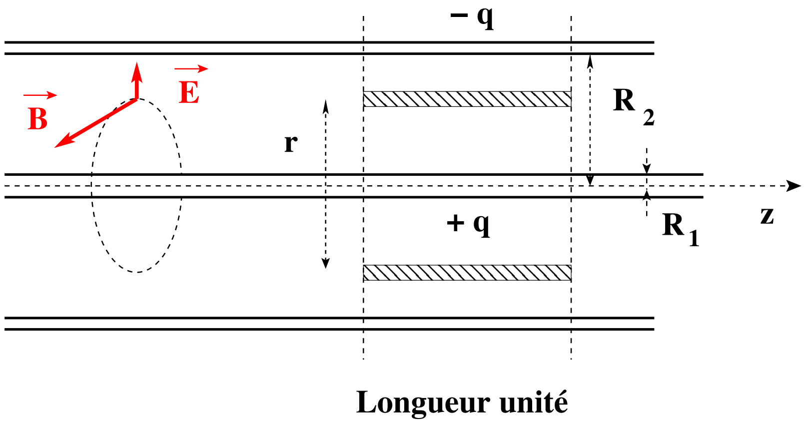
$$Z_0 = \frac{e(x,t)}{I(x,t)} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

est appelée impédance ou impédance itérative de la ligne

- On n'a considéré que les pertes par effet Joule dans les composants. Comme le fil crée des champs *E* et *B* autour de lui, il existe un flux d'énergie EM qui constitue un autre mécanisme de perte.

- Ces pertes par rayonnement sont de deux types à haute fréquence :
  - On utilise deux lignes parallèles. En tout point d'abscisse *x*, les courants sont égaux et opposés. Les champs *B* des deux fils sont égaux et opposés à grande distance : pas de rayonnement à grande distance
    - Les conducteurs sont en influence électrostatique partielle car il y a des champs donc du rayonnement à courte distance
    - Lignes de Lécher

- Avec un condensateur cylindrique (influence électrostatique totale), le rayonnement sera localisé à l'intérieur du condensateur

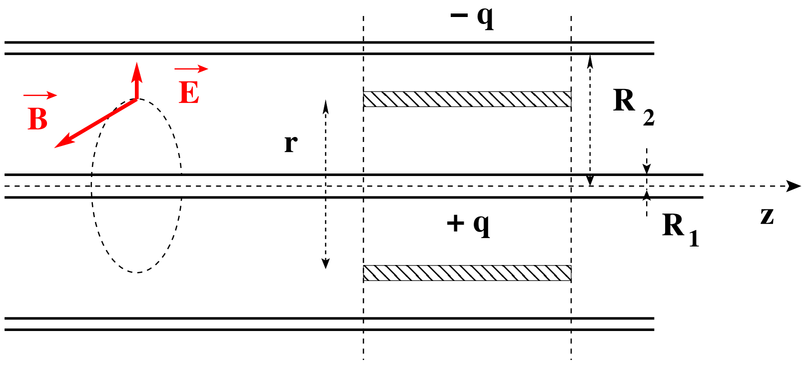


- Diélectrique : polyéthylène (ε_r=2,3) qui minimise les pertes par rayonnement et assure la rigidité mécanique. Le rayonnement est localisé dans le diélectrique

- Conducteur interne : massif – Conducteur externe : gaine de fils tressés (pour des raisons mécaniques)

- Câble coaxial

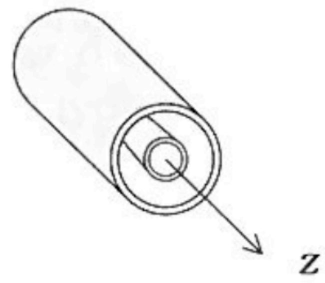
Câble coaxial (1/2)



- Pas de champ à l'extérieur

- Structure d'onde plane dans le diélectrique : onde TEM (Transverse Electrique Magnétique)

- Capacité (sans calcul) : $C = \dfrac{2\,\pi\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r}{\ln(R_2/R_1)}$

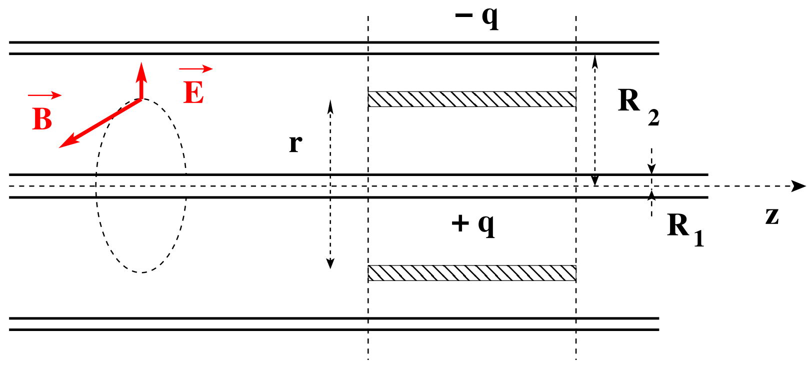


Câble coaxial

- Dans un élément de volume annulaire *dV*, l'énergie stockée vaut ($B = \mu_0 I / (2\pi r)$) :

$$dw = \frac{1}{2}\vec{H}\,.\vec{B}\,dV = \frac{B^2}{2\,\mu_0}\,dV \quad \text{soit} \quad w = \frac{\mu_0\,I^2}{4\,\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0\,I^2}{4\,\pi}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Câble coaxial (2/2)



- Par identification avec $w = \frac{1}{2} \times LI^2$, on a :

$$L = \frac{\mu_0}{2\,\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

- D'où :

$$v = \frac{1}{\sqrt{L\,C}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\;\varepsilon_r\;\mu_0}}$$

- Et l'impédance du câble : $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\,\pi\,\sqrt{\varepsilon_r}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_r}}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$

- Polyéthylène (ε_r=2,3) avec R_2/R_1 = 10, on obtient v/c = 66% et Z_0 = 91 Ω
  - Pour créer des impédances bien définies (50 Ω, 75 Ω, ..) on joue sur R_2/R_1

Plan du chapitre « Propagation des ondes électromagnétiques »