Encuentro de fórmulas alternativas para los cuadrados y los cubos de los números

Exploración Matemática

Índice

Introducción

Las matemáticas son muchas veces nombradas como un "dolor de cabeza", algo demasiado complejo, e incluso hasta "ilógico". Pero estas cualidades no son más que puras mentiras. Las matemáticas, cuando son comprendidas, uno se puede dar cuenta que son como un arte, que todo encaja a la perfección, y que a partir de un elemento básico se puede descubrir un elemento más complejo.

Este es el enfoque que quiero seguir para mi Exploración Matemática. Para esto demostraré caminos alternativos para encontrar una secuencia de números que describa a los cuadrados y los cubos de otros números. Esto sirve para demostrar que en la matemática no existe un solo camino para realizar algo, y también como hay muchas relaciones entre los números que muchas veces no se discuten.

Esto es algo que hace falta mucho hoy en día para aprender mejor las matemáticas. Los alumnos no son alentados a experimentar por sí solos con los números, para ellos mismos encontrar que es lo que pasa con los números. Simplemente, los alumnos reciben una fórmula dada y se dedican a utilizarla para llevar a cabo ejercicios prácticos, pero no tratan de ir más a fondo sobre estas fórmulas. No tratan de ingeniárselas para ellos mismos encontrar otro método para resolver las cosas ni de demostrar de donde salieron las ecuaciones y fórmulas utilizadas.

Por ello, quiero hacer un trabajo que les demuestre que utilizando lo que hemos aprendido somos capaces de encontrar propiedades matemáticas y definir fórmulas.

El método que utilizaré para llevar a cabo esto será primero definir bien que son los cuadrados y los cubos de un número. Pasaré a formar una pequeña tabla con los cuadrados y cubos de los números del 0 al 10. Luego, se tratará de encontrar que tipo de relación existe entre estos datos. Finalmente, se tratará de describir qué sucede entre cada conjunto de datos y se podrá utilizar para definir una fórmula.

Compromiso personal evidente

Los Números Cuadrados

Los números cuadrados, a veces llamados como cuadrados perfectos, son aquellos números enteros que cuando se les extrae una raíz cuadrada, dan como resultados un número entero. Generalmente son representados por la fórmula de n^2, que significa la multiplicación de $n * n$

De esta manera, se puede decir que

$$4 * 4 = 4^2 = 16$$

$$26 * 26 = \ 26^2 = 676$$

Ahora, ya que comprendemos qué es y cómo se obtiene un número cuadrado hacemos lo siguiente:

n	n^2
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100

Podemos colocar los cuadrados como una sucesión numérica:

0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

Ahora podemos tratar de definir una d para esta sucesión. Pero si vemos 4 - 1 = 3, y si lo hacemos con el siguiente conjunto 9 – 4 =5. Esto no es del todo malo, ya que si continuamos nos damos cuenta de algo

1 - 0 = 1

4 -1 = 3

9 – 4 = 5

16 – 9 = 7

25 – 16 = 9

36 – 25 = 11

49 – 36 = 13

64 – 49 = 15

81 – 64 = 17

100 – 81 = 19

Como se puede ver, la que sería nuestra d se mantiene en un cambio. Pero se logra distinguir como esta se puede definir por los números impares, cada uno en una sucesión.

De esta manera, para definir nuestra d utilizaremos una fórmula para definir la sucesión que describe el cambio en la d.

$$U_n = U_1 + (n-1)d$$

Nuestro U_1 va a ser el primer número en la sucesión de diferencias entre los cuadrados, que sería equivalente a 1 – 0 = 1

Nuestra d sería la diferencia que hay entre cada diferencia de cuadrado, por tanto si vemos, 3 – 1 = 2, para verificar 5 – 3 = 2.

Por lo que nuestra fórmula quedaría como:

$$U_n = 1 + (n-1)\,2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$$

Ahora bien, dejando de lado esto por el momento, si observamos bien la composición de cada número cuadrado podemos observar lo siguiente:

4 = 1 + 3

9 = 1 + 3 + 5

16 = 1 + 3 + 5 +7

Nos damos cuenta que cada número cuadrado está compuesto por la suma de números impares, más específicamente, son equivalentes a la sumatoria de los primeros n números impares naturales.

Buena observación de la suma de números impares

Es decir, que 2 al cuadrado debería ser equivalente a la suma de los 2 primeros números impares. Si nos colocamos 10 al cuadrado, este sería igual a la suma de los 10 primeros números impares.

Si concordamos esta teoría con el hecho que hemos encontrado que la diferencia entre cada número cuadrado es un número impar mayor que la diferencia de números cuadrados anteriores, podríamos probar esta fórmula como si fuese cierta utilizando una fórmula de sumatoria basada en la fórmula de la sucesión encontrada como:

$$U_n = 2n - 1$$

La fórmula general de sumatoria es:

$$S_n = \frac{n}{2}(U_1 + U_n) = \frac{n}{2}(2U_1 + (n-1)d)$$

Si reemplazamos por las datos de la sucesión encontrada de los números impares

$$S_n = \frac{n}{2}(2(1) + (n-1)2) = \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = \frac{n}{2}(2n) = n^2$$

Esto nos ha demostrado que efectivamente el cuadrado de n es equivalente a la suma de los primeros n números impares.

Para probarlo una última vez con un número de gran valor

Tomando n = 3782

$$U_n = 2(3782) - 1 = 7563$$

$$S_n = \frac{3782}{2}(1 + 7563) = 14{,}303{,}524$$

$$3782 * 3782 = 14{,}303{,}524$$

Efectivamente, esto nos permite demostrar que los números cuadrados pueden ser encontrados también como la sumatoria de los n números impares.

Buena comprobación con el número 3782

Los Números Cúbicos

Los números cúbicos son aquellos que se les puede extraer una raíz de tercera potencia y estos dan un resultado de un número entero. Generalmente se representan por medio de la fórmula n^3, que es lo mismo que multiplicar el valor de n 3 veces, es decir que sería n*n*n

Así podemos obtener como ejemplos:

$$5^3 = 5 * 5 * 5 = 125$$

$$14^3 = 14 * 14 * 14 = 2{,}744$$

Ya que sabemos cómo se obtienen los números cúbicos, tratamos de encontrar una fórmula alternativa:

n	n^3
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729
10	1,000

Volvemos a probar encontrando la diferencia que existe entre cada número cubico.

8 – 1 = 7

27 – 8 = 19

64 – 27 = 37

125 – 64 = 61

216 – 125 = 91

Si analizamos, nos damos cuenta que la diferencia entre cada cantidad no es más que una fórmula de multiplicación de 6 y a esto se le suma 1. Es decir, en la primer diferencia sería compuesta como 6(1)+1, en la segunda diferencia sería 6(3)+1, la tercera es equivalente a 6(6)+1. en la cuarta se representa como 6(10)+1, y así continuamente.

Esto nos da una base para pensar que el 6 puede ser importante a la hora de definir los números cúbicos. De hecho, ya que sabemos que las diferencias se basan en eso, podemos analizar mejor los números cúbicos directamente.

Si hacemos una evaluación, se puede notar por ejemplo que el 8, puede resultar de multiplicar 6(1) + 2, suponiendo que para obtener entonces los números cúbicos se necesita de una multiplicación del número 6 por alguna cantidad y se le suma la cantidad elevada al cubo.

Para determinar que esto sea cierto hacemos lo siguiente:

Tomando el 3, sabemos que elevado al cubo es igual a 27. Por tanto, le restamos 3 al 27, y debe quedar un múltiplo de 6. Efectivamente, 27 – 3 = 24, que al dividirse entre 6 nos da la cantidad de 4. Es decir que el cubo de 3 se describe como 6(4) + 3.

Ahora lo realizamos para los demás números:

4 ------- 64 – 4 = 60, 60/6 = 10, el cubo sería 6(10) + 4

5 ------- 125 – 5 = 120, 120/6 = 20, el cubo sería 6(20) + 5

6 ------- 216 – 6 = 210, 210/6 = 35, el cubo sería 6(35) + 6

7 ------- 343 – 7 = 336, 336/6 = 56, el cubo sería 6(56) + 7

8 ------- 512 – 8 = 504, 504/6 = 84, el cubo sería 6(84) + 8

9 ------- 729 – 9 = 720, 720/6 = 120, el cubo sería 6(120) + 9

10 ----- 1000 – 10 = 990, 990/6 = 165, el cubo sería 6(165) + 10

Esto todavía no nos sirve de nada, pues para definir la fórmula para encontrar el cubo hemos necesitado hasta el momento de ya saber el valor del cubo. Lo que sí hemos logrado es ya definir un control y parte de la fórmula, que consistiría en

$$n^3 = 6(x) + n$$

Explicaciones claras y cálculos correctos

Nuestro problema consiste ahora en encontrar como saber qué valor debe ir en x.

Las x en las fórmulas han consistido en los valores de:

0, 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165

Las diferencias que encontramos entre cada valor de x es diferente

1 – 0 = 1

4 – 1 = 3

10 – 4 = 6

20 – 10 = 10

Ahora bien, si inspeccionamos podemos ver que estas diferencias son compuestas de la siguiente manera:

3 = 1 + 2

6 = 1 + 2 + 3

10 = 1 + 2 + 3 + 4

Además, podemos observar que cada valor en x no es más que la sumatoria de las diferencias anteriores de las x. Es decir, por tomar como ejemplo en el caso del cubo del 4, cuyo valor de x equivale a 10, este será igual 1 + 3 + 6

Por tanto cada valor en x se construye en base a las diferencias anteriores, por lo que podríamos ver lo siguiente

Para el caso del cubo del 3, que es 6(4) + 3, la x es 4, y este es igual a las diferencias de 1 + 3, y se puede representar como 1 + (1 +2). En el caso del cubo de 4, cuya x es 10, las diferencias que lo conforman son 1 + 3 + 6, que se puede representar como 1 + (1 + 2) + (1 + 2 +3). Aquí ya se puede encontrar una tendencia, que consiste en que la cantidad de 1 en x va a ser igual a n – 1. la cantidad de 2 en x sería n – 2, y así hasta llegar a que el último numero a sumar en x será solamente 1 vez la cantidad de n – 1.

Ahora ya podemos formar nuestra fórmula, ya que ya sabemos cómo definir nuestra x.

$$n^3 = 6[(n-1)1 + (n-2)2 + (n-3)3 + \cdots + 3(n-3) + 2\,(n-2) + 1(n-1)] + n$$

Ahora reemplazamos para verificar que esto sea cierto

$$4^3 = 6[(3)1 + (2)2 + 1(3)] + 4 = 6[3 + 4 + 3] + 4 = 6[10] + 4 = 64$$

Ahora para probar su certeza, con un número un poco más extenso

$$\begin{aligned} 24^3 = 6[&(23)1 + (22)2 + (21)3 + (20)4 + (19)5 + (18)6 + (17)7 + (16)8 + (15)9 \\ &+ (14)10 + (13)11 + (12)12 + (11)13 + (10)14 + (9)15 + (8)16 \\ &+ (7)17 + (6)18 + (5)19 + (4)20 + (3)21 + (2)22 + (1)23] + 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24^3 = 6[&23 + 44 + 63 + 80 + 95 + 108 + 119 + 128 + 135 + 140 + 143 + 144 \\ &+ 143 + 140 + 135 + 128 + 119 + 108 + 95 + 80 + 63 + 44 + 23] \\ &+ 24 \end{aligned}$$

$$24^3 = 6[2300] + 24$$

$$24^3 = 13{,}800 + 24$$

$$24^3 = 13{,}824$$

Para verificar que es cierto:

$$24^3 = 24 * 24 * 24 = 13{,}824$$

Efectivamente como se ha mostrado, la fórmula funciona.

Lo que sí debe ser notado, es que obviamente no es un método que se escogería como una primera opción para trabajar, ya que como se mostró con el ejemplo anterior, es una fórmula que con números grandes se vuelve muy extenso y exhaustivo.

Conclusión

Como se ha mostrado, los números muestran muchas relaciones entre sí de diferentes maneras. Se pueden encontrar siempre fórmulas alternativas que puedan definir la sucesión de números cuadrados y cúbicos. Se encuentran relaciones como se ha encontrado con los números impares, y los cubos resultaron tener una relación con el número 6. Esto muestra que no existe un solo camino para alcanzar respuestas en las matemáticas, y que estas encajan perfectamente entre sí. Lo que si debe ser notado es que estas fórmulas alternativas no son el método efectivo para llevar acabo las operaciones, ya que pueden ser muy exhaustivas, pero pueden mostrar la belleza matemática.

Buena alternativa para expresar los cuadrados y los cubos de los números