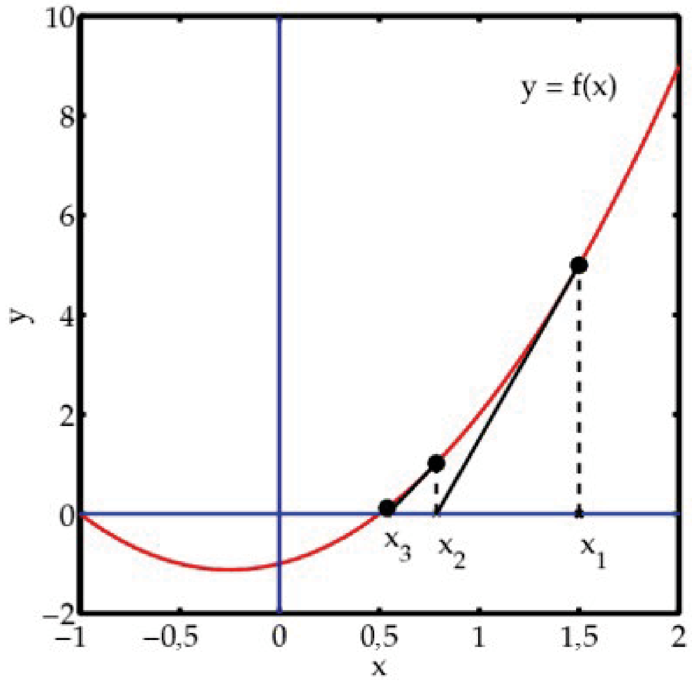
Exploración matemática

El método de Newton-Raphson



A *La introducción incluye el objetivo general y una base o fundamento.*

Motivos - Para este proyecto elegí investigar y analizar el método de Newton-Raphson, en el cual se utiliza el análisis para hallar el valor aproximado de una raíz. Elegí este tema porque parecía sumamente interesante, y la idea de utilizar el análisis para obtener el valor aproximado de una raíz me resultaba fascinante.

El objetivo de esta exploración es averiguar cómo y en qué situaciones se utiliza el método de Newton-Raphson.

Explicación del método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson, también denominado método de Newton, es un proceso iterativo que permite hallar el valor aproximado de una raíz. Conocemos el valor de raíces sencillas de números racionales, tales como $\sqrt{4}$ o $\sqrt{9}$, pero ¿qué sucede cuando tenemos números irracionales, como $\sqrt{3}$ o $\sqrt{5}$? Este método lo descubrió Isaac Newton en 1736, después de ser publicado en el libro '*Método de las fluxiones*'. Este método también lo describió Joseph Raphson en 1690, en su trabajo '*Analysis Aequationum*'.

El proceso de Newton-Raphson:

En el proceso de Newton-Raphson se utiliza la siguiente fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad f'(x_n) \neq 0$$

A y B *Falta de explicación matemática de la terminología.*

A ésta se la denomina fórmula de Newton-Raphson.

¿Cómo se derivó esta fórmula?

La raíz cuadrada de un número n se puede hallar utilizando la función:

$$f(x) = x^2 - n$$

La raíz cuadrada de n es el valor de x para el cual se cumple que f(x) = 0.

B *El alumno debe tener cuidado al usar el término "raíz". Aquí significa raíz cuadrada de "n", pero la solución de f(x)=0 también es una raíz.*

Lo primero que uno hace cuando trata de hallar el valor aproximado de una raíz es hacer una estimación inicial, partiendo de un entero positivo, y hallar la tangente a la función en ese punto.

B *Uso pobre de los subíndices en toda la exploración.*

Sea x_1 la estimación inicial.

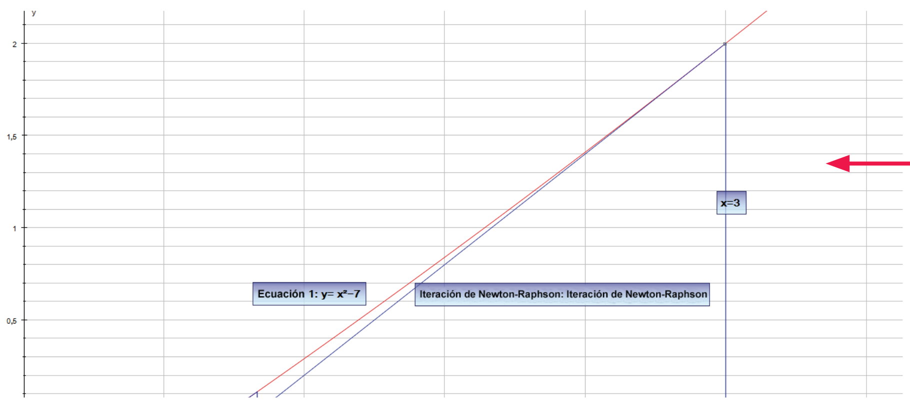
B *Uso pobre de los subíndices en toda la exploración.*

La intersección con el eje x de la recta tangente en x_1 estará más cerca de la raíz que la estimación inicial.
A este punto de corte se le puede llamar x_2.

E *No hay explicación de cómo sabe el alumno que estará más cerca.*

El cálculo de x_2 se lleva a cabo estudiando el triángulo delimitado por el eje x, la recta $x=x_1$, y la tangente a la curva en x_1. Esto sólo funciona cuando la pendiente de la función en x_1 es distinta de cero.

En el siguiente gráfico se muestra un ejemplo de este triángulo, correspondiente a la estimación de la raíz cuadrada de 7.



B *El gráfico podría ser más grande y estar más claro, ampliando el dominio y recorrido pertinentes.*

De aquí se deriva la siguiente fórmula:

$$x_2 = x_1 - \frac{y_1}{pendiente\ en\ x_1}$$

A *No se explica de dónde viene esto.*

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}}$$

E *Se aplica un método, pero no hay pruebas que demuestren una comprensión de por qué funciona el método.*

Ahora que disponemos de una mejor estimación, podemos utilizar el mismo método para acercarnos aún más a la respuesta.
Esta vez se obtendrá x_3 a partir de x_2 mediante la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}}$$

x_3 estará todavía más cerca de la raíz que x_2. Así, este procedimiento se puede repetir infinitas veces.

Ésta es una explicación de la fórmula de Newton-Raphson:

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

A *No es una explicación.*

donde n = el número de iteraciones

Cuantas más iteraciones se realicen, más exacta será la respuesta. En la práctica sólo se llega, como mucho, hasta x_{10}.

Por ejemplo, si empleamos este método para hallar un valor aproximado de la raíz $\sqrt{7}$, y si se utiliza la ecuación $y = x^2 - 7$,

C *Buena demostración de la aplicación de aspectos matemáticos desconocidos.*

la fórmula para esta función sería:

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{{x_n}^2 - 7}{2x_n}}$$

E *Derivada en el programa de estudios.*

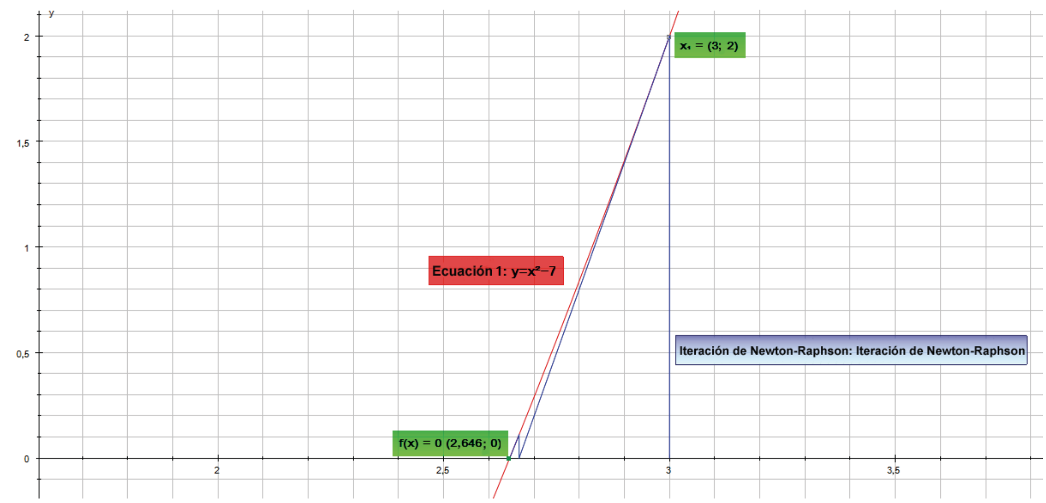
Utilizando la fórmula de Newton-Raphson para esta función, se obtiene la siguiente tabla, que muestra el valor de x en cada una de las iteraciones:

x_1	3,0000000000
x_2	2,6666666667
x_3	2,6458333333
x_4	2,6457513123
x_5	2,6457513111
x_6	2,6457513111
x_7	2,6457513111
x_8	2,6457513111
x_9	2,6457513111
x_{10}	2,6457513111

A *Falta explicación detallada.*

La tabla pone de manifiesto que únicamente se necesitan unas pocas iteraciones para obtener el valor de x con una aproximación de 3 cifras decimales y que tras la quinta iteración ya se obtiene el valor de x con una aproximación de 10 cifras decimales.

Gráfico que muestra el método de Newton-Raphson para $y = x^2 - 7$, para obtener el valor aproximado de $\sqrt{7}$



A *El gráfico no ayuda a lograr la coherencia y no aporta nada al gráfico anterior.*

Ahora haré lo mismo para $\sqrt{3}$, y utilizaré para ello la ecuación $y = x^2 - 3$

La fórmula para esta función es:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

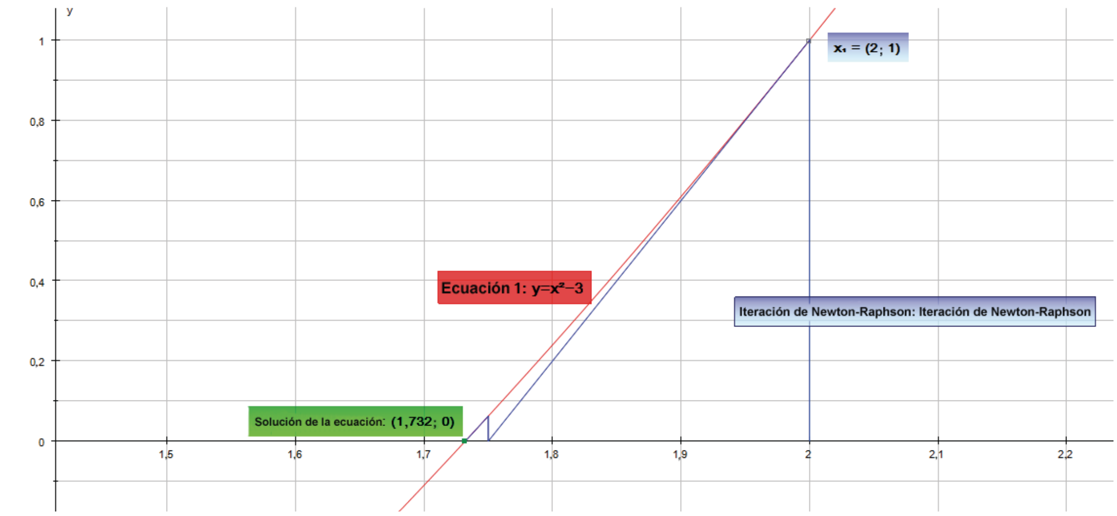
$$x_{n+1} = x_n - \frac{{x_n}^2 - 3}{2x_n}$$

Así, utilizando la fórmula de Newton-Raphson para esta función, se obtiene la siguiente tabla, que muestra el valor de *x* en cada una de las iteraciones:

x_1	2,0000000000
x_2	1,7500000000
x_3	1,7321428571
x_4	1,7320508100
x_5	1,7320508076
x_6	1,7320508076
x_7	1,7320508076
x_8	1,7320508076
x_9	1,7320508076
x_{10}	1,7320508076

De nuevo, la tabla pone de manifiesto que únicamente se necesitan unas pocas iteraciones para obtener el valor de *x* con una aproximación de 3 cifras decimales y que tras la quinta iteración ya se obtiene el valor de *x* con una aproximación de 10 cifras decimales.

Gráfico que muestra el método de Newton-Raphson para $y = x^2 - 3$, para obtener el valor aproximado de $\sqrt{3}$



Utilizando una hoja de cálculo, apliqué el mismo método al cálculo de todas las raíces $\sqrt{x}$ donde x $\in Z^{+}$ dentro del dominio $1 \leq x \leq 7$. De este modo generé la siguiente tabla de iteraciones:

B Uso correcto de la notación.

	1	2	3	4	5	6	7
x_1	1,0000000000	1,5000000000	2,0000000000	2,0000000000	2,5000000000	2,5000000000	3,0000000000
x_2	1,0000000000	1,4166666667	1,7500000000	2,0000000000	2,2500000000	2,4500000000	2,6666666667
x_3	1,0000000000	1,4142156863	1,7321428571	2,0000000000	2,2361111111	2,4494897959	2,6458333333
x_4	1,0000000000	1,4142135624	1,7320508100	2,0000000000	2,2360679779	2,4494897428	2,6457513123
x_5	1,0000000000	1,4142135624	1,7320508076	2,0000000000	2,2360679775	2,4494897428	2,6457513111
x_6	1,0000000000	1,4142135624	1,7320508076	2,0000000000	2,2360679775	2,4494897428	2,6457513111
x_7	1,0000000000	1,4142135624	1,7320508076	2,0000000000	2,2360679775	2,4494897428	2,6457513111
x_8	1,0000000000	1,4142135624	1,7320508076	2,0000000000	2,2360679775	2,4494897428	2,6457513111
x_9	1,0000000000	1,4142135624	1,7320508076	2,0000000000	2,2360679775	2,4494897428	2,6457513111
x_{10}	1,0000000000	1,4142135624	1,7320508076	2,0000000000	2,2360679775	2,4494897428	2,6457513111

En la tabla se ve claramente que tras las primeras iteraciones ya se obtiene un valor muy preciso de *x*.

A pesar de que la función principal de este método es encontrar el valor aproximado de raíces, también se puede usar para ecuaciones no lineales.

C y E El alumno podría haber mencionado otras raíces, como las raíces cúbicas.

Por ejemplo, el método de Newton-Raphson se puede utilizar para hallar para qué valores se cumple que tg(x) = x o cos(x) = x

donde f(x) = x – tg x o f(x) = x – cos x

La fórmula de Newton-Raphson se puede adaptar fácilmente a estas ecuaciones:

C El alumno crea su propio ejemplo, pero no completa la aplicación con un análisis gráfico para ver cómo funciona el proceso en este caso.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Cuando $f(x) = x - \tan x$

La fórmula se convierte en:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \tan(x_n)}{1 - \sec^2(x_n)}$$

Y cuando $f(x) = x - \cos x$

D Oportunidad para la reflexión acerca de las implicaciones especiales de las funciones no lineales.

La fórmula se convierte en:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos(x_n)}{1 + sen(x_n)}$$

Reflexión:

Evaluación y conclusión

Ha sido una exploración muy interesante, puesto que al principio no tenía ni idea ni de lo que significaba la fórmula ni de la lógica que había tras ella. La idea de utilizar la intersección con el eje x de la pendiente para irse acercando poco a poco al valor correcto de x me pareció asombrosa. Hasta ahora, siempre había tenido a mano una calculadora para hallar la raíz o el cero de un número. Y si no tenía ninguna a mano, simplemente la dejaba tal cual, como $\sqrt{3}$ o $\sqrt{5}$. A pesar de que posiblemente este método no resulta práctico para un examen de matemáticas, tiene bastantes ventajas. Este método nos ofrece la posibilidad de encontrar el valor aproximado de raíces con una precisión de miles de lugares decimales. Ya sólo con las cinco primeras iteraciones, se obtiene el valor de x con 10 lugares decimales. A la hora de hallar la raíz de x, es bastante fácil calcular mentalmente cuál es el valor de x_2, que ya está muy cerca del valor exacto. Además, esta fórmula se implementa en tecnología; por ejemplo, en el programa Autograph, donde resulta muy sencillo utilizar y hallar las iteraciones de Newton-Raphson. También ayuda el uso de hojas de cálculo, donde la fórmula se puede implementar de manera sencilla para un número cualquiera de iteraciones. Sin embargo, es fácil encontrar el cero o la raíz hallando la intersección con el eje x; esto resulta más sencillo que utilizar el método de Newton-Raphson o la calculadora o cualquier programa de representación gráfica. No obstante, este método resultaría útil en cualquier campo donde hubiera ceros o raíces implicadas y donde fuera necesaria una gran precisión.

B Confusión en el uso de "raíz" y "cero".

D Reflexión superficial sin profundidad.

Bibliografía:

Fuentes de Internet:

"*Newton-Raphson method*" *[El método de Newton-Raphson]* [en línea] <http://www.knowledgerush.com/kr/encyclopedia/Newton-Raphson_method/>. [Consulta: 20 de junio de 2010]

"*Newton-Raphson method*" *[El método de Newton-Raphson]* [en línea] <http://www.shodor.org/unchem/math/newton/>. [Consulta: 20 de junio de 2010]

" *S.O.S. Math*: *Newton-Raphson method*" *[S.O.S. Math*: *El método de Newton-Raphson]* [en línea] <http://www.sosmath.com/calculus/diff/der07/der07.html>. [Consulta: 20 de junio de 2010]

Imagen:

[en línea] <http://gilkalai.files.wordpress.com/2010/01/fa666.png> [Consulta: 20 de junio de 2010]