La leyenda (Introducción)

La Torre de Hanoi (también conocida como la Torre de Brahma o el Problema del fin del mundo) es un juego matemático que inventó en 1883 Édouard Lucas, un matemático francés. Según se cuenta, diseñó el juego basándose en la leyenda de un templo hindú. En el inicio de los tiempos se entregó a los monjes del templo una torre compuesta por 64 discos de oro, con la particularidad de que cada disco era de menor tamaño que el disco que estaba justo debajo de él. Tenían que traspasar los discos de una de las tres varillas a otra, sin que en ningún momento hubiese un disco colocado encima de otro de menor tamaño (puesto que el disco grande, con su peso, aplastaría el disco situado debajo de él). Se decía que el día en que los monjes lograsen traspasar con éxito los 64 discos de una varilla a otra, el mundo se desmoronaría y desaparecería sin dejar rastro. Si esta leyenda fuese cierta, ¿podría existir una manera de predecir el fin del mundo?

A Buena introducción.

La Torre de Hanoi es un juego clásico apto para todas las edades, puesto que variando el número de discos que hay que traspasar se obtienen infinitos niveles de dificultad y de diversión. A pesar de que el objetivo de este juego es sencillo, al jugar a él se ponen de manifiesto muchos y muy diversos conceptos y patrones matemáticos. En este trabajo se explorarán y se analizarán estos patrones; a continuación, se pondrá a prueba la leyenda de la Torre de Hanoi.

A Se identifica el objetivo general.

A la búsqueda de un patrón

La tarea consiste en averiguar cuántos movimientos se requieren para traspasar 64 discos de una varilla a otra varilla de la Torre de Hanoi. Resultará más fácil analizar y comprender el problema si empezamos por utilizar un menor número de discos. Veamos cómo se resuelve el problema de la Torre de Hanoi cuando se utiliza únicamente 1 disco, 2 discos o 3 discos.

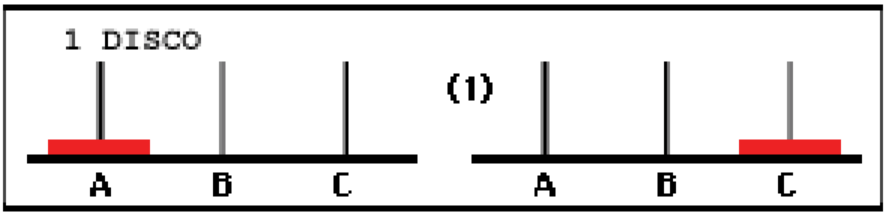


Figura A. Un movimiento

Movimiento 1: Pasar el disco 1 a la varilla C

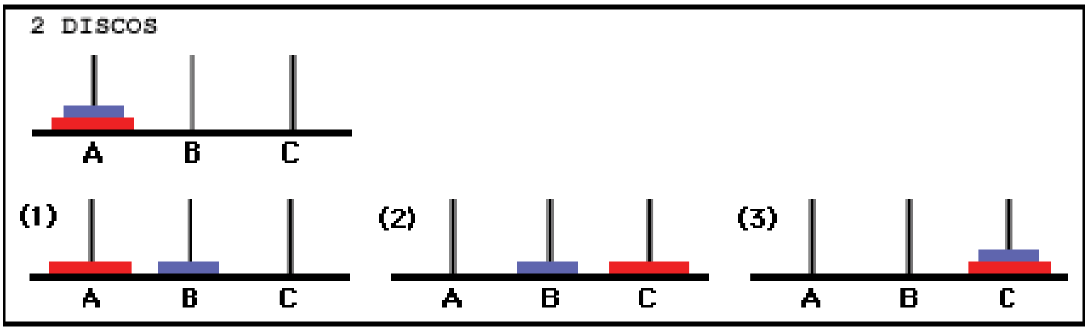


Figura B. Tres movimientos

B Estos gráficos son útiles, pero todo estaría más claro si se identificaran los discos 1 y 2.

Movimiento 1: Pasar el disco 2 a la varilla B

Movimiento 2: Pasar el disco 1 a la varilla C

Movimiento 3: Pasar el disco 2 a la varilla C

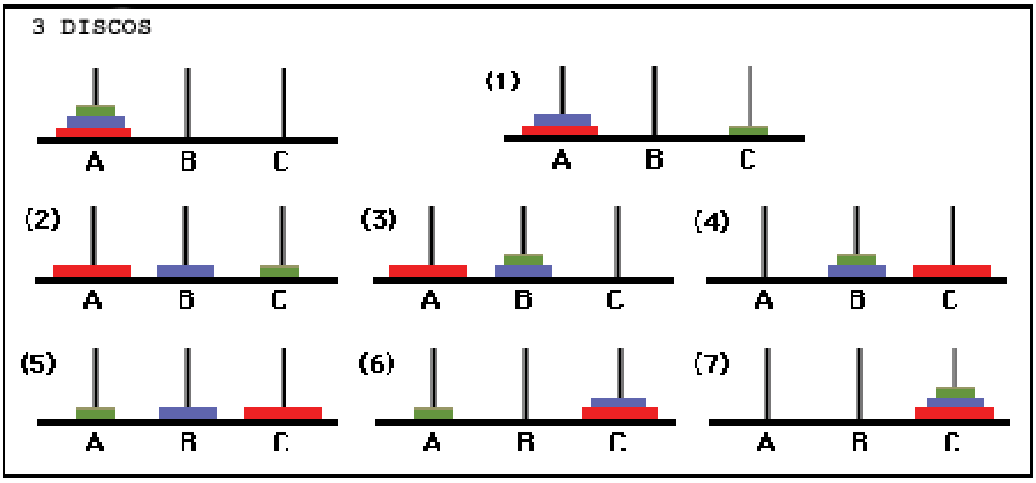


Figura C. Siete movimientos

Movimiento 1: Pasar el disco 3 a la varilla C

Movimiento 2: Pasar el disco 2 a la varilla B

Movimiento 3: Pasar el disco 3 a la varilla B

Movimiento 4: Pasar el disco 1 a la varilla C

Movimiento 5: Pasar el disco 3 a la varilla A

Movimiento 6: Pasar el disco 2 a la varilla C

Movimiento 7: Pasar el disco 3 a la varilla C

El número de movimientos que se requieren para completar el juego para un número de discos dado conforma un *patrón recursivo*. En un patrón recursivo necesitamos disponer de información sobre el término anterior del patrón para poder determinar el término siguiente. En este caso concreto, se trata del número de movimientos que necesitamos hacer para poder traspasar n discos desde la varilla A a la C.

Las Figuras 1-3 muestran que para poder resolver el problema, primero hay que traspasar n-1 discos (donde n es el número de discos utilizados en el juego) a la varilla B. En la Figura C se puede ver que se necesitan tres movimientos para traspasar dos discos hasta la varilla B (paso 3 de la Figura C). En este contexto, el número de movimientos requeridos vendrá representado por la variable M.

A No está claro a qué se refiere esto.

En el siguiente paso hay que traspasar el disco restante de la varilla A a la C (paso 4 de la Figura C).

El último paso es traspasar los discos desde la varilla B a la C. Para ello, el número de movimientos que se necesitarán será el mismo que se requirió para el primer paso; es decir, la variable M. En la Figura C se puede ver que se necesitan tres movimientos para traspasar n-1 discos desde la varilla B a la varilla C (paso 7 de la Figura C).

Si reflexionamos sobre los pasos anteriormente descritos, podemos ver que para solucionar el problema hay que realizar M movimientos dos veces (de A a B, y de B a C). También es necesario realizar un único movimiento desde A hasta C. De manera matemática, el patrón recursivo tendría que tener este aspecto:

núm. de discos	Núm. total de movimientos	Ecuación 2M + 1
1	1	2(0) + 1 = **1**
2	3	2(**1**) + 1 = **3**
3	7	2(**3**) + 1 = 7

B No es una ecuación.

Tabla A.

En la Tabla A, en la columna «Ecuación», se puede ver claramente por qué decimos que existe un patrón recursivo. El número total de movimientos necesarios para resolver el problema con un único disco pasa a ser la M del segundo problema (el de 2 discos), tal y como reflejan los números en negrita y negro. El número total de movimientos necesarios para resolver el problema con dos discos pasa a ser la M del tercer problema (el de 3 discos), tal y como reflejan los números en negrita y gris. Utilizando este patrón recursivo, es posible averiguar cuántos movimientos se requieren para resolver el problema con 4 discos, con 5 o con cualquier número n de discos, tal y como se muestra en la Tabla B.

núm. de discos	Núm. total de movimientos	Ecuación 2M + 1
1	1	2(0) + 1 = **1**
2	3	2(**1**) + 1 = **3**
3	7	2(**3**) + 1 = **7**
4	15	2(**7**) + 1 = **15**
5	31	2(**15**) + 1 = 31
n	T	2(M) + 1 = T

Tabla B.

C Sería útil incluir más gráficos.

E Demostración pobre de conocimientos. Progresión geométrica no reconocida en las diferencias.

Volviendo a la tarea original: todavía desconocemos el número de movimientos que se requieren para resolver el problema con 64 discos. Se puede utilizar el patrón recursivo y la ecuación 2M+1 para hallar la respuesta, pero para ello primero necesitamos conocer el valor de M. Este hecho pone de manifiesto un punto débil de los patrones recursivos, puesto que para poder saber cuál es el valor de M cuando hay 64 discos, uno tiene que conocer primero el valor de M para 63 discos, el valor de M para 62 discos, y así sucesivamente. Este proceso llevaría demasiado tiempo y, por tanto, sería una manera poco eficiente de resolver el problema.

D *Cierta reflexión.*

Otro problema derivado del uso del patrón recursivo aparece cuando uno quiere representar gráficamente el número total de movimientos que hacen falta en función del número de discos. Si quisiéramos utilizar la ecuación recursiva 2M + 1, pronto descubriríamos que no es posible. Esto se debe precisamente a las características intrínsecas de una ecuación recursiva. La variable M es desconocida, a menos que se conozcan los términos anteriores. Así pues, no es posible representar gráficamente datos empleando una ecuación recursiva.

Quizás una manera no recursiva de abordar el problema resultaría más útil y eficiente. Partiendo de los datos obtenidos del patrón recursivo podemos hallar un *patrón explícito* para este problema. Básicamente un patrón explícito es un patrón no recursivo, lo que significa que para obtener una respuesta no necesita información proveniente de términos anteriores.

E *Explícito frente a recursivo. Se reconocen dos ideas matemáticas importantes con relación a los patrones.*

Creación de una fórmula

En primer lugar, tomemos los valores de las dos columnas de la Tabla B. Estos valores se muestran a continuación.

núm. de discos	Núm. total de movimientos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
n	T

Tabla C

C *El intento de hallar una fórmula a través de medios gráficos indica un pensamiento independiente.*

A primera vista no parece que exista una relación explícita entre el número de discos y el número total de movimientos. Una manera de hallar una relación entre los valores es emplear el método de prueba y error, hasta que demos con una función apropiada. Sin embargo, este método puede llevar mucho tiempo y puede resultar tan ineficiente como el anterior. Una manera más eficiente de obtener una función que relacione dos conjuntos de datos es representarlos gráficamente. El siguiente gráfico representa el número total de movimientos en función del número de discos.

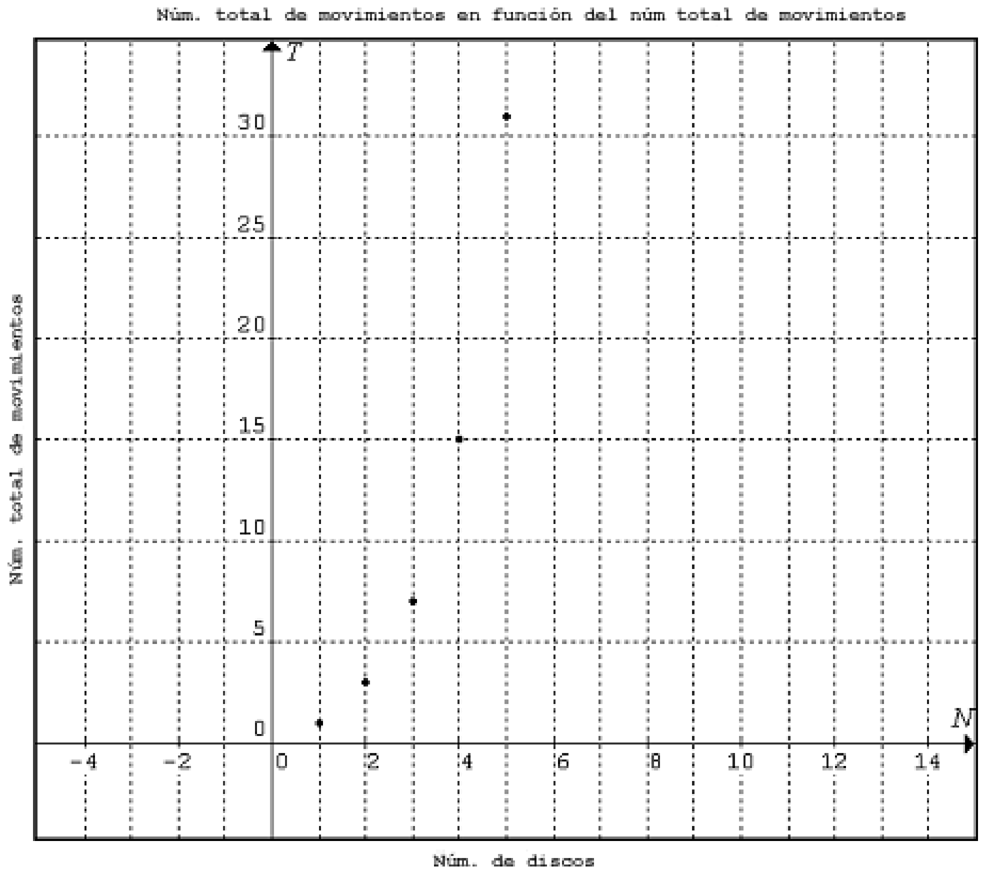
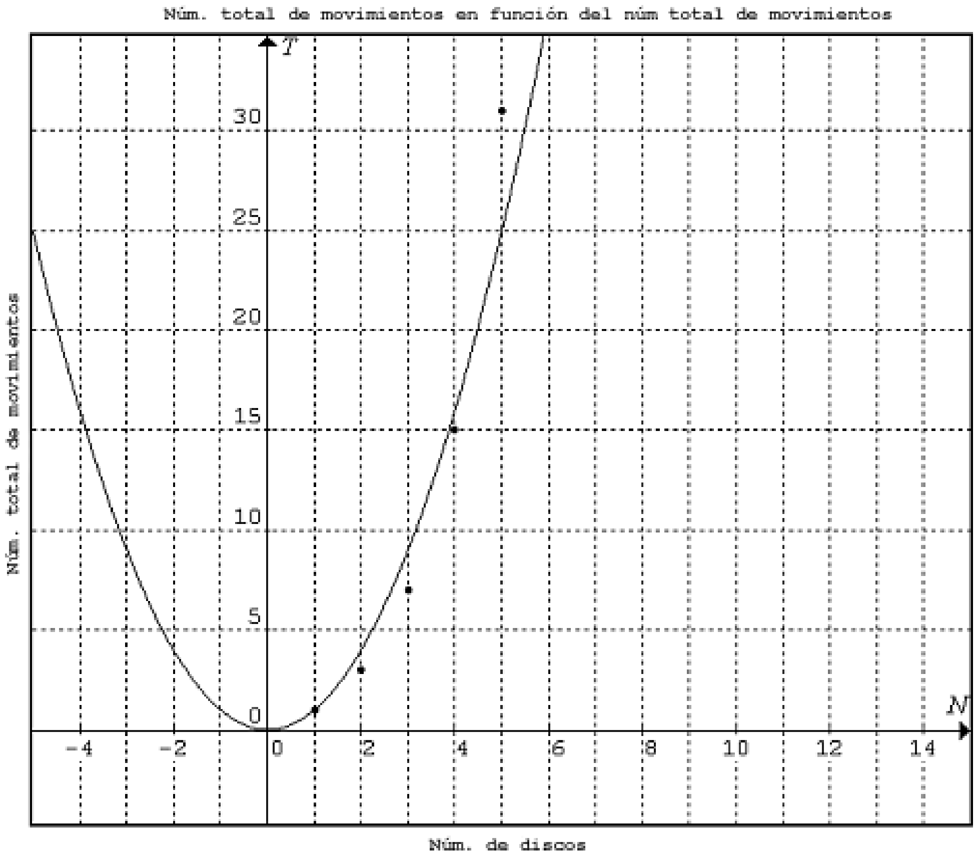


Gráfico A.

B Gráfico bien rotulado; sin embargo, el alumno debería evitar los espacios desperdiciados por medio del ajuste del dominio..

En el Gráfico A parece observarse una cierta tendencia, que sugiere que hay una relación entre los datos representados. Partiendo de los conocimientos adquiridos sobre funciones comunes, podemos ir probando distintas funciones y compararlas para determinar cuál es la más adecuada para este gráfico. El Gráfico A tiene una tendencia creciente porque los puntos se van moviendo hacia la derecha y hacia arriba. Hay dos funciones comunes que presentan una forma similar a la del Gráfico A. Estas funciones se han representado gráficamente y se han comparado con los puntos del Gráfico A, tal y como se muestra a continuación.

En el Gráfico B se comparan los datos con la función cuadrática $y = x^2$.



B El alumno no menciona que los datos discretos se presentan con una función continua.

Gráfico B.

En el Gráfico B se ve que la función cuadrática $y = x^2$ y los datos siguen una tendencia similar, salvo por el hecho de que la función cuadrática forma una parábola. Esto no resulta adecuado para los datos, porque éstos no siguen una tendencia en forma de parábola. Incluso utilizando números negativos (a pesar de no ser una situación realista, puesto que es imposible realizar un número negativo de movimientos) la tendencia de los datos sigue sin encajar con la forma de una parábola. Por lo tanto, la función cuadrática no es la adecuada para representar los datos.

E No se demuestra un conocimiento profundo. Pareciera que $y=x^2$ es la única parábola posible que se considera.

E Es confuso que se consideren los negativos aquí.

En el Gráfico C se comparan los datos con la función exponencial $y = 2^x$.

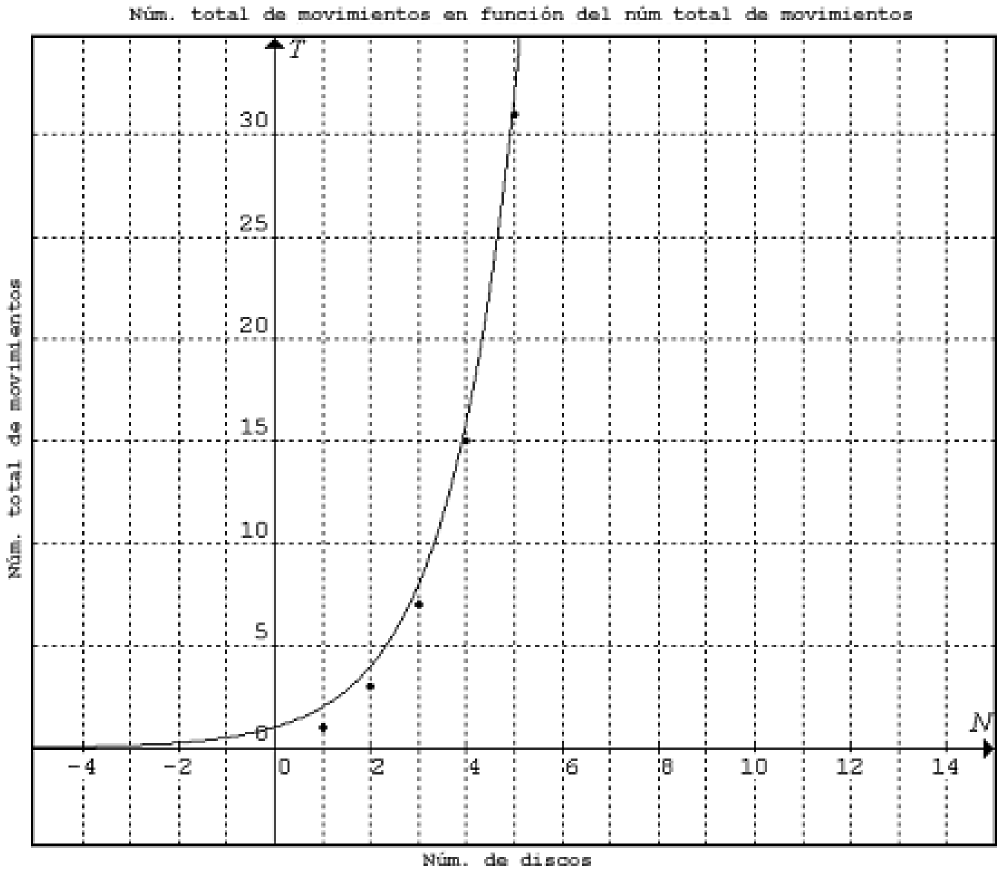


Gráfico C.

En el Gráfico C, la función exponencial $y = 2^x$ sigue una tendencia muy similar a la de los datos. Es importante resaltar que la función exponencial es, en realidad, $y = a^x$, donde $a > 0$. Si utilizásemos $y = 1^x$ obtendríamos únicamente una recta horizontal. Por eso, el siguiente valor utilizado fue 2: $y = 2^x$.

Para lograr un mejor ajuste de la función realizamos algunas transformaciones que modifican ligeramente la función. El primer paso consiste en bajar la curva, de forma que se acerque un poco más a los datos. Esto se logra realizando una transformación de «1 hacia abajo».

D *Buenas ideas para relacionar el gráfico y la fórmula recursiva por medio de transformaciones.*

En el Gráfico D se representa la función $y = 2^x - 1$ y se la compara con los datos.

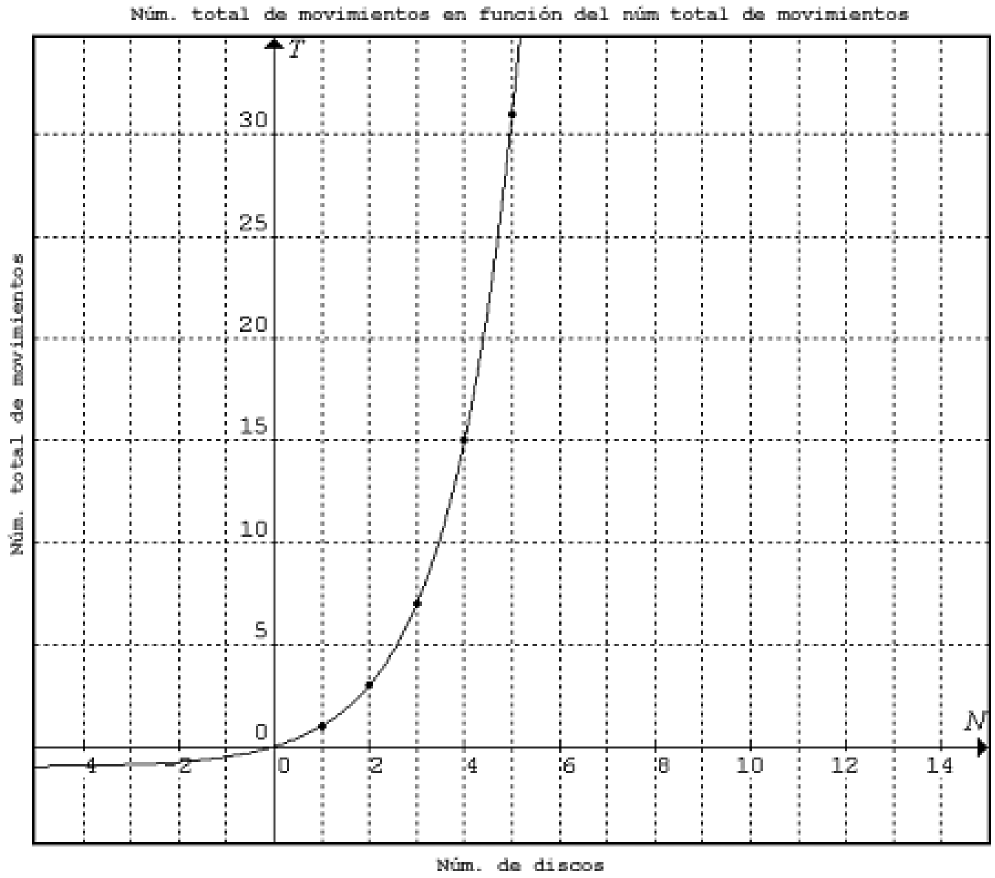


Gráfico D.

Parece que la función del Gráfico D, una vez realizada la transformación, se ajusta completamente a los datos. Esto significa que existe la posibilidad de que la relación entre el número de movimientos y el número total de movimientos sea $2^x - 1$. Podemos confirmar esta hipótesis calculando el número de discos con el total de movimientos mediante la fórmula $2^x - 1$.

Núm. de discos (x)	Núm. total de movimientos (y)	Ecuación $2^x - 1 = y$
1	**1**	$2^1 - 1 =$ **1**
2	**3**	$2^2 - 1 =$ **3**
3	**7**	$2^3 - 1 =$ **7**
4	**15**	$2^4 - 1 =$ **15**
5	**31**	$2^5 - 1 =$ **31**

Tabla D.

E Buena relación entre el patrón y la función.

Aplicación de la fórmula

La fórmula para saber cuántos movimientos hacen falta para traspasar una cantidad dada de discos desde la varilla A a la C de la Torre de Hanoi es $y = 2^x - 1$, donde x es el número de discos e y es el número total de movimientos.

Ahora que hemos encontrado la fórmula, la podemos aplicar a una tarea concreta. En este caso, la tarea consiste en averiguar cuántos movimientos se requieren para traspasar 64 discos de la varilla A a la varilla C de la Torre de Hanoi.

El número total de movimientos = $2^{64} - 1$

= $1{,}844674407 \times 10^{19}$ movimientos necesarios para traspasar 64 discos de A a C

B *Terminología incoherente; aproximación en esta parte (sin ser mencionada), pero se utiliza algo para "aproximadamente igual" más adelante.*

Recordemos que la leyenda de la Torre de Hanoi decía que cuando se hubiesen traspasado todos los discos de A a C el mundo se acabaría. Supongamos ahora que cada segundo se traspasase un disco. ¿Cuántos años se tardaría en completar el juego?

Para contestar a esta pregunta, tomamos el número total de movimientos que hemos calculado y lo dividimos por unidades de tiempo, para así obtener el número de años que se tarda en completar el juego.

Núm. total de movimientos = $2^{64} - 1 = 1{,}844674407 \times 10^{19}$

1 movimiento = 1 segundo $\therefore$ 60 movimientos = 1 minuto transcurrido

Si convertimos los segundos a años:

Núm. total de movimientos/60 segundos/60 minutos/24 horas/365 días = años transcurridos

$1{,}844674407 \times 10^{19} / 60 / 60 / 24 / 365 = 5{,}849424174 \times 10^{11}$ años transcurridos

= 584.942.417.400 años transcurridos $\cong$ 0,585 billones de años ($\cong$ 585.000 millones de años)

B Uso incorrecto del signo "aproximadamente igual".

Es decir, si se traspasase un disco cada segundo, se tardarían aproximadamente 585.000 millones de años en traspasar los 64 discos desde la varilla A a la C de la Torre de Hanoi.

Reflexión

A Se identifican las bases o fundamentos al final.

Elegí este tema porque recuerdo haber jugado en Science World a este juego que, aunque es simple, supone un verdadero reto. Por supuesto, cuando jugué a este juego no pensé en él como un concepto matemático, pero de modo natural fui identificando patrones en el juego a medida que iba resolviendo los distintos niveles y la dificultad iba en aumento. Elegí este tema porque la leyenda que lo rodea me fascina. También sabía que el juego contenía varios conceptos matemáticos que había aprendido recientemente. Yo quería ver si mis conocimientos matemáticos sobre transformaciones, funciones y patrones podían resultarme útiles para resolver la leyenda que se esconde tras la Torre de Hanoi.

A la hora de explorar las matemáticas que hay en este juego, aprendí a ver las cosas de la vida desde un punto de vista matemático y, asimismo, aprendí a ver las matemáticas desde una perspectiva realista. El proceso de resolución de la leyenda puso de manifiesto las relaciones que hay entre los distintos conceptos matemáticos y entre ellos y la vida real. Aprendí que todo está conectado matemáticamente y que incluso las cosas más simples se pueden diseccionar y analizar de un modo matemático.

D Reflexiones relativamente simples.

Conclusión

Según la leyenda de la Torre de Hanoi, si se estuviese traspasando un disco por segundo desde el inicio de los tiempos, se tardarían unos 585.000 millones de años en resolver el juego y en llegar al fin del mundo. Si esto fuese cierto, al mundo le quedarían todavía muchos años por vivir.

Esta solución se obtuvo mediante la identificación de un patrón recursivo en el juego. Haciendo uso de este patrón recursivo se creó la función $y = 2^x - 1$. Mediante esta fórmula pudimos obtener el número de movimientos que hay que realizar para resolver el juego de la Torre de Hanoi con 64 discos. Esta función es útil para obtener el número de movimientos para cualquier número de discos presentes en la Torre de Hanoi. Esto resulta útil cuando se trata de saber cuál es el número mínimo de movimientos que hay que realizar para completar el juego, como una forma de desafiar la fortaleza intelectual de cada uno.

A *Buena conclusión. Se puede ver cumplido el objetivo general, por lo que el trabajo está completo.*

Bibliografía

BOGOMOLNY, A. "*Tower of Hanoi" ["La Torre de Hanoi"]* [en línea]. <http://www.cut-the-knot.org/recurrence/hanoi.shtml> [Consulta: 4 de enero de 2010].

Dr. MATH. "*Math Forum: Ask Dr. Math FAQ: Tower of Hanoi."* ["*Foro de matemáticas: Pregunte al Dr. Math. Preguntas frecuentes: la Torre de Hanoi"*] [en línea]. <http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.tower.hanoi.html> [Consulta: 4 de enero de 2010].

"LHS: Tower of Hanoi Facts." *[Laurence Hall of Science: Algunos datos sobre la Torre de Hanoi]*. [en línea] <http://lawrencehallofscience.org/java/tower/towerhistory.html> [Consulta: 8 de enero de 2010].

WEISSTEIN, Eric W. "Tower of Hanoi -- from Wolfram MathWorld." [*La Torre de Hanoi en Wolfram MathWorld*] [en línea] <http://mathworld.wolfram.com/TowerofHanoi.html> [Consulta: 8 de enero de 2010].