

Teste 7

Versão A

Justifique todas as respostas.

1. (a) Utilize o algoritmo de Euclides para encontrar inteiros s e t tais que

$$s \cdot 85 + t \cdot 3 = 1.$$

- (b) Aplique o teorema do resto chinês para encontrar todas as soluções em \mathbb{Z} do sistema

$$\begin{cases} x = 15 \pmod{17} \\ x = 3 \pmod{3} \\ x = 4 \pmod{5} \end{cases}.$$

(Nota: pode usar as seguintes igualdades: $1 \cdot 51 - 10 \cdot 5 = 1$ e $8 \cdot 15 - 7 \cdot 17 = 1$.)

- (c) Indique o inverso de $\overline{15}$ em \mathbb{Z}_{17} . (Sugestão: pode utilizar alguma informação das alíneas anteriores, ou calculá-lo directamente.)
 (d) Mostre que $\overline{6}$ é divisor de zero em \mathbb{Z}_{15} .

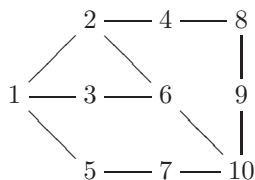
2. Considere as sucessões de Fibonacci e de Lucas

$$\begin{cases} F_0 = 0; \\ F_1 = 1; \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ para } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad \begin{cases} L_0 = 2; \\ L_1 = 1; \\ L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, \text{ para } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

- (a) Calcule $F_1 + L_1 + F_2 + L_2 + F_3 + L_3$ e $F_5 + L_5 - 4$.
 (b) Mostre por indução que para qualquer $n > 0$,

$$\sum_{k=1}^n F_k + L_k = F_{n+2} + L_{n+2} - 4.$$

3. (a) Quantas arestas tem o grafo completo K_{13} ?
 (b) Quantos grafos simples podemos construir com treze vértices e quinze arestas? (Sugestão: utilize o resultado anterior.)
 (c) Algum grafo da alínea anterior é uma árvore?
 (d) Considere o grafo



Este grafo admite um caminho de Euler? É um caminho de Hamilton?