4. Combinatória, contagens

1. Considere o conjunto

$$X = \{n \in \mathbb{N} : 100 \leq n < 1003\}.$$

   (a) Quantos números do conjunto X têm o algarismo 3?
   (b) Quantos números do conjunto X têm o algarismo 2?
   (c) Quantos números do conjunto X têm o algarismo 3 e o 7?
   (d) Quantos números do conjunto X têm o algarismo 3 ou o 7?
   (e) Quantos números do conjunto X têm o algarismo 3 e o 7, mas não o 5?
   (f) Quantos números do conjunto X têm o algarismo 2, mas nem o 5, nem o 7?
   (g) Quantos números do conjunto X têm o algarismo 3, o 5 e o 7?

2. Considere o conjunto

$$Y = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 1000\}.$$

   (a) Quantos números do conjunto Y são múltiplos de 2?
   (b) Quantos números do conjunto Y são múltiplos de 4?
   (c) Quantos números do conjunto Y são múltiplos de 5?
   (d) Quantos números do conjunto Y são múltiplos de 6?
   (e) Quantos números do conjunto Y são múltiplos de 7?
   (f) Quantos números do conjunto Y são múltiplos de 10?
   (g) Quantos números do conjunto Y são múltiplos de 20?
   (h) Quantos números do conjunto Y são múltiplos de 30?
   (i) Quantos números do conjunto Y são múltiplos de 4 e de 5?
   (j) Quantos números do conjunto Y são múltiplos de 4 ou de 5?
   (k) Quantos números do conjunto Y são múltiplos de 4, 5 e 6?
   (l) Quantos números do conjunto Y são múltiplos de 4, 5 ou 6?

3. Considere os conjuntos:

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é ímpar e } n < 100\};$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é primo e } n < 50\};$$
$$C = \{2^n \in \mathbb{N} : n \text{ é primo e } n < 8\}.$$

   (a) Calcule a cardinalidade dos conjuntos $A \cap B$, $A \cap C$ e $B \cap C$.
   (b) Calcule a cardinalidade de $A \cap B \cap C$.
   (c) Calcule a cardinalidade de $A \cup B \cup C$.
   (d) Quantos subconjuntos de C existem?
   (e) Quantos subconjuntos de B formados por quatro elementos existem?
   (f) Quantos subconjuntos de A formados por cinco elementos existem?
   (g) Quantos subconjuntos de A formados por cinco elementos, três dos quais múltiplos de 3, existem?
   (h) Quantos subconjuntos de A formados por cinco elementos, dos quais no máximo três são múltiplos de 3, existem?
   (i) Quantos subconjuntos de A formados por cinco elementos, com exactamente três múltiplos de 3, existem?

4. De um conjunto de 150 pessoas, 45 fazem natação, 40 andam de bicicleta e 50 correm. Há 32 pessoas que correm mas não andam de bicicleta, 27 fazem natação e correm e 10 pessoas praticam as três actividades.

   (a) Quantas pessoas correm, mas não fazem natação nem andam de bicicleta?
   (b) Se 21 pessoas fazem natação e andam de bicicleta, quantas pessoas não fazem nenhuma das actividades?

5. Numa loja de bicicletas que faz reparações, foram inspeccionados 50 velocípedes bastante usados. Verificou-se que 34 precisavam de novas travões e 23 necessitavam uma corrente nova.

   (a) No mínimo, quantas bicicletas precisavam de ambas as reparações?

   (b) E no máximo?

   (c) No máximo, quantas bicicletas poderão estar livres de serem reparadas?

6. De um grupo de 12 alemães e 17 franceses (nenhum dos quais com dupla nacionalidade), deseja-se formar uma comissão de sete pessoas.

   (a) Quantas comissões diferentes se podem formar?

   (b) Quantas comissões diferentes se podem formar, com três alemães e quatro franceses?

   (c) Quantas comissões diferentes se podem formar, com pelo menos três alemães?

   (d) Quantas comissões diferentes se podem formar, com no máximo três alemães?

   (e) Quantas comissões diferentes se podem formar, apenas com pessoas de uma das nacionalidades?

   (f) Quantas comissões diferentes se podem formar, com pelo menos dois alemães e dois franceses?

   (g) Quantas comissões diferentes se podem formar, com três franceses e quatro alemães, de tal forma que Louis (um dos franceses) e Johannes (um dos alemães) não façam parte de uma mesma comissão?

   (h) Quantas comissões diferentes se podem formar, de tal forma que Jean e Isabelle (dois dos franceses) não façam parte de uma mesma comissão?

7. Sejam $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $T = \{a, b, c, d\}$.

   (a) Quantas funções de S para T existem?

   (b) Quantas funções de T para S existem?

   (c) Quantas funções sobrejectivas de S para T existem?

   (d) Quantas funções injectivas de T para S existem?

8. Qual é o número máximo de automóveis que pode haver em Portugal, se forem utilizadas apenas matrículas da forma LL-AA-AA (onde L representa uma letra do alfabeto português, diferente de K, W e Y, e A representa um algarismo)? E se admitirmos as formas AA-AA-LL e AA-LL-AA?

9. Quantos números naturais com três algarismos se podem formar com os algarismos de 1 a 9? Destes, quantos são pares? E quantos são menores que 521?

10. Seja $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Quantos naturais com k algarismos são capicua?

11. Quantos números naturais se escrevem sem repetir algarismos (na sua expressão decimal)?

12. Determine quantas sequências de letras diferentes se podem fazer, permutanto as letras das seguintes palavras:

    (a) ARO;

    (b) MATO;

    (c) PERTO;

    (d) ABA;

    (e) MESMO;

    (f) RARA;

    (g) ARROBA;

    (h) ALFAMA;

    (i) ABRACADABRA.

13. **Binómio de Newton.** Mostre por indução que para quaisquer números não nulos a e b, e qualquer natural $n \geq 1$,

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}.$$

14. Utilize o binómio de Newton para desenvolver os seguintes polinómios:
    (a) $(x+2y)^4$;
    (b) $(x-y)^6$;
    (c) $(3x+1)^4$;
    (d) $(3x+2)^5$;
    (e) $(x+2)^5$;
    (f) $(2x+x^2)^7$;
    (g) $(2a+3ab)^5$.
15. (a) Qual é o coeficiente de x^3 no polinómio $(x+1)^8$?
    (b) Qual é o coeficiente de b^3 no polinómio $(b+3)^8$?
    (c) Qual é o coeficiente de c^{11} no polinómio $(2c+c^2)^8$?
16. Utilize o binómio de Newton para mostrar que para qualquer natural $n \geq 1$,
    (a)
    $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n;$$
    (b)
    $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{k} = 0;$$
    (c)
    $$\sum_{k=0}^{n} (-2)^r \binom{n}{k} = (-1)^n.$$
17. (a) De quantas maneiras diferentes podemos dividir um grupo de 12 estudantes em três grupos de quatro, de modo a que o primeiro grupo estude geometria, o segundo álgebra e o terceiro análise?
    (b) De quantas maneiras diferentes podemos dividir um grupo de 12 estudantes em três grupos de quatro, sabendo que todos os grupos se dedicam ao mesmo?
    (c) De quantas maneiras diferentes podemos dividir um grupo de 12 estudantes em três grupos de três, quatro, e cinco elementos, sabendo que todos os grupos se dedicam ao mesmo?
    (d) De quantas maneiras diferentes podemos dividir um grupo de 12 estudantes em três grupos, dois de três e um de seis elementos, sabendo que todos os grupos se dedicam ao mesmo?
18. Numa loja há 13 tipos de postais diferentes. Queremos enviar postais a 4 amigos.
    (a) De quantas maneiras diferentes podemos enviar os postais?
    (b) De quantas maneiras diferentes podemos enviar os postais, de modo a que cada amigo receba um postal diferente?
    (c) Se enviarmos dois poistais a cada amigo, de quantas maneiras diferentes podemos enviar os postais, de modo a que cada amigo receba dois postais diferentes?
    (d) Se enviarmos três poistais a cada amigo, de quantas maneiras diferentes podemos enviar os postais, de modo a que cada amigo receba três postais diferentes?
19. O José convidou sete amigos para jantar. Quando chegam, todos se cumprimentam com um aperto de mão. Quantos apertos de mão são dados?
20. **Teorema multinomial.** Considere o coeficiente multinomial definido por
    $$\binom{n}{k_1,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1!\cdots k_m!}.$$
    Mostre por indução em m que para quaisquer naturais $n, m \geq 1$, e quaisquer números não nulos $a_1, \ldots, a_m$,
    $$(a_1 + \cdots + a_m)^n = \\ = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_m \geq 0 \\ k_1+\cdots+k_m = n}} \binom{n}{k_1,\ldots,k_m} {a_1}^{k_1} \cdots {a_m}^{k_m}.$$
21. Expresse as respostas que deu no problema 12 em coeficientes multinomiais.