Exame de Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Departamento de Matemática, Universidade de Évora

11 de Janeiro de 2018

Resolva os Grupos I, II, III e IV em folhas de teste separadas - 2h+30m de tolerância

Justifique todas as respostas, não é atribuída classificação a respostas sem justificação

Grupo I

1. Para os parâmetros $a, b \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares dado por

$$\begin{cases} x - y + az &= 1 \\ x - 2z &= b \\ -x + ay + 2z &= 1 \end{cases}$$

Discuta, em função de a e b, o sistema de equações dado.

2. Sejam A, B, C matrizes invertíveis. Resolva a equação matricial

$$(A + XC)^T B = A^{-1} + I_n,$$

i.e., determine a matriz X.

3. Seja A uma matriz tal que A^2 é invertível. Mostre que A é invertível.

Grupo II

4. Considere

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcule $|B|$. Podemos garantir que existe (ou que não existe) a matriz B^{-1}?

5. Seja

$$E = \langle (0, -1, 2, -1), (1, 0, 2, 1), (2, 1, 2, 3), (1, -2, 6, -1) \rangle.$$

Construa uma base para E. Qual a dimensão de E?

6. Num espaço vetorial real E, considere o sistema de vetores linearmente independente

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3).$$

Diga se o sistema de vetores

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_3, \vec{v}_3)$$

é ou não linearmente independente.

7. Determine um subespaço complementar de

$$F = \langle (-1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, -1) \rangle$$

em $\mathbb{R}^4$.

Grupo III

8. Considere no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ os subespaços

$$F = \langle (1,2,0,-1), (-1,0,1,1), (0,0,0,1) \rangle$$

e

$$G = \{(x,y,z,w) \ : \ x-y+2z-w=0, x+y-z+w=0, x+3y-4z+2w=0\}.$$

(a) Determine $\dim(G)$.

(b) Determine uma base para $F+G$ e $\dim(F \cap G)$.

9. Considere a aplicação linear $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\varphi(x,y,z,w) = (x-y-2w, 2x+y+3z-w, 2x+2z-2w)$$

(a) Determine $\mathrm{Nuc}(\varphi)$ e uma base para $\mathrm{Im}(\varphi)$.

(b) φ é um monomorfismo? φ é um epimorfismo? φ é invertível?

10. Considere a aplicação linear $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\varphi(1,0,0) = (2,1), \ \varphi(0,1,0) = (1,-1), \ \varphi(0,0,1) = (-1,3).$$

Utilizando matrizes de mudança de base, determine a matriz da aplicação linear φ relativamente à base $(1,0,1), (-1,1,0), (1,0,0)$ de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Grupo IV

11. Mostre que sendo A uma matriz $n \times n$ qualquer com valores próprios reais $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, se tem

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n.$$

12. Considere, no espaço $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Mostre que se obtém um produto interno em $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ pondo

$$A \cdot B = \mathrm{tr}(A^T D B).$$

13. Seja $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a forma quadrática associada à matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Determine a forma quadrática associada a A.

(b) Determine os valores e vetores próprios de A.

(c) Classifique Q quanto à positividade (definida positiva, definida negativa, semidefinida positiva, semidefinida negativa ou indefinida).