1. a) $AX = B$

$$i)\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 1+k & 1 \\ -2 & k+2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad ii)\begin{bmatrix} 2 & 4 & b \\ 1 & a+2 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix} \qquad iii)\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ \lambda & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$$

b) O primeiro sistema nunca pode ser impossível pois é homogéneo. A característica da matriz ampliada nunca pode ser superior à característica da matriz simples.

c)

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & | \, a \\ 2 & 1 & 1 & | \, 0 \\ \lambda & -1 & 2 & | \, b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & | \, a \\ 1 & 1 & 2 & | \, 0 \\ 2 & -1 & \lambda & | \, b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & | & a \\ 0 & 3 & -4 & | & -2a \\ 0 & 0 & \lambda+3 & | & b+a \end{bmatrix}$$

- Se $\lambda + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -3$ o sistema é **possível e determinado** pois a característica do sistema ampliado é igual à característica da matriz simples e é igual ao número de incógnitas 3 (para quaisquer a e b).
- Se $\lambda = 3$ e $a = -b$ o sistema é **possível indeterminado** pois a característica do sistema ampliado é igual à característica da matriz simples 2 mas menor que o número de incógnitas 3.
- Se $\lambda = 3$ e $a \neq -b$ o sistema é **impossível** pois a característica do sistema ampliado 3, superior à característica da matriz simples 2.

2. a) $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

b) $A^T X^T + A = BC \Leftrightarrow A^T X^T = BC - A \Leftrightarrow X^T = (A^T)^{-1}(BC - A) \Leftrightarrow X = \left((A^{-1})^T (BC - A)\right)^T$

$$X = \left(\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\right)\right)^T$$

$$X = \left(\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}\right)\right)^T$$

$$X = \left(\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & 7 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}\right)^T$$

$$X = \left(\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -11 & 9 & 1 \\ -1 & -3 & -7 \end{bmatrix}\right)^T = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -11 & -1 \\ 3 & 9 & -3 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

c) $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

$$X = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3a-3b \\ -2a+b \\ -4a+5b \end{bmatrix}.$$

3. $|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 1+k & 1 \\ -2 & k+2 & 2 \end{vmatrix} = 2k(1+k) - 2 + k + 2 + 2(1+k) - k(k+2) - 2 = k^2 + 3k$

Se $k = 0\ ou\ k = -3$ o determinante da matriz simples é 0 e assim não é possível utilizar a regra de Cramer. Se $k \neq 0\ e\ k \neq -3$ o determinante não é zero e assim é possível utilizar a regra de Cramer, o sistema é possível e determinado.

4. a) $\begin{vmatrix} a & 6 & -\frac{1}{2} \\ b & 3 & -1 \\ c & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & 2 & -\frac{1}{2} \\ b & 1 & -1 \\ c & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 3\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ b & 1 & 2 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 = -\frac{3}{2};$

b) $\begin{vmatrix} a & 2a+2 & a+1 \\ b & 2b+1 & b+2 \\ c & 2c & c+1 \end{vmatrix} C_2 - 2C_1 \to \begin{vmatrix} a & 2 & a+1 \\ b & 1 & b+2 \\ c & 0 & c+1 \end{vmatrix} C_3 - C_1 = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ b & 1 & 2 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3a+1 \\ -1 & 1 & 3b+2 \\ -1 & 0 & 3c+1 \end{vmatrix} C_2 + C_1 \to \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3a+2 \\ -1 & 1 & 3b+1 \\ -1 & 0 & 3c \end{vmatrix} C_3 - C_2 \to \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3a \\ -1 & 1 & 3b \\ -1 & 0 & 3c \end{vmatrix} C_3 \leftrightarrow C_1 \to -\begin{vmatrix} 3a & 2 & 1 \\ 3b & 1 & -1 \\ 3c & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$C_3 - C_2 \to -\begin{vmatrix} 3a & 2 & -1 \\ 3b & 1 & -2 \\ 3c & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ b & 1 & 2 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 = 3.$