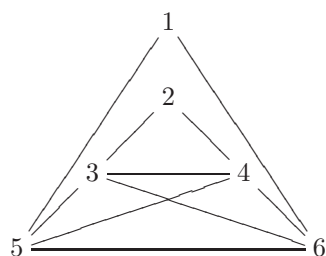


## Exame, época normal

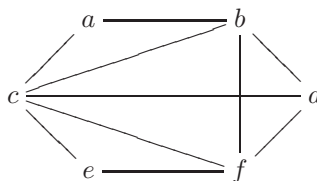
### Versão A

Justifique todas as respostas.

1. Mostre por indução que  $17^n - 11^n$  é múltiplo de 6, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ .
2. As matrículas em Espanha são, desde o ano 2000, uma sequência de quatro algarismos e três consoantes. Sabendo que a letra Q não é utilizada, quantos carros podem ser matriculados com este sistema? (Não é necessário calcular o resultado final, basta apresentar a expressão numérica e justificá-la.)
3. (a) Diga, justificando, se os seguintes grafos são isomorfos:



$G$



$H$

- (b) Encontre um caminho de Euler no grafo  $G$ .
  - (c) Quantos subgrafos de  $G$  com 3 arestas existem?
  - (d) Dê um exemplo de um subgrafo de  $G$  que seja uma árvore.
4. (a) Aplicando o algoritmo de Euclides, encontre o máximo divisor comum  $d$  entre 3 e 77 e encontre inteiros  $s$  e  $t$  tais que

$$d = 77s + 3t.$$

- (b) Aplique o teorema do resto chinês para encontrar todas as soluções em  $\mathbb{Z}$  do sistema

$$\begin{cases} x = 2 \pmod{3} \\ x = 3 \pmod{7} \\ x = 4 \pmod{11} \end{cases}.$$

(Nota: pode usar as seguintes igualdades:  $3 \cdot 33 - 14 \cdot 7 = 1$  e  $-1 \cdot 21 + 2 \cdot 11 = 1$ .)

- (c) Mostre que  $\overline{11}$  é divisor de zero em  $\mathbb{Z}_{77}$ .
5. Seja  $n$  um natural positivo, sejam  $a, b, c$  e  $d$  inteiros e suponhamos que

$$a = b \pmod{n}.$$

Mostre que

$$ca + d = cb + d \pmod{n}.$$