

## Teste 6

### Versão A

Justifique todas as respostas.

1. (a) Utilize o algoritmo de Euclides para encontrar inteiros  $s$  e  $t$  tais que

$$s \cdot 95 + t \cdot 3 = 1.$$

- (b) Aplique o teorema do resto chinês para encontrar todas as soluções em  $\mathbb{Z}$  do sistema

$$\begin{cases} x = 2 \pmod{3} \\ x = 4 \pmod{5} \\ x = 3 \pmod{19} \end{cases}.$$

(Nota: pode usar as seguintes igualdades:  $23 \cdot 5 - 2 \cdot 57 = 1$  e  $4 \cdot 19 - 5 \cdot 15 = 1$ .)

- (c) Indique o inverso de  $\overline{15}$  em  $\mathbb{Z}_{19}$ . (Sugestão: pode utilizar alguma informação das alíneas anteriores, ou calculá-lo directamente.)

- (d) Mostre que  $\overline{6}$  é divisor de zero em  $\mathbb{Z}_{14}$ .

2. Mostre por indução que para qualquer natural  $n$ ,

$$\sum_{i=0}^n 6i = 3n(n+1).$$

3. (a) Quantas arestas tem o grafo bipartido completo  $K_{7,9}$ ?  
(b) Quantos subgrafos de  $K_{7,9}$  têm dezasseis vértices e dezasseis arestas? (Sugestão: utilize o resultado anterior.)  
(c) Algum grafo da alínea anterior é uma árvore?  
(d) Quantos subgrafos de  $K_{7,9}$  são isomorfos ao grafo  $K_{5,6}$ ?
4. Seja  $n$  um natural positivo e sejam  $a_1, a_2, b_1$ , e  $b_2$  inteiros. Mostre que se  $a_1 = b_1 \pmod{n}$  e  $a_2 = b_2 \pmod{n}$ , então  $3a_1 - 5a_2 = 3b_1 - 5b_2 \pmod{n}$ .