Lógica Computacional

Universidade de Évora, 6 de Junho de 2018.

Exame normal

Duração: 3 horas.

Justifique as respostas.

Exercício 1 *Sejam ϕ, ψ e θ proposições. Mostre que*

$$(\phi \vee \psi) \rightarrow \theta \models (\phi \rightarrow \theta) \vee (\psi \rightarrow \theta).$$

As fórmulas $(\phi \vee \psi) \rightarrow \theta$ e $(\phi \rightarrow \theta) \vee (\phi \rightarrow \theta)$ são logicamente equivalentes?

Exercício 2 *Utilizando Tableaux Semânticos, investigue se*

$$(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)$$

$$\forall x(Px \vee Qx) \rightarrow (\forall x Px \vee \exists x Qx)$$

são tautologias.

Exercício 3 *Seja P um símbolo de relação unária e Q um símbolo de relação binária. Dê um exemplo de uma estrutura adequada com domínio $\mathbb{R}$ em que $\forall x(Px \rightarrow \exists y Qxy)$ é válida.*

Exercício 4

1. *No âmbito da Lógica proposicional, que é um conjunto de fórmulas consistente, e que é um conjunto de fórmulas consistente maximal?*
2. *Dê um exemplo de uma fórmula na Forma Normal Disjuntiva com três literais, que é incompatível.*
3. *Dê um exemplo de um termo que contém dois símbolos de função, um símbolo de constante e duas variáveis.*
4. *No âmbito da Lógica de primeira ordem, seja $\mathcal{L}$ uma linguagem e $\mathfrak{M}$ uma estrutura adequada para $\mathcal{L}$. Que é $Tr(\mathfrak{M})$, i.é. a Teoria de $\mathfrak{M}$?*

Exercício 5 *Simbolize na linguagem da Lógica de primeira ordem as seguintes afirmações:*

Alguns alunos têm um portátil.
Um aluno com um portátil nunca tem um tablet.
Portáteis são mais poderosos que tablets.
Há portáteis que são mais poderosos que outros.

Ax: x é aluno, Px: x é portátil, Tx: x é tablet, Rxy: x tem y, Sxy: x é mais poderoso que y.

Exercício 6 *Sejam ϕ e ψ proposições, e P e Q predicados unários. Mostre na Dedução Natural*

$$\neg\phi \vdash \psi \leftrightarrow (\psi \vee \phi)$$

$$\forall x(Px \to Qx) \vdash \neg\exists x(Px \wedge \neg Qx)$$

$$\vdash \forall x\forall y((Rxy \wedge x \doteq y) \to Ryy).$$

Esquema de deduções na Dedução Natural:

$\wedge^+$	:	$\psi, \phi/\phi \wedge \psi$	$\to^+$	:	$\phi[H] \cdots \psi/\phi \to \psi$
$\wedge^-$	:	$\phi \wedge \psi/\phi$ e $\phi \wedge \psi/\psi$	$\to^-$	:	$\phi, \phi \to \psi/\psi$
$\neg^+$	:	$\phi[H] \cdots \psi \wedge \neg\psi/\neg\phi$	$\leftrightarrow^-$	:	$\phi \leftrightarrow \psi/\phi \to \psi$ e $\phi \leftrightarrow \psi/\psi \to \phi$
$\neg\neg^-$	:	$\neg\neg\phi/\phi$	$\leftrightarrow^+$	:	$\phi \to \psi, \psi \to \phi/\phi \leftrightarrow \psi$

$\vee^+$	:	$\phi/\phi \vee \psi$ e $\psi/\phi \vee \psi$
$\vee^-$	:	$\phi \vee \psi, \phi[H_1] \cdots \theta, \psi[H_2] \cdots \theta/\theta$

$\forall^+$	:	$\phi(a)/\forall x\phi(x)$ se $\phi(a)$ não é hipótese, nem depende de hipóteses em que a ocorre; substituição em todas as ocorrências de a em ϕ.
$\forall^-$	:	$\forall x\phi(x)/\phi(t)$, com t termo qualquer; substituição em todas as occorências livres de x em $\phi(x)$.
$\exists^+$	:	$\phi(t)/\exists x\phi(x)$, com t termo qualquer; substituição em algumas ocorrências t em ϕ.
$\exists^-$	:	$\exists x\phi(x), \phi(a)[H] \cdots \psi/\psi$, a_0 não ocorre em ψ; substituição em todas as ocorrências livres de x em $\phi(x)$.
$\doteq^+$	:	$t \doteq t$, com t termo qualquer.
$\doteq^-$	:	$t_1 \doteq t_2, \phi(t_1)/\phi(t_2)$, com t_1, t_2 termos qualquer; substituição em algumas ocorrências de t_1 em ϕ.

$\frac{\psi, \neg\psi}{\phi}$ MT

$\frac{\phi, \psi}{\phi \wedge \psi}$ $\wedge^+$

$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi}$, $\frac{\phi \wedge \psi}{\psi}$ $\wedge^-$

$\neg\neg^+$ $\frac{\phi}{\neg\neg\phi}$ Teses

ϕ [H]

$\neg\psi$ RA

ϕ $\bot$

ϕ [H]
$\vdots$
$\frac{\psi \wedge \neg\psi}{\neg\phi}$ $\neg^+$

$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}$ $\neg\neg^-$

ϕ [H]
$\vdots$
$\frac{\psi}{\phi \to \psi}$ $\to^+$

$\frac{\phi, \phi \to \psi}{\psi}$ $\to^-$ M.P

$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}$ $\vee^+$

$\phi \vee \psi$
ϕ [H1]
$\vdots$
θ
ψ [H2]
$\vdots$
θ
θ $\vee^-$

Conversões

$\phi \to \psi \dashv\vdash \neg(\phi \wedge \neg\psi)$

$\phi \to \psi \dashv\vdash \neg\phi \vee \psi$

$\phi \wedge \psi \dashv\vdash \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$

$\phi \vee \psi \dashv\vdash \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$

$\phi \leftrightarrow \psi \dashv\vdash (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$

$\neg\phi \to \psi \dashv\vdash \phi \vee \psi$

$\phi \to \psi, \psi \to \theta \vdash \theta$ hipoteses introduzidas ⇒ [H]

	H
$\phi \to \psi$	H
$\psi \to \theta$	H

p	q	¬p	¬q	p∧q	p∨q	p→q	p↔q
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1

...lógica ⇒ Qd todos os casos da tese dão 1

...tível ⇒ Existe uma valorização de valor 1

...ngente ⇒ Existe valoração $V(\phi)=1$ e valoração contraria que $V'(\phi)=0$

...sequência lógica $\phi \wedge \psi \vDash \phi \vee \psi$

valoração tese

Para ser uma consequência lógica, o valor da valoração (1) tem que coincidir com a tese

$\phi \wedge \psi$	$\phi \vee \psi$
0	0
0	1
0	1
1	1

valoração é 1 aqui e a tese tb, logo é uma consequência lógica.

$\neg\phi$
$F\phi$

$(\phi \wedge \psi)$
$V\phi$
$V\psi$

$(\phi \vee \psi)$
$V\psi$

$(\phi \to \psi)$
ϕ $V\psi$

$(\phi \leftrightarrow \psi)$

1b. Fp

2b. $F\neg\phi$
$V\phi$

3b. $F(\phi \wedge \psi)$
$F\phi$ $F\psi$

4b. $F(\phi \vee \psi)$
$F\phi$
$F\psi$

Forma normal disjuntiva $(\ \wedge\ ) \vee (\ \wedge\ )$

Forma normal conjuntiva $(\ \vee\ ) \wedge (\ \vee\ )$

5b. $F(\phi \to \psi)$
$V\phi$

6b. $F(\phi \leftrightarrow \psi)$
$V\phi$ $F\phi$

Num tableu semantico, para ser tautologico, a tentativa de falsificar a ...

$\neg\phi \vdash \psi \leftrightarrow (\psi \vee \phi)$

1. $\neg\phi$	H
2. $\neg\psi$	$\boxed{H}$?
3. ψ	$\boxed{H}$
4. $\psi \wedge \neg\psi$	2, 3, $\wedge^+$
5. $\neg\neg\phi$	1, 4, $\neg^+$
6. ϕ	5, $\neg\neg^-$
7. $\psi \vee \phi$	3, 6 $\vee^+$
8. $(\psi \vee \phi) \to \psi$	7, 3, $\to^+$
9. $\psi \to (\psi \vee \phi)$	3, 7, $\to^+$
10. $\psi \leftrightarrow (\psi \vee \phi)$	8, 9, $\leftrightarrow^+$

$\forall x(Px \to Qx) \vdash \neg\exists x(Px \wedge \neg Qx)$

1. $\forall x(Px \to Qx)$	H
2. Px	$\boxed{H}$
3. $(Px \to Qx)$	1, $\forall^-$
4. Qx	2, 3, $\to^-$
5. $\neg Qx$	$\boxed{H}$
6. $Px \wedge \neg Qx$	2, 5, $\wedge^+$
7. $\exists x(Px \wedge \neg Qx)$	6, $\exists^+$

$\vdash \forall x \forall y(Rxy \wedge x \doteq y) \to Ryy)$

1. $x \doteq y$	$H \doteq$
2. Rxy	$\boxed{H}$
3. $Rxy \wedge x \doteq y$	1, 2, $\wedge^+$
4. $Rxy \wedge x \doteq y \to Rxy$	3, 2, $\to^+$
5. $\forall xy(Rxy \wedge x \doteq y) \to Ryy$	4, $\forall^+$