

## 7. Grafos

Um *grafo* é um par  $(V, A)$ , onde  $V$  é um conjunto qualquer e  $A$  é um conjunto de linhas que unem elementos de  $V$ . Chamamos aos elementos de  $V$  *vértices* do grafo e aos elementos de  $A$  *arestas*.

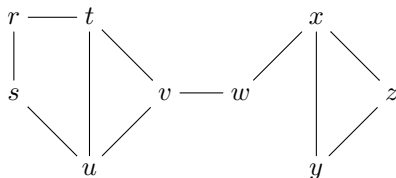
Um *caminho* é uma sequência de vértices do grafo  $v_1v_2 \cdots v_k$  tal que  $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{k-1}v_k$  são arestas do grafo. O *comprimento* de um caminho é o número de arestas presentes na sequência. Um caminho é *fechado* se começa e acaba no mesmo vértice. Um caminho é *simples* se não tem vértices repetidos (excepto eventualmente o primeiro e o último). Um *ciclo* é um caminho fechado sem arestas repetidas. Um ciclo é *simples* se os únicos vértices repetidos forem o primeiro e o último. Um grafo diz-se *conexo* se existe um caminho entre cada dois vértices.

Duas arestas que unam o mesmo par de vértices dizem-se *paralelas*. A uma aresta que una um vértice a si mesmo chamamos um *laço*. Um grafo é *simples* se não tiver arestas paralelas nem laços.

O *grau* de um vértice é o número de arestas que incidem nele (os laços contam a dobrar). Um grafo é *regular* se todos os seus vértices tiverem o mesmo grau.

Dois grafos  $G_1 = (V_1, A_1)$  e  $G_2 = (V_2, A_2)$  são *isomorfos* se existir uma bijecção  $f: V_1 \rightarrow V_2$  entre os seus vértices tal que para quaisquer vértices  $u, v \in V_1$ ,  $uv$  é uma aresta de  $G_1$  se e só se  $f(u)f(v)$  é uma aresta de  $G_2$ .

1. Considere o grafo:



Diga quais são os caminhos mais curtos entre:

- $s$  e  $v$ ;
- $s$  e  $z$ ;
- $u$  e  $y$ ;
- $t$  e  $y$ ;

(e)  $v$  e  $w$ .

- Para cada par de vértices do exercício anterior, diga quais são os caminhos mais longos que não repetem vértices.
- Dê um exemplo de um grafo com vértices  $x, y$  e  $z$  que satisfaça em simultâneo as seguintes propriedades:
  - tem um ciclo simples que contém os vértices  $x$  e  $y$ ;
  - tem um ciclo simples que contém os vértices  $y$  e  $z$ ;
  - não tem nenhum ciclo simples que contenha os vértices  $x$  e  $z$ .
- Dê um exemplo de um grafo com vértices  $a, b, c$  e  $d$  que satisfaça em simultâneo as seguintes propriedades:
  - tem um ciclo simples que contém os vértices  $a, b$  e  $c$ ;
  - o caminho mais curto entre  $a$  e  $d$  tem comprimento dois;
  - tem um caminho simples de comprimento três que une  $b$  a  $d$ .
- Faça um esboço de todos os grafos diferentes (e não isomorfos entre si) que se podem fazer com três vértices e três arestas.
  - Faça um esboço de todos os grafos simples diferentes (e não isomorfos entre si) que se podem fazer com quatro vértices e quatro arestas.
  - Faça um esboço de todos os grafos simples diferentes (e não isomorfos entre si) que se podem fazer com cinco vértices e cinco arestas.
  - Dos grafos das alíneas anteriores, quais são regulares? E quais são conexos?
- Faça um esboço de todos os grafos regulares que se podem fazer com quatro vértices, tendo cada vértice grau 2.

(b) Faça um esboço de todos os grafos regulares simples que se podem fazer com quatro vértices, tendo cada vértice grau 3.

(c) Faça um esboço de todos os grafos regulares simples que se podem fazer com cinco vértices, tendo cada vértice grau 3.

(d) Faça um esboço de todos os grafos regulares simples que se podem fazer com cinco vértices, tendo cada vértice grau 4.

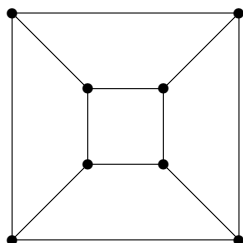
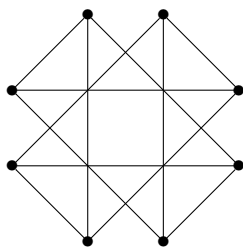
7. Num grafo simples com  $n$  vértices, qual é o grau máximo de cada vértice?

8. (a) Num grafo regular com seis vértices e nove arestas qual é o grau de cada vértice?

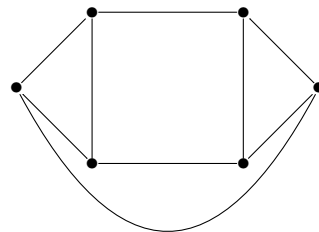
(b) Num grafo regular com sete vértices e catorze arestas qual é o grau de cada vértice?

(c) Justifique que não existe um grafo regular com sete vértices e dez arestas.

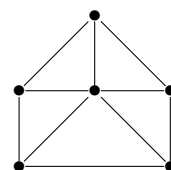
9. Encontre um isomorfismo entre os seguintes grafos:



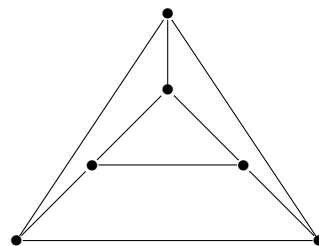
(a)



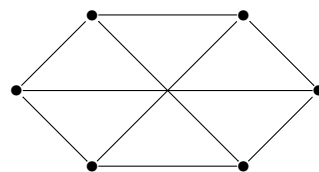
(b)



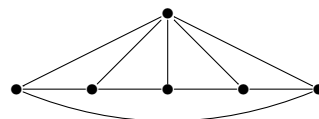
(c)



(d)



(e)



10. Dos seguintes grafos, quais são isomorfos?