UNIVERSIDADE DE ÉVORA

Departamento de Matemática

Análise Matemática II

1^a Frequência 31 de Março de 2017

Tempo: 2h 00 m Tolerância 15 m

Justifique cuidadosamente todos os passos que efectuar na resolução das questões.

Resolva cada um dos grupos em <u>folhas de teste separadas</u>.

Grupo I

(4) **1.** Considere a função

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^3 - 8y^3}}{\ln\left(4 - x^2 - y^2\right)}.$$

a) Determine e esboce a representação gráfica do seu domínio D no plano.

b) Indique, justificando, se D é aberto, qual a aderência de D, e o conjunto dos seus pontos de acumulação, D' .

c) $f(x,y)$ é contínua em D ? Justifique.

(2) **2.** Calcule os seguintes limites, se existirem:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 \operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$;

b) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,0,0)} \frac{xz - y}{x^2 - 1}$.

Grupo II

(2) **3**. Relativamente a uma função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, são feitas as seguintes afirmações:

(i) g é contínua em $(0,0)$.

(ii) g é diferenciável em $(0,0)$.

(iii) g é de classe C^1 numa vizinhança de $(0,0)$.

(iv) g tem derivadas segundo quaisquer vetores em $(0,0)$.

Indique **o valor lógico** (Verdadeiro ou Falso) das seguintes implicações, justificando com pormenor a sua resposta:

a) (i) $\Longrightarrow$ (ii)

b) (ii) $\Longrightarrow$ (i)

c) (iv) $\Longrightarrow$ (ii)

d) (iii) $\Longrightarrow$ (iv)

(2) **4.** Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ e $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe $C^2(\mathbb{R})$, dado por

$$r(t) = \left(t^3 - 2t, 1 - 2t\right).$$

Para a função composta $\varphi(t) = (f \circ r)(t) = f[r(t)]$, calcule:

a) $\varphi'(t)$.

b) $\varphi''(-1)$.

(2) **5.** Admita que a superfície de uma montanha é modelada pelo gráfico de

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2.$$

a) Determine uma equação do plano tangente a $f(x, y)$ num ponto genérico (x_0, y_0).

b) Se um ponto estiver no semi-eixo positivo das abcissas, qual é a direção com subida **mais acentuada** ?

c) Se um ponto estiver no semi-eixo negativo das ordenadas, qual é a direção com subida **menos acentuada** ?

Grupo III

(2) **6.** Considere uma função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$h(x,y) = \begin{cases} u = 2x - 4y \\ v = y - b^2 x, \end{cases}$$

com $b \in \mathbb{R}$.

a) Determine b de modo a que a função h seja invertível numa vizinhança do ponto $(1,1)$.

b) Para um dos valores de b encontrado em **a)**, calcule h^{-1} numa vizinhança de $(1,1)$.
(Se não respondeu à alínea anterior considere $b = 1$).

(2) **7.** Na equação

$$x^2 z + x + yx + 3z^2 = 2,$$

a) para que valores de z a expressão define z como uma função implícita de x e y, na vizinhança de $(1,-1,z)$.

b) De acordo os valores encontrados na alínea anterior, calcule

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,-1).$$

(Se não respondeu em **a)**, considere o ponto $(1,-1,-1)$).

(2) **8.** Estude quanto à existência de extremos a função

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 4xy + 4x + 2y + 1.$$

(2) **9.** Determinar e classificar os extremos da função

$$g(x,y,z) = 2x + y^3 + 2z^2$$

que se encontram no plano

$$2x + 27y + 4z = 81.$$