

Índice general

1. Formulación Lagrangiana y Hamiltoniana de la Relatividad General	5
1.1. Formulación Lagrangiana	5
1.2. Formulación Hamiltoniana (ADM o 3+1)	8
1.2.1. Formalismo ADM o descomposición (3+1)	8
1.2.2. Foliación de la frontera	10
1.2.3. Acción gravitacional en el formalismo (3+1)	12
1.2.4. Hamiltoniano Gravitacional	13
1.2.5. Ecuaciones del campo gravitacional	15
1.2.6. Espacio Fase	18
2. Relatividad General en Variables de Conexión	19
2.1. Espacio fase	19
2.2. Transformación Canónica	21
3. Variables de Conexión para modelos homogéneos y modelos isotrópicos	27
3.1. Antecedentes	27
3.2. Modelos Homogéneos	30
3.3. Modelos Isotrópicos	31
4. Discusión y conclusiones	33
A. Grupos de Lie y su acción en variedades	35
A.1. Grupos de Lie	35
A.2. Acción de grupos de Lie en una variedad	39
B. Haces Fibrados	43
C. Conexiones y Curvatura en Haces Vectoriales	47
C.1. Conexiones	47
C.2. Curvatura	49
D. Campo de Marcos	51

Introducción

La gravedad es una de las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza. Isaac Newton en 1687, fue el primero en proponer una teoría general de la gravitación en su obra “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”. Sin embargo, esta teoría en cierto punto es insatisfactoria pues propone que la gravedad es una fuerza que actúa a distancia instantáneamente y los cálculos hechos no corresponden con las observaciones hechas por los astrónomos sobre órbita de Mercurio. En 1905, Albert Einstein publica su famoso artículo sobre la Relatividad Especial: “Zur Elektrodynamik bewegter Körper” donde se postula que existe una velocidad privilegiada, que además impone a la velocidad de la luz como un límite natural. Poco después de la formulación de la Relatividad Especial, Einstein trabajó arduamente cómo describir los fenómenos gravitatorios considerando este nuevo límite de velocidad. Hasta noviembre de 1915, Einstein publica el artículo “Die feldgleichungen der gravitation” [Einstein, 1915] donde presenta la teoría de la Relatividad General que toma en cuenta la gravedad y el límite de la velocidad de la luz.

La Relatividad General nos dice que la gravedad no es una fuerza como los es en física Newtoniana, sino la *curvatura* del espacio-tiempo. Citando a John A. Wheeler “la materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse, y el espacio-tiempo le dice a la materia cómo moverse”. Esta teoría es, hasta el momento, la mejor que tenemos para describir el espacio-tiempo, entre sus logros y predicciones tenemos: explicar el corrimiento del perihelio de Mercurio, la deflexión de la luz, agujeros negros, ondas gravitacionales, etcétera.

Sin embargo, la teoría en ciertos regímenes falla, aparecen singularidades, es decir, zonas del espacio-tiempo donde no se puede definir alguna magnitud física relacionada con el campo gravitacional. Por ejemplo, a tiempos muy tempranos tenemos el *Big Bang* o dentro de un agujero negro, en su centro, la curvatura del espacio-tiempo diverge a infinito. A diferencia de otras teorías, como en la Teoría Cuántica de Campos, estas singularidades no se pueden evitar, son irremovibles, lo que nos dice que en esos regímenes, donde las escalas son muy pequeñas, necesitamos de una nueva teoría y se cree que una teoría cuántica de la gravedad podría ser la respuesta para resolverlas.

En el proceso de cuantización que conocemos uno tiene un campo propagándose en un espacio-tiempo fijo donde el campo es el actor mientras que el espacio-tiempo es el fondo. En este proceso sólo se cuantiza el campo, el fondo no se modifica. En Relatividad General, la gravedad es geometría, por lo tanto la métrica del espacio-tiempo es tanto el fondo como el actor así que hay que cuantizar tanto al campo como al espacio-tiempo. El espacio-tiempo ahora es una entidad dinámica y nuestras técnicas de cuantización no funcionan para este caso, se necesita construir una teoría independiente del fondo. Uno de los candidatos para lograr dicha cuantización de la gravedad es la Gravedad Cuántica de Lazos.

La Gravedad Cuántica de Lazos es una formulación de la Relatividad General, hecha por Abhay Ashtekar en 1986 y 1987 [Ashtekar, 1986, Ashtekar, 1987], basada en lo que se conoce como Variables de Conexión. Es una teoría no perturbativa e independiente de fondo que plantea que a escalas muy pequeñas, a distancia de Planck ($l_p \sim 10^{-35}$ metros), el espacio-tiempo está formado por cuántos geométricos de longitud, área y volumen. Algunos de sus logros hasta el momento son: el descubrimiento de una estructura

discreta del espacio, una derivación de la fórmula de Bekenstein-Hawking para la entropía de agujeros negros, y una regularización y solución parcial de las restricciones de la relatividad general.

Una de las líneas de investigación de la Gravedad Cuántica de Lazos es en cosmología, llamada Cosmología Cuántica de Lazos. Sin embargo, en estas aplicaciones aún existen aspectos dinámicos que siguen siendo poco comprendidos y bastante complejos en un entorno completo. La ventaja es que en cosmología se pueden asumir modelos donde el espacio es homogéneo o isotrópico que en el régimen clásico capturan bastante bien la dinámica a gran escala del universo. Por lo que, se han realizado aplicaciones sobre estos modelos simétricos en Cosmología Cuántica de Lazos, que es una reducción que preserva propiedades cruciales como la estructura discreta del espacio, pero que al mismo tiempo hace que los cálculos sean explícitamente más tratables.

El propósito de esta tesis es hacer una reducción de simetría para encontrar la forma que toman las Variables de Conexión en los casos de cosmologías homogéneas e isotrópicas.

Es importante entender las distintas formulaciones de la Relatividad General, principalmente en la formulación de Variables de Conexión por ello la tesis está escrita de la siguiente manera: en el primer capítulo se presentará la formulación Lagrangiana y Hamiltoniana de la Relatividad General (siguiendo de cerca la discusión que se lleva acabo en [Poisson, 2002]). En el segundo veremos la formulación en variables de conexión de la Relatividad General, tomando como principales referencias el libro de J. C. Baez [Baez and Muniain, 1994], el artículo de J. Barbero [Barbero, 1995] y la tesis de J. Vega [Vega, 2011]. Y en el tercer capítulo presentamos como obtener la forma de las variables de conexión para espacios homogéneos e isotrópicos tomando como base el artículo de Bojowald [Bojowald, 2005], pero apoyándonos en gran parte en el trabajo hecho por S. Kobayashi y K. Nomizu en sus libros [Kobayashi and Nomizu, 1963, Kobayashi and Nomizu, 1969] y el artículo sobre clasificación de haces simétrico y conexiones invariantes de O. Brodbeck [Brodbeck, 1996].

En ésta tesis supondremos que el lector está familiarizado con la teoría de Relatividad General y conceptos básicos de Geometría Diferencial. Usaremos la convención de signos de Misner, Thorne, y Wheeler con una métrica de signatura $(-, +, +, +)$. Los índices griegos $\alpha, \beta...$ serán utilizados para las componentes espacio-temporales, es decir, corren de 0 a 3; los índices latinos $a, b, c...$ corren de 1 a 3, están asignados para las componentes espaciales; las letras latinas mayúsculas $I, J, K...$, serán usadas para los índices internos.

Capítulo 1

Formulación Lagrangiana y Hamiltoniana de la Relatividad General

1.1. Formulación Lagrangiana

En la formulación Lagrangiana de la Relatividad General, el funcional de acción S está definido como la integral de una densidad lagrangiana sobre una región 4-dimensional Ω , de una variedad diferenciable \mathcal{M} con la topología del espacio-tiempo, delimitada por una hipersuperficie cerrada $\partial\Omega$. Dicho funcional de acción S está formado por dos partes, la asociada al campo gravitacional $g_{\mu\nu}$, es decir la geometría, denotado por $S_G[g]$ y la parte correspondiente a los campos de materia, $S_M[\phi; g]$, esto es

$$S[g; \phi] = S_G[g] + S_M[\phi; g]. \quad (1.1)$$

El campo dinámico es la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$, cuyas componentes dependen de las coordenadas x^α en la región Ω . Para obtener las ecuaciones de campo gravitacional, vía el Principio de Mínima Acción, se introduce la variación arbitraria $\delta g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ en Ω con la condición de que dicha variación sea nula en la frontera $\partial\Omega$,

$$\delta g_{\mu\nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.2)$$

Esto quiere decir que la métrica inducida¹ $h_{\alpha\beta}$ en la hipersuperficie $\partial\Omega$ se mantiene fija.

El funcional de acción del campo de materia, S_M , está dada por

$$S_M[\phi; g] = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi, \partial_\alpha \phi; g, \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x. \quad (1.3)$$

Por otro lado, la parte gravitacional de la acción $S_G[g]$, para facilitar los cálculos, se divide en tres términos; a saber,

$$S_G[g] = \frac{1}{16\pi} (I_{EH}[g] + 2I_B[g] + 2I_0), \quad (1.4)$$

el término de Einstein-Hilbert $I_{EH}[g]$, un término de frontera $I_B[g]$ y un término no dinámico I_0 , que únicamente influye en el valor numérico de la acción mas no en las ecuaciones de movimiento, donde

$$I_{EH}[g] = \int_{\Omega} R \sqrt{-g} d^4x, \quad I_B[g] = \oint_{\partial\Omega} \varepsilon K \sqrt{|h|} d^3y, \quad I_0[g] = \oint_{\partial\Omega} \varepsilon K_0 \sqrt{|h|} d^3y.$$

¹La forma fundamental de la métrica inducida en $\partial\Omega$ es $h_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} = g_{\mu\nu} e^\mu_\alpha e^\nu_\beta$, donde $e^\mu_\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}$.

6CAPÍTULO 1. FORMULACIÓN LAGRANGIANA Y HAMILTONIANA DE LA RELATIVIDAD GENERAL

Aquí, las coordenadas x^μ se utilizarán en Ω mientras que las coordenadas y^α en $\partial\Omega$. R es el escalar de Ricci, g es el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$, h es el determinante de la métrica inducida $h_{\alpha\beta}$ y $\varepsilon \equiv n^\mu n_\mu = \pm 1$ es el módulo del normal unitario² n_μ a $\partial\Omega$. K es la traza de la curvatura extrínseca $K_{\alpha\beta}$ de $\partial\Omega$ y K_0 es la traza de la curvatura extrínseca de $\partial\Omega$ encajada en el espacio-tiempo plano.

Al variar la acción $S[g; \phi]$ con respecto a $g_{\mu\nu}$, usando el hecho de que $\delta g = gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$ y $g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$, se obtiene, primero para la parte asociada a materia, que

$$\begin{aligned}\delta S_M &= \int_{\Omega} \delta(\mathcal{L}\sqrt{-g}) d^4x \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} + \mathcal{L} \delta \sqrt{-g} \right) d^4x \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \mathcal{L} g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x,\end{aligned}\tag{1.5}$$

definiendo el tensor de energía-momento como

$$T_{\mu\nu} := \mathcal{L} g_{\mu\nu} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}.\tag{1.6}$$

Mientras que, para la parte correspondiente a la parte gravitacional $S_G[g]$, comenzando con el término de Einstein-Hilbert I_{EH} , se tiene que

$$\begin{aligned}\delta I_{EH} &= \int_{\Omega} \delta(R\sqrt{-g}) d^4x \\ &= \int_{\Omega} (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x + \int_{\Omega} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x + \int_{\Omega} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} (\delta \sqrt{-g}) d^4x \\ &= \int_{\Omega} R_{\mu\nu} (\delta g^{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x + \int_{\Omega} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x - \int_{\Omega} \frac{1}{2} R \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x.\end{aligned}\tag{1.7}$$

Ahora bien, considerando un marco de referencia inercial local donde los símbolos de Christoffel sean cero, lo que implica que $\partial_\sigma = \nabla_\sigma$, entonces,

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda = \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda.\tag{1.8}$$

Tomando en cuenta que $\nabla_\sigma g^{\mu\nu} = 0$, al multiplicar (1.8) por $g^{\mu\nu}$ se tiene que

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\nu} \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda = \nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\nu),\tag{1.9}$$

y definiendo

$$v^\lambda := g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu,\tag{1.10}$$

la expresión (1.9) se reescribe como $g^{\alpha\beta} \delta R_{\alpha\beta} = \nabla_\lambda v^\lambda$. Aplicando el teorema de Gauss se obtiene

$$\int_{\Omega} g^{\mu\nu} (\delta R_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x = \int_{\Omega} \nabla_\mu v^\mu \sqrt{-g} d^4x = \oint_{\partial\Omega} \varepsilon v^\mu n_\mu \sqrt{|h|} d^3y.\tag{1.11}$$

²El módulo ε de n_μ es $+1$ donde $\partial\Omega$ es tipo-tiempo y -1 donde es tipo-espacio.

Recordando la condición de frontera (1.2), la variación de los símbolos de Christoffel en $\partial\Omega$ es

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}(\partial_{\mu}\delta g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}\delta g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}\delta g_{\mu\nu}), \quad (1.12)$$

entonces sustituyendo (1.12) en (1.10) se llega a que

$$\begin{aligned} n^{\lambda}v_{\lambda}\Big|_{\partial\Omega} &= n^{\lambda}g^{\mu\nu}(\partial_{\mu}\delta g_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda}\delta g_{\mu\nu}) \\ &= n^{\lambda}(\varepsilon n^{\mu}n^{\nu} + h^{\mu\nu})(\partial_{\mu}\delta g_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda}\delta g_{\mu\nu}) \\ &= n^{\lambda}h^{\mu\nu}(\partial_{\mu}\delta g_{\lambda\nu} - \partial_{\lambda}\delta g_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (1.13)$$

En (1.13) se usó la relación de completéz $g^{\mu\nu} = \varepsilon n^{\mu}n^{\nu} + h^{\mu\nu}$. Ahora, por la condición de frontera (1.2), las derivadas tangentes $e_{\beta}^{\alpha}\partial_{\alpha}\delta g_{\mu\nu}$ a $\partial\Omega$ deben anularse, sin embargo las derivadas normales de $\delta g_{\mu\nu}$ en $\partial\Omega$ no necesariamente se anulan, por lo que

$$n^{\mu}v_{\mu} = -n^{\mu}h^{\alpha\beta}\partial_{\mu}\delta g_{\alpha\beta}. \quad (1.14)$$

Reemplazando (1.14) en (1.11), se llega a

$$\int_{\Omega} g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu})\sqrt{-g}d^4x = - \oint_{\partial\Omega} \varepsilon n^{\mu}h^{\alpha\beta}\partial_{\mu}\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{|h|}d^3y, \quad (1.15)$$

y finalmente, sustituyendo (1.15) en (1.7) se obtiene que la variación del término de Einstein-Hilbert I_{EH} está dada por

$$\delta I_{EH} = \int_{\Omega} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} d^4x - \oint_{\partial\Omega} \varepsilon n^{\mu}h^{\alpha\beta}\partial_{\mu}\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{|h|}d^3y. \quad (1.16)$$

Ahora se hace la variación de I_B . Nótese que la única cantidad que varía es la traza de la curvatura extrínseca, i.e. K , pues la métrica inducida en $\partial\Omega$ se mantiene fija, es decir, $\delta\sqrt{|h|} = 0$, así que sólo es necesario calcular la variación de K en $\partial\Omega$. Puesto que,

$$\begin{aligned} K &= \nabla_{\mu}n^{\mu} = (\varepsilon n^{\mu}n^{\nu} + h^{\mu\nu})\nabla_{\mu}n_{\nu} \\ &= h^{\mu\nu}\nabla_{\mu}n_{\nu} = h^{\mu\nu}(\partial_{\mu}n_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}n_{\lambda}), \end{aligned} \quad (1.17)$$

usando la relación (1.12) y que las derivadas tangentes $e_{\beta}^{\alpha}\partial_{\alpha}\delta g_{\mu\nu}$ se anulan, se llega a que

$$\delta K = -h^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}n_{\lambda} = \frac{1}{2}n^{\alpha}h^{\mu\nu}\partial_{\alpha}\delta g_{\mu\nu}. \quad (1.18)$$

De esta manera se obtiene la variación del término de frontera δI_B ,

$$2\delta I_B[g] = \oint_{\partial\Omega} \varepsilon n^{\mu}h^{\alpha\beta}\partial_{\mu}\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{|h|}d^3y. \quad (1.19)$$

El término I_0 se escribe para tener un funcional de acción bien definido. Considerando un espacio-tiempo asintóticamente plano, no compacto y vacío, sin el término I_0 el funcional de acción S tendrá un valor numérico

$$S = \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial\Omega} \varepsilon K \sqrt{|h|}d^3y, \quad (1.20)$$

8CAPÍTULO 1. FORMULACIÓN LAGRANGIANA Y HAMILTONIANA DE LA RELATIVIDAD GENERAL

el cual diverge como I_0 para espacios asintóticamente planos, aún y cuando Ω esté acotado por dos hipersuperficies espacialoides, entonces S no estaría bien definido. Sin embargo, al escribir el término I_0 , se asegura que el funcional de acción para espacios asintóticamente planos sí esté bien definido.

Dado que I_0 depende únicamente de la métrica inducida $h_{\alpha\beta}$, la variación respecto a $g_{\mu\nu}$ es cero, por lo que I_0 no influye en las ecuaciones de campo al ser un término no dinámico. Como resultado de esto, la variación del funcional de acción correspondiente a la gravedad, $S_G[g]$ es la suma de (1.16) más (1.19), por lo tanto

$$\delta S_G[g] = \frac{1}{16\pi} \int_{\Omega} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (1.21)$$

Ya que el funcional de acción en Relatividad General está formado por dos partes, S_G y S_M , la variación es la suma $\delta S = \delta S_G + \delta S_M$ (ecuaciones (1.5) y (1.21)), finalmente queda

$$\delta S = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{16\pi} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}. \quad (1.22)$$

Y dado que la acción es extremizada, i.e. $\delta S = 0$, y $\delta g_{\mu\nu}$ son variaciones arbitrarias excepto por la condición (1.2), las ecuaciones del campo gravitacional son

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.23)$$

donde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein.

1.2. Formulación Hamiltoniana (ADM o 3+1)

Las ecuaciones de campo de Einstein (1.23) para la gravedad están escritas de manera covariante, por lo que tiempo y espacio son tratados en igualdad de condiciones. Sin embargo, para estudiar la gravedad como una teoría de campo y definir una formulación Hamiltoniana, donde el espacio evolucione en el tiempo se debe romper la covariancia. Una técnica para hacer dicha descomposición es el formalismo ADM o descomposición (3+1) de Relatividad General.

1.2.1. Formalismo ADM o descomposición (3+1)

La descomposición (3+1) consiste en hacer una foliación del espacio-tiempo con una familia de hipersuperficies espacialoides, cada una definiendo un instante de tiempo (figura ??). Para realizar la foliación, se considera que el espacio-tiempo de interés es globalmente hiperbólico, esto es que tienen una superficie de Cauchy. Se puede identificar la foliación con el conjunto de superficies de nivel de un campo escalar $t(x^\alpha)$ ($t = \text{constante}$), correspondientes a una familia de hipersuperficies espacialoides, que serán denotadas por Σ_t . Esta función de tiempo es completamente arbitraria; salvo porque t sea simplemente valuada de x^α , y $n_\alpha \propto \partial_\alpha t$, el normal unitario a la hipersuperficie Σ_t , sea un campo vectorial tipo tiempo con dirección al futuro.

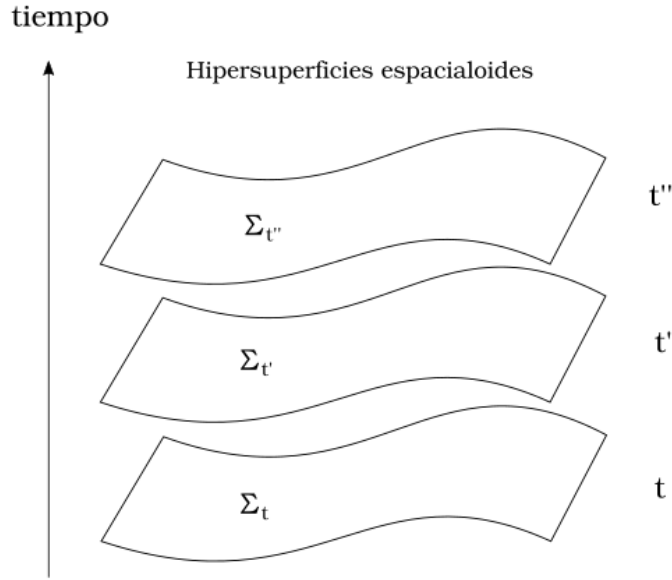
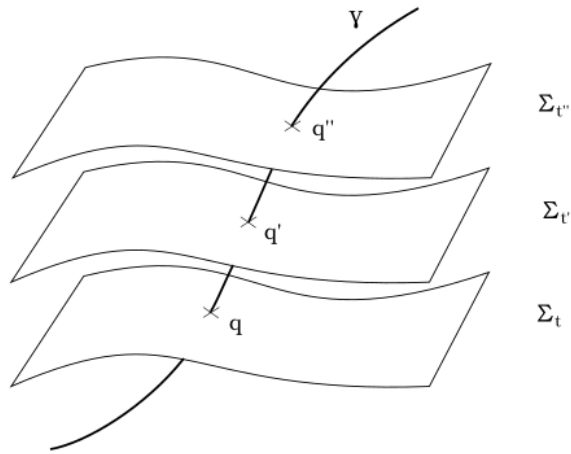


Figura 1.1: Foliación del espacio-tiempo en hipersuperficies espaciales.

En cada hipersuperficie Σ_t se usarán las coordenadas y^a , que se relacionarán mediante una congruencia de curvas γ parametrizadas por la función de tiempo t y vector tangente (tipo tiempo) $t^\alpha = dx^\alpha/dt$ a la curva. Estas curvas intersectan a las hipersuperficies Σ_t , pero no necesariamente de manera ortogonal ni tampoco se debe asumir que son geodésicas.

Una curva en particular γ_q de la congruencia, define un mapeo de un punto q en Σ_t a un punto q' en $\Sigma_{t'}$, y también a un punto q'' en $\Sigma_{t''}$, y así sucesivamente (figura ??). Para fijar las coordenadas de q' y q'' , dadas las coordenadas $y^a(q)$ en Σ_t , simplemente se impone que $y^a(q) = y^a(q') = y^a(q'')$. De esta manera, y^a se mantiene constante sobre cada una de las curvas γ .

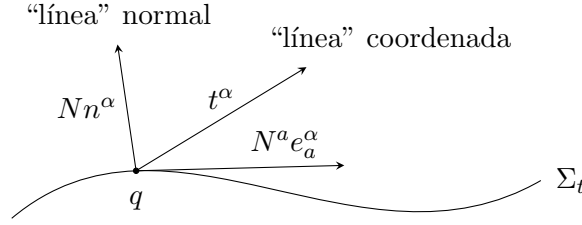
Figura 1.2: Curva γ relacionando puntos de distintas hipersuperficies.

Nótese que por construcción se definió un sistema coordenado (t, y^a) en Ω . Así que existe una transformación entre éste y el sistema coordenado x^α , lo que permite expresar las coordenadas originales en términos de las nuevas, esto es: $x^\alpha = x^\alpha(t, y^a)$. Entonces,

$$\begin{aligned} dx^\alpha &= \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \right)_{y^a} dt + \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \right)_t dy^a \\ &= t^\alpha dt + e_a^\alpha dy^a, \end{aligned} \quad (1.24)$$

donde $t^\alpha = \partial x^\alpha / \partial t$ es el vector tangente a γ y $e_a^\alpha = \partial x^\alpha / \partial y^a$ son los vectores tangentes a Σ_t .

El vector tangente t^α a la curva γ en general no es ortogonal a Σ_t (i.e., no es paralelo al vector normal n^α). Ahora bien, el normal unitario es $n_\alpha = -N\partial_\alpha t$, donde N es conocida como la *función de lapso* que se encarga de normalizar, así que N es la proyección de t^α sobre el normal unitario³. También nótese que t^α va a tener una proyección sobre los vectores tangentes e_a^α , estas proyecciones forman un vector tipo espacio N^a tangente a Σ_t y conocido como *vector de corrimiento*.



Así, el vector t^α se descompone como,

$$t^\alpha = N n^\alpha + N^a e_a^\alpha. \quad (1.25)$$

Sustituyendo (1.25) en (1.24) y tomando en cuenta que el elemento de línea está dado por $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, se sigue que en el nuevo sistema coordenado

$$ds^2 = (-N^2 + N_a N^a) dt^2 + 2N_a dt dy^a + h_{ab} dy^a dy^b. \quad (1.26)$$

Vale la pena recordar que h_{ab} es la métrica en Σ_t

Se puede mostrar que

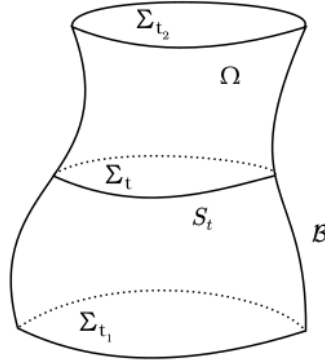
$$\sqrt{-g} = N \sqrt{h}. \quad (1.27)$$

Las ecuaciones (1.25), (1.26) y (1.27) son los resultados fundamentales de la descomposición (3+1).

1.2.2. Foliación de la frontera

Considérese una región Ω del espacio-tiempo foliada por hipersuperficies espacialoides Σ_t cuya frontera son superficies (bidimensionales) cerradas S_t . $\partial\Omega$ es la unión de las hipersuperficies Σ_{t_1} , Σ_{t_2} y \mathcal{B} (con \mathcal{B} la unión de todas las superficies S_t).

³Ya que $t^\alpha \partial_\alpha t = 1$.

Figura 1.3: Región Ω , frontera $\partial\Omega$ y la foliación.

Las superficies cerradas S_t están descritas por las relaciones paramétricas $y^a(\theta^w)$, donde θ^w son las coordenadas en S_t . Se denota a r_a como el vector normal a S_t y se define un 4-vector asociado $r^\alpha = r^a e_a^\alpha$, que es ortogonal a n_α y satisface $r^\alpha r_\alpha = 1$.

Los vectores $e_w^a = \partial y^a / \partial \theta^w$ tangentes a S_t expresados como 4-vectores se ven de la siguiente manera,

$$e_w^\alpha = e_a^\alpha e_w^a = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta^w}. \quad (1.28)$$

La ecuación (1.28) ayuda a ver que las componentes de la métrica σ_{vw} inducida en S_t están dadas por

$$\sigma_{vw} = h_{ab} e_v^a e_w^b = (g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta) e_v^a e_w^b = g_{\alpha\beta} e_v^\alpha e_w^\beta. \quad (1.29)$$

Y su inversa es denotada por σ^{vw} . Las relaciones de completez son $h^{ab} = r^a r^b + \sigma^{vw} e_v^a e_w^b$ y $g^{\alpha\beta} = -n^\alpha n^\beta + h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta$. Esta última puede reescribirse como

$$g^{\alpha\beta} = -n^\alpha n^\beta + r^\alpha r^\beta + \sigma^{vw} e_v^\alpha e_w^\beta. \quad (1.30)$$

La curvatura extrínseca de S_t encajada en Σ_t está definida por

$$k_{vw} = e_v^\alpha e_w^\beta k_{\alpha\beta} = e_v^\alpha e_w^\beta \nabla_\beta r_\alpha. \quad (1.31)$$

La traza de k_{vw} no es más que $k = \sigma^{vw} k_{vw}$.

De manera similar a lo hecho en la sección 1.2.1, para relacionar las coordenadas θ^w de una superficie S_t con las de otra superficie $S_{t'}$, se considera una congruencia de curvas β en \mathcal{B} que intersecten las superficies S_t ortogonalmente, es decir, que vayan a lo largo de n^α . Después se pide que si la curva β_q intersecta S_t en q con coordenada θ^w , entonces la misma coordenada sea asignada en la intersección de β_q con $S_{t'}$ y así sucesivamente.

La hipersuperficie \mathcal{B} está foliada por las superficies S_t . En principio, se puede ajustar a \mathcal{B} un sistema coordinado arbitrario, sin embargo conviene escoger: $z^f = (t, \theta^w)$. En estas coordenadas $dx^\alpha = N n^\alpha dt + e_w^\alpha d\theta^w$, así para desplazamientos dentro de \mathcal{B} el elemento de línea es

$$\begin{aligned} ds_{\mathcal{B}} &= g_{\alpha\beta} (N n^\alpha dt + e_v^\alpha d\theta^v) (N n^\beta dt + e_w^\beta d\theta^w) \\ &= -N^2 dt^2 + \sigma_{vw} d\theta^v d\theta^w. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Por otro lado, la métrica inducida γ_{fg} en \mathcal{B} tiene componentes

$$\gamma_{fg} = g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial z^f} \right) \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial z^g} \right) = g_{\alpha\beta} e_f^\alpha e_g^\beta \quad (1.33)$$

y la inversa se denota por γ^{fg} . La relación de completeness toma la forma⁴

$$g^{\alpha\beta} = r^\alpha r^\beta + \gamma^{fg} e_f^\alpha e_g^\beta. \quad (1.34)$$

Ahora, de (1.32) se sigue que

$$\gamma_{fg} dz^f dz^g = -N^2 dt^2 + \sigma_{vw} d\theta^v d\theta^w, \quad (1.35)$$

por lo que implica $\sqrt{-\gamma} = N\sqrt{\sigma}$.

Por último, la curvatura extrínseca \mathcal{K}_{fg} de \mathcal{B} dentro del espacio-tiempo está dada por

$$\mathcal{K}_{fg} = e_f^\alpha e_g^\beta \nabla_\beta r^\alpha, \quad (1.36)$$

y su traza por $\mathcal{K} = \gamma^{fg} \mathcal{K}_{fg}$.

1.2.3. Acción gravitacional en el formalismo (3+1)

Para construir el Hamiltoniano gravitacional se realizará la descomposición (3+1) del funcional de acción gravitacional S_G . Por ahora sólo se considerarán los términos I_{EH} e I_B , más adelante se reincorporará I_0 , así que,

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \left(\int_\Omega R \sqrt{-g} d^4x + 2 \oint_{\partial\Omega} \varepsilon K \sqrt{|h|} d^3y \right). \quad (1.37)$$

Como en la sección (1.2.2), Ω tiene por frontera a $\partial\Omega$ que es la unión de dos hipersuperficies espaciales Σ_{t_1} y Σ_{t_2} , y la hipersuperficie tipo tiempo \mathcal{B} (figura ??), esto es,

$$\partial\Omega = -\Sigma_{t_1} \cup \Sigma_{t_2} \cup \mathcal{B}. \quad (1.38)$$

Con lo que el término de frontera toma la forma,

$$2 \oint_{\partial\Omega} \varepsilon K \sqrt{|h|} d^3y = 2 \int_{\Sigma_{t_1}} K \sqrt{|h|} d^3y - 2 \int_{\Sigma_{t_2}} K \sqrt{|h|} d^3y + 2 \int_{\mathcal{B}} \mathcal{K} \sqrt{-\gamma} d^3z. \quad (1.39)$$

La región Ω es foleada por las hipersuperficies espaciales Σ_t , sobre las cuales el escalar de Ricci está dado por

$$R = {}^{(3)}R + K^{ab} K_{ab} - K^2 - 2\nabla_\alpha (n^\beta \nabla_\beta n^\alpha - n^\alpha \nabla_\beta n^\beta), \quad (1.40)$$

donde ${}^{(3)}R$ es el escalar de Ricci construido a partir de h_{ab} . De esta forma, el término de Einstein-Hilbert queda reescrito como

$$\int_\Omega R \sqrt{-g} d^4x = \int_{t_2}^{t_1} dt \left[\int_{\Sigma_t} ({}^{(3)}R + K^{ab} K_{ab} - K^2) N \sqrt{h} d^3y - 2 \oint_{\partial\Omega} (n^\beta \nabla_\beta n^\alpha - n^\alpha \nabla_\beta n^\beta) d\Sigma_\alpha \right], \quad (1.41)$$

donde se usó la expresión (1.27), (1.40) y el teorema de Gauss. Como la frontera es la unión de varias hipersuperficies, ecuación (1.38), la integral sobre $\partial\Omega$ se descompone en integrales sobre Σ_{t_1} , Σ_{t_2} y \mathcal{B} . El

⁴Como r^α es ortogonal a S_t , también lo es a \mathcal{B} .

trato de la integral sobre Σ_{t_1} y Σ_{t_2} es el mismo (salvo por un signo global), así que solamente es necesario mostrar uno de estos cálculos,

$$\begin{aligned} -2 \int_{\Sigma_{t_1}} (n^\beta \nabla_\beta n^\alpha - n^\alpha \nabla_\beta n^\beta) d\Sigma_\alpha &= -2 \int_{\Sigma_{t_1}} (\nabla_\beta n^\beta) \sqrt{h} d^3y \\ &= -2 \int_{\Sigma_{t_1}} K \sqrt{h} d^3y. \end{aligned} \quad (1.42)$$

La integral sobre Σ_{t_2} da el mismo resultado pero con signo contrario. Ambos resultados se cancelan con las integrales sobre Σ_{t_1} y Σ_{t_2} de (1.39). Por otro lado, la integral sobre \mathcal{B} contribuye con

$$\begin{aligned} -2 \int_{\mathcal{B}} (n^\beta \nabla_\beta n^\alpha - n^\alpha \nabla_\beta n^\beta) d\Sigma_\alpha &= -2 \int_{\mathcal{B}} (n^\beta \nabla_\beta n^\alpha) r_\alpha \sqrt{-\gamma} d^3z \\ &= 2 \int_{\mathcal{B}} n^\alpha n^\beta \nabla_\beta r_\alpha \sqrt{-\gamma} d^3z. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Juntando los resultados, el funcional de acción gravitacional (aún sin el término I_0) queda de la siguiente manera

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\int_{\Sigma_t} ({}^{(3)}R + K^{ab} K_{ab} - K^2) N \sqrt{h} d^3y + 2 \int_{\mathcal{B}} (\mathcal{K} + n^\alpha n^\beta \nabla_\beta r_\alpha) \sqrt{-\gamma} d^3z \right]. \quad (1.44)$$

Ahora bien, a partir de las relaciones de completez (1.34) y (1.30) se manipula $(\mathcal{K} + n^\alpha n^\beta \nabla_\beta r_\alpha)$. Primero,

$$\mathcal{K} = \gamma^{fg} \mathcal{K}_{fg} = \gamma^{fg} (e_f^\alpha e_g^\beta \nabla_\beta r_\alpha) = (g^{\alpha\beta} - r^\alpha r^\beta) \nabla_\beta r_\alpha, \quad (1.45)$$

que al sumar $n^\alpha n^\beta \nabla_\beta r_\alpha$, se obtiene

$$(g^{\alpha\beta} - r^\alpha r^\beta) \nabla_\beta r_\alpha + n^\alpha n^\beta \nabla_\beta r_\alpha = \sigma^{vw} e_v^\alpha e_w^\beta (\nabla_\beta r_\alpha) = \sigma^{vw} k_{vw} = k. \quad (1.46)$$

Sustituyendo (1.46) en (1.44) y además, tomando en cuenta que \mathcal{B} está foliada por las superficies cerradas S_t (así que $\sqrt{-\gamma} d^3z = N \sqrt{\sigma} dt d^2\theta$), entonces,

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\int_{\Sigma_t} ({}^{(3)}R + K^{ab} K_{ab} - K^2) N \sqrt{h} d^3y + 2 \oint_{S_t} (k - k_0) N \sqrt{\sigma} d^2\theta \right]. \quad (1.47)$$

Nótese que ahora sí se incluyó I_0 al escribir el término k_0 en la integral sobre S_t . La elección de k_0 como la curvatura extrínseca de S_t encajada en el espacio plano previene que la integral diverja en el límite $S_t \rightarrow \infty$, asegurando que S_G esté bien definido para cualquier espacio-tiempo asintóticamente plano.

1.2.4. Hamiltoniano Gravitacional

En el formalismo (3+1) el sistema es descrito por h_{ab} y por cómo ésta cambia a lo largo del *flujo de tiempo*, es decir, del campo vectorial $t^\alpha = N n^\alpha + N^\alpha$. Las variables fundamentales son la métrica h_{ab} y su *momento canónicamente conjugado* p^{ab} ,

$$p^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{h}_{ab}}. \quad (1.48)$$

Aquí, $16\pi\mathcal{L}_G = ({}^{(3)}R + K^{ab}K_{ab} - K^2)N\sqrt{h}$, y \dot{h}_{ab} es el cambio de la métrica a través del flujo de tiempo, esto es,

$$\dot{h}_{ab} = \mathcal{L}_t h_{ab}. \quad (1.49)$$

Recordando que $h_{ab} = g_{\alpha\beta}e_a^\alpha e_b^\beta$, se calcula la derivada de Lie de la métrica $g_{\mu\nu}$ a lo largo del campo vectorial t , después se proyecta en la hipersuperficie Σ_t y se obtiene que

$$\dot{h}_{ab} = 2NK_{ab} + D_b N_a + D_a N_b, \quad (1.50)$$

donde D_a es la derivada covariante en Σ_t compatible con h_{ab} . Luego se despeja la curvatura extrínseca de (1.50), para poder ver la dependencia en \dot{h}_{ab} del funcional de acción gravitacional, entonces,

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} \left(\dot{h}_{ab} - D_b N_a - D_a N_b \right). \quad (1.51)$$

De la ecuación anterior, (1.51), nótese que solamente la parte de volumen de la densidad Lagrangiana de gravedad depende de \dot{h}_{ab} (ver (1.47)), así que para facilitar las cosas, se analizará sólo esa parte, entonces

$$\begin{aligned} (16\pi)p^{ab} &= \frac{\partial K_{mn}}{\partial \dot{h}_{ab}} \frac{\partial}{\partial K_{mn}} (16\pi\mathcal{L}_G) \\ &= \frac{\partial K_{mn}}{\partial \dot{h}_{ab}} \frac{\partial}{\partial K_{mn}} \left([{}^{(3)}R + (h^{ac}h^{bd} - h^{ab}h^{cd})K_{ab}K_{cd}]N\sqrt{h} \right) \\ &= \sqrt{h}(K^{ab} - Kh^{ab}). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Haciendo la transformación de Legendre $\mathcal{H}_G = p^{ab}\dot{h}_{ab} - \mathcal{L}_G$, la parte de volumen de la densidad Hamiltoniana es

$$\begin{aligned} 16\pi\mathcal{H}_G &= \sqrt{h}(K^{ab} - Kh^{ab})(2NK_{ab} + D_b N_a + D_a N_b) \\ &\quad - ({}^{(3)}R + K^{ab}K_{ab} - K^2)N\sqrt{h} \\ &= (K^{ab}K_{ab} - K^2 - {}^{(3)}R)N\sqrt{h} + 2(K^{ab} - Kh^{ab})D_b N_a \sqrt{h} \\ &= (K^{ab}K_{ab} - K^2 - {}^{(3)}R)N\sqrt{h} + 2D_b [(K^{ab} - Kh^{ab})N_a] \sqrt{h} \\ &\quad - 2D_b (K^{ab} - Kh^{ab})N_a \sqrt{h}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

El Hamiltoniano gravitacional lo obtenemos integrando \mathcal{H}_G sobre Σ_t y sumando los términos de frontera,

$$\begin{aligned} 16\pi H_G &= \int_{\Sigma_t} 16\pi\mathcal{H}_G d^3y - 2 \oint_{S_t} (k - k_0)N\sqrt{\sigma} d^2\theta \\ &= \int_{\Sigma_t} \left[N(K^{ab}K_{ab} - K^2 - {}^{(3)}R) - 2N_a D_b (K^{ab} - Kh^{ab}) \right] \sqrt{h} d^3y \\ &\quad + 2 \oint_{S_t} (K^{ab} - Kh^{ab})N_a dS_b - 2 \oint_{S_t} (k - k_0)N\sqrt{\sigma} d^2\theta \\ &= \int_{\Sigma_t} \left[N(K^{ab}K_{ab} - K^2 - {}^{(3)}R) - 2N_a D_b (K^{ab} - Kh^{ab}) \right] \sqrt{h} d^3y \\ &\quad - 2 \oint_{S_t} \left[(k - k_0)N - (K^{ab} - Kh^{ab})N_a r_b \right] \sqrt{\sigma} d^2\theta, \end{aligned} \quad (1.54)$$

donde $dS_b = r_b \sqrt{\sigma} d^2\theta$.

En el Hamiltoniano, ecuación (1.54), K^{ab} representa a las funciones h^{ab} y p^{ab} , explícitamente

$$\sqrt{h}K^{ab} = 16\pi(p^{ab} - \frac{1}{2}ph^{ab}). \quad (1.55)$$

con $p := h_{ab}p^{ab}$.

1.2.5. Ecuaciones del campo gravitacional

Para obtener las ecuaciones de campo gravitacional en forma Hamiltoniana se hace la variación de la acción⁵ $S = S_G$, con S_G escrita en forma canónica

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\int_{\Sigma_t} p^{ab} \dot{h}_{ab} d^3y - H_G \right], \quad (1.56)$$

respecto a las variables independientes N , N^a , h_{ab} , y p^{ab} , sujetas a las condiciones

$$\delta N|_{S_t} = \delta N^a|_{S_t} = \delta h_{ab}|_{S_t} = 0, \quad (1.57)$$

y sin condición sobre δp^{ab} de anularse en la frontera S_t . La variación da

$$\delta S_G = \frac{1}{16\pi} \int_{t_2}^{t_1} dt \left[\int_{\Sigma_t} (p^{ab} \delta \dot{h}_{ab} + \dot{h}_{ab} \delta p^{ab}) d^3y - \delta H_G \right]. \quad (1.58)$$

Comenzaremos calculando la variación del Hamiltoniano gravitacional H_G . Iniciamos con la variación con respecto a las funciones no dinámicas, N y N^a :

$$16\pi \delta_N H_G = \int_{\Sigma_t} (-\hat{\mathcal{C}} \delta N - 2\hat{\mathcal{C}}_a \delta N^a) d^3y, \quad (1.59)$$

donde

$$\hat{\mathcal{C}} := ({}^{(3)}R + K^2 - K^{ab}K_{ab})\sqrt{h}, \quad \hat{\mathcal{C}}_a := [D_b(K_a^b - K\delta_a^b)]\sqrt{h}. \quad (1.60)$$

Para hacer la variación de H_G respecto a p^{ab} y h_{ab} hay que expresar el Hamiltoniano en términos de p^{ab} y h_{ab} , para ello se usa (1.55) en (1.54), de este modo,

$$\begin{aligned} 16\pi H_G &= \int_{\Sigma_t} \left[Nh^{-1/2}(\hat{p}_{ab}\hat{p}^{ab} - \frac{1}{2}\hat{p}^2) - Nh^{1/2}({}^{(3)}R - 2N_a h^{1/2} D_b(h^{-1/2}\hat{p}^{ab})) \right] d^3y \\ &\quad - 2 \oint_{S_t} \left[N(k - k_0) - N_a h^{-1/2} \hat{p}^{ab} r_b \right] \sqrt{\sigma} d^2\theta. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Aquí se definió $\hat{p}^{ab} = 16\pi p^{ab}$ ($\hat{p}_{ab} = 16\pi p_{ab}$). Haciendo la variación con respecto a \hat{p}^{ab} , se tiene

$$\begin{aligned} (16\pi)\delta_p H_G &= \int_{\Sigma_t} Nh^{-1/2} \delta_p (\hat{p}_{ab}\hat{p}^{ab} - \frac{1}{2}\hat{p}^2) d^3y - 2\delta_p \int_{\Sigma_t} N_a h^{1/2} D_b(h^{-1/2}\hat{p}^{ab}) d^3y \\ &\quad + 2 \oint_{S_t} N_a h^{-1/2} \delta \hat{p}^{ab} r_b \sqrt{\sigma} d^2\theta \\ &= \int_{\Sigma_t} 2 \left[Nh^{-1/2}(\hat{p}_{ab} - \frac{1}{2}\hat{p}h_{ab}) + D_{(b}N_{a)} \right] \delta \hat{p}^{ab} d^3y \\ &= \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}_{ab} \delta \hat{p}^{ab} d^3y. \end{aligned} \quad (1.62)$$

⁵Por el momento estamos considerando que estamos en vacío, i.e. $S_M = 0$.

Ahora, se hace la variación de H_G con respecto a h_{ab} . Lo haremos por partes, primero el término de volumen⁶

$$(16\pi)\delta_h H_\Sigma = \int_{\Sigma_t} \left[-Nh^{-1}(\hat{p}^{ab}\hat{p}_{ab} - \frac{1}{2}\hat{p}^2)\delta_h h^{1/2} + Nh^{-1/2}\delta_h(\hat{p}^{ab}\hat{p}_{ab} - \frac{1}{2}\hat{p}^2) \right. \\ \left. - N\delta_h(h^{1/2}({}^{(3)}R) + 2\delta_h(\hat{p}^{ab}D_b N_a)) \right] d^3y - 2\delta_h \oint_{S_t} N_a h^{-1/2}\hat{p}^{ab}r_b \sqrt{\sigma} d^2\theta. \quad (1.63)$$

Por la condición de frontera (1.57), la variación de la integral sobre S_t se anula. Usando $({}^{(3)}R) = R_{ab}h^{ab}$ y las relaciones $\delta h^{ab} = -h^{ac}h^{db}\delta h_{cd}$ y $\delta_h h^{1/2} = \frac{1}{2}h^{1/2}h^{ab}\delta h_{ab}$, es posible mostrar que

$$\delta_h(h^{1/2}({}^{(3)}R)) = -h^{1/2}(R^{ab} - \frac{1}{2}({}^{(3)}R)h^{ab})\delta h_{ab} + h^{1/2}D_c(h^{ab}\delta\Gamma^c_{ab} - h^{ac}\delta\Gamma^b_{ab}) \\ = -h^{1/2}G^{ab}\delta h_{ab} + h^{1/2}D_c v^c.$$

El resto de las variaciones son:

$$\delta_h(\hat{p}^{ab}\hat{p}_{ab} - \frac{1}{2}\hat{p}^2) = 2(\hat{p}_c^a \hat{p}^{cb} - \frac{1}{2}\hat{p}\hat{p}^{ab})\delta h_{ab}, \\ \delta_h D_b N_a = (D_b N^c)\delta h_{ac} + h_{ac}N^d\delta\Gamma^c_{bd}.$$

Con esto se sigue que

$$(16\pi)\delta_h H_\Sigma = \int_{\Sigma_t} \left[-\frac{1}{2}Nh^{-1/2}(\hat{p}^{cd}\hat{p}_{cd} - \frac{1}{2}\hat{p}^2)h^{ab} + 2Nh^{-1/2}(\hat{p}_c^a \hat{p}^{bc} - \frac{1}{2}\hat{p}\hat{p}^{ab}) \right. \\ \left. + Nh^{1/2}G^{ab} + 2\hat{p}^{c(a}D_c N^{b)} \right] \delta h_{ab} d^3y \\ + \int_{\Sigma_t} \left(-Nh^{1/2}D_c v^c + 2\hat{p}_c^b N^d \delta\Gamma^c_{bd} \right) d^3y. \quad (1.64)$$

Ahora bien, conviene analizar la segunda integral por separado. Primero,

$$- \int_{\Sigma_t} Nh^{1/2}D_c v^c d^3y = \int_{\Sigma_t} (\partial_c N)v^c h^{1/2} d^3y - \oint_{S_t} N v^c r_c \sqrt{\sigma} d^2\theta \\ = \int_{\Sigma_t} (\partial_c N)v^c h^{1/2} d^3y + \oint_{S_t} Nh^{ab}\delta(\partial_c h_{ab})r^c \sqrt{\sigma} d^2\theta \\ = - \int_{\Sigma_t} (h^{ab}\partial^d N - h^{bd}\partial^a N)(D_d \delta h_{ab})h^{1/2} d^3y \\ + \oint_{S_t} Nh^{ab}(\partial_c \delta h_{ab})r^c \sqrt{\sigma} d^2\theta \\ = \int_{\Sigma_t} (h^{ab}D_d D^d - D^b D^a N)\delta h_{ab}h^{1/2} d^3y \\ + \oint_{S_t} Nh^{ab}(\partial_c \delta h_{ab})r^c \sqrt{\sigma} d^2\theta.$$

Donde se usó la versión tridimensional de la ecuación (1.14) y la siguiente relación:

$$\delta\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2}h^{cd}[D_b(\delta h_{da}) + D_a(\delta h_{db}) - D_d(\delta h_{ab})], \quad (1.65)$$

⁶La integral sobre S_t viene de aplicar el teorema de Gauss al término $2N_a h^{1/2}D_b(h^{-1/2}\hat{p}^{ab})$ en la ecuación (1.61).

para tener: $v^c = 1/2(h^{ab}h^{cd} - h^{ac}h^{bd})[D_b(\delta h_{da}) + D_a(\delta h_{db}) - D_d(\delta h_{ab})]$, y al contraer con $\partial_c N$ (aprovechando la antisimetría en a y d) obtener el resultado. Para el otro término de la segunda integral, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_t} 2\hat{p}_c^b N^d \delta \Gamma^c_{bd} d^3y &= \int_{\Sigma_t} h^{1/2} \hat{p}^{ab} N^d D_d(\delta h_{ab}) h^{-1/2} d^3y \\ &= - \int_{\Sigma_t} D_d(h^{-1/2} \hat{p}^{ab} N^d) \delta h_{ab} h^{1/2} d^3y, \end{aligned}$$

donde también se usó (1.65) y después, al integrar por partes, se utilizó el teorema de Gauss y la condición de frontera $\delta h_{ab}|_{S_t} = 0$. Así,

$$(16\pi)\delta_h H_\Sigma = \int_{\Sigma_t} \hat{\mathcal{P}}^{ab} \delta h_{ab} d^3y + \oint_{S_t} N h^{ab} (\partial_c \delta h_{ab}) r^c \sqrt{\sigma} d^2. \quad (1.66)$$

Donde

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}}^{ab} &:= h^{1/2} N G^{ab} - \frac{1}{2} N h^{-1/2} (\hat{p}^{cd} \hat{p}_{cd} - \frac{1}{2} \hat{p}^2) h^{ab} + 2N h^{-1/2} (\hat{p}_c^a \hat{p}^{bc} - \frac{1}{2} \hat{p} \hat{p}^{ab}) \\ &\quad - h^{1/2} (D^a D^b N - h^{ab} D_c D^c N) - h^{1/2} D_c (h^{-1/2} \hat{p}^{ab} N^c) + 2\hat{p}^{c(a} D_c N^{b)}. \end{aligned}$$

Pasando al término de frontera, al hacer la variación con respecto a h_{ab} se obtiene,

$$(16\pi)\delta_h H_S = -2 \oint_{S_t} N \delta k \sqrt{\sigma} d^2\theta = - \oint_{S_t} N h^{ab} (\partial_c \delta h_{ab}) r^c \sqrt{-\sigma} d^2\theta. \quad (1.67)$$

Haciendo la suma de (1.66) con (1.67) se llega a que la variación con respecto a h_{ab} de H_G es

$$(16\pi)\delta_h H_G = \int_{\Sigma_t} \hat{\mathcal{P}}^{ab} \delta h_{ab} d^3y \quad (1.68)$$

Finalmente juntando los resultados (1.59), (1.62) y (1.68) se obtiene que la variación del Hamiltoniano gravitacional, bajo las condiciones (1.57), está dada por,

$$\delta H_G = \int_{\Sigma_t} \left(\mathcal{P}^{ab} \delta h_{ab} + \mathcal{H}_{ab} \delta p^{ab} - \mathcal{C} \delta N - 2\mathcal{C}_a \delta N^a \right) d^3y, \quad (1.69)$$

con $\mathcal{P}^{ab} := \hat{\mathcal{P}}^{ab}/(16\pi)$, $\mathcal{C} := \hat{\mathcal{C}}/(16\pi)$ y $\mathcal{C}^a := \hat{\mathcal{C}}^a/(16\pi)$.

Regresando a la variación del funcional de acción gravitacional, ecuación (1.58), integrando por partes se obtiene como resultado

$$\delta S_G = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \left[(\dot{h}_{ab} - \mathcal{H}_{ab}) \delta p^{ab} - (\dot{p}^{ab} + \mathcal{P}^{ab}) \delta h_{ab} + \mathcal{C} \delta N + 2\mathcal{C}_a \delta N^a \right] d^3y. \quad (1.70)$$

Imponiendo que la acción sea estacionaria implica

$$\dot{h}_{ab} = \mathcal{H}_{ab}, \quad \dot{p}^{ab} = -\mathcal{P}^{ab}, \quad \mathcal{C} = 0, \quad \mathcal{C}^a = 0. \quad (1.71)$$

Estas son las ecuaciones de Einstein (en vacío) en la forma Hamiltoniana. Las primeras dos rigen la evolución de las variables conjugadas h_{ab} y p^{ab} ; las últimas dos se conocen como *constricciones Hamiltoniana y de difeomorfismos (o momento)* de la Relatividad General, respectivamente. Explícitamente las constricciones son

$$\mathcal{C} = \left({}^{(3)}R + K^2 - K^{ab} K_{ab} \right) \sqrt{h} = 0, \quad \mathcal{C}_a = \left[D_b (K^{ab} - K h^{ab}) \right] \sqrt{h} = 0. \quad (1.72)$$

Entonces, en la formulación Hamiltoniana para encontrar una solución a las ecuaciones de Einstein se hace una foliación del espacio-tiempo escogiendo la *función de lapso* N y el *vector de corrimiento* N^a , después se escogen los valores iniciales para h_{ab} y K_{ab} de tal manera que satisfagan las constricciones (1.72) y entonces se determina la evolución de los valores iniciales usando las ecuaciones Hamiltonianas $\dot{h}_{ab} = \mathcal{H}_{ab}$ y $\dot{p}^{ab} = -\mathcal{P}^{ab}$, que equivalentemente se pueden escribir como

$$\dot{h}_{ab} = 2NK_{ab} + \mathcal{L}_N h_{ab} \quad (1.73)$$

y

$$\dot{K}_{ab} = D_b D_a N - N(R_{ab} + K K_{ab} - 2K_a^c K_{bc}) + \mathcal{L}_N K_{ab}. \quad (1.74)$$

1.2.6. Espacio Fase

La formulación Hamiltoniana permite hacer un estudio del espacio fase de la Relatividad General. Habiendo hecho las descomposición 3+1, se tiene que las variables independientes son N , N^a (éstas dos no dinámicas) y h_{ab} que respectivamente cada una tiene como momento conjugado a

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{N}} = 0, \quad (1.75)$$

$$\Pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{N}^a} = 0, \quad (1.76)$$

$$p^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{h}_{ab}} = \frac{\sqrt{h}}{16\pi} (K^{ab} - K h^{ab}). \quad (1.77)$$

De esta manera, el espacio fase coordinado por $(N, N^a, h_{ab}, \Pi, \Pi_a, p^{ab})$, tiene la siguiente estructura simpléctica,

$$\{N(t, y), \Pi(t, y')\} = \delta(y - y'), \quad (1.78)$$

$$\{N^a(t, y), \Pi_b(t, y')\} = \delta_b^a \delta(y - y'), \quad (1.79)$$

$$\{h_{ab}(t, y), p^{cd}(t, y')\} = \delta_a^c \delta_b^d \delta(y - y'), \quad (1.80)$$

y el resto de los paréntesis de Poisson son nulos.

Ahora bien, dado que S_G contiene derivadas temporales de h_{ab} por medio de los términos que dependen de la curvatura extrínseca, pero no hay derivadas temporales de N ni de N^a , implica que el Lagrangiano sea singular y en consecuencia hay constricciones primarias. Las constricciones limitan la evolución del sistema a una región restringida del espacio fase, definen una superficie de constricción y además las constricciones primarias generan transformaciones de norma sobre la superficie de constricción.

De la definición para los momentos conjugados se obtiene que las constricciones primarias son las siguientes,

$$\mathcal{C} = \Pi = 0$$

$$\mathcal{C}_a = \Pi_a = 0.$$

Es importante remarcar que Π y Π_a no son cero en todo el espacio fase, únicamente en la superficie de constricción.

Así, la parte de la acción S_G que va como $N\mathcal{C} + N^a \mathcal{C}_a$ es cero y la dinámica es pura norma. Por lo tanto, la descripción del sistema en el espacio fase tiene como variables fundamentales h_{ab} y p^{ab} , mientras que la *función de lapso* y el *vector de corrimiento* juegan el papel de multiplicadores de Lagrange.

Capítulo 2

Relatividad General en Variables de Conexión

Al realizar la formulación Hamiltoniana a través del formalismo ADM se obtienen las variables canónicas h_{ab} y p^{ab} que están sujetas a cuatro constricciones $\mathcal{C} = 0$ y $\mathcal{C}^a = 0$ ($a = 1, 2, 3$) (1.72). Estas constricciones tienen una complicada dependencia no polinomial de las variables canónicamente conjugadas, lo que ha hecho prácticamente imposible construir la representación de momento en los intentos de cuatización con estas variables. Sin embargo, a mediados de los 80's A. Ashtekar notó que el espacio fase gravitacional podría reformularse en términos de un nuevo par de variables canónicas que simplifican las constricciones [Ashtekar, 1986, Ashtekar, 1987]. Estas variables son ciertas conexiones de espín modificadas de aquellas construidas por A. Sen para los espinores $SL(2, \mathbb{C})$ [Sen, 1982a, Sen, 1982b] y su momento canónicamente conjugado. En esta nueva formulación de la Relatividad General, en términos de la conexión modificada y de su momento conjugado, se simplifica notablemente la forma de las constricciones y con ello la búsqueda de una teoría cuántica de la Relatividad General. Además, algo muy importante por destacar de esta nueva formulación Hamiltoniana, es que la estructura matemática de la teoría de Einstein se ve como una teoría tipo Yang-Mills.

Aunque en esta formulación las constricciones tienen una forma más sencilla de manejar, las variables fundamentales son complejas, lo que generó problemas con la implementación de las *condiciones de realidad*. Para lidiar con esto, J. F. Barbero propuso una variante en la cual la conexión es real [Barbero, 1995], y es conocida como la conexión de Ashtekar-Barbero. La relación entre las variables reales y complejas es en cierta medida clarificada por el parámetro de Barbero-Immirzi, β ; las nuevas variables corresponden a las (anti-)auto-duales para $\beta = \pm i$ y a las reales para cualquier $\beta \in \mathbb{R}$ [Immirzi, 1997, Rovelli and Thiemann, 1998].

2.1. Espacio fase

Comencemos considerando un campo de cotriadas e_a^I ($I = 1, 2, 3$ y $a = 1, 2, 3$) sobre la variedad tridimensional Σ_t (sección 1.2.1). La métrica h_{ab} en Σ_t puede expresarse como¹

$$h_{ab} = \delta_{IJ} e_a^I e_b^J. \quad (2.1)$$

Donde se observa que (2.1) es invariante bajo transformaciones de $SO(3)$, ya que $\delta_{IJ} e_a^I e_b^J = \delta_{IJ} e_a^I e_b^J$ donde $e_a^I = O_J^I e_a^J$ y O_J^I es un elemento de matriz de $SO(3)$. Las triadas y cotriadas *densitizadas*, E_I^a y

¹Dado que aquí el espacio interno es \mathbb{R}^3 , la métrica interna es δ_{IJ} .

E_a^I , son (respectivamente):

$$E_I^a = \sqrt{h} e_I^a \quad \text{y} \quad E_a^I = e_a^I / \sqrt{h}.$$

Expresando el determinante de h como $|\det(E)|$, la variable canónica h_{ab} de la formulación ADM queda como

$$h_{ab} = |\det(E)| \delta_{IJ} E_a^I E_b^J \quad (2.2)$$

y su inverso

$$h^{ab} = |\det(E)|^{-1} \delta^{IJ} E_I^a E_J^b. \quad (2.3)$$

Ahora, para reescribir el momento canónicamente conjugado p^{ab} de la formulación ADM (1.52) en términos de las triadas, se debe considerar la curvatura extrínseca K_{ab} de Σ_t . Sea la una 1-forma K_{aI} en Σ_t tal que

$$K_{ab} = K_{aI} e_b^I, \quad (2.4)$$

con lo que se sigue que el momento canónicamente conjugado en (1.52) se expresa como

$$(16\pi)p^{ab} = 2|\det(E)|^{-1} \delta^{IJ} E_I^a E_J^d K_{[d}^K \delta_c^b E_K^c. \quad (2.5)$$

Además, como $K_{ab} = K_{ba}$, se tienen tres constricciones:

$$\mathcal{G}_{ab} \equiv K_{[ab]} = K_{[aI} e_{b]}^I = 0. \quad (2.6)$$

Si se contrae \mathcal{G}_{ab} con e_I^a y e_J^b se llega a que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ab} e_I^a e_J^b &= \frac{1}{2} (K_{aK} e_b^K - K_{bK} e_a^K) e_I^a e_J^b = \frac{1}{2} (K_{aK} e_I^a \delta_J^K - K_{bK} e_J^b \delta_I^K) \\ &= \frac{1}{2} (K_{aJ} e_I^a - K_{bI} e_J^b) = K_{a[J} e_{I]}^a \\ &\implies K_{a[J} e_{I]}^a = 0, \end{aligned}$$

es decir, las constricciones (2.6) se pueden reescribir como $h^{-1/2} K_{a[J} E_{I]}^a = 0$ o de mejor manera

$$\mathcal{G}_{JI} \equiv K_{a[J} E_{I]}^a = 0. \quad (2.7)$$

Usando las expresiones (2.2) y (2.5), las constricciones Hamiltoniana y de difeomorfismos (1.72), quedan como

$$\mathcal{C} = \frac{-1}{16\pi} [|\det(E)|^{-1/2} (K_a^I K_b^J - K_a^J K_b^I) E_I^a E_J^b + |\det(E)|^{1/2} {}^{(3)}R] \quad (2.8)$$

$$\mathcal{C}_a = -2D_b (K_a^J E_J^b - \delta_a^b K_c^J E_J^c), \quad (2.9)$$

donde ${}^{(3)}R$ es considerado como una función de las triadas densitizadas E_I^a .

En la formulación Hamiltoniana ADM, hay seis variables de configuración (h_{ab}) y sus seis respectivos momentos canónicos (p^{ab}), sujetos a cuatro constricciones, una Hamiltoniana ($\mathcal{C} = 0$) y tres de difeomorfismos ($\mathcal{C}^a = 0$); dando un total de dos grados físicos de libertad². Sin embargo, al extender el espacio fase con las nuevas variables (K_a^I, E_J^b), el número de grados de libertad aumentó de 12 a 18, pero el número de grados físicos de libertad debe seguir siendo el mismo así que se toman en cuenta las tres constricciones $\mathcal{G}_{IJ} = 0$ más las cuatro ya mencionadas; conservando los dos grados físicos de libertad.

²Conteo de grados físicos de libertad:

$2(\text{núm. de grados físicos de libertad}) = (\text{núm. de variables canónicas}) - 2 (\text{núm. de constricciones de primera clase}).$

Lo siguiente por hacer, es revisar la estructura simpléctica del espacio fase extendido (K_a^I, E_J^b) .

$$\{E_I^a(y), K_b^J(y')\} = \frac{1}{2} \delta_b^a \delta_J^I \delta(y - y') \quad (2.10)$$

$$\{E_I^a(y), E_J^b(y')\} = \{K_a^I(y), K_b^J(y')\} = 0. \quad (2.11)$$

Así, siempre que se cumpla la condición $\mathcal{G}_{IJ} = 0$, los paréntesis de Poisson de las variables canónicas (h_{ab}, p^{ab}) como funciones de K_a^I y E_J^a en el espacio fase extendido dan

$$\{h_{ab}(y), p^{ab}(y')\} = \delta_{(a}^c \delta_{b)}^d \delta(y - y') \quad (2.12)$$

$$\{h_{ab}(y), h_{cd}(y')\} = \{p^{ab}(y), p^{cd}(y')\} = 0, \quad (2.13)$$

que son los paréntesis de Poisson del espacio fase ADM. Por lo tanto, si la condición $\mathcal{G}_{IJ} = 0$ se satisface entonces, las variables canónicas ADM expresadas como funciones de las variables (K_a^I, E_J^b) del espacio fase extendido generan los mismos paréntesis de Poisson.

Ahora consideremos la constricción (2.7) de la forma siguiente

$$\mathcal{G}(\Lambda) = \int_{\Sigma_t} \Lambda^{IJ} K_{aI} E_J^a d^3y, \quad (2.14)$$

con Λ^{IJ} siendo las componentes de una matriz antisimétrica que genera rotaciones $\text{SO}(3)$. Calculando el paréntesis de Poisson consigo mismo se llega a que

$$\{\mathcal{G}(\Lambda), \mathcal{G}(\Lambda')\} = \frac{1}{2} \mathcal{G}([\Lambda, \Lambda']), \quad (2.15)$$

que es igual al álgebra de rotaciones espaciales $\text{SO}(3)$. Y dado que las variables canónicas de ADM son invariantes bajo $\text{SO}(3)$, cualquier paréntesis de Poisson entre ellas y $\mathcal{G}(\Lambda)$ se anula.

En términos de las nuevas variables, la acción gravitacional es

$$S_G[K, E] = \frac{1}{16\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \left[2\dot{K}_a^K E_K^a - (\Lambda^{IJ} \mathcal{G}_{IJ} + C_a N^a + \mathcal{C}N) \right] d^3y \quad (2.16)$$

donde las constricciones están dadas por (2.7), (2.8) y (2.9). Nótese que esta acción es equivalente a la del formalismo 3+1 siempre y cuando se cumpla la constricción $\mathcal{G}_{IJ} = 0$.

2.2. Transformación Canónica

Como ya se mencionó, al extender el espacio fase se ganan más grados de libertad pero para conservar el número de grados físicos de libertad también aparecieron más constricciones. El propósito a continuación es escribir estas constricciones (ecuación (2.7)) como una ley de Gauss, análogamente a como es en electromagnetismo y la teoría de Yang-Mills, que es justo lo que se desea al formular la Relatividad General en términos de Variables de Conexión. Esto es escribir $\mathcal{G}_{IJ} = 0$ como $(\partial_a E^a + [A_a, E^a])_{IJ}$ donde A es alguna conexión con valores en el álgebra de Lie de $\text{SO}(3)$. Para ello se realiza una transformación canónica en el espacio fase (K_a^I, E_J^b) .

Antes de continuar se introducirán unos conceptos que serán de ayuda.

Se define la derivada covariante D_a en la hipersuperficie Σ_t sobre un objeto v_I como

$$D_a v_I = \partial_a v_I + w_{aI}{}^K v_K \quad (2.17)$$

donde $w_{aI}{}^K$ son las componentes de la *conexión de espín* w del álgebra de Lie de $\text{SO}(3)$. Así se tiene que la acción sobre las triadas está dada por

$$D_a e_I^b = \partial_a e_I^b + \Gamma_{ac}^b e_I^c + w_{aI}{}^K e_K^b. \quad (2.18)$$

Observando que $w_{aI}{}^K y^a \in \text{SO}(3)$, el potencial $w_{aI}{}^K$ es una 1-forma de conexión valuada en el álgebra de Lie de $\text{SO}(3)$, lo que implica que $w_{a(I}{}^{K)} = 0$.

Ahora, a partir de la identidad $e_I^a e_b^J = \delta_I^J$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= D_a (e_I^b e_b^J) = (D_a e_I^b) e_b^J + e_I^b (D_a e_b^J) \\ &\implies e_I^b (D_a e_b^J) = -(D_a e_I^b) e_b^J \end{aligned}$$

Contrayendo con e_c^I y tomando en cuenta la ecuación (2.18) se llega a que

$$\begin{aligned} D_a e_c^J &= -(D_a e_I^b) e_c^I e_b^J \\ &= -(\partial_a e_I^b + \Gamma_{ac}^b e_I^c + w_{aI}{}^K e_K^b) e_c^I e_b^J \\ &= -(\partial_a e_I^b) e_c^I e_b^J - \Gamma_{ac}^b e_c^I e_b^J - w_{aI}{}^J e_c^K. \end{aligned}$$

Y de las igualdades $\partial_a (e_c^I) = \partial_a (e_K^b e_c^K e_b^I) = \partial_a (e_K^b) e_c^K e_b^I + 2\partial_a (e_c^I)$ se sigue que

$$D_a e_c^J = \partial_a e_c^J - \Gamma_{ac}^b e_b^J - w_{aK}{}^J e_c^K. \quad (2.19)$$

Finalmente, esto lleva a que la derivada covariante espacial sobre un objeto v^I es

$$D_a v^I = \partial_a v^I - w_{aK}{}^I v^K = \partial_a v^I + w_a{}^I{}_K v^K. \quad (2.20)$$

Ahora bien, la transformación canónica a realizar consiste de un rescalamiento y una transformación afín. Considerando el rescalamiento

$$(K_a^I, E_J^b) \mapsto (\tilde{K}_a^I, \tilde{E}_J^b) = (\beta K_a^I, \beta^{-1} E_J^b), \quad (2.21)$$

donde $\beta \in \mathbb{R}/\{0\}$ es el parámetro de Barbero-Immirzi, las tres constricciones $\mathcal{G}_{IJ} = 0$, que conviene reescribirlas como $\mathcal{G}_K = \epsilon_{KIJ} \delta^{JL} K_a^I E_L^a$, se mantienen invariantes bajo el rescalamiento,

$$\mathcal{G}_K = \epsilon_{KI}{}^J \tilde{K}_a^I \tilde{E}_J^a. \quad (2.22)$$

Continuemos con la transformación afín. Recurriendo a la ecuación (2.18) pero *densitizada* y dado que D_a debe ser compatible con h_{ab} por lo que $D_a e_I^b = 0$ y $D_a \sqrt{h} = 0$; tenemos que la divergencia de E_I^a es

$$\begin{aligned} D_a E_I^a &= \sqrt{h} \partial_a e_I^a + \Gamma_{ac}^a E_I^c + w_{aI}{}^K E_K^a \\ &= \sqrt{h} \partial_a e_I^a + \frac{1}{\sqrt{h}} (\partial_c \sqrt{h}) e_I^c + w_{aI}{}^K E_K^a \\ &= \partial_a E_I^a + w_{aI}{}^K E_K^a. \end{aligned}$$

Por otro lado, de $D_a e_b^I = 0$, la conexión de espín se puede escribir como

$$w_{aK}{}^I = e_K^b (\partial_a e_b^I - \Gamma_{ab}^c e_c^I), \quad (2.23)$$

pero recordando que $\Gamma_{ab}^c = 1/2 h^{cd} (\partial_a h_{bd} + \partial_b h_{da} - \partial_d h_{ab})$, $h_{ab} = \delta_{IJ} e_a^I e_b^J$ y $h^{ab} = \delta^{IJ} e_I^a e_J^b$, después de varias cuentas, la expresión (2.23) se reescribe como

$$\begin{aligned} w_{aK}{}^I &= 2e_{[K}^d \partial_{[a} e_{d]}^I + e_a^J e_K^d e^{bI} \partial_{[b} e_{d]} J \\ &= e^{d[I} \partial_d e_{aK]} - e^{d[I} \partial_a e_{dK]} + e_a^J e_{[K}^d e^{bI]} \partial_b e_{dJ}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

La cual puede reducirse bajando el índice I y usando las identidades

$$\begin{aligned} e_{[I}^d \partial_d e_{aK]} &= \frac{1}{2} \epsilon_{JKI} \epsilon^{JMN} e_N^d \partial_d e_{aM} \\ e_{[I}^d \partial_a e_{dK]} &= \frac{1}{2} \epsilon_{JKI} \epsilon^{JMN} e_N^d \partial_a e_{dM} \\ e_{aJ} e_{[K}^d e_{I]}^b \partial_b e_d^J &= \frac{1}{2} \epsilon_{LKI} \epsilon^{LMN} e_M^d e_N^b e_{aJ} \partial_b e_d^J, \end{aligned}$$

entonces (2.24) queda como

$$w_{aKI} = \frac{1}{2} \epsilon_{JKI} \epsilon^{JMN} e_N^d (\partial_d e_{aM} - \partial_a e_{dM} + e_M^b e_{aR} \partial_d e_b^R). \quad (2.25)$$

Luego si se define

$$w_a^J := -\frac{1}{2} \epsilon^{JMN} e_N^d (\partial_d e_{aM} - \partial_a e_{dM} + e_M^b e_{aR} \partial_d e_b^R), \quad (2.26)$$

la conexión de espín es

$$w_{aKI} = -\epsilon_{JKI} w_a^J. \quad (2.27)$$

Substituyendo (2.27) en en la divergencia de E_I^a se tiene que

$$D_a E_I^a = \partial_a E_I^a - \epsilon_{JI}{}^K w_a^J E_K^a = \partial_a E_I^a + \epsilon_{IJ}{}^K w_a^J E_K^a. \quad (2.28)$$

Dando seguimiento a la transformación canónica, ahora se expresa a w_a^J en términos de las triadas y cotriadas densitizadas (E 's) ya que hasta ahora está en función de las triadas y cotriadas (e 's).

$$\begin{aligned} w_a^J &= -\frac{1}{2} \epsilon^{JK} E_K^b [\partial_b E_{aI} - \partial_a E_{bI} + E_I^c E_{aL} \partial_b E_c^L] \\ &\quad - \frac{1}{4 |\det(E)|} \epsilon^{JK} E_K^b [2E_{aI} \partial_b (|\det(E)|) - E_{bI} \partial_a (|\det(E)|)]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

De (2.29), se debe notar que w_a^J es invariante bajo el rescalamiento, así que

$$\tilde{w}_a^J = w_a^J(\tilde{E}) = w_a^J(E). \quad (2.30)$$

Retomando que la derivada covariante espacial debe ser compatible con la métrica de Σ_t , implica $D_a(E_I^b) = 0$. Entonces $D_a(\tilde{E}_I^a) = 0$, pues β es un escalar. Por lo tanto de la divergencia (2.28) se sigue que

$$D_a \tilde{E}_I^a = \partial_a \tilde{E}_I^a + \epsilon_{IJ}{}^K w_a^J \tilde{E}_K^a = 0 \quad (2.31)$$

Con esto se escribe la constricción $\mathcal{G}_I = 0$ como

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_I &= \partial_a \tilde{E}_I^a + \epsilon_{IJ}{}^K (w_a^J + \tilde{K}_a^J) \tilde{E}_K^a \\ &\equiv \partial_a \tilde{E}_I^a + \epsilon_{IJ}{}^K \tilde{A}_a^J \tilde{E}_K^a.\end{aligned}\quad (2.32)$$

El término \tilde{A}_a^J es la conexión de Ashtekar-Barbero y (2.32) es justamente la forma que se buscaba, que es análoga a una constricción de Gauss de una teoría de norma $SU(2)$. Explícitamente

$$\mathcal{G}_I = \tilde{D}_a \tilde{E}_I^a = \partial_a \tilde{E}_I^a + \epsilon_{IJ}{}^K \tilde{A}_a^J \tilde{E}_K^a = 0. \quad (2.33)$$

Es sencillo verificar que después de la transformación

$$(K_a^I, E_J^b) \mapsto (\tilde{A}_a^I, \tilde{E}_J^b), \quad (2.34)$$

los paréntesis de Poisson son

$$\{\tilde{E}_J^b(y), \tilde{A}_a^I(y')\} = \frac{1}{2} \delta_a^b \delta_J^I \delta(y - y') \quad (2.35)$$

$$\{\tilde{E}_I^a(y), \tilde{E}_J^b(y')\} = \{\tilde{A}_a^I(y), \tilde{A}_b^J(y')\} = 0. \quad (2.36)$$

Por último, nos queda expresar las constricciones (2.8) y (2.9) en términos de las nuevas variables $(\tilde{A}_a^I, \tilde{E}_J^b)$ para concluir con la formulación de la Relatividad General en variables de conexión.

Introduciendo las curvaturas asociadas a w_b^J y a A_b^I respectivamente

$$R_{ab}^J = 2\partial_{[a} w_{b]}^J + \epsilon^J{}_{KL} w_a^K w_b^L \quad (2.37)$$

$$\tilde{F}_{ab}^I = 2\partial_{[a} \tilde{A}_{b]}^I + \epsilon^I{}_{KL} \tilde{A}_a^K \tilde{A}_b^L. \quad (2.38)$$

Y escribiendo \tilde{F}_{ab}^J en términos de w_b^J y βK_b^J se obtiene una expresión que es posible relacionar más facilmente con las constricciones (2.8) y (2.9). Ésta es de la forma

$$\tilde{F}_{ab}^J = R_{ab}^J + 2\beta D_{[a} K_{b]}^J + \beta^2 \epsilon^J{}_{IK} K_a^I K_b^K.$$

Si se contrae con \tilde{E}_J^b se obtiene

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{ab}^J \tilde{E}_J^b &= R_{ab}^J \tilde{E}_J^b + 2\beta D_{[a} K_{b]}^J \tilde{E}_J^b + \beta^2 \epsilon^J{}_{IK} K_a^I K_b^K \tilde{E}_J^b \\ &= R_{ab}^J \tilde{E}_J^b + 2\beta D_{[a} K_{b]}^J \tilde{E}_J^b + \beta K_a^K G_K.\end{aligned}$$

Es posible mostrar que el primer término se anula; mientras que si se cumple la constricción de Gauss el tercer término también se anula, entonces

$$\tilde{F}_{ab}^J \tilde{E}_J^b = 2\beta D_{[a} K_{b]}^J \tilde{E}_J^b.$$

Que es simplemente una manera de reescribir (2.9), por lo tanto

$$\mathcal{C}_a = \tilde{F}_{ab}^J \tilde{E}_J^b. \quad (2.39)$$

Análogamente, haciendo la contracción $\tilde{F}_{ab}^J \epsilon_J{}^{IK} \tilde{E}_I^a \tilde{E}_K^b$ y recurriendo al hecho de que $\mathcal{G}_I = 0$, se obtiene

$$\mathcal{C} = \frac{\epsilon_J{}^{IK} \tilde{E}_I^a \tilde{E}_K^b}{\sqrt{|\det(\beta \tilde{E})|}} \left[\beta^2 \tilde{F}_{ab}^J - (\beta^2 - 1) \epsilon^J{}_{IK} \tilde{K}_a^I \tilde{K}_b^K \right]. \quad (2.40)$$

Viendo (2.35), es decir, el par $(\tilde{A}_a^I, \tilde{E}_J^b)$ son efectivamente variables canónicamente conjugadas y considerando como se reescribieron las constricciones (2.32), (2.39) y (2.40); la acción de Relatividad General en variables de conexión queda como

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \left[2\dot{\tilde{A}}_a^I \tilde{E}_I^a - (\Lambda^J \mathcal{G}_J + N^a \mathcal{C}_a + NC) \right] d^3y. \quad (2.41)$$

La gran ventaja de esta formulación se muestra en el aspecto cuántico, ya que es *independiente de fondo*. Esto, la ha llevado a ser considerada como el punto de partida para una teoría cuántica de la gravedad independiente de la métrica.

Capítulo 3

Variables de Conexión para modelos homogéneos y modelos isotrópicos

Muchos de los fenómenos pronosticados por la relatividad general se entienden y analizan mejor mediante reducciones físicamente motivadas a situaciones más simples. Una de las principales técnicas es la reducción de simetría, es decir, las soluciones que presentan ciertas propiedades de simetría espacio-temporal. Los ejemplos que nosotros estudiaremos son las geometrías espacialmente homogéneas e isotrópicas para modelos cosmológicos.

En cada uno de los modelos simétricos, homogéneos e isotrópicos, existe cierto grupo de simetría S que actúa sobre el espacio-tiempo junto con una función de tiempo t tal que S actúa transitivamente sobre cada corte espacial Σ_t , esto es, para cualquier par (y, y') de puntos en Σ_t , i.e. existe un elemento de grupo $s \in S$ tal que $s(y) = y'$. Además, en Σ_t la métrica inducida h_{ab} y la curvatura extrínseca K_{ab} se preservan bajo la acción de S , es decir, $s^*(h_{ab}) = h_{ab}$ y $s^*(K_{ab}) = K_{ab}$ para todo $s \in S$. Con el formalismo presentado por Ashtekar [Ashtekar, 1986, Ashtekar, 1987] y los estudios hechos por Kobayashi, Nomizu y Brodbeck sobre la clasificación de haces principales simétricos y conexiones invariantes [Kobayashi and Nomizu, 1963, Brodbeck, 1996] podemos encontrar la forma de las Variables de Conexión para estos modelos cosmológicos. Esto nos da un esquema general de clasificación de todas las posibles formas invariantes para estos tipos de simetrías ya que a partir de conexiones invariantes se puede encontrar la forma de métricas invariantes (ver Apéndice D).

A continuación se presentará cómo con los estudios de clasificación podemos encontrar la forma de las Variables de Conexión para los modelos cosmológicos homogéneos e isotrópicos.

3.1. Antecedentes

Sea un haz principal $\pi : P \longrightarrow \Sigma$ con un grupo compacto de Lie G actuando por la derecha en P , es decir, G es el grupo de estructura. Proponemos un subgrupo de Lie de simetría $S < \text{Aut}(P)$ actuando en el haz principal P , el cual, a través del mapeo de proyección π , induce una S -acción en la base Σ . Dado que el grupo de simetría es compacto existe una subvariedad densa y abierta $\Sigma_{(J)} \subset \Sigma$, que al menos localmente está foliada por las órbitas de S . Esto es, $\Sigma_{(J)} \cong \Sigma_{(J)}/S \times S/J$ para un subgrupo compacto $J < S$ del grupo de simetría [tom Dieck, 1987]. Con una pequeña pérdida de generalidad, podemos asumir que el espacio base Σ se puede descomponer de la siguiente forma,

$$\Sigma = \tilde{\Sigma} \times S/J,$$

donde $\tilde{\Sigma} \cong \Sigma/S$ es una variedad conexa, y la acción de S en Σ es tal que las órbitas están dadas por $S(y) \cong S/J$ para todo $y \in \Sigma$.

Si la acción inducida de S en Σ es transitiva pero no libre, isotropías adicionales a la trivial ocurren. En cada punto $y \in \Sigma$ se tiene un subgrupo de isotropía no trivial J_y que deja fijo a y . Para puntos distintos y y y' , donde por transitividad existe al menos un $s \in S$ tal que $y' = s(y)$, entonces J_y sólo difiere por conjugación de $J_{y'}$,

$$y' = j'(y') = s(j(s^{-1}(y')))) \implies j' = s \circ j \circ s^{-1} \quad \forall j \in J_y \text{ y } \forall j' \in J_{y'},$$

lo que permite escoger algún J para un punto arbitrario en Σ . De esta manera se puede identificar a Σ con S/J .

Aunque la acción de J en Σ es trivial no necesariamente lo es en la fibra $\pi^{-1}(y)$, lo que da lugar a un mapeo $J : \pi^{-1}(y) \longrightarrow \pi^{-1}(y)$ que conmuta con la acción de G en el haz. Y como la acción derecha de G en las fibras del haz P es transitiva, a cada punto $p \in \pi^{-1}(y)$ en la fibra es posible asignar un homomorfismo λ_p que va del subgrupo de isotropía J al grupo de estructura G definido por $j \cdot p = p \cdot \lambda_p(j)$. Dado $p' = p \cdot g$ se tiene

$$p' \cdot \lambda_{p'}(j) = j \cdot (p \cdot g) = (j \cdot p) \cdot g = (p \cdot \lambda_p(j)) \cdot g = p' \cdot \text{Ad}_{g^{-1}}(\lambda_p(j)),$$

lo que implica que

$$\lambda_{p'}(j) = \text{Ad}_{g^{-1}}(\lambda_p(j)). \quad (3.1)$$

A continuación se muestra la propiedad de homomorfismo:

$$p \cdot \lambda_p(j_1 j_2) = (j_1 j_2) \cdot p = j_1 \cdot (p \cdot \lambda_p(j_2)) = (p \cdot \lambda_p(j_2)) \cdot \text{Ad}_{\lambda(j_2)^{-1}} \lambda_p(j_1) = p \cdot (\lambda_p(j_1) \lambda_p(j_2)).$$

De esta manera se tiene una clase de equivalencia $[\lambda]$ de homomorfismos $\lambda : J \longrightarrow G$ dada por la conjugación (3.1), donde cambiar λ dentro de la clase equivale a un cambio de norma. El homomorfismo del álgebra de Lie inducido $j \longrightarrow \mathfrak{g}$ también será denotado por λ .

Ahora bien, escogiendo un homomorfismo $\lambda : J \longrightarrow G$, se contruye el sub-haz principal reducido

$$\tilde{Q}(\tilde{\Sigma}, Z_\lambda, \tilde{\pi}) = \{p \in P|_{\tilde{\Sigma}} \mid \lambda_p = \lambda\}, \quad (3.2)$$

con grupo de estructura Z_λ el centralizador de $\lambda(J) < G$, esto es: $Z_\lambda = \{g \in G \mid gh = hg \forall h \in \lambda(J)\}$. Y $P|_{\tilde{\Sigma}}$ es el haz restringido a $\tilde{\Sigma}$.

Los elementos $[\lambda]$ y \tilde{Q} clasifican de manera única al haz P [Brodbeck, 1996]. Esto es importante porque el par $([\lambda], \tilde{Q})$ y el Teorema 3.2 enunciado más adelante nos ayudarán a reconstruir las conexiones invariantes bajo la acción de S .

Antes de continuar, es importante hacer unas observaciones. Por un lado se tiene que un elemento X en \mathfrak{s} induce un campo vectorial \tilde{X} en P mediante $\tilde{X}(f) = d(\exp(tX) \cdot f)/dt|_{t=0}$, donde f es una función diferenciable en P . Y por otro lado, para una conexión ω' en P valuada en el álgebra de Lie \mathfrak{g} , se tiene que $\omega'(\tilde{X}) = A$ con $A \in \mathfrak{g}$. Esto nos permite construir un mapeo Λ' que vaya directamente de \mathfrak{s} a \mathfrak{g} como se muestra a continuación en el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X \in \mathfrak{s} & \xrightarrow{\exp} & \tilde{X} \in TP \\ & \searrow \Lambda' & \downarrow \omega' \\ & & A \in \mathfrak{g} \end{array}$$

Proposición 3.1. *Sea el grupo de Lie $S < \text{Aut}(P)$ transitivo, sea J el subgrupo de isotropía de S en $y = \pi(p)$ y sea ω una conexión en P invariante bajo S , i.e. $s^*(\omega) = \omega$ para todo $s \in S$. Definimos un mapeo lineal $\Lambda : \mathfrak{s} \longrightarrow \mathfrak{g}$ por*

$$\Lambda(X) = \omega(\tilde{X}), \quad (3.3)$$

con $X \in \mathfrak{s}$ y \tilde{X} el campo vectorial en P inducido por X . Entonces,

$$\Lambda(X) = \lambda(X) \quad \text{para } X \in \mathfrak{j}; \quad (3.4)$$

$$\Lambda(\text{ad}_j(X)) = \text{ad}_{\lambda(j)}(\Lambda(X)) \quad \text{para } j \in J \text{ y } X \in \mathfrak{s}, \quad (3.5)$$

donde ad_j es la representación adjunta de J en \mathfrak{s} y $\text{ad}_{\lambda(j)}$ la representación adjunta de G en \mathfrak{g} .

Teorema 3.2. *Si \mathfrak{s} , en la Proposición 3.1, admite un subespacio \mathfrak{n} tal que $\mathfrak{s} = \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{n}$ y $\text{ad}_J(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$. Entonces existe una correspondencia 1:1 entre el conjunto de conexiones invariantes ω en P bajo la acción de S y el conjunto de mapeos lineales $\Lambda_{\mathfrak{n}} : \mathfrak{n} \longrightarrow \mathfrak{g}$ tal que*

$$\Lambda_{\mathfrak{n}}(\text{ad}_j(X)) = \text{ad}_{\lambda(j)}(\Lambda_{\mathfrak{n}}(X)) \quad \text{para } j \in J \text{ y } X \in \mathfrak{n}, \quad (3.6)$$

con la correspondencia dada por (3.3) via

$$\Lambda(X) = \begin{cases} \lambda(X) & \text{si } X \in \mathfrak{j}; \\ \Lambda_{\mathfrak{n}}(X) & \text{si } X \in \mathfrak{n}. \end{cases}$$

Para ver la demostración de la Proposición 3.1 y del Teorema 3.2 se puede consultar la referencia: [Kobayashi and Nomizu, 1963].

El Teorema 3.2 es clave pues en los modelos homogéneos e isotrópicos que estudiaremos más adelante requerimos asumir que el coset S/J es reductivo, i.e. que el álgebra de Lie de S se puede descomponer como la suma directa $\mathfrak{s} = \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{n}$ con $\text{ad}_J(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$.

De la descomposición $\Sigma = \tilde{\Sigma} \times S/J$ se tiene

$$\omega = \tilde{\omega} + \omega_{S/J}, \quad (3.7)$$

donde $\tilde{\omega}$ es una conexión en el sub-haz principal reducido $\tilde{Q}(\tilde{\Sigma}, Z_{\lambda}, \tilde{\pi})$ y $\omega_{S/J}$ es una uno-forma invariante en S/J . Sin embargo, en este trabajo $\tilde{\omega}$ no nos concierne pues al fijar un grupo de isotropía J (sujeto a conjugación) y una clase de equivalencia λ también fijamos un punto $y \in \Sigma$ entonces el espacio base está representado por ese punto, $\tilde{\Sigma} \cong \{y\}$, por lo que en realidad no existe una definición de $\tilde{\omega}$ así que toda la información de ω está contenida en $\omega_{S/J}$.

Utilizando la forma de Maurer-Cartan $\theta_{(\text{MC})}$ en S y escogiendo un encaje $\iota : S/J \hookrightarrow S$, la forma de una conexión invariante, dada la clasificación por $[\lambda]$ del haz principal P simétrico bajo la acción de S , se sigue de la relación (3.3):

$$\omega_{S/J}(\tilde{X}) = \Lambda(X) = \Lambda(\iota^* \theta_{\text{MC}}(\tilde{X})) = \Lambda \circ \iota^* \theta_{\text{MC}}(\tilde{X})$$

que $\omega_{S/J}$ se puede escribir como:

$$\omega_{S/J} = \Lambda \circ \iota^* \theta_{\text{MC}}. \quad (3.8)$$

3.2. Modelos Homogéneos

Los modelos de Bianchi clase A describen todos los posibles espacios homogéneos [Wald, 1984], en estos modelos el grupo de simetría S actúa libre y transitivamente en el espacio base Σ , por lo que Σ puede ser identificado con S de manera local. Por otro lado, tenemos que una conexión invariante A es una uno-forma que toma valores en el álgebra de Lie \mathfrak{g} del grupo de estructura G , el cual para las Variables de Conexión es $G = \text{SU}(2)$.

Denotamos a los tres generadores de \mathfrak{s} como $T_{\hat{I}}$, $\hat{I} = 1, 2, 3$, tal que $[T_{\hat{I}}, T_{\hat{J}}] = C_{\hat{I}\hat{J}}^{\hat{K}} T_{\hat{K}}$, donde $C_{\hat{I}\hat{J}}^{\hat{K}}$ son las constantes de estructura de \mathfrak{s} que satisfacen $C_{\hat{I}\hat{K}}^{\hat{K}} = 0$ (para modelos clase A por definición). Por otro lado, ya existe un sentido general de invariancia con la forma de Maurer-Cartan en S dada por $\theta_{\text{MC}} = \omega^{\hat{I}} \otimes T_{\hat{I}}$ con $\omega^{\hat{I}} = \omega_a^{\hat{I}} dx^a$ uno-formas invariantes por la izquierda en S que cumplen las ecuaciones de Maurer-Cartan

$$d\omega^{\hat{I}} = -\frac{1}{2} C_{\hat{J}\hat{K}}^{\hat{I}} \omega^{\hat{J}} \wedge \omega^{\hat{K}}. \quad (3.9)$$

Así que cada $\omega^{\hat{I}}$ obtenida de esta manera es una uno-forma en S tal que $s^*(\omega^{\hat{I}}) = \omega^{\hat{I}}$ para todo s en S .

Ahora bien, tenemos que θ_{MC} toma valores en el álgebra de Lie \mathfrak{s} . Sin embargo, la conexión invariante A debe tomar valores en el álgebra de Lie del grupo de estructura G , es decir, en \mathfrak{g} y obedecer la misma condición de invariancia que θ_{MC} . Aplicando el mapeo lineal $\Lambda : \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{g}$ podemos obtener la conexión invariante A en \mathfrak{g} .

Por la acción libre el grupo de isotropía es $J = \{1\}$, lo que implica que todos los homomorfismos $\lambda : J \rightarrow G$ están dados por $1^{(J)} \mapsto 1^{(G)}$, y es conveniente usar el encaje $\iota = \text{id} : S/J \hookrightarrow S$. De este modo, la conexión invariante toma la forma

$$A = \Lambda \circ \theta_{\text{MC}} = \Lambda_{\hat{J}}^I \tau_I \omega^{\hat{J}} = \Lambda_{\hat{J}}^I \omega_a^{\hat{J}} \tau_I dx^a = A_a^I \tau_I dx^a, \quad (3.10)$$

con $\tau_I = -i\sigma_I/2$ generando $\mathfrak{su}(2)$ (σ_I son las matrices de Pauli).

Para $J = \{1\}$ la condición (3.6) está vacía, entonces el mapeo lineal está dado por $\Lambda : \mathfrak{j}_{\perp} = \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{su}(2)$, $T_{\hat{I}} \mapsto \Lambda(T_{\hat{I}}) =: \Lambda_{\hat{I}}^J \tau_J$. De esta manera tenemos que las componentes de A tienen la forma

$$A_a^I = \Lambda_{\hat{K}}^I \omega_a^{\hat{K}}, \quad (3.11)$$

y las componentes de su momento canónicamente conjugado, i.e. la triada densitizada E , son

$$E_I^a = \sqrt{h_0} \tilde{p}_I^{\hat{K}} X_{\hat{K}}^a, \quad (3.12)$$

con $\tilde{p}_I^{\hat{K}}$ canónicamente conjugado a $\Lambda_{\hat{K}}^I$, $h_0 = \det(\omega_a^{\hat{K}})^2$ es el determinante de la métrica invariante por la izquierda¹ que densitiza a E_I^a , y $X_{\hat{I}}$ campos vectoriales invariantes por la izquierda tal que $\omega^{\hat{I}}(X_{\hat{J}}) = \delta_{\hat{J}}^{\hat{I}}$ y con $[X_{\hat{I}}, X_{\hat{J}}] = C_{\hat{I}\hat{J}}^{\hat{K}} X_{\hat{K}}$.

La estructura simpléctica se calcula de

$$\frac{1}{8\pi\beta G_0} \int_{\Sigma} d^3x \dot{A}_a^I E_I^a = \frac{1}{8\pi\beta G_0} \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{h_0} \dot{\Lambda}_{\hat{K}}^I \tilde{p}_I^{\hat{J}} \omega^{\hat{K}}(X_{\hat{J}}) = \frac{V_0}{8\pi\beta G_0} \dot{\Lambda}_{\hat{J}}^I \tilde{p}_I^{\hat{J}}, \quad (3.13)$$

y se obtiene

$$\{\Lambda_{\hat{K}}^I, \tilde{p}_L^{\hat{J}}\} = 8\pi\beta G_0 V_0 \delta_L^I \delta_{\hat{K}}^{\hat{J}}, \quad (3.14)$$

¹ $(h_0)_{ab} := \sum_{\hat{K}} \omega_a^{\hat{K}} \omega_b^{\hat{K}}.$

con G_0 como la constante gravitacional, β como el parámetro de Immirzi y con volumen $V_0 := \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{h_0}$.

Es conveniente definir $\phi_J^I := V_0^{1/3} \Lambda_J^I$ y $p_J^{\hat{I}} := V_0^{2/3} \tilde{p}_J^{\hat{I}}$ para hacer la estructura simpléctica independiente de V_0 y así respetar la independencia de fondo.

3.3. Modelos Isotrópicos

Al imponer más condiciones de simetría se introducen subgrupos de isotropía no triviales como $J \cong \text{U}(1)$ para modelos isotrópicos respecto a un eje, llamados simétricos rotacionalmente de manera local (LRS por sus siglas en inglés), y $J \cong \text{SU}(2)$ para modelos de Bianchi tipo I y IX restringidos a métricas isotrópicas, es decir, que son totalmente isotrópicos. Escribiendo al grupo de simetría como un producto semi-directo $S = J \rtimes_{\rho} N$, con el grupo de isotropía J y el subgrupo de traslaciones N , se puede utilizar la técnica ya discutida para encontrar la forma de la conexión invariante. La composición en este grupo está definida como $(n_1, j_1)(n_2, j_2) := (n_1 \rho(j_1)(n_2), j_1 j_2)$ que depende del homomorfismo² $\rho : J \rightarrow \text{Aut}(N)$, mientras que el inverso está dado por $(n, j)^{-1} = (\rho(j^{-1})n^{-1}, j^{-1})$.

Ahora bien, para determinar la forma de conexiones invariantes vemos que la forma de Maurer-Cartan en S está dada por

$$\begin{aligned} \theta_{\text{MC}}^{(S)}(n, j) &= (n, j)^{-1} d(n, j) = (\rho(j^{-1})n^{-1}, j^{-1})(dn, dj) \\ &= (\rho(j^{-1})n^{-1} \rho(j^{-1})dn, j^{-1}dj) = (\rho(j^{-1})(n^{-1}dn), j^{-1}dj) \\ &= \left(\rho(j^{-1})\theta_{\text{MC}}^{(N)}(n), \theta_{\text{MC}}^{(J)}(j) \right), \end{aligned}$$

aquí $\theta_{\text{MC}}^{(N)}$ y $\theta_{\text{MC}}^{(J)}$ denotan las forma de Maurer-Cartan en N y J respectivamente. Si el encaje $\iota : S/J = N \hookrightarrow S$ se escoge como $\iota(n) = (n, 1)$, tenemos: $\iota^* \theta_{\text{MC}}^{(S)} = \theta_{\text{MC}}^{(N)}$. Usando los generadores $T_{\hat{I}}$ de $\mathfrak{n} = \mathfrak{j}_{\perp}$ y uno-formas invariantes $\omega^{\hat{I}}$ en N , se puede escribir $\theta_{\text{MC}}^{(N)} = \omega^{\hat{I}} \otimes T_{\hat{I}}$, con $\omega^{\hat{I}} = \omega_a^{\hat{I}} dx^a$ uno-formas invariantes por la izquierda en N . De esta manera, la conexión toma la forma

$$A = \Lambda \circ \iota^* \theta_{\text{MC}}^{(S)} = \Lambda_J^I \omega^{\hat{J}} \tau_I = \Lambda_J^I \omega_a^{\hat{J}} \tau_I dx^a = A_a^I \tau_I dx^a, \quad (3.15)$$

donde las componentes Λ_J^I están definidas por $\Lambda(T_J) = \Lambda_J^I \tau_I$; τ_I son los generadores de $\mathfrak{su}(2)$ que están dados en términos de las matrices de Pauli: $\tau_I = -i\sigma_I/2$ (y además forman una base en \mathfrak{s}). Nótese que (3.15) tiene la misma forma que el modelo anterior, pero en este caso la condición (3.6) no está vacía, por lo que se obtiene un subconjunto de conexiones isotrópicas. Para encontrar la solución a esta condición se debe tratar al modelo LRS y al modelo totalmente isotrópico por separado. En el modelo LRS se toma como sistema generador a $\mathfrak{j} = \langle \tau_3 \rangle$ mientras que en el modelo totalmente isotrópico, el sistema generador es $\mathfrak{j} = \langle \tau_1, \tau_2, \tau_3 \rangle$. La ecuación (3.6) se puede escribir de forma infinitesimal como

$$\Lambda(\text{ad}_{\tau_{\hat{I}}}(T_J)) = \text{ad}_{d\lambda(\tau_{\hat{I}})}\Lambda(T_J) = [d\lambda(\tau_{\hat{I}}), \Lambda(T_J)]$$

($\hat{I} = 3$ para los modelos LRS, $\hat{I} = 1, 2, 3$ para los modelos totalmente isotrópicos). El grupo de isotropía J rota los generadores $T_{\hat{I}}$, entonces $\text{ad}_{\tau_I}(T_J) = \epsilon_{I\hat{J}\hat{K}} T_{\hat{K}}$.

De los posibles homomorfismos $\lambda : J \rightarrow G$, se tiene que para los modelos LRS

$$\begin{aligned} \lambda_k : \text{U}(1) &\rightarrow \text{SU}(2) \\ \exp(t\tau_3) &\mapsto \exp(kt\tau_3), \end{aligned}$$

²Esto es $\rho(j) : N \rightarrow N$ es un isomorfismo para todo $j \in J$.

para $k \in \mathbb{N}$. Entonces (3.6) toma la forma $\epsilon_{3\hat{I}\hat{K}}\tilde{\phi}_K^J = k\epsilon_{3LJ}\Lambda_I^L$, la cual sólo tiene solución no trivial para $k = 1$, que lleva a que las componentes de Λ se puedan escribir como

$$\Lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{a}\tau_1 + \tilde{b}\tau_2), \quad \Lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\tilde{b}\tau_1 + \tilde{a}\tau_2), \quad \Lambda_3 = \tilde{c}\tau_3, \quad (3.16)$$

con \tilde{a} , \tilde{b} , \tilde{c} números arbitrarios. Las componentes del momento conjugado tienen la forma

$$\tilde{p}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{p}_a\tau_1 + \tilde{p}_b\tau_2), \quad \tilde{p}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\tilde{p}_b\tau_1 + \tilde{p}_a\tau_2), \quad \tilde{p}^3 = \tilde{p}_c\tau_3, \quad (3.17)$$

(los factores $1/\sqrt{2}$ son constantes de normalización). Y la estructura simpléctica está dada por

$$\{\tilde{a}, \tilde{p}_a\} = \{\tilde{b}, \tilde{p}_b\} = \{\tilde{c}, \tilde{p}_c\} = \frac{8\pi}{3}\beta G_0 V_0, \quad (3.18)$$

y cero en cualquiera otro caso.

Para los modelos totalmente isotrópicos hay dos posibles homomorfismos $\lambda : \text{SU}(2) \rightarrow \text{SU}(2)$, se tienen a λ_0 mapeando cualquier elemento del grupo de isotropía J a la identidad en G , i.e. $j \mapsto 1^{(G)}$, y a $\lambda_1 = \text{id}$. Para el caso λ_0 , la ecuación (3.6) toma la forma $\epsilon_{I\hat{I}\hat{K}}\Lambda_K^J = 0$ y para λ_1 toma la forma $\epsilon_{I\hat{I}\hat{K}}\Lambda_K^J = \epsilon_{ILJ}\Lambda_I^L$, cuya solución es

$$\Lambda_I^J = \tilde{c}\delta_I^J, \quad (3.19)$$

con \tilde{c} un número arbitrario. El momento canónicamente conjugado se puede escribir como

$$\tilde{p}_J^{\hat{I}} = \tilde{p}\delta_J^{\hat{I}}. \quad (3.20)$$

Por lo tanto, la conexión isotrópica A y la triada densitizada E , están determinadas por las componentes

$$A_a^I = \tilde{c}\delta_a^I \quad \text{y} \quad E_I^a = \tilde{p}\delta_I^a, \quad (3.21)$$

respectivamente. Tal que la estructura simpléctica es

$$\{A_a^I, E_I^a\} = \{\tilde{c}, \tilde{p}\} = \frac{8\pi}{3}\beta G_0 V_0. \quad (3.22)$$

Nuevamente, redefiniendo $a := V_0^{1/3}\tilde{a}$, $b := V_0^{1/3}\tilde{b}$, $c := V_0^{1/3}\tilde{c}$ y $p_a := V_0^{2/3}\tilde{p}_a$, $p_b := V_0^{2/3}\tilde{p}_b$, $p_c := V_0^{2/3}\tilde{p}_c$, $p := V_0^{2/3}\tilde{p}$, la estructura simpléctica es independiente de V_0 .

Como se puede observar, tanto en los modelos LRS como en los modelos totalmente isotrópicos existe una única solución no trivial.

Capítulo 4

Discusión y conclusiones

La Gravedad Cuántica de Lazos es un candidato para la cuantización de la gravedad a partir de los fundamentos de Relatividad General. Hasta ahora ha descubierto varias características cruciales relevantes en escalas de la longitud de Planck, ha logrado discretizar la geometría espacial en cuántos geométricos de longitud, área y volumen, que ha significado una gran ayuda en el estudio de las singularidades cosmológicas y de los agujeros negros. Sin embargo, a pesar de simplificar la contricción de difeomorfismos $\mathcal{C}_a = 0$ al pasar del formalismo ADM (1.72) al formalismo en Variables de Conexión hecho por Ashtekar (2.39), muchos de los cálculos en el marco general de la teoría siguen siendo poco comprendidos y bastante complejos por lo que se recurre a trabajar en marcos donde se presentan ciertas propiedades de simetría.

En el régimen clásico la reducción de simetría simplifica en gran medida los cálculos englobando muy bien la dinámica a gran escala del universo, como ejemplo tenemos a la métrica de Friedmann-Robertson-Walker que es una solución exacta a las ecuaciones de Einstein que describe un universo homogéneo e isotrópico en expansión. Los resultados al realizar una reducción de simetría en el formalismo de Variables de Conexión de modelos cosmológicos homogéneos e isotrópicos proporcionan un marco de trabajo sumamente útil para analizar las singularidades clásicas en la teoría cuántica, lo que es Cosmología Cuántica de Lazos, ya que permite realizar la reducción a nivel cuántico seleccionando estados simétricos.

Un modelo clásico reducido, dada cierta simetría, se explica mediante un grupo de simetría S actuando sobre el espacio-tiempo tal que preserva la métrica $g_{\mu\nu}$ bajo la acción $s^*(g_{\mu\nu}) = g_{\mu\nu}$ para todo $s \in S$. **Para identificar los campos de un modelo reducido para cierto grupo de simetría S , necesitamos una base completa de todos los tensores métricos invariantes involucrados, así que necesitamos una clasificación de las métricas invariantes para estos modelos.** Sin embargo, la clasificación de métricas invariantes no es el objetivo de este trabajo sino encontrar la forma de las Variables de Conexión para modelos simétricos dada una clasificación. Además, a partir de conocer la forma de las conexiones invariantes para cierto modelo simétrico se puede encontrar la forma de métricas invariantes para ese mismo modelo.

Con la clasificación de haces principales simétricos y conexiones invariantes, como se muestra en el capítulo 3, reconstruimos la forma de las conexiones invariantes para cierto grupo de simetría S , usando la clasificación del haz principal dada por el haz reducido \tilde{Q} (3.2) y la clase de equivalencia $[\lambda]$ (3.1), donde λ es un mapeo que va del subgrupo de isotropía $^1J \leq S$ al grupo de estructura $G = \text{SU}(2)$ del haz principal. De esta manera obtuvimos la forma de las conexiones invariantes A y su momento canónicamente conjugado E para todos los modelos que sean simétricos bajo S .

En el capítulo 3 investigamos la forma de las conexiones invariantes A y las triadas densitizadas E para modelos de Bianchi clase A, que son todos aquellos con simetría espacial homogénea y para los

¹ $J = \{j \in S \mid j(y) = y \forall y \in \Sigma_t\}$.

modelos de Bianchi tipo I y tipo IX que son los que presentan isotropía espacial. Esto es que la acción del grupo de simetría S está dada por el mapeo $s : \Sigma_t \rightarrow \Sigma_t$, donde Σ_t son las hipersuperficies espaciales de la descomposición 3+1 (ver capítulo 1.2), tal que la métrica inducida h_{ab} y la curvatura K_{ab} se preservan para todo $s \in S$. La triada densitizada codifica la geometría espacial en relación con la métrica espacial mediante $\delta^{IJ} E_I^a E_J^b = h_0 h^{ab}$, con h_0 el determinante de h_{ab} .

Para modelos espacialmente homogéneos, encontramos que la forma de la conexión homogénea invariante A y la forma de la triada densitizada E están determinadas por sus componentes:

$$A_a^I = \phi_{\hat{K}}^I \omega_a^{\hat{K}} V_0^{-1/3} \quad y \quad E_I^a = \sqrt{h_0} p_I^{\hat{K}} V_0^{-2/3} X_{\hat{K}}^a$$

respectivamente. Donde los nueve parámetros $\phi_{\hat{K}}^I$ son arbitrarios y $p_I^{\hat{K}}$ tal que la estructura simpléctica sea: $\{\phi_{\hat{K}}^I, p_I^{\hat{K}}\} = 8\pi\beta G_0 \delta_L^I \delta_{\hat{K}}^{\hat{J}}$.

En cambio en los modelos con isotropía espacial, el espacio fase de Relatividad General se reduce a dos dimensiones, dada la libertad permitida por $SU(2)$ que deja únicamente una componente independiente en la conexión A_a^I y una en la triada densitizada E_I^a , pues las demás componentes ya están determinadas por la simetría. Es decir, la conexión isotrópica y la triada densitizada, están determinadas por

$$A_a^I = \tilde{c} \delta_a^I \quad y \quad E_I^a = \tilde{p} \delta_I^a,$$

respectivamente.

Un ejemplo interesante de mencionar de un modelo isotrópico es el modelo de Friedmann-Robertson-Walker, que se describe completamente mediante el factor $a(t)$ como una solución a las ecuaciones de Friedmann. En el formalismo de Variables de Conexión el factor de escala a y sus derivadas temporales \dot{a} están expresados a través de la componente independiente \tilde{p} de la triada por $|\tilde{p}| = a^2$ y la componente independiente de la conexión \tilde{c} por $\tilde{c} = \tilde{\gamma} + \beta \dot{a}$ (ver [Bojowald, 2000] para los cálculos). Ahora, tomando las definiciones $p := V_0^{2/3} \tilde{p}$ y $c := V_0^{1/3} \tilde{c}$ (junto con $\gamma = V_0^{1/3} \tilde{\gamma}$) hacen que el marco de trabajo sea independiente del fondo. Un resultado importante es en la construcción Hamiltoniana \mathcal{C} , que restringida a Variables de Conexión isotrópicas pasa a ser [Bojowald, 2002, Bojowald, 2005]

$$\mathcal{C} = -\frac{3}{8\pi G_0} (\beta^{-2}(c - \gamma)^2 + \gamma) \sqrt{|p|} + H_{\text{materia}}(p) = 0. \quad (4.1)$$

que sustituyendo para obtener en términos de a y \dot{a} , y reescribiendo se obtiene la ecuación de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G_0}{3} a^{-3} H_{\text{materia}}(a). \quad (4.2)$$

Aunque al introducir triadas y conexiones no cambia la situación en el aspecto clásico que existe en el espacio de métricas para $a = 0$. En el espacio fase clásico de métricas $a = 0$ es un límite mientras que en el espacio fase clásico de triadas $p = 0$ es una subvariedad lo cual en la teoría cuántica tiene consecuencias importantes. **Uno de los resultados es que al cuantizar el espacio, p , además de poder ser negativa, toma valores discretos por lo tanto la singularidad del *Big Bang* nunca ocurre, mas bien tenemos lo que se conoce como el *Big Bounce* [?].**

Apéndice A

Grupos de Lie y su acción en variedades

A.1. Grupos de Lie

Definición A.1 (Grupo). Un *grupo* G es un conjunto de elementos $\{g_1, g_2, \dots\}$ dotados de una ley de composición, llamada multiplicación. Esta multiplicación a cada par ordenado (los *factores*) $g_i, g_j \in G$ le asigna un tercer elemento $g_i \cdot g_j \in G$ (el *producto*). Además, se cumplen las siguientes propiedades,

- Asociatividad: $(g_i \cdot g_j) \cdot g_k = g_i \cdot (g_j \cdot g_k) \quad \forall g_i, g_j, g_k \in G$.
- Identidad: $\exists! 1 \in G \mid 1 \cdot g = g \cdot 1 = g \quad \forall g \in G$.
- Inverso: Para cada elemento $g \in G$ existe otro elemento en el grupo g^{-1} tal que $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1$.

Definición A.2 (Grupo de Lie). [Warner, 1983] Un *grupo de Lie* G , es un grupo que al mismo tiempo es una variedad diferenciable tal que el mapeo $G \times G \rightarrow G$ definido por $(a, b) \mapsto ab^{-1}$ es diferenciable, es decir, la operación de grupo es suave.

Definición A.3 (Homomorfismo, Endomorfismo, Isomorfismo, Automorfismo). [Warner, 1983] Sean (G, \cdot) , $(G', *)$ dos grupos y un mapeo $\varphi : G \rightarrow G'$, tal que

$$\varphi(g_i \cdot g_j) = \varphi(g_i) * \varphi(g_j).$$

1. Entonces se dice que φ es un *homomorfismo*.
2. Además, si $G = G'$, entonces φ es un *endomorfismo*.
3. Y si existe φ^{-1} , entonces el mapeo es un *isomorfismo*.
4. Si φ es un isomorfismo y $G = G'$, se dice que el mapeo es un *automorfismo*.

Definición A.4 (Álgebra de Lie). [Warner, 1983] Un *álgebra de Lie* \mathfrak{g} sobre \mathbb{R} es un espacio vectorial real \mathfrak{g} equipado con un operador bilineal $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ (usualmente llamado *conmutador*) tal que

- $[x, y] = -[y, x]$ (anticonmutatividad).
- $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ (identidad de Jacobi).

para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Definición A.5 (Sub-álgebra de Lie, Ideal). [Warner, 1983] Un subespacio $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ que es cerrado bajo el paréntesis de Lie es llamado un *sub-álgebra* de Lie de \mathfrak{g} . Si un subespacio $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{g}$ satisface una condición más fuerte:

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{i}] \subseteq \mathfrak{i},$$

entonces a \mathfrak{i} se le conoce como un *ideal* en el álgebra de Lie \mathfrak{g} .

Definición A.6 (Álgebra de Lie simple y semi-simple). Se dice que un álgebra de Lie \mathfrak{g} es *simple* cuando \mathfrak{g} es no abeliana y cuyos únicos ideales son 0 y \mathfrak{g} . Y un álgebra de Lie es *semi-simple* si es una suma directa de álgebras de Lie simples.

Observación A.7. Un grupo de Lie G se dice que es un *grupo semi-simple* si su Álgebra de Lie \mathfrak{g} es semi-simple.

Definición A.8 (Traslación izquierda y traslación derecha). [Warner, 1983] Sea $g \in G$, definimos los difeomorfismos *traslación izquierda* y *traslación derecha*, denotados por l_g y r_g , respectivamente, como

$$\begin{aligned} l_g(x) &= xg, \\ r_g(x) &= gx, \end{aligned}$$

para todo $x \in G$.

Observación A.9. Notemos que $(l_a \circ l_b)(x) = l_a(l_b(x)) = l_a(bx) = abx = l_{ab}(x)$ y $(r_a \circ r_b)(x) = r_a(r_b(x)) = r_a(xb) = xba = r_{ba}$, es decir, $l_a \circ l_b = l_{ab}$ y $r_a \circ r_b = r_{ba}$ para todo $a, b \in G$ y $x \in G$.

Definición A.10. [Warner, 1983] Un campo vectorial X en G se dice que es *invariante por la izquierda* si es invariante bajo la acción de l_g para todo $g \in G$; esto es, $g_*(X) = X$. De manera equivalente, se dice que X es *invariante por la derecha* si $(X)g_* = X \quad \forall g \in G$.

Teorema A.11. [Warner, 1983] *El conjunto de campos vectoriales invariantes por la izquierda (derecha) es cerrado bajo la operación del paréntesis de Lie.*

Demostración:

$$g_*([X, Y]) = [g_*(X), g_*(Y)] = [X, Y].$$

(El mismo argumento se sigue para campos vectoriales invariantes por la derecha). \square

Proposición A.12. [Warner, 1983] *El conjunto de campos vectoriales invariantes por la izquierda de un grupo de Lie G lo denotaremos como \mathfrak{g} dado que bajo la operación del paréntesis de Lie forma un álgebra de Lie.*

Proposición A.13. [Warner, 1983] *Sea G un grupo de Lie y \mathfrak{g} su conjunto de campos vectoriales invariantes por la izquierda.*

1. \mathfrak{g} es un espacio vectorial real isomorfo al espacio tangente de G en la identidad. Es decir, existe un isomorfismo $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow T_1G$ definido por $\varphi(X) = X(1) = X_1$. Lo cual implica que $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(T_1G) = \dim(G)$.
2. Los campos vectoriales invariantes por la izquierda son diferenciables.

Definición A.14 (Subgrupo de un-parámetros). [Kobayashi and Nomizu, 1963] Un *subgrupo de un-parámetros* de un grupo de Lie G es una curva diferenciable $g : \mathbb{R} \rightarrow G$ por $t \mapsto g(t)$ tal que

1. $g(t)g(s) = g(t+s)$,
2. $g(0) = 1$.

Teorema A.15. [Kobayashi and Nomizu, 1963] El subgrupo de un-parámetros de un grupo de Lie G son las curvas integrales, que pasan por la identidad, de los campos invariantes izquierdos (derechos).

Demostración:

Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow G$ un subgrupo de un-parámetros,

$$l_{g(t)}g(s) = g(t+s);$$

así

$$(l_{g(t)})_* \frac{dg(s)}{ds} = \frac{dg(t+s)}{ds} = \frac{dg(t+s)}{dt}.$$

Ajustando $s = 0$

$$(l_{g(t)})_* \beta = \frac{dg(t)}{dt},$$

donde β es el vector tangente a $g(0) = 1$ a la curva $t \mapsto g(t)$. Esta ecuación nos dice que $g(t)$ es la curva integral de los campos vectoriales invariantes por la izquierda iguales a β en la identidad (de igual modo para campos vectoriales invariantes por la derecha). Por otro lado, para cada $\beta \in T_1G$ existe una única solución $g(t)$, que pasa por la identidad, de la ecuación diferencial para cada campo vectorial invariante por la izquierda (o derecha). Esta solución obedece la propiedad de grupo $g(t)g(s) = g(t+s)$. \square

Definición A.16 (Vectores generadores o generadores infinitesimales). Un *vector generador* de un grupo de Lie (matricial) G , es el vector tangente en la identidad de un subgrupo de un-parámetros $g(t)$ definido como

$$\left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=0}. \quad (\text{A.1})$$

También, se le conoce como *generador infinitesimal*, pues podemos expandir $g(t)$ alrededor de $t = 0$,

$$g(t) = 1 + t \left. \frac{dg(t)}{dt} \right|_{t=0} + \frac{1}{2} t^2 \left. \frac{d^2g(t)}{dt^2} \right|_{t=0} + \frac{1}{3!} t^3 \left. \frac{d^3g(t)}{dt^3} \right|_{t=0} + \mathcal{O}(t^4).$$

De este modo, cualquier elemento en la vecindad de la identidad puede obtenerse a partir de conocer al vector generador.

Definición A.17 (Mapeo exponencial). [Warner, 1983] El *mapeo exponencial* mapea la línea $t\beta$, en el espacio tangente T_1G en la identidad de un grupo de Lie G , en el subgrupo de un-parámetros $g(t)$ de G tangente a β en la identidad de G , acorde a

$$\begin{aligned} \exp : T_1G &\longrightarrow G \\ \beta &\longmapsto \exp(\beta) = g(1) \end{aligned}$$

donde se sigue que $\exp(t\beta) = g(t)$ para toda t .

Observación A.18. [Warner, 1983] Dado que \mathfrak{g} y T_1G son isomorfos, el mapeo exponencial a veces es definido como el mapeo de \mathfrak{g} a G , de modo que para $X \in \mathfrak{g}$ se tiene $X \mapsto \exp(tX)$.

Proposición A.19. [Warner, 1983] Sea $X, Y \in \mathfrak{g}$, entonces

- $\exp(tX)\exp(sX) = \exp((t+s)X)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.
- $\exp(-tX) = (\exp(tX))^{-1}$.
- $\exp(tX)\exp(tY) = \exp(t(X+Y))$ si $[X, Y] = 0$.

Se puede mostrar que la serie de Taylor de $\exp(tX)\exp(tY)$ es

$$\exp\left(t(X+Y) + \frac{1}{2}t^2[X, Y] + \frac{1}{12}t^3[X, [X, Y]] + \frac{1}{12}t^3[[X, Y], Y] + \mathcal{O}(t^4)\right),$$

de donde se ve claramente que si X y Y conmutan, la última proposición de A.19 se satisface.

Ejemplo 1. Sea g un elemento en el grupo de Lie $\mathrm{SO}(2)$. El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2)$ está generada por matrices reales antisimétricas, esto es $L_j^i = -L_i^j$ en términos de sus componentes, y es unidimensional. Por lo tanto podemos tomar la matriz

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

como base de $\mathfrak{so}(2)$. Es decir, cualquier elemento de $\mathfrak{so}(2)$ puede escribirse como ϕL , para $\phi \in [0, 2\pi)$. Entonces para algún elemento en $\mathrm{SO}(2)$ tenemos

$$\begin{aligned} g(\phi) &= \exp(\phi L) \\ &= 1 + \phi L + \frac{1}{2}\phi^2 L^2 + \frac{1}{3!}\phi^3 L^3 + \frac{1}{4!}\phi^4 L^4 + \dots \\ &= \cos(\phi)1 + \sin(\phi)L \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observemos que L definido así es un vector generador.

Observación A.20. Notemos entonces que un vector generador (o generador infinitesimal) lo podemos obtener calculando

$$\left. \frac{d(\exp(t\beta))}{dt} \right|_{t=0}.$$

Definición A.21 (Representación adjunta). [Warner, 1983] Sea G un grupo de Lie, entonces cada $g \in G$ define un mapeo suave $\mathrm{Ad}_g : G \rightarrow G$ por la composición $\mathrm{Ad}_g = l_g \circ r_{g^{-1}}$; esto es,

$$\mathrm{Ad}_g = gxg^{-1}, \quad \forall x \in G. \quad (\text{A.2})$$

Este mapeo preserva la identidad de ahí que su derivada define una representación lineal del grupo en el álgebra de Lie \mathfrak{g} conocida como *representación adjunta* $\mathrm{ad}_g := (\mathrm{Ad}_g)_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, definida explícitamente por

$$\mathrm{ad}_g X = \left. \frac{d}{dt} (g \exp(tX) g^{-1}) \right|_{t=0}, \quad \forall X \in \mathfrak{g}. \quad (\text{A.3})$$

Para grupos matriciales $\mathrm{ad}_g(X) = gXg^{-1}$.

Definición A.22. [Warner, 1983] Así como se tienen campos vectoriales invariantes por la izquierda, es natural que exista su dual de uno-formas invariantes por la izquierda. Se dice que una uno-forma ω es invariante por la izquierda si $g^*(\omega) = \omega$ para todo $g \in G$. El espacio vectorial \mathfrak{g}^* formado por todas las uno-formas es el espacio dual del álgebra de Lie \mathfrak{g} : si $X \in \mathfrak{g}$ y $\omega \in \mathfrak{g}^*$, entonces $\omega(X)$ es constante en G .

Definición A.23 (Forma de Maurer-Cartan). [Yvonne Choquet-Bruhat, 1982] La uno-forma canónica en G , generalmente denotado como θ_{MC} y conocida como *forma de Maurer-Cartan*, es la uno-forma \mathfrak{g} -valuada definida por

$$\theta_{\text{MC}} : T_g G \longrightarrow T_1 G \cong \mathfrak{g} \quad \text{para } g \in G.$$

Si X es un campo vectorial invariante por la izquierda, entonces $\theta_{\text{MC}}(X) = X_1$, por lo que θ_{MC} es la identificación natural entre $T_1 G$ y \mathfrak{g} .

Sea $\{e_\mu\}$ una base de \mathfrak{g} y escribimos a la forma de Maurer-Cartan como

$$\theta_{\text{MC}} = \omega^\mu e_\mu.$$

Entonces $\{\omega^\mu\}$ forma una base para el espacio de uno-formas invariantes por la izquierda en G .

Definición A.24 (Constantes de estructura). [Yvonne Choquet-Bruhat, 1982] Dada una base $\{e_\mu\}$ de un álgebra de Lie \mathfrak{g} ; ésta viene especificada por un conjunto de números $C_{\nu\tau}^\mu$ denominados *constantes de estructura* que se definen según la siguiente expresión

$$[e_\nu, e_\tau] = C_{\nu\tau}^\mu e_\mu.$$

Estos números satisfacen las siguientes propiedades,

- $C_{\nu\tau}^\mu = -C_{\tau\nu}^\mu$.
- $C_{\nu\lambda}^\mu C_{\kappa\tau}^\lambda + C_{\kappa\lambda}^\mu C_{\tau\nu}^\lambda + C_{\tau\lambda}^\mu C_{\nu\kappa}^\lambda = 0$.

A.2. Acción de grupos de Lie en una variedad

Definición A.25 (G -acción izquierda). [Kobayashi and Nomizu, 1963] Sea G un grupo de Lie y \mathcal{M} una variedad suave, entonces

$$\begin{aligned} \cdot : G \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (g, m) &\longmapsto g \cdot m, \end{aligned}$$

que satisface:

- $1(m) = m$.
- $g_2 \cdot (g_1 \cdot m) = (g_2 \cdot g_1) \cdot m$.

es llamada una G -acción izquierda en la variedad \mathcal{M} .

Definición A.26 (G -acción derecha). [Kobayashi and Nomizu, 1963] De manera similar, una G -acción derecha es aquella que

$$\begin{aligned} \cdot : G \times \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (g, m) &\longmapsto m \cdot g, \end{aligned}$$

y satisface

- $m \cdot 1 = m$.

$$\blacksquare (m \cdot g_1) \cdot g_2 = m \cdot (g_1 \cdot g_2).$$

Definición A.27. [Kobayashi and Nomizu, 1963] Sean G y H dos grupos de Lie y φ un homomorfismo de grupos de Lie tal que $\varphi : G \rightarrow H$ y sean \mathcal{M} y \mathcal{N} dos variedades. Definimos,

$$\begin{aligned} \cdot & : G \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}, \\ * & : H \times \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}. \end{aligned}$$

y un mapeo suave $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$. Entonces ϕ se dice que es φ -equivariante si

$$\phi(g \cdot m) = \varphi(g) * \phi(m),$$

es decir, si el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathcal{M} & \xrightarrow{\varphi \times \phi} & H \times \mathcal{N} \\ \downarrow \cdot & & \downarrow * \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{N} \end{array}$$

Definición A.28 (Órbita, Relación de equivalencia, Grupo de Isotropía). [tom Dieck, 1987] Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable y G un grupo de Lie actuando por la izquierda en \mathcal{M} .

1. Para cualquier $m \in \mathcal{M}$ definimos su *órbita* bajo la acción como el conjunto

$$\mathcal{O}_m = \{m' \in \mathcal{M} \mid \exists g \in G : g \cdot m = m'\}.$$

2. Sea $m \sim m' \Leftrightarrow \exists g \in G$ tal que $m' = g \cdot m$, es decir, se dice que m y m' son equivalentes, o hay una *relación de equivalencia* entre ellos, si están en la misma órbita. Propiedades:

- Reflexiva.
- Simétrica, $g^{-1} \cdot m' = m$.
- Transitiva, i.e. $m \sim m'$ y $m' \sim m'' \Rightarrow m \sim m''$.

entonces, tenemos que $M/\sim \equiv M/G$ se le conoce como el espacio de órbitas.

3. Para un punto $m \in \mathcal{M}$ definimos el *grupo de isotropía* de m como

$$J_m = \{g \in G \mid g \cdot m = m\}.$$

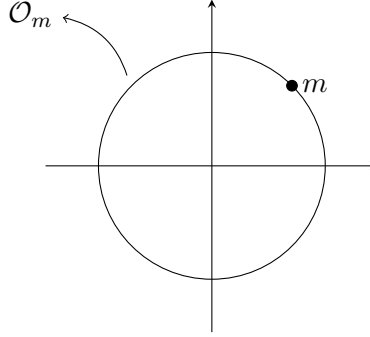
En particular, es importante mencionar que los cosets del subgrupo de isotropía de un punto m en \mathcal{M} es isomorfo a la órbita \mathcal{O}_m de ese mismo punto, i.e.

$$\mathcal{O}_m \approx G/J_m,$$

donde J_m denota el grupo de isotropía de m .

Ejemplo 2. Sea $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$ y $G = \text{SO}(2)$, entonces

$$g \cdot m = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$



De esta manera podemos ver que la órbita \mathcal{O}_m de m son todos los puntos del círculo donde se encuentra m y su grupo de isotropía es $J_m = \{1\}$, mientras que para el origen $(0,0)$ el grupo de isotropía es todo $\text{SO}(2)$.

Observación A.29. La órbita de un elemento $m \in \mathcal{M}$ es subvariedad de la variedad, i.e. $\mathcal{O}_m \subseteq \mathcal{M}$ mientras que el grupo de isotropía es subgrupo del grupo G que actúa en la variedad, i.e. $J_m \leq G$.

Observación A.30. Cuando dos puntos m y m' están en la misma órbita, digamos $m' = g \cdot m$, entonces los grupos de isotropía son subgrupos conjugados. Explícitamente, $J_{m'} = g \cdot J_m \cdot g^{-1}$.

Definición A.31 (Acción libre). [Kobayashi and Nomizu, 1963] Se dice que una acción de grupo $G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ es *libre*, si para todo $m \in \mathcal{M}$, $g \cdot m = m$ implica $g = 1$, es decir, sólo el elemento identidad deja fijo cualquier m .

Observación A.32. Si la acción de G es libre en \mathcal{M} , entonces cada órbita es isomorfa a G , i.e. $\mathcal{O}_m \approx G$.

Ejemplo 3. Si $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2 / \{(0,0)\}$ y $\text{SO}(2) \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, entonces la acción de G es libre y $\mathcal{O}_m \approx S^1$, donde S^1 es la base del grupo de Lie $\text{SO}(2)$.

Definición A.33 (Acción efectiva). [Kobayashi and Nomizu, 1963] Se dice que una acción de grupo $G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ es *efectiva* si no hay elemento en el grupo, además de la identidad, que deje fijo cualquier punto $m \in \mathcal{M}$, i.e. $\bigcap_{m \in \mathcal{M}} J_m = \{1\}$, donde J_m es el grupo de isotropía en m .

Definición A.34 (Acción transitiva). [Kobayashi and Nomizu, 1969] Una acción de grupo $G \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ se llama *transitiva*, o se dice que el grupo actúa transitivamente sobre \mathcal{M} , si dados dos puntos m y m' cualesquiera en \mathcal{M} , siempre existe un elemento $g \in G$ tal que $m' = g \cdot m$.

Observación A.35. Una acción transitiva implica que solamente hay una órbita, \mathcal{M} es isomorfa al espacio cociente G/J donde J es el grupo de isotropía J_m . La elección de $m \in \mathcal{M}$ no afecta el isomorfismo pues todos los grupos de isotropía están sujetos a conjugación (Observación A.30).

Definición A.36 (Espacio homogéneo). [Kobayashi and Nomizu, 1969] Una variedad diferenciable \mathcal{M} es *homogénea* si un grupo de Lie G actúa transitivamente en \mathcal{M} . Y por la Observación A.35 se tiene que $\mathcal{M} \approx G/J$.

Definición A.37 (Espacio reductivo). [Borel, 1969] Un espacio homogéneo $\mathcal{M} = G/J$ es *reductivo* si el álgebra de Lie \mathfrak{g} de G se puede descomponer en una suma directa del álgebra de Lie \mathfrak{j} de J y un espacio \mathfrak{n} ad_J -invariante, i.e.

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &= \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{n}, \quad \mathfrak{j} \cap \mathfrak{n} = 0; \\ \text{ad}_J(\mathfrak{n}) &\leq \mathfrak{n}\end{aligned}$$

la segunda condición implica que $[\mathfrak{j}, \mathfrak{n}] \leq \mathfrak{n}$. De manera inversa, si J es conexo, entonces ésta última relación implica la segunda condición.

Observación A.38. Si \mathfrak{g} tiene un producto interno ad_J -invariante, entonces el complemento ortogonal $\mathfrak{n} := \mathfrak{j}_\perp$ satisface las propiedades de la Definición A.37.

Observación A.39. Si G es semi-simple, entonces $\mathfrak{n} = \mathfrak{j}_\perp$ es el complemento ortogonal de \mathfrak{j} respecto a la forma de Cartan-Killing en G .

Apéndice B

Haces Fibrados

Definición B.1 (Haz fibrado). [Baez and Muniain, 1994] Un *haz fibrado* es una estructura (E, π, \mathcal{M}) , donde E y \mathcal{M} son variedades, y $\pi : E \rightarrow \mathcal{M}$ es un mapeo sobreyectivo continuo. Las variedades E y \mathcal{M} son llamadas *espacio total* y *espacio base* respectivamente, mientras que π se le conoce como *mapeo de proyección* o *proyección de haz*.

$$E \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}.$$

El nombre haz fibrado viene de que el espacio total E es la unión de variedades F_m ,

$$E = \bigcup_{m \in \mathcal{M}} F_m,$$

donde a F_m se le conoce como la fibra de m y es el espacio $F_m = \{p \in E \mid \pi(p) = m, m \in \mathcal{M}\}$.

Un haz fibrado requiere que el mapa de proyección π para cada punto $m \in \mathcal{M}$ tenga una vecindad abierta U tal que exista un homeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$, es decir, π debe coincidir con la proyección sobre el primer factor al espacio base, i.e. $\text{proj}_1 \circ \varphi = \pi$. Esto es que el siguiente diagrama conmute,

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) \subset E & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ \downarrow \pi & \swarrow \text{proj}_1 & \\ U \subset \mathcal{M} & & \end{array}$$

Los homeomorfismos φ que “conmutan con la proyección” son llamados *trivilización local* del haz fibrado. En otras palabras E se ve como el producto cartesiano $\mathcal{M} \times F$ al menos localmente. Y se dice que el mapa de proyección π es *localmente trivial*.

Definición B.2 (Carta, Atlas). [Baez and Muniain, 1994] Al par (U, φ) se le llama *carta de la fibra* y es una trivilización local. El conjunto de todas ellas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ se le conoce como *atlas del haz fibrado*.

Definición B.3 (Haz trivial). [Baez and Muniain, 1994] Sea $E = \mathcal{M} \times F$, con fibra F y mapeo de proyección sobre el primer factor, i.e. $\pi = \text{proj}_1$, entonces el haz $(\mathcal{M} \times F, \text{proj}_1, \mathcal{M})$ es llamado *haz trivial*.

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{M} \times F &\rightarrow \mathcal{M}, \\ (m, p) &\mapsto m. \end{aligned}$$

Definición B.4 (Restricción). [Baez and Muniain, 1994] Dada la subvariedad $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$, la *restricción* a \mathcal{N} tiene como espacio total a $E|_{\mathcal{N}} = \{p \in E \mid \pi(p) \in \mathcal{N}\}$, a \mathcal{N} como espacio base y el mapeo de proyección π restringido a $E|_{\mathcal{N}}$.

Definición B.5 (Subhaz fibrado). [Baez and Muniain, 1994] Un haz (E', π', \mathcal{M}') es un *subhaz* de (E, π, \mathcal{M}) siempre que E' sea un subespacio de E , \mathcal{M}' sea subespacio de \mathcal{M} , y $\pi' = \pi|_{E'}$ tal que,

$$E' \xrightarrow{\pi'} \mathcal{M}'.$$

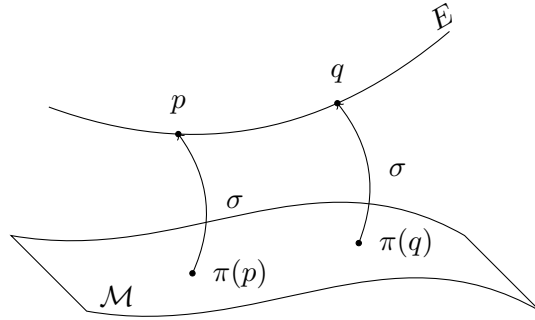
Ejemplo 4. El *haz tangente* de una variedad diferenciable \mathcal{M} , es aquel cuyo espacio total es la unión de los espacios tangentes a cada uno de sus puntos, i.e. $E = \bigcup_{m \in \mathcal{M}} T_m \mathcal{M} := T\mathcal{M}$. La proyección $\pi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ mapea a cada vector tangente $v \in T_m \mathcal{M}$ a $m \in \mathcal{M}$. La fibra en cada $m \in \mathcal{M}$ es el espacio tangente $T_m \mathcal{M}$.

Definición B.6 (Haz Vectorial). [Baez and Muniain, 1994] Un *haz vectorial*, n -dimensional, es un haz (E, π, \mathcal{M}) cuya fibra $\pi^{-1}(m)$ con $m \in \mathcal{M}$ tiene estructura de un espacio vectorial (n -dimensional). Además, en cada punto $m \in \mathcal{M}$ se requiere que exista una vecindad abierta U_m y una trivialización $\varphi : E|_{U_m} \rightarrow U_m \times \mathbb{R}^n$ que mande cada fibra $\pi^{-1}(m)$ a la fibra $\{m\} \times \mathbb{R}^n$ linealmente. Esto es equivalente a pedir que la trivialización sea lineal en las fibras.

Definición B.7 (Sección). [Baez and Muniain, 1994] Sea (E, π, \mathcal{M}) un haz. Un mapeo

$$\sigma : \mathcal{M} \rightarrow E,$$

es llamado una *sección* del haz si $\pi \circ \sigma = \text{id}_{\mathcal{M}}$.



Es decir, una sección es un mapeo del espacio base \mathcal{M} al espacio total E tal que $\sigma(m) \in \pi^{-1}(m)$, la fibra sobre m , para cada $m \in \mathcal{M}$.

Definición B.8 (Morfismo). Sean (E, π, \mathcal{M}) y (E', π', \mathcal{M}') dos haces, un *morfismo* es un par de mapeos (u, f) , donde

$$\begin{aligned} u : E &\rightarrow E' \\ f : \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M}', \end{aligned}$$

tal que el siguiente diagrama conmute, i.e. $\pi' \circ u = f \circ \pi$,

$$\begin{array}{ccc}
E & \xrightarrow{u} & E' \\
\downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\
\mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \mathcal{M}'
\end{array}$$

Observación B.9. La condición $\pi' \circ u = f \circ \pi$ también puede ser expresada por la relación $u(\pi^{-1}(m)) \subseteq \pi'^{-1}(f(m))$ para cada $m \in \mathcal{M}$, es decir, la fibra F_m es llevada a la fibra $F_{f(m)}$ por u .

Observación B.10. Debemos notar que $u : E \rightarrow E'$ determina unívocamente a $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$, por lo que a partir de ahora cuando digamos el morfismo de haz u realmente nos referimos al par (u, f) .

Ejemplo 5. Consideremos el mapeo *pushforward* de vectores tangentes $h_* : T_m \mathcal{M} \rightarrow T_{h(m)} \mathcal{M}'$, con $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ un mapeo suave entre variedades. Ahora, $T_m \mathcal{M}$ es la fibra del haz tangente con espacio total $T_m \mathcal{M}$ y espacio base \mathcal{M} , de manera similar para $T_{h(m)} \mathcal{M}'$. Entonces tenemos que

$$h_* : T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}',$$

es un morfismo de haces.

Definición B.11 (Endomorfismo). [Baez and Muniain, 1994] Un *endomorfismo* es un morfismo que va de un haz (E, π, \mathcal{M}) en sí mismo.

Definición B.12 (Isomorfismo). Dos haces (E, π, \mathcal{M}) y (E', π', \mathcal{M}') son *isomorfos* como haces, es decir, tienen la misma estructura, si existen los morfismos de haz (u, f) y (u^{-1}, f^{-1}) . Esto es,

$$\begin{array}{ccc}
E & \begin{array}{c} \xleftarrow{u} \\ \xrightarrow{u^{-1}} \end{array} & E' \\
\downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\
\mathcal{M} & \begin{array}{c} \xleftarrow{f} \\ \xrightarrow{f^{-1}} \end{array} & \mathcal{M}'
\end{array}$$

Tal (u, f) es llamado *isomorfismo de haz*.

Definición B.13 (Automorfismo). Se dice que u es un *automorfismo* si es un endomorfismo que también es un isomorfismo.

Definición B.14 (Haz Principal). [Kobayashi and Nomizu, 1963] Un haz (P, π, \mathcal{M}) es llamado *haz principal* o *G-haz principal* (G específica el grupo de Lie) si

- P es un G -espacio derecho, es decir, G actúa por la derecha sobre P .
- La acción de G es libre.
- Y si cada fibra $\pi^{-1}(m)$, para todo $m \in \mathcal{M}$, es isomorfa a G .

Al grupo G se le conoce como el grupo de estructura del haz principal (P, π, \mathcal{M}) .

Burdamente hablando, un *haz principal* o *G-haz principal*, es un haz cuya fibra es un grupo de Lie.

Apéndice C

Conexiones y Curvatura en Haces Vectoriales

C.1. Conexiones

Una conexión en un haz fibrado es el modo de definir la noción de transporte paralelo en el haz; esto es, una manera de conectar o identificar fibras sobre puntos cercanos.

Sea $\pi : E \rightarrow \mathcal{M}$ un haz vectorial suave sobre una variedad diferenciable \mathcal{M} . Denotemos el espacio de secciones (suaves) de E por $\Gamma(E)$. Una *conexión* en E es un objeto que asigna un campo vectorial $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ ($\mathcal{X}(\mathcal{M})$ denota el conjunto de campos vectoriales en \mathcal{M}) una función

$$D : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E), \tag{C.1}$$

tal que satisface las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} D_X(\alpha s_1 + s_2) &= \alpha D_X(s_1) + D_X(s_2), \\ D_{X_1+X_2}(s) &= D_{X_1}(s) + D_{X_2}(s), \\ D_X(fs) &= fD_X(s) + X[f]s, \\ D_{fX}(s) &= fD_X(s), \end{aligned}$$

para todo: $s \in \Gamma(E)$, $X \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ y escalar¹ α .

En particular, la tercer propiedad, la regla de Leibniz, es lo que hace a D_X actuar como diferenciación. Dada cualquier sección s y cualquier campo vectorial X , a $D_X(s)$ se le llama *derivada covariante* de s en la dirección de X .

Consideremos un sistema de coordenadas local $\{x^\mu\}$ en un abierto $U \subseteq \mathcal{M}$, con la correspondiente base $\{\partial_\mu\}$ de los campos vectoriales coordinados y una base local de secciones $\{e_I\}$ del haz sobre U . Denotamos la derivada covariante en dirección ∂_μ como $D_{\partial_\mu} = D_\mu$. De esta manera

¹Aquí escalar puede ser real o complejo dependerá si el haz es real o complejo.

$$\begin{aligned}
D_X(s) &= X[s^I]e_I + s^I D_X(e_I) \\
&= x^\mu \partial_\mu [s^I]e_I + s^I D_{x^\mu \partial_\mu}(e_I) \\
&= x^\mu (\partial_\mu (s^I)e_I + s^I D_\mu(e_I)) \\
&= x^\mu (\partial_\mu (s^I)e_I + s^I A_{\mu I}^J(e_J)) \\
&= x^\mu (\partial_\mu (s^I) + A_{\mu J}^I s^J)(e_I) \\
&= x^\mu D_\mu(s^I)e_I,
\end{aligned} \tag{C.2}$$

donde $D_X(s)$ queda totalmente definido por $A_{\mu J}^I$. Pues para cuales quiera μ y I , se puede expresar $D_\mu(e_I)$ de manera única como una combinación lineal de secciones e_J , con funciones $A_{\mu J}^I$ en U como coeficientes,

$$D_\mu(e_I) = A_{\mu I}^J e_J. \tag{C.3}$$

Además, en (C.2) definimos $D_\mu(s^I) := \partial_\mu(s^I) + A_{\mu J}^I s^J$ que es la componente I de la derivada covariante de s en la base $\{e_J\}$.

Nótese que el potencial vectorial $A_{\mu I}^J$ no es solamente una función etiquetada por los índices μ, I, J sino que es una sección. Al calcular $D_X(s)$ se obtiene el término

$$A_{\mu J}^I x^\mu s^J e_I$$

el cual es una nueva sección de E sobre U . Si se multiplica x^μ o s^J por una función $f \in C^\infty(U)$, se tendrá que toda la expresión anterior estará multiplicada por f ya que no aparecen derivadas; por lo que la expresión es $C^\infty(U)$ -lineal. Así que, el verdadero sentido del potencial vectorial $A_{\mu J}^I$ es operar sobre un campo vectorial y una sección de E sobre U y dar como resultado una nueva sección de E sobre U en una manera $C^\infty(U)$ -lineal.

Ahora bien, se puede pensar al potencial vectorial como una 1-*forma* valuada en el haz de endomorfismos $E \otimes E^* = \text{End}(E)$ sobre U , es decir, como una sección del haz

$$\text{End}(E|_U) \otimes T^*U.$$

La razón es que si definimos el potencial vectorial A de la siguiente forma

$$A = A_{\mu J}^I (e_I \otimes e^J \otimes dx^\mu), \tag{C.4}$$

la parte de la 1-*forma* al actuar sobre cualquier campo vectorial X en U

$$A(X) = A_{\mu J}^I e_I \otimes e^J \otimes dx^\mu(X) = A_{\mu J}^I x^\mu (e_I \otimes e^J)$$

da como resultado una sección de $\text{End}(E)$ sobre U . Si ahora actúa sobre una sección s de E , se tiene

$$A(X)s = A_{\mu J}^I x^\mu (e_I \otimes e^J)s = A_{\mu J}^I x^\mu s^J e_I$$

que es una sección de E sobre U con componentes $s'^I = A_{\mu J}^I x^\mu s^J e_I$.

Cuando el haz vectorial E tiene una más estructura, las conexiones que son compatibles con esta estructura son con las que se desea trabajar. Por ejemplo, en los G -haces, donde G es el grupo de norma de la teoría; aquí las conexiones más importantes son aquellas donde su potencial vectorial se vea localmente como una 1-*forma* valuada en el álgebra de Lie de G .

Sea $\pi : P \rightarrow \mathcal{M}$ un G -haz principal suave sobre una variedad diferenciable \mathcal{M} . Entonces, una G -conexión principal sobre P es una 1-forma diferencial en P con valores en el álgebra de Lie de G la cual es G -equivariante y reproduce los generadores del álgebra de Lie de los campos vectoriales fundamentales en P .

Decimos que D es una G -conexión, si en coordenadas locales las componentes $A_\mu \in \text{End}(E)$ están en el álgebra de Lie de G . Aunque esta definición parece depender de las coordenadas locales $\{x^\mu\}$ usadas para definir las componentes de $\text{End}(E)$, en realidad no: si se hace un cambio de coordenadas $\{x'^\nu\}$, se obtienen nuevas componentes A'_ν dadas por

$$A'_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A_\mu,$$

las cuales viven en el álgebra de Lie de G si A_μ lo hace.

C.2. Curvatura

Consideremos un haz vectorial E sobre \mathcal{M} con una conexión D . Sean $X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$, entonces definimos la *curvatura* $F(X, Y)$ como el operador sobre secciones de E tal que

$$F(X, Y)s = [D_X, D_Y]s - D_{[X, Y]}s. \quad (\text{C.5})$$

El primer término mide la falla de las derivadas covariantes de conmutar, mientras que el segundo es una corrección. Esta corrección es para cuando se tenga una conexión plana, la curvatura sea idénticamente cero. Por ejemplo, en el caso de la conexión plana estándar en un haz trivial con fibra V , donde una sección es sólo una función $f : \mathcal{M} \rightarrow V$, se tiene

$$F(X, Y)s = XYf - YXf - [X, Y]f = 0. \quad (\text{C.6})$$

Así, cuando una conexión tenga curvatura nula, i.e. $F(X, Y)s = 0$, para todos los campos vectoriales X y Y y todas las secciones s , se dirá que es *plana*.

Una de las propiedades de $F(X, Y)$ es que es antisimétrica,

$$F(X, Y) = -F(Y, X).$$

Además, debido a las propiedades de D y que el paréntesis de Lie de campos vectoriales satisface

$$[X, fY] = f[X, Y] + X[f]Y,$$

para todas las funciones f . Entonces, la curvatura es lineal sobre $C^\infty(\mathcal{M})$ en cada uno de los argumentos, esto es

$$F(fX, Y)s = F(X, fY)s = F(X, Y)fs = fF(X, Y)s.$$

Y por la definición de D , $F(X, Y)$ también define un mapeo $C^\infty(\mathcal{M})$ -lineal $\Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$. De modo que $F(X, Y)$ corresponde a una sección de $\text{End}(E)$.

En coordenadas locales $\{x^\mu\}$ para un abierto $U \subseteq \mathcal{M}$ las componentes de la curvatura son

$$F_{\mu\nu} = F(\partial_\mu, \partial_\nu). \quad (\text{C.7})$$

Notémos, como $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$ entonces

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]. \quad (\text{C.8})$$

De esta manera, se puede escribir la curvatura para cuales quiera campos vectoriales $X, Y \in U$ como

$$F(X, Y) = x^\mu x^\nu F_{\mu\nu}. \quad (\text{C.9})$$

Si también consideramos sobre una base local $\{e_I\}$ de secciones para E sobre U , entonces tenemos definidas las componentes del potencial vectorial en esa base, i.e. $A_{\mu J}^I$. Por lo tanto, la acción de $F_{\mu\nu}$ sobre e_I es

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}e_I &= [D_\mu, D_\nu]e_I \\ &= D_\mu(D_\nu e_I) - D_\nu(D_\mu e_I) \\ &= D_\mu(A_{\nu I}^J e_J) - D_\nu(A_{\mu I}^J e_J) \\ &= (\partial_\mu A_{\nu I}^J) e_J + A_{\mu J}^K A_{\nu I}^J e_K - (\partial_\nu A_{\mu I}^J) e_J - A_{\nu J}^K A_{\mu I}^J e_K \end{aligned}$$

Renombrando índices,

$$F_{\mu\nu}e_I = (\partial_\mu A_{\nu I}^J - \partial_\nu A_{\mu I}^J + A_{\mu K}^J A_{\nu I}^K - A_{\nu K}^J A_{\mu I}^K) e_J \quad (\text{C.10})$$

Ahora, como se ha mencionado $F(X, Y)$ es una sección en $\text{End}(E)$, así que $F_{\mu\nu}$ corresponde a una sección en $\text{End}(E)$. Y dado que $e_J \otimes e^I$ forman una base local para las secciones de $\text{End}(E)$, entonces se puede escribir

$$F_{\mu\nu} = F_{I\mu\nu}^J e_J \otimes e^I, \quad (\text{C.11})$$

donde $F_{I\mu\nu}^J$ son las componentes de la sección en la base considerada. Dichas componentes son las componentes de la curvatura. Claramente,

$$F_{\mu\nu}e_I = F_{I\mu\nu}^J e_J. \quad (\text{C.12})$$

Entonces de (C.10) y esta última ecuación, (C.12), se obtiene que las componentes de la curvatura son

$$F_{I\mu\nu}^J = \partial_\mu A_{\nu I}^J - \partial_\nu A_{\mu I}^J + A_{\mu K}^J A_{\nu I}^K - A_{\nu K}^J A_{\mu I}^K. \quad (\text{C.13})$$

Para abundar más en el tema ver la referencia: [Baez and Muniain, 1994] en la cual está basado este apéndice.

Apéndice D

Campo de Marcos

Consideremos una variedad diferenciable \mathcal{M} n -dimensional y orientada. Requerimos que \mathcal{M} sea paracompacta, conectada y abierta. El requisito de que la variedad sea paracompacta asegura que siempre admita una métrica con signatura Lorentziana, mientras que los otros son por consideraciones físicas.

Como \mathcal{M} es difeomorfa a \mathbb{R}^n y el haz tangente de \mathbb{R}^n es trivial, entonces el haz $T\mathcal{M}$ también lo es. Una trivialización es un isomorfismo de haces, por lo tanto una trivialización de $T\mathcal{M}$ es un isomorfismo

$$e : \mathcal{M} \times \mathbb{R}^n \rightarrow T\mathcal{M} \quad (\text{D.1})$$

tal que a cada fibra $\{p\} \times \mathbb{R}^n$ del haz trivial $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^n$ la manda al espacio tangente $T_p\mathcal{M}$ correspondiente, con $p \in \mathcal{M}$. El inverso de e es:

$$e^{-1} : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathbb{R}^n. \quad (\text{D.2})$$

A la trivialización e (D.1) de $T\mathcal{M}$ se le conoce como *campo de marcos*. Si \mathcal{M} es tridimensional o cuatro-dimensional, entonces e se llama *triada* o *tétrada* sobre \mathcal{M} respectivamente.

Supongamos que estamos en el caso Lorentziano. Una sección de $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^n$ es una función \mathbb{R}^n -valuada sobre \mathcal{M} , por lo que la base natural de secciones es

$$\begin{aligned} \xi_0(p) &= (1, 0, \dots, 0), \\ \xi_1(p) &= (0, 1, \dots, 0), \\ &\vdots \\ \xi_{n-1}(p) &= (0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

De este modo, cualquier sección $s \in \Gamma(\mathcal{M} \times \mathbb{R}^n)$ se puede escribir como $s^I \xi_I$. A \mathbb{R}^n , que es la fibra del haz, le llamaremos *espacio interno*. Así, las letras mayúsculas latínas, I, J, \dots , denotan *índices internos* asociados a la base de secciones ξ_I . Y, usaremos letras griegas, μ, ν, \dots , para denotar los índices espacio-temporales de M asociados a una base coordenada ∂_μ dada por una carta en \mathcal{M} .

El campo de marcos $e : \mathcal{M} \times \mathbb{R}^n \rightarrow T\mathcal{M}$, definen un mapeo de secciones del espacio total $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^n$ a campos vectoriales en \mathcal{M} , que denotaremos también con e ,

$$e : \Gamma(\mathcal{M} \times \mathbb{R}^4) \rightarrow \Gamma(T\mathcal{M}). \quad (\text{D.3})$$

Aplicando este mapeo a las secciones ξ_I , obtenemos una base de campos vectoriales $\{e(\xi_I)\}$ sobre \mathcal{M} , y en una carta podemos escribir esto como

$$e(\xi_I) = e_I^\mu \partial_\mu, \quad (\text{D.4})$$

¹Para el caso de las triadas el espacio interno es \mathbb{R}^3 y para tetradas \mathbb{R}^4 .

donde las componentes e_I^μ son componentes sobre \mathcal{M} . Es usual denotar $e(\xi_I)$ como e_I , y dado que los campos vectoriales e_I o las componentes e_I^μ son suficientes para determinar el campo de marcos es común llamar a cualquiera de ellos campo de marcos.

Ahora bien, en el espacio total $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^n$ hay un producto interno canónico bien definido. En otras palabras, dadas dos secciones $s, s' \in \Gamma(\mathcal{M} \times \mathbb{R}^n)$, su producto interno es

$$\eta(s, s') = \eta_{IJ} s^I s'^J. \quad (\text{D.5})$$

η es la métrica del espacio interno \mathbb{R}^n así que se le llama *métrica interna* y

$$\eta_{IJ} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

se saca de la métrica de Minkowski.

Usando η_{IJ} o su inversa η^{IJ} , podemos subir o bajar índices internos, de esta manera mapeamos elementos del espacio interno \mathbb{R}^n al espacio interno dual, o vice versa.

Supongamos que \mathcal{M} tiene una métrica (lorentziana) g , entonces el producto interno de campos vectoriales sobre \mathcal{M} es $g(v, v') = g_{\mu\nu} v^\mu v'^\nu$. Con lo que si el producto interno de los campos vectoriales

$$g(e_I, e_J) = \eta_{IJ}, \quad (\text{D.6})$$

es decir, $\{e_I\}$ es ortonormal, decimos que el campo de marcos es ortonormal.

Si el campo de marcos es ortonormal, la métrica g en \mathcal{M} está bien relacionada a la métrica interna η :

$$\begin{aligned} g(e(s), e(s')) &= g(e(s^I \xi_I), e(s^J \xi_J)) = s^I s^J g(e_I, e_J) \\ &= \eta_{IJ} s^I s^J = \eta(s^I \xi_I, s^J \xi_J) \\ &= \eta(s, s') \\ \therefore g(e(s), e(s')) &= \eta(s, s'). \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Para cualesquiera secciones s, s' de $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^n$. Este resultado implica que la métrica en \mathcal{M} está dada en términos del campo de marcos inverso,

$$g(v, v') = \eta(e^{-1}(v), e^{-1}(v')). \quad (\text{D.8})$$

Ahora, por (D.6) y (D.4) tenemos que

$$\eta_{IJ} = g_{\mu\nu} e_I^\mu e_J^\nu, \quad (\text{D.9})$$

entonces

$$\delta_J^I = e_I^\alpha e_J^\alpha. \quad (\text{D.10})$$

A e_I^α se le denomina *co-campo de marcos*².

Dada una sección $s \in \Gamma(\mathcal{M} \times \mathbb{R}^n)$ tenemos que $e(s) = v$ donde $v \in \Gamma(T\mathcal{M})$, entonces $v^\alpha \partial_\alpha = s^I e_I^\alpha \partial_\alpha$

$$\implies v^\alpha = s^I e_I^\alpha. \quad (\text{D.11})$$

² *Cotriada* si la dimensión es tres o *cotétrada* si es cuatro-dimensional.

Y si ahora contraemos esta igualdad (D.11) con e_α^J obtenemos que

$$s^J = e_\alpha^J v^\alpha. \quad (\text{D.12})$$

Por otro lado, como $e^{-1}(v) = s$ entonces $s^I \xi_I = e_\alpha^I v^\alpha \xi_I = v^\alpha e^{-1}(\partial_\alpha)$

$$\implies e^{-1}(\partial_\alpha) = e_\alpha^I \xi_I. \quad (\text{D.13})$$

Utilizando estas últimas relaciones, (D.11) y (D.13), podemos demostrar que las componentes de la métrica g se expresan como:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{IJ} e_\mu^I e_\nu^J. \quad (\text{D.14})$$

Relación de la cual se sigue

$$\delta_\beta^\alpha = e_I^\alpha e_\beta^J. \quad (\text{D.15})$$

Bibliografía

- [Ashtekar, 1986] Ashtekar, A. (1986). New variables for classical and quantum gravity. *Physical Review Letters*, 57(18):2244–2247.
- [Ashtekar, 1987] Ashtekar, A. (1987). New hamiltonian formulation of general relativity. *Physical Review D*, 36(6):1587–1602.
- [Baez and Muniain, 1994] Baez, J. C. and Muniain, J. P. (1994). *Gauge Fields, Knots and Gravity (Series on Knots and Everything)*. Series on Knots and Everything. World Scientific Publishing Company.
- [Barbero, 1995] Barbero, J. (1995). Real ashtekar variables for lorentzian signature space-times. *Physical Review*, D51(10):5507–5510.
- [Bojowald, 2000] Bojowald, M. (2000). Loop quantum cosmology: I. kinematics. *Classical and Quantum Gravity*, 17(6):1489.
- [Bojowald, 2002] Bojowald, M. (2002). Isotropic loop quantum cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 19.
- [Bojowald, 2005] Bojowald, M. (2005). Loop quantum cosmology. *Living Reviews in Relativity*, 8(1):11.
- [Borel, 1969] Borel, A. (1969). *Linear Algebraic Groups*. Graduate texts in mathematics; 126. Springer.
- [Brodbeck, 1996] Brodbeck, O. (1996). On symmetric gauge fields for arbitrary gauge and symmetry groups. *Helvetica Physica Acta*, 69:321–324.
- [Einstein, 1915] Einstein, A. (1915). Die feldgleichungen der gravitation. *Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften*, pages 844–847.
- [Immirzi, 1997] Immirzi, G. (1997). Quantum gravity and regge calculus. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 57(65).
- [Kobayashi and Nomizu, 1963] Kobayashi, S. and Nomizu, K. (1963). *Foundations of Differential Geometry Vol. I*. Interscience Publishers a division of John Wiley & Sons, New York - London.
- [Kobayashi and Nomizu, 1969] Kobayashi, S. and Nomizu, K. (1969). *Foundations of Differential Geometry Vol. II*. Interscience Publishers a division of John Wiley & Sons, New York - London.
- [Poisson, 2002] Poisson, E. (2002). *An advanced course in general relativity*. Department of Physics University of Guelph, draft edition.
- [Rovelli and Thiemann, 1998] Rovelli, C. and Thiemann, T. (1998). Immirzi parameter in quantum general relativity. *Physics Review*, D57:1009.

- [Sen, 1982a] Sen, A. (1982a). Gravity as spin system. *Physics Letters*, 119B(16):89–91.
- [Sen, 1982b] Sen, A. (1982b). Quantum theory of spin 3/2-field in einstein spaces. *Int J Theor Phys*, 21(1).
- [tom Dieck, 1987] tom Dieck, T. (1987). *Transformation Groups*. De Gruyter studies in mathematics; 8. Walter de Gruyter, Berlin - New York.
- [Vega, 2011] Vega, J. J. (2011). Relatividad en variables de conexión.
- [Wald, 1984] Wald, R. M. (1984). *General Relativity*. The University of Chicago Press Chicago and London, first edition.
- [Warner, 1983] Warner, F. W. (1983). *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate texts in mathematics; 94. Springer.
- [Yvonne Choquet-Bruhat, 1982] Yvonne Choquet-Bruhat, C. D.-M. (1982). *Analysis, manifolds, and physics, Part I: Basics*. North Holland.