Respuesta de sistema eléctrico de primer orden
Análisis de sistemas de control - MR2002B

Alumno
Ricardo Sierra Roa A01709887

Profesor:
Claudia Alejandra Pérez Pinacho
Christopher Diego Cruz Ancona
Fernando Gómez Salas

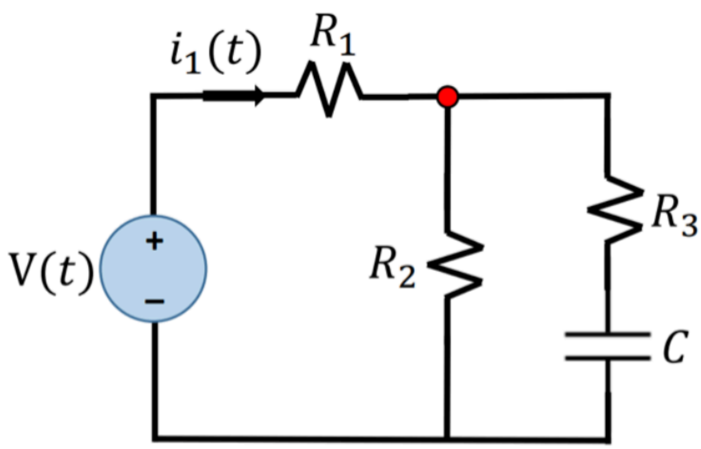
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Queretaro

Fecha de entrega:
20 de agosto de 2024

Índice

Modelo matemático y Función de transferencia

Circuito



Procedimiento

KVL

1) $V(t) = V_{R_1} + V_{R_3} + V_C(t)$

$V_{R_1} + R_3 i_C(t) + V_C(t)$

$R_1 i_{R_1} + R_3 C \frac{d}{dt} V_C(t) + V_C(t)$

KIL

2) $i_{R_1} = i_C + i_{R_2}$

3) $V_{R_2} = V_{R_3} + V_C(t)$

$i_{R_2} = \frac{V_{R_2}}{R_2}$

$\therefore i_{R_2} = \frac{V_{R_3}}{R_2} + \frac{V_C(t)}{R_2}$

$\hookrightarrow \frac{R_3}{R_2} C \frac{d}{dt} V_C(t) + \frac{V_C(t)}{R_2}$

4) $i_{R_1} = i_C + i_{R_2}$

$$i_C = C\frac{d}{dt}V_c(t) \qquad i_{R_2} = \frac{R_3}{R_2}C\frac{d}{dt}V_c(t) + \frac{V_c(t)}{R_2}$$

$$i_{R_1} = C\frac{d}{dt}V_c(t) + \frac{R_3}{R_2}C\frac{d}{dt}V_c(t) + \frac{V_c(t)}{R_2}$$

5) Sustituimos (E.C. 4) i_{R_1} en la (E.C. 1)

$$V(t) = R_1\left(C\frac{d}{dt}V_c(t) + \frac{R_3}{R_2}C\frac{d}{dt}V_c(t) + \frac{V_c(t)}{R_2}\right) + R_3 C\frac{d}{dt}V_c(t) + V_c(t)$$

6) Aplicar Laplace en $V(t)$ (E.C. 5)

$$V(t) = R_1\left(C\frac{d}{dt}V_c(t) + \frac{R_3}{R_2}C\frac{d}{dt}V_c(t) + \frac{V_c(t)}{R_2}\right) + R_3 C\frac{d}{dt}V_c(t) + V_c(t)$$

$$\mathcal{L}\{V(t)\} = R_1 C\,\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}V_c(t)\right\} + \frac{R_1R_3C}{R_2}\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}V_c(t)\right\} + \frac{R_1}{R_2}\mathcal{L}\{V_c(t)\} + R_3C\,\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}V_c(t)\right\} + \mathcal{L}\{V_c(t)\}$$

$$V(s) = R_1Cs\,V_c(s) + \frac{R_1R_3C}{R_2}s\,V_c(s) + \frac{R_1}{R_2}V_c(s) + R_3Cs\,V_c(s) + V_c(s)$$

$$V(s) = V_c(s)\left(R_1Cs + \frac{R_1R_3C}{R_2}s + \frac{R_1}{R_2} + R_3Cs + 1\right)$$

$$\boxed{\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1}{\left(R_1Cs + \frac{R_1R_3C}{R_2}s + \frac{R_1}{R_2} + R_3Cs + 1\right)}}$$

7) Simplificar $\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1}{(R_1Cs + \frac{R_1R_3C}{R_2}s + \frac{R_1}{R_2} + R_3Cs + 1)}$

$$R_1Cs + \frac{R_1R_3C}{R_2}s + \frac{R_1}{R_2} + R_3Cs + 1$$

$$\frac{R_2R_1Cs}{R_2} + \frac{R_1R_3Cs}{R_2} + \frac{R_2R_3Cs}{R_2} + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_2}$$

$$\left(\frac{R_2R_1C + R_1R_3C + R_2R_3C}{R_2}\right)s + \frac{R1 + R_2}{R_2}$$

$$\left[\left(\frac{R_2R_1C + R_1R_3C + R_2R_3C}{R_2}\right)s + \frac{R1 + R_2}{R_2}\right] \div \left[\frac{R1 + R_2}{R_2}\right]$$

$$\frac{(R_2R_1C + R_1R_3C + R_2R_3C)}{(R_1 + R_2)}s + 1$$

$$\boxed{\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{\frac{R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{(R_2R_1C + R_1R_3C + R_2R_3C)}{(R_1 + R_2)}s + 1}}$$

Resultados

- **Modelo matemático**

$$V(t) = R_1\left(C\frac{d}{dt}V_c(t) + \frac{R_3}{R_2}C\frac{d}{dt}V_c(t) + \frac{V_c(t)}{R_2}\right) + R_3C\frac{d}{dt}V_c(t) + V_c(t)$$

- **Función de transferencia**

$$\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{\frac{R_2}{R_1+R_2}}{\left(\frac{R_2R_1C+R_1R_3C+R_2R_3C}{R_1+R_2}\right)s+1}$$

Sistema con constantes

Si $R_1 = R_2 = R_3 = 100k\ \Omega$ y $C = 0.22\mu F$, indique el valor de la constante de tiempo (τ), la ganancia del sistema (k) y el polo del sistema (verifique si el sistema es estable).

Procedimiento

$$R_1 = R_2 = R_3 = 100\ K\Omega = 100\times10^{3}\ \Omega$$

$$C = 0.22\ \mu F = 2.2\times10^{-7}\ F$$

$$\frac{100\times10^{3}}{100\times10^{3}+100\times10^{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{\frac{R_2}{R_1+R_2}}{\frac{(R_2R_1C+R_1R_3C+R_2R_3C)}{(R_1+R_2)}s+1}$$

$$\frac{(100\times10^{3}\cdot100\times10^{3}\cdot2.2\times10^{-7})(100\times10^{3}\cdot100\times10^{3}\cdot2.2\times10^{-7})(100\times10^{3}\cdot100\times10^{3}\cdot2.2\times10^{-7})}{(100\times10^{3}+100\times10^{3})} = 0.033$$

$$\frac{33}{1000}s+1 \longrightarrow s = -\frac{1}{0.033} = -30.\frac{10}{33}$$

$$\boxed{\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{33}{1000}s+1}}$$

$$\tau = \frac{33}{1000}$$

$$K = \frac{1}{2}$$

Polo $s = -33\frac{10}{33} = -\frac{1000}{33}$ estable

Resultados

- Constante de tiempo $\tau = \frac{33}{1000} = 0.033$
- Ganancia del sistema $k = \frac{1}{2}$
- Polo del sistema $s = -33\frac{10}{33} = -\frac{1000}{33}$ (estable)

Amplitud de 6 [V]

Función

$$G(s) = \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{33}{1000})s+1}, \; u(t) = 6$$

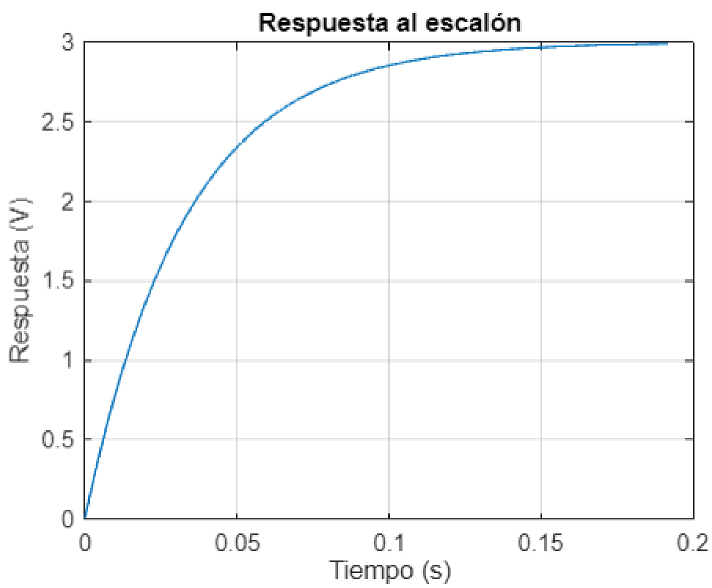
Matlab

- **Código**

```
num = [6*(1/2)];

den = [(33/1000) 1];

sys = tf(num, den)


[y, t] = step(sys);

plot(t, y);

xlabel('Tiempo (s)');

ylabel('Respuesta (V)');

title('Respuesta al escalón');

grid on;


disp('Tiempo (s)    Respuesta (V)');

disp([t y]);
```

- **Gráfica y resultado**

```
sys =

       3
  -----------
  0.033 s + 1

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

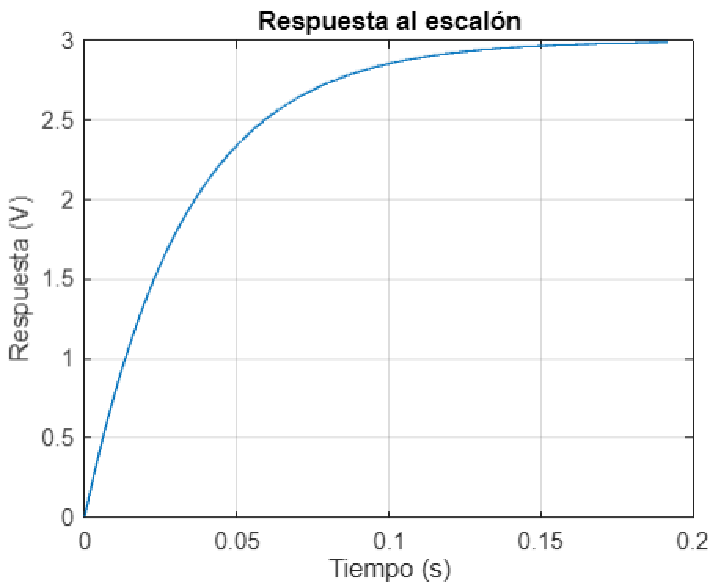


Tiempo (s)	Respuesta (V)
0.1656	2.9802
0.1672	2.9811
0.1687	2.9819
0.1702	2.9827
0.1717	2.9835
0.1732	2.9843
0.1748	2.9850
0.1763	2.9856
0.1778	2.9863
0.1793	2.9869
0.1808	2.9875
0.1824	2.9881
0.1839	2.9886
0.1854	2.9891
0.1869	2.9896
0.1884	2.9901
0.1900	2.9905
0.1915	2.9909

Indique de la gráfica, ¿cuál es el valor final en el voltaje del capacitor?

$$G(s) = \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{33}{1000})s+1}, \; u(t) = 6$$

$$\lim_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0} G(s) = \frac{6*(\frac{1}{2})}{(\frac{33}{1000})(0)+1} = 3$$



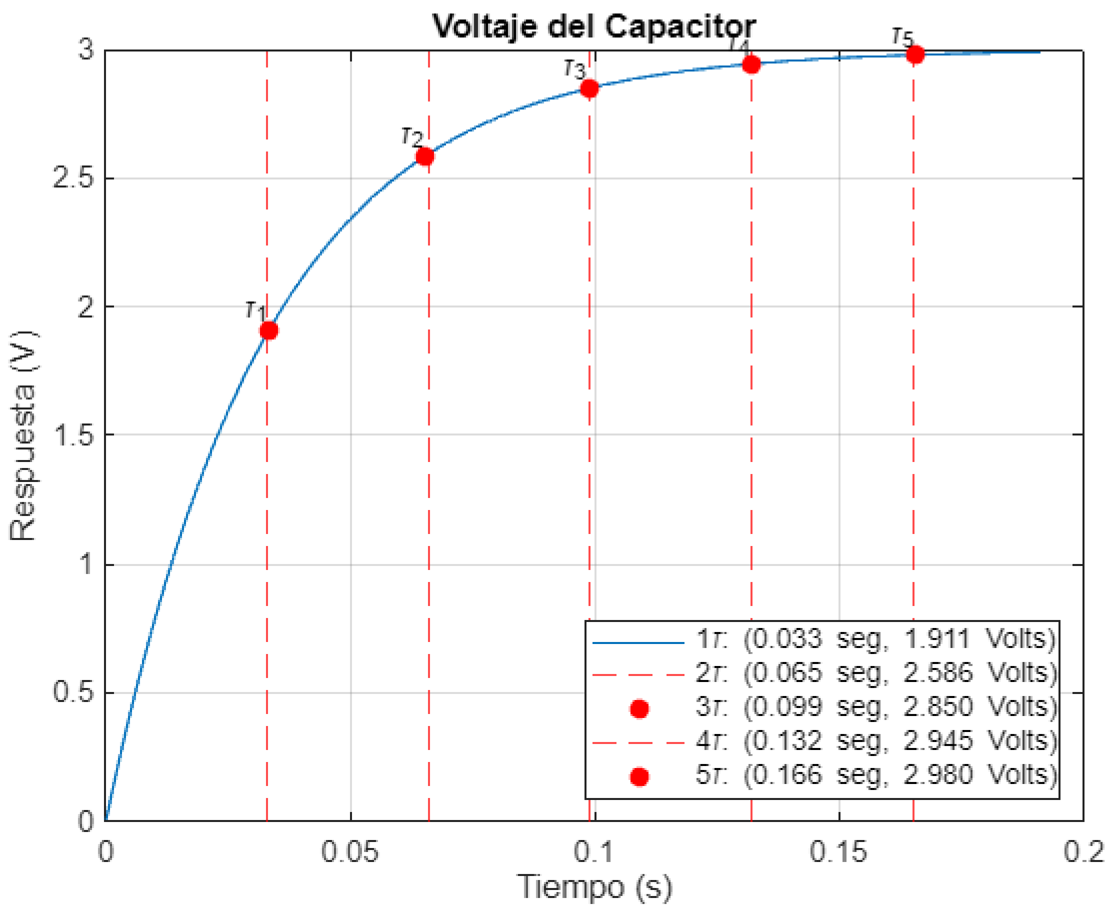
Valores del voltaje del capacitor

Código

```
num = [6 * 1/2];
tau = 33 / 1000;
den = [tau 1];

sys = tf(num, den);

[y, t] = step(sys);

plot(t, y);
hold on;

legend_labels = {};

for i = 1:5
   tau_value = i * tau;
   xline(tau_value, '--r');

   [~, idx] = min(abs(t - tau_value));
   plot(t(idx), y(idx), 'ro', 'MarkerFaceColor', 'r');

   legend_labels{end+1} = sprintf('%d\\tau: (%0.3f seg, %0.3f
Volts)', i, t(idx), y(idx));

   text(t(idx), y(idx), sprintf('\\tau_%d', i), 'VerticalAlignment',
'bottom', 'HorizontalAlignment', 'right');
end
```

```
legend(legend_labels, 'Location', 'southeast');
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Respuesta (V)');
title('Voltaje del Capacitor');
grid on;
hold off;
```

Gráfica



Conclusiones

El sistema eléctrico de primer orden, representado por un circuito RC, demostró un comportamiento estable, alcanzando un valor final de 3V en la respuesta al escalón, lo cual es coherente con la ganancia del sistema $k = \frac{1}{2}$ y una entrada de 6V. Además, se observó que la constante de tiempo τ, conforme aumenta su valor se acerca al valor final de 3V, tal y como se evidencia en la gráfica anterior, donde podemos observar los distintos valores de voltaje de salida, dependiendo del valor de τ que tengamos.