Actividad de aprendizaje

Análisis de la respuesta transitoria: sistemas de primer y segundo orden

Equipo #_________

Nombres:______________________________ Fecha: 23 de agosto del 2024

1 Introducción

La función de transferencia de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial lineal e invariante con el tiempo (LTI), se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida (función de la respuesta: $y(t)$) y la transformada de Laplace de la entrada (función de excitación: $u(t)$) bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero. Esto es, la función de transferencia es definida como

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \left.\frac{\mathcal{L}[salida]}{\mathcal{L}[entrada]}\right|_{\text{condiciones iniciales}=0} \\
&= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n}
\end{aligned}
$$

A partir del concepto de función de transferencia, es posible representar la dinámica de un sistema mediante ecuaciones algebraicas en s. Si la potencia más alta de s en el denominador de la función de transferencia es igual a n, el sistema se denomina de sistema de $n-\acute{e}simo$ orden.

Nota: Si la entrada $u(t)$ de un sistema LTI es el impulso unitario $\delta(t)$, entonces $y(t)$ es la respuesta de impulso unitaria. La transformada de Laplace de $u(t)$ es 1 y la transformada de $y(t)$ es $G(s)$, ya que

$$Y(s) = G(s)$$

En palabras, esto es: La función de transferencia $G(s)$ es la transformada de Laplace de la respuesta de impulso unitario $g(t)$. De este modo, si se desea caracterizar un sistema lineal invariante con el tiempo, se aplica un impulso unitario y la respuesta resultante es una descripción de la función de transferencia.

1.1 Sistemas de primer orden

Considere el sistema de primer orden descrito mediante la relación de entrada salida

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\tau s + 1}, \tag{1}$$

en donde $\tau = RC$. Dado que la transformada de Laplace de la función escalón unitario es $1/s$, sustituyendo $U(s) = 1/s$ en la ecuación (1), obtenemos

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{\tau s + 1}\frac{1}{s} \qquad (2) \\
&= \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}.
\end{aligned}
$$

Si tomamos la transformada inversa de Laplace de la ecuación (2). obtenemos

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}, t \geq 0. \tag{3}$$

La ecuación (3) plantea que la salida $y(t)$ es inicialmente cero y al final se vuelve unitaria. Una característica importante de tal curva de respuesta exponencial $y(t)$ es que para $t = \tau$ el valor de $y(t)$ es 0.632, o que la respuesta $y(t)$ alcanzo 63.2% de su cambio total. Esto se aprecia con facilidad sustituyendo $t = \tau$ en $y(t)$. Es decir,

$$y(\tau) = 1 - e^{-1} = 0.632$$

La representación gráfica de la ecuación (3) aparecen en la figura (1).

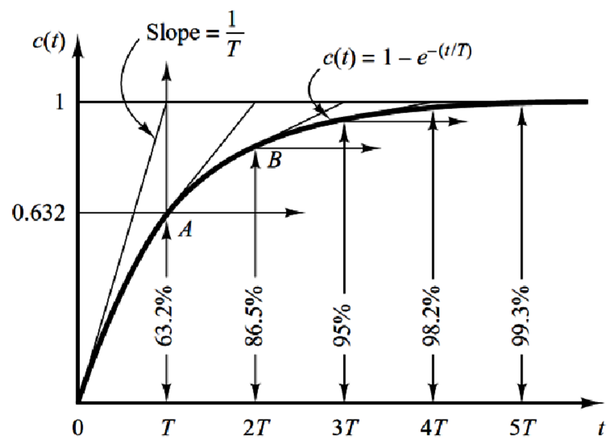

Figure 1: Curva de respuesta exponencial ($T = RC$).

1.2 Sistemas de segundo orden

La representación normal de un sistema de segundo orden en forma de función de transferencia en lazo cerrado viene dada por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{4}$$

donde ζ es el coeficiente de amortiguamiento, ω_n es la frecuencia natural no amortiguada del sistema y K es la ganancia estática del sistema, figura (2). Sin pérdida de generalidad, asuma que $K = 1$.

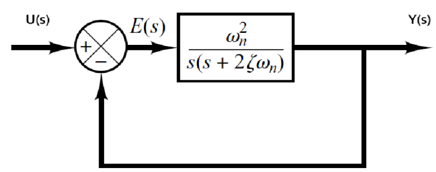

Figure 2: Sistema de segundo orden normalizado con $K = 1$

Del polinomio característico de la ecuación (4) se tiene que las dos raíces son

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{(2\zeta\omega_n)^2 - 4\omega_n^2}}{2} \\ &= -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}. \end{aligned}$$

El comportamiento dinámico del sistema de segundo orden se describe a continuación en términos de los parámetro ζ y ω_n, figura (3):

- Si $0 < \zeta < 1$, los polos en lazo cerrado son complejos conjugados y se encuentran en el semiplano izquierdo de plano complejo. El sistema se denomina subamortiguado y la respuesta transitoria es oscilatoria.
- Si $\zeta = 1$, los polos en lazo cerrado son reales e iguales. El sistema se denomina críticamente amortiguado.
- Si $\zeta > 1$, los polos en lazo cerrado son reales y distintos. El sistema se denomina sobreamortiguado por lo que respuesta transitoria no oscila.

- Si $\zeta = 0$, la respuesta transitoria no se amortigua (oscila). El sistema es criticamente estable y los polos en lazo cerrado se localizan en el eje imaginario $j\omega$.
- Si $\zeta < 0$, el sistema es inestable. Los polos del sistema en lazo cerrado se localizan en el semiplano derecho del plano complejo.

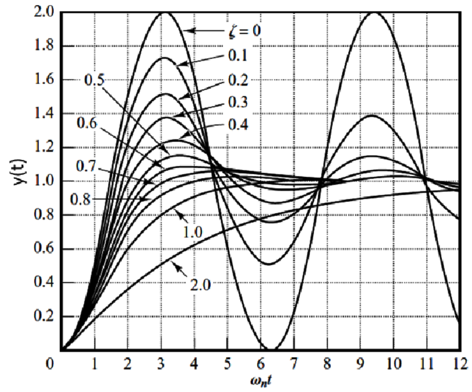

Figure 3: Curvas de respuestas escalón unitario del sistema de la figura (2)

Nota: La respuesta general de un sistema de segundo orden normalizado y subamortiguado ante la entrada de un escalón unitario es representada en la figura (4). Los parámetros característicos de esta respuesta se describen a continuación:

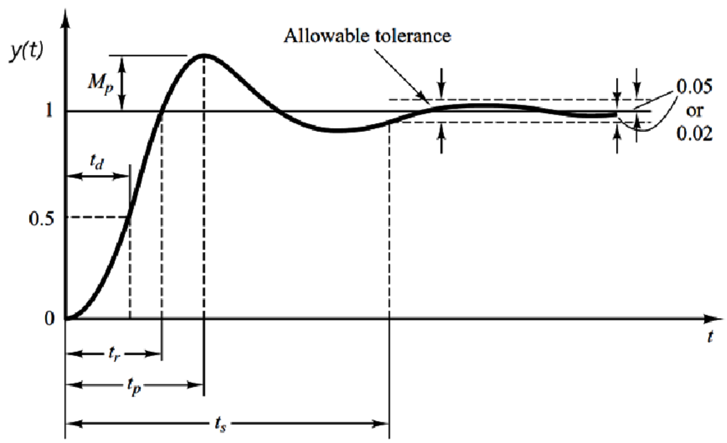

Figure 4: Curva de respuesta escalón unitario en las que se muestran t_d, t_r, t_p, M_p y t_s.

- Tiempo de retardo, t_d: el tiempo de retardo es el tiempo requerido para que la respuesta alcance por primera vez la mitad del valor final.
- Tiempo de levantamiento, t_r :

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

en donde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, $\sigma = \zeta\omega_n$ y $\beta = \tan^{-1}\frac{\omega_d}{\sigma}$ (rad).

- Tiempo pico, t_p :

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

en donde $\pi = 3.1415...$

- Sobrepaso máximo, M_p :

$$M_p = e^{-\left(\frac{\sigma}{\omega_d}\right)\pi}$$

- Tiempo de asentamiento, t_s: para el criterio del 2%, el tiempo de asentamiento es

$$t_s = \frac{4}{\sigma}$$

Para el criterio del 5% :

$$t_s = \frac{3}{\sigma}$$

2 Objetivos

- Analizar la respuesta escalón unitario de los sistemas de primer y segundo orden mediante el uso de MATLAB.
- Verificar mediante el uso del MATLAB el análisis de la respuesta transitoria de los sistemas de primer y segundo orden,
- Aprender a utlizar los comandos básicos en MATLAB para la respuesta transitoria de los sistemas.

2.1 Sistemas de primer orden

Considere el sistema descrito por la ecuación (1) con $\tau = 1$. Esto es

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1}$$

Este sistema se representa como dos arreglos, cada uno de los cuales contiene dos coeficientes de los polinomios en potencias decrecientes de s del modo siguiente

$$\begin{aligned} num &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ den &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

que en notación de MATLAB se introduce como:

```
tao = 1;
num = [0 1];
den = [tao 1];
```

Verifique su respuesta, ingrese en MATLAB el siguiente comando:

```
tf(num,den)
```

Escriba sus comentarios:___________.
La respuesta a un escalón unitario de entrada se obtiene con la función step. Es decir,

```
step(num,den)
```

Analize sus resultados con respecto a la figura (1). Escriba sus comentarios y conclusiones: _____________.

2.2 Sistemas de segundo orden

Considere el sistema de segundo orden descrito por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{25}{s^2 + 6s + 25} \tag{5}$$

que en notación de MATLAB se introduce como

```
num=[25];
den=[1 6 25];
```

Verifique su función de transferencia mediante el comando:

```
tf(num,den)
```

Para este caso, la respuesta a un escalón unitario de entrada se obtiene con la función step, vea la figura (5). Es decir,

```
step(num,den)
```

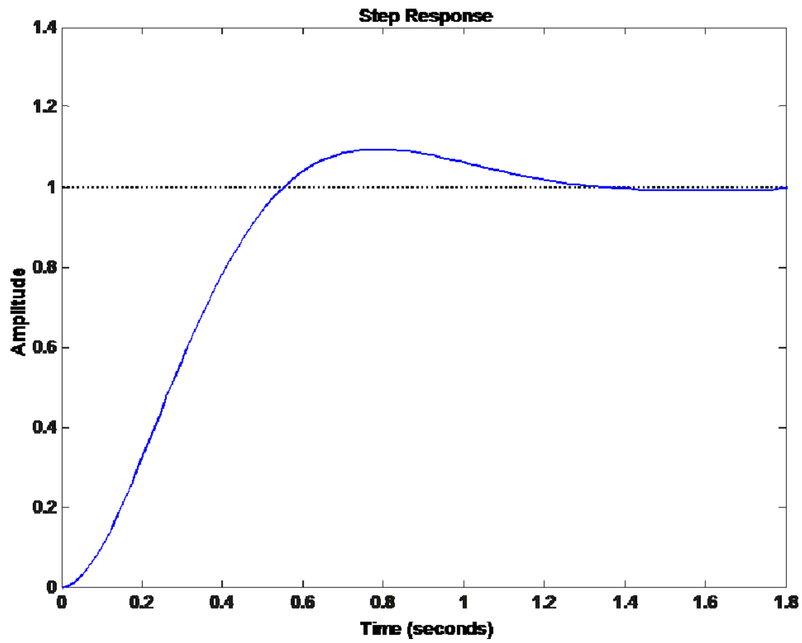

Figure 5: Respuesta a escalón de un sistema de segundo orden subamortiguado

2.2.1 Actividades

a) Determine los parámetros t_d, t_r, t_p, M_p y t_s para el sistema descrito en la ecuación (5). Verifique sus resultados en MATLAB.

b) Usando MATLAB, analizar los casos para cuando $\zeta = 1, \zeta > 1, \zeta = 0$ y $\zeta < 0$ (proponga funciones de transferencias de segundo orden normalizadas). Escriba sus resultados, comentarios y conclusiones.

Remark 1 *Utilice el comando roots para la solución de su práctica. Por ejemplo, considere el polinomio*

$$s^2 + s + 4 = 0,$$

entonces, las raíces son

$$\begin{aligned} s_1 &= -0.5000 + 1.9365i \\ s_2 &= -0.5000 - 1.9365i. \end{aligned}$$

Esto es, utilizando MATLAB se tiene que:

p=[1 1 4];
roots(p)
ans =
-0.5000 + 1.9365i
-0.5000 - 1.9365i

c) Analice el siguiente script en Matlab y escriba sus resultados, comentarios y conclusiones.

```
t = [0:0.2:20]';
wn = 1;
vectzeta = [0.1:0.1:0.9];
num = wn^2;
Y = [];
for i= 1:length(vectzeta)
d = vectzeta(i);
den = [1,2*d*wn,wn^2];
y = step (num,den,t);
Y = [Y, y];
end
plot (t,Y);
title ('Respuesta a un escalon unitario');
xlabel ('tiempo(seg)');
grid;
```

2.3 Bibliografía

Para la realización de esta práctica se utilizó la siguiente bibliografía:

1. Katsuhiko Ogata. (2003). Ingeniería de control moderna. USA: Pearson Educación.
2. Gene F. Franklin, J. David Powell, Abbas Emami-Naeini. (2009). Feedback Control of Dynamic Systems. USA: Prentice Hall.
3. https://www.mathworks.com/help/control/index.html