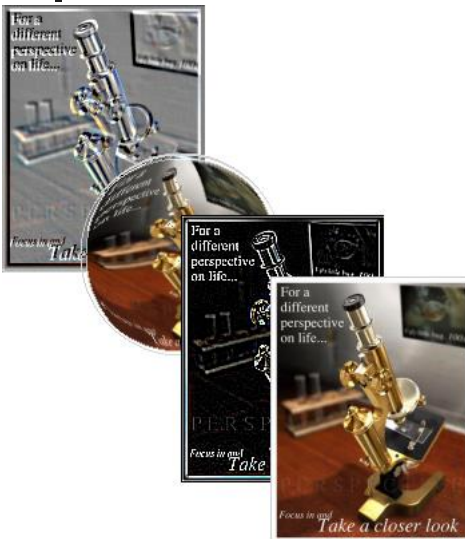


# Morfologia Matemática

Carlos Alexandre Barros de Mello  
CIn/UFPE

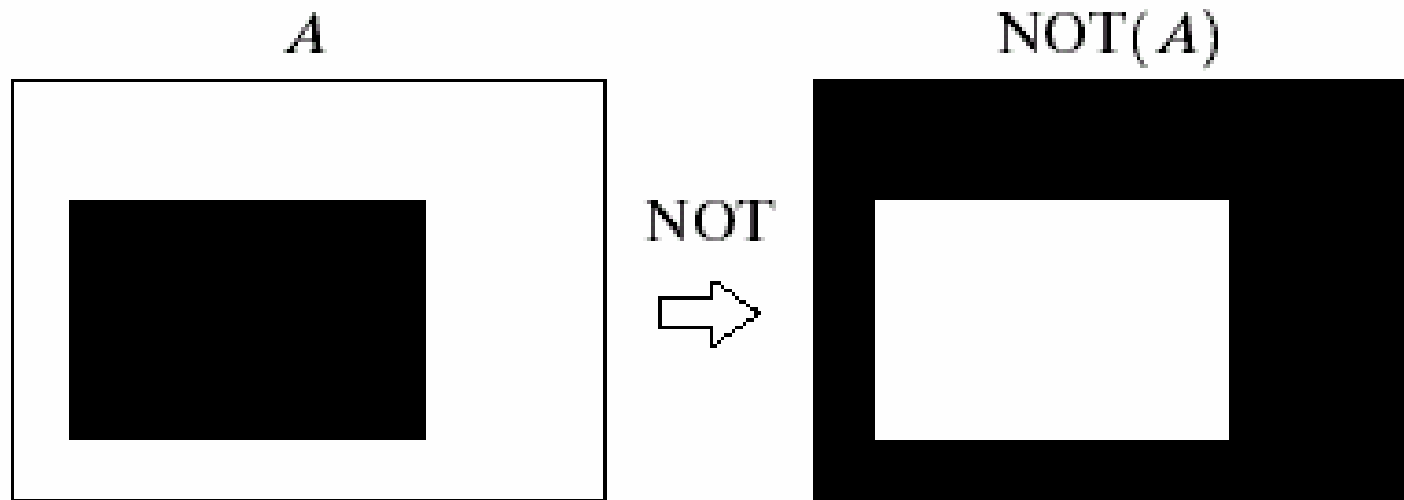




# Morfologia Matemática

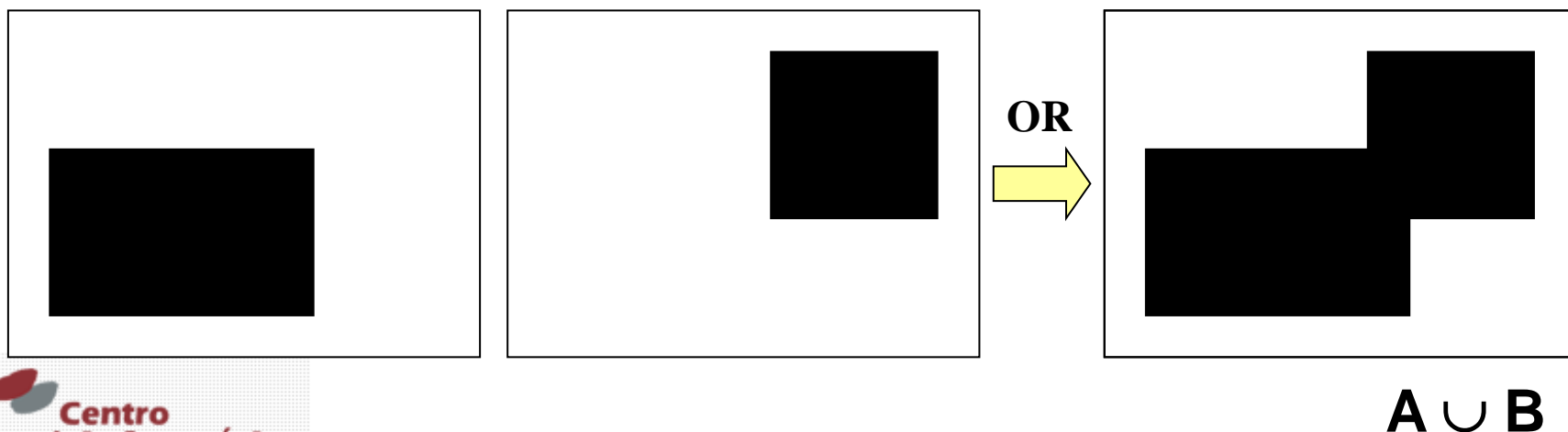
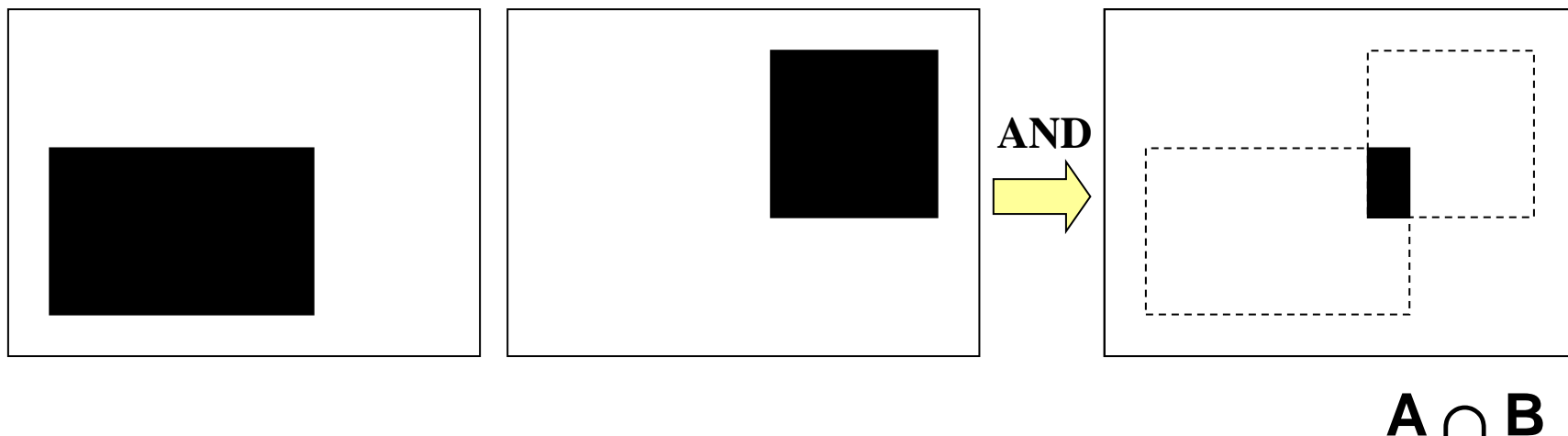
---

- Morfologia = Forma e estrutura de um objeto
  - Inter-relações entre as partes de um objeto
- Base na Teoria dos Conjuntos
- Algumas operações matemáticas podem ser aplicadas a conjuntos de pixels a fim de intensificar aspectos das formas tal que eles possam ser contados ou reconhecidos



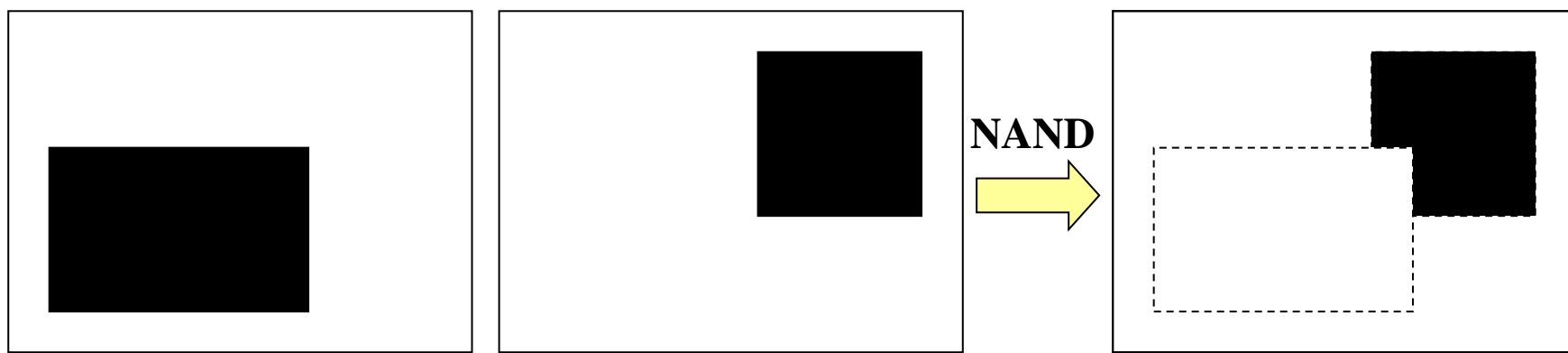
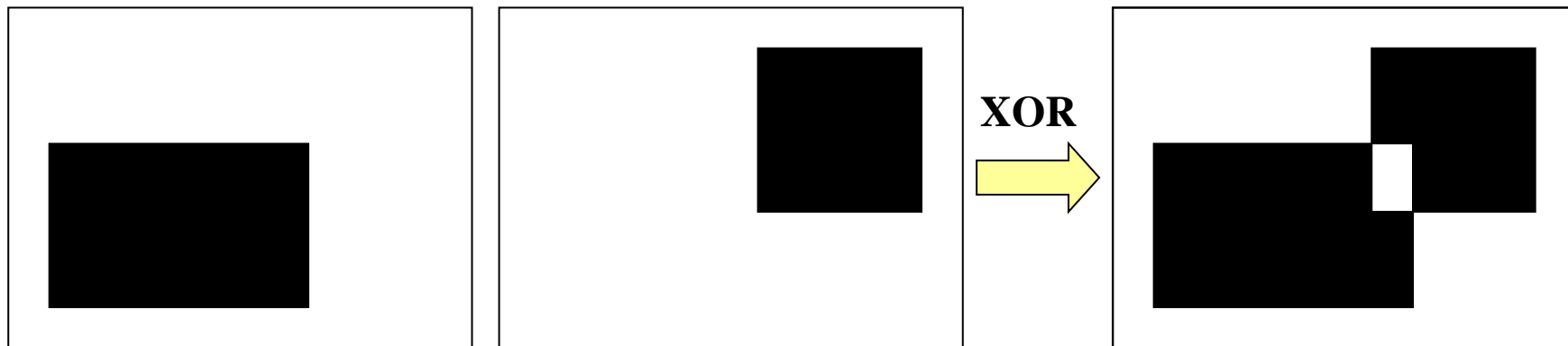
# Morfologia

## Operações de Conjuntos em Imagens



# Morfologia

## Operações de Conjuntos em Imagens



**B - A**



# Morfologia Matemática

---

## ■ Dilatação

- Se *qualquer* pixel na vizinhança do pixel de entrada estiver ativo, o pixel de saída fica ativo; caso contrário, o pixel fica inativo

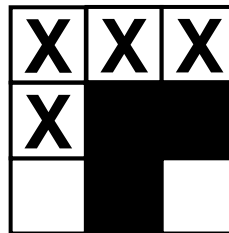
## ■ Erosão

- Se *todos* os pixels na vizinhança do pixel de entrada estiver ativo, o pixel de saída fica ativo; caso contrário, o pixel fica inativo

- A vizinhança pode ter qualquer forma ou tamanho

# Morfologia Matemática

- O 'elemento central' pode ser qualquer ponto do elemento estruturante
- Não necessariamente o elemento estruturante é uma matriz retangular ou quadrada...
  - Elementos chamados '*don't care*' podem mudar a forma do elemento



**X** = *don't care*  
(não importa)



# Morfologia Matemática

---

## ■ Operação

- A operação deve casar o “pixel central” do elemento estruturante com o pixel analisado na imagem
- No caso de pixels na borda da imagem, considera-se que os elementos estruturantes que não estão sobre elementos da imagem podem cobrir elementos *off* ou *don't care*
  - É como se a imagem sofresse uma extensão nula ou com elementos *don't care*



# Morfologia Matemática

- Operações morfológicas **binárias** são definidas em imagens de duas cores
- Observe a imagem abaixo....

(0,0)

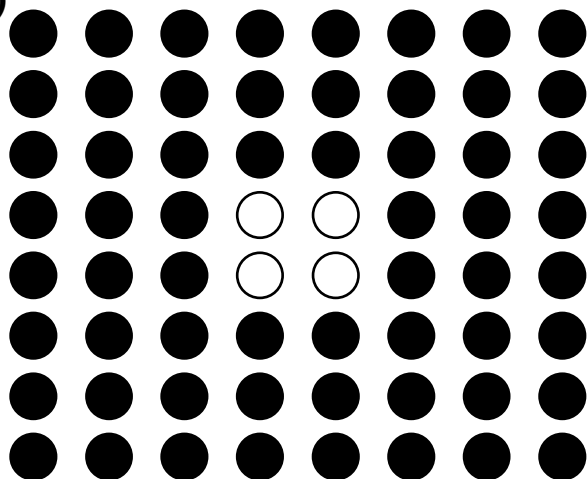
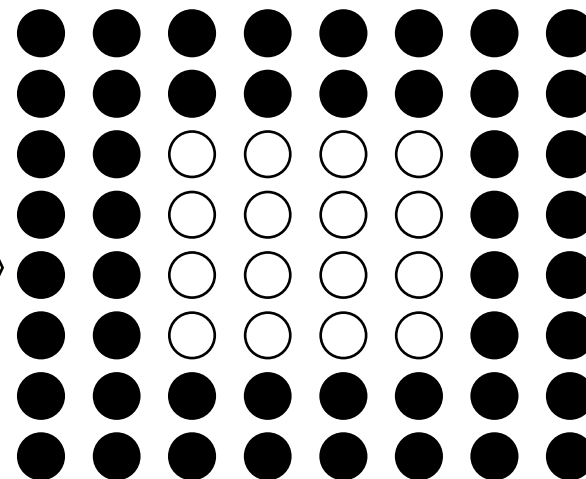


Imagem A

Vamos pintar de branco todos os vizinhos de um pixel branco....



O mesmo quadrado, mas um pixel mais largo que o anterior... *Dilatação*



# Morfologia Matemática

---

- De forma simples, a dilatação faz com que os objetos tornem-se mais largos
- Esse é um exemplo de uma operação de morfologia que pode ser facilmente implementado

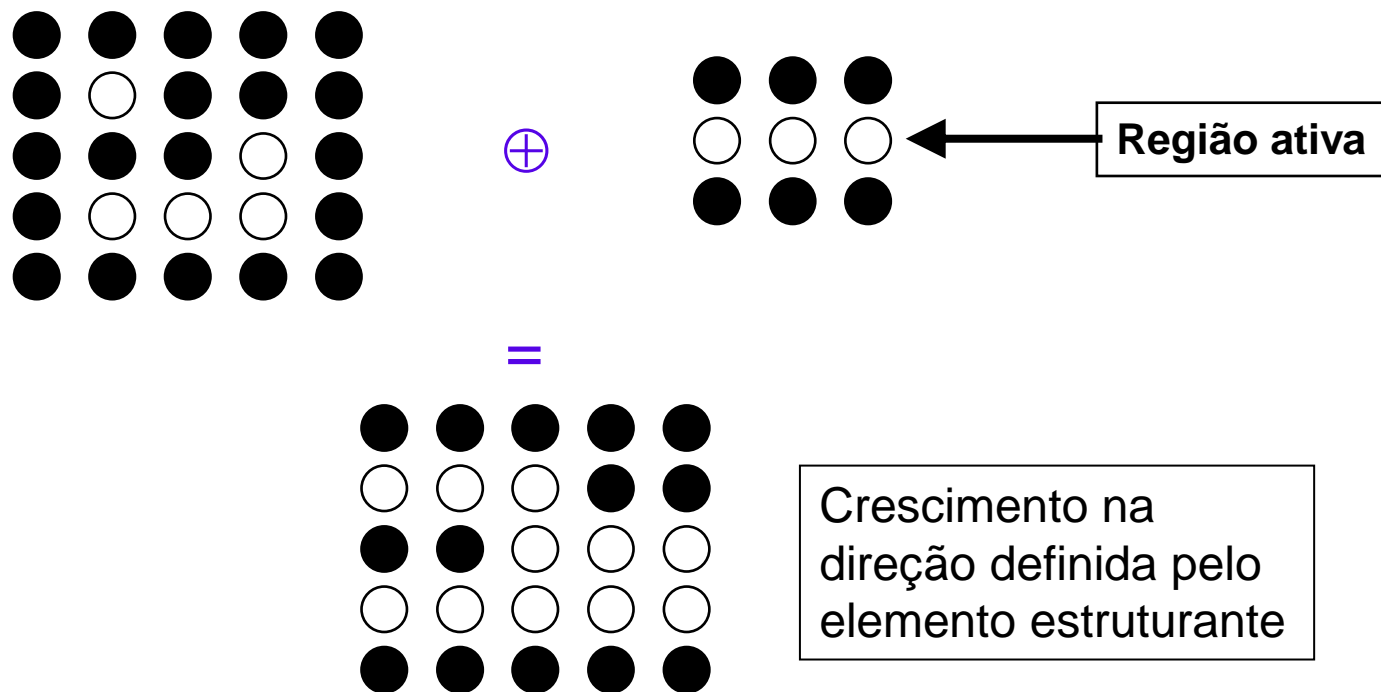
# Morfologia Matemática

## ■ Dilatação: Exemplo 1

$$\begin{array}{ccccc} \text{im} = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \oplus \begin{array}{ccc} \text{struct} = & & \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccccc} \text{bw} = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

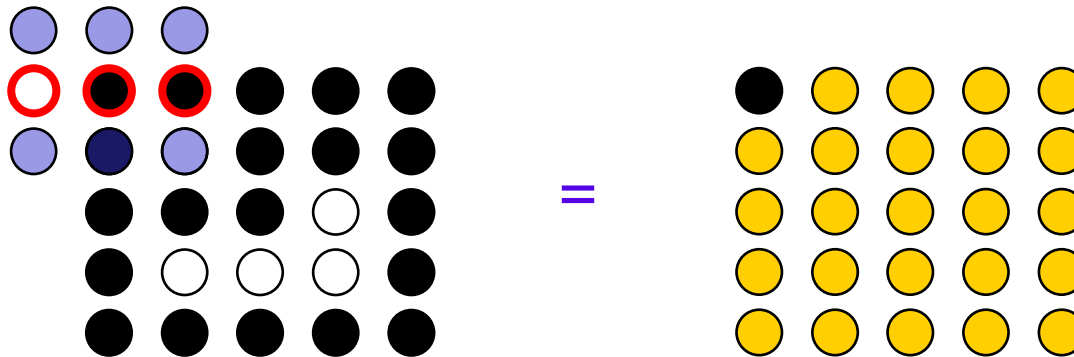
# Morfologia Matemática

## ■ Dilatação: Exemplo 1



# Morfologia Matemática

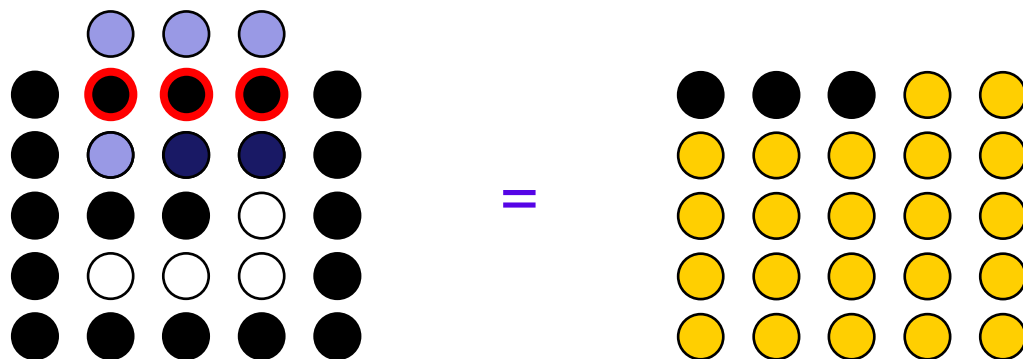
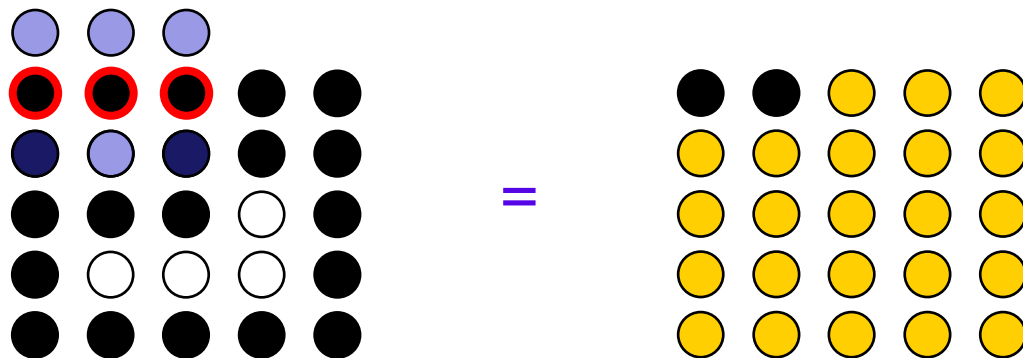
## ■ Dilatação: Exemplo 1



O pixel central do elemento casa com o pixel a ser processado; se **qualquer** pixel sob a região ativa estiver ativo, então o pixel correspondente na imagem final fica ativo (1); se todos forem inativos, o pixel na imagem final fica inativo (0).

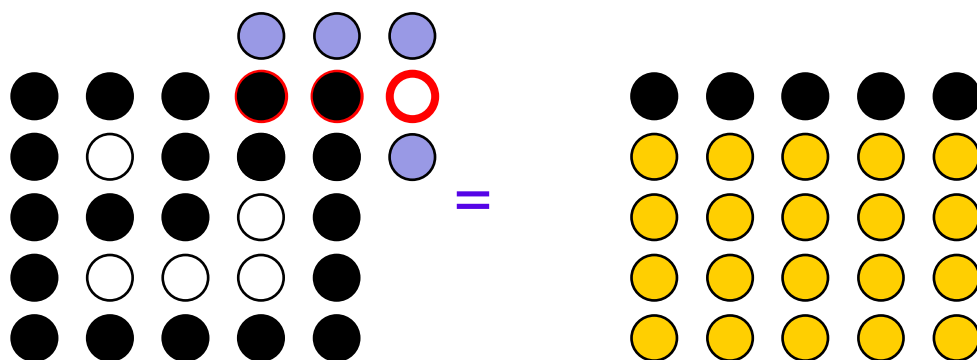
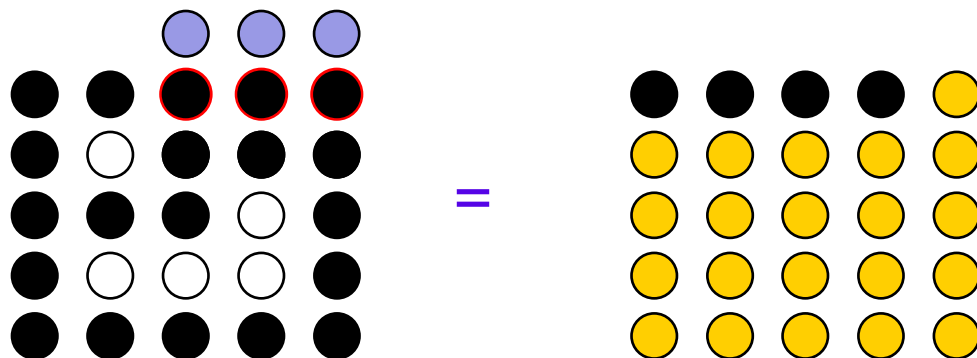
# Morfologia Matemática

## ■ Dilatação: Exemplo 1



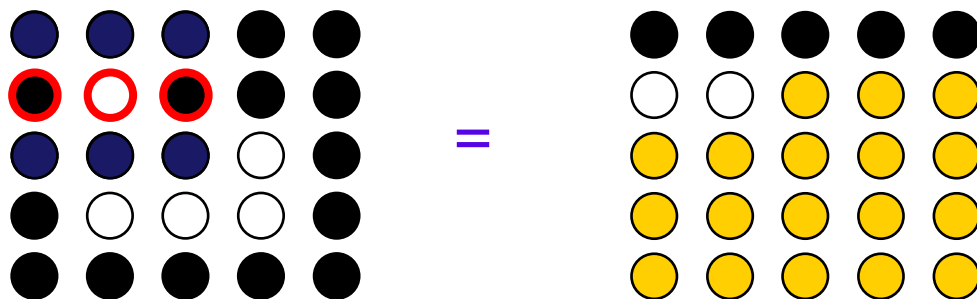
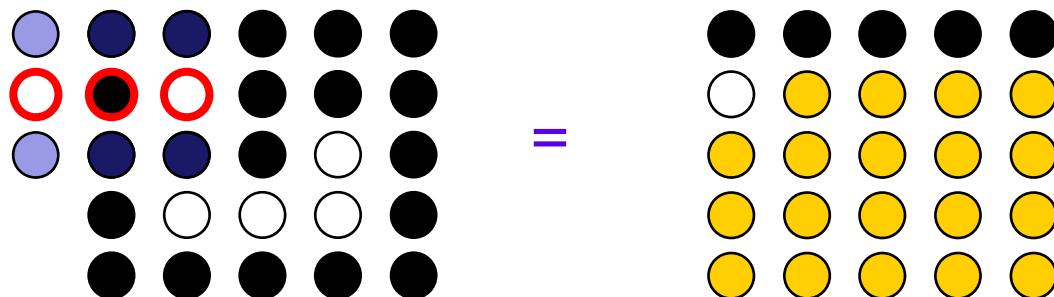
# Morfologia Matemática

## ■ Dilatação: Exemplo 1



# Morfologia Matemática

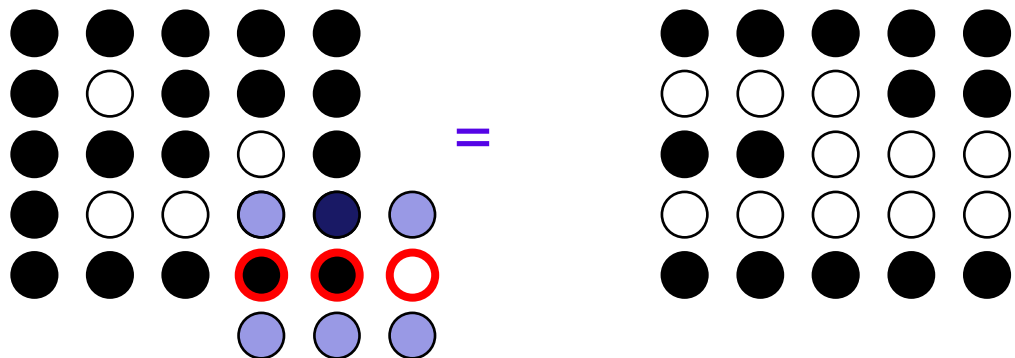
## ■ Dilatação: Exemplo 1





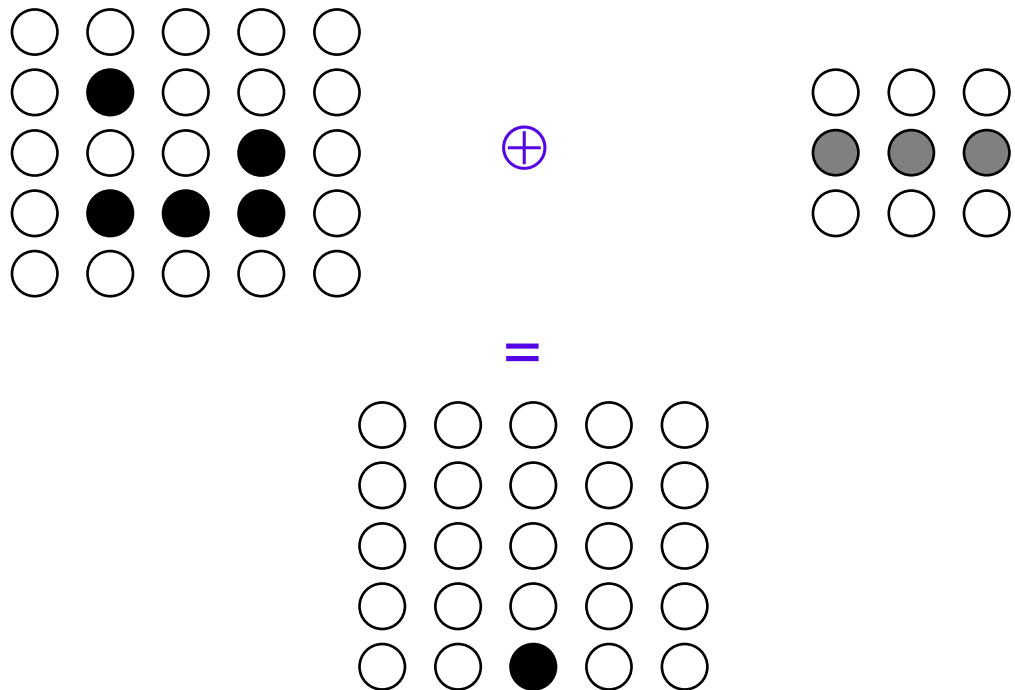
# Morfologia Matemática

## ■ Dilatação: Exemplo 1



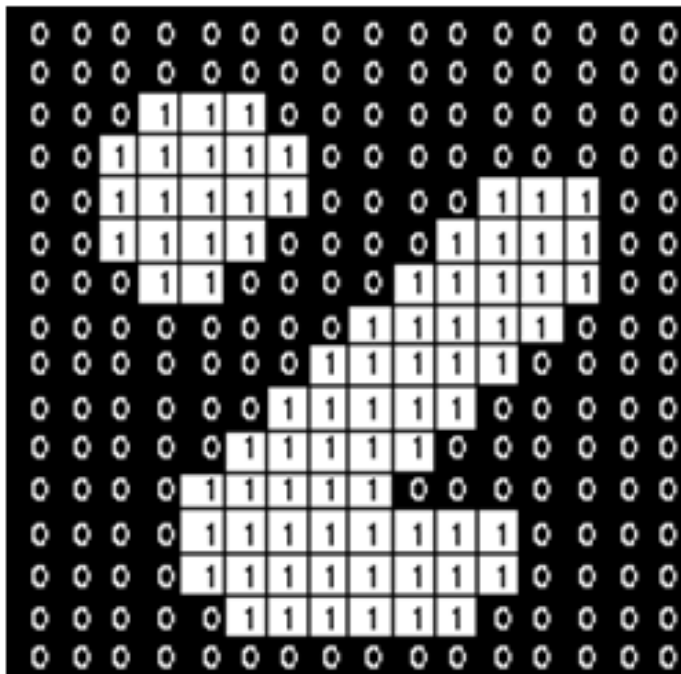
# Morfologia Matemática

## ■ Dilatação: Exemplo 2

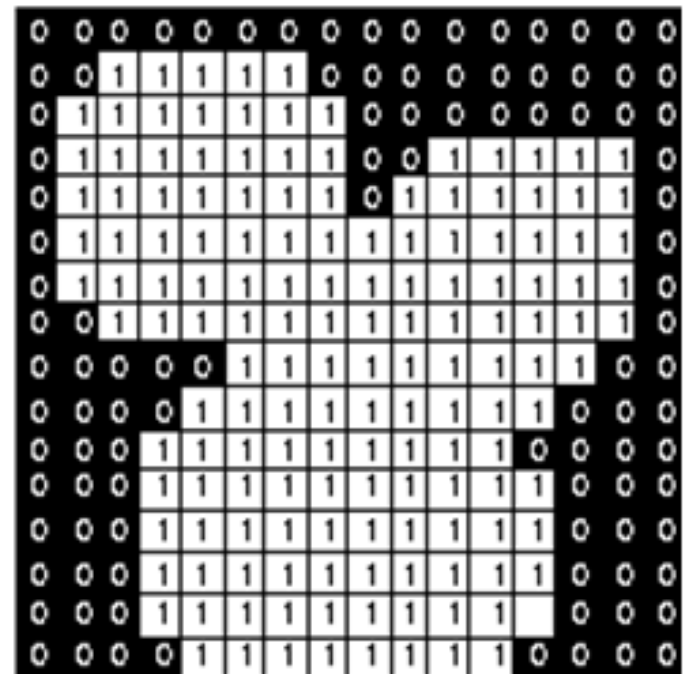


# Morfologia Matemática

## ■ Dilatação: Exemplo 3



1	1	1
1	1	1
1	1	1





# Morfologia Matemática

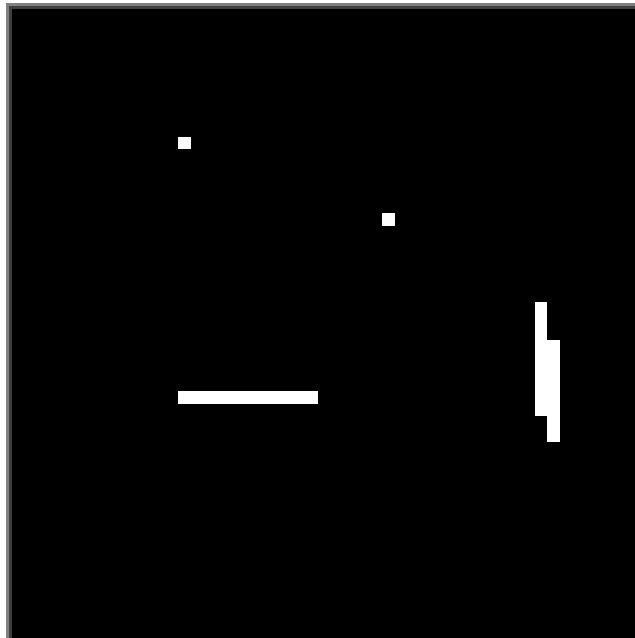
---

- **Dilatação:** Observe que o “objeto” são os pixels com tom 1 (brancos)
  - *Logo, a dilatação faz com que as áreas de branco aumentem em uma imagem*
  - Às vezes, é interessante ter o complemento da imagem para aplicar uma dilatação
    - Depois, calcula-se o complemento novamente

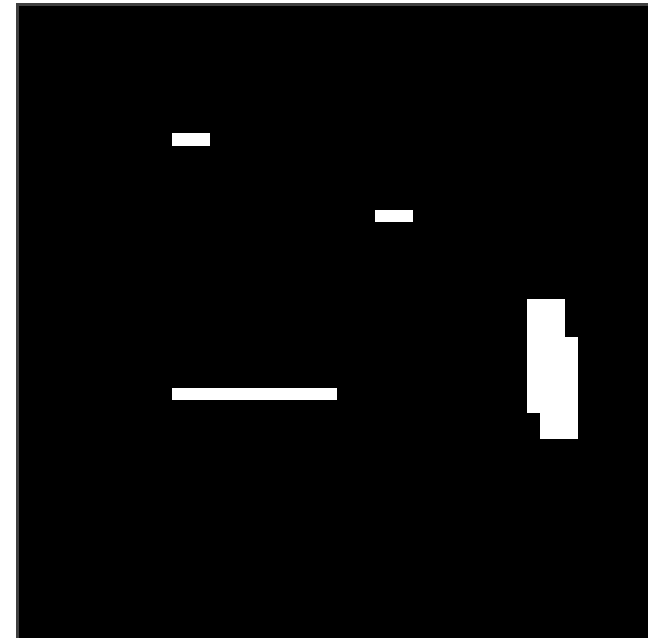
# Morfologia Matemática

## ■ Dilatação

- Exemplo: Observe o resultado da dilatação da imagem abaixo pelo elemento estruturante do Exemplo 1 anterior



**Imagem original**

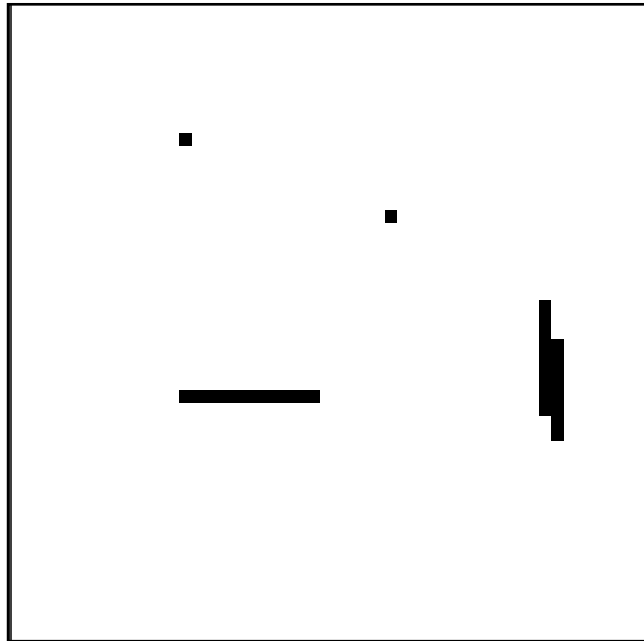


**Imagem dilatada**

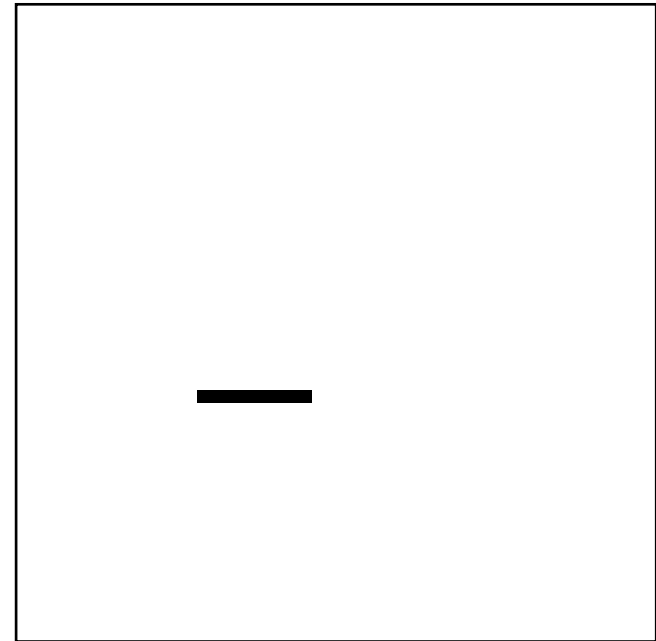
# Morfologia Matemática

## ■ Dilatação

- Exemplo: Enquanto que o resultado à aplicação na imagem não complementada seria.....



**Imagem original**



**Imagem dilatada**



# Morfologia Matemática

---

## ■ Dilatação

- Assim, a **dilatação** pode ser considerada como a união de todas as translações especificadas pelo elemento estrutural B
  - Como a união é comutativa, a dilatação também será a mesma se trocarmos a imagem com o elemento estruturante

# Morfologia Matemática

- Aplicação de Dilatação (sobre imagem complementar)

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



**Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.**





# Morfologia Matemática

## ■ Aplicação de Dilatação

struct =

●	○	●
○	○	○
●	○	●

Meu caro Barão,

Acabo de receber  
sobre o Barral mando-lhe  
il-o:

"Certes ce n'est pas de

**Imagem original**

Meu caro Barão,

Acabo de receber  
sobre o Barral mando-lhe  
il-o:

"Certes ce n'est pas de

**Imagem dilatada**

# Morfologia Matemática

## ■ Aplicação de Dilatação

struct =

●	○	●
○	○	○
●	○	●

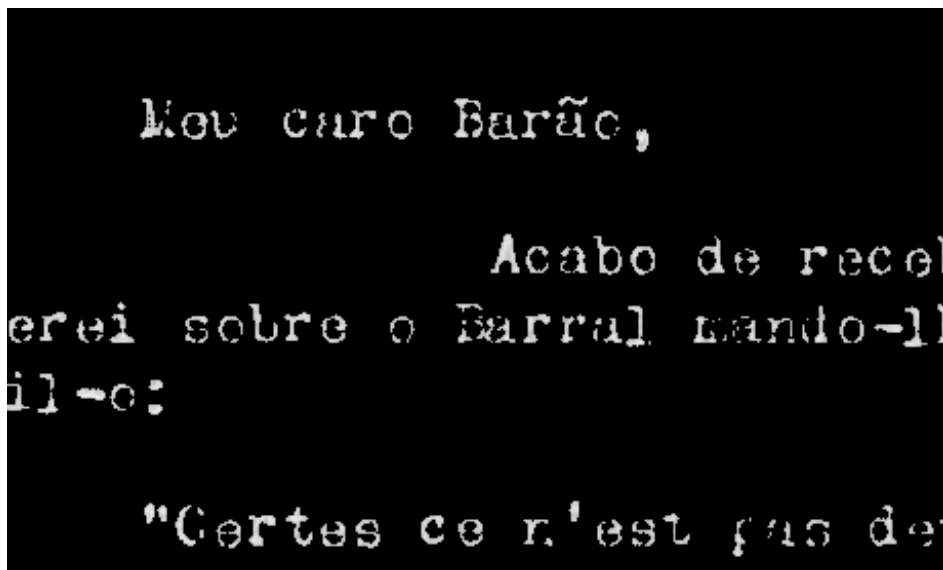


Imagem original  
complementar

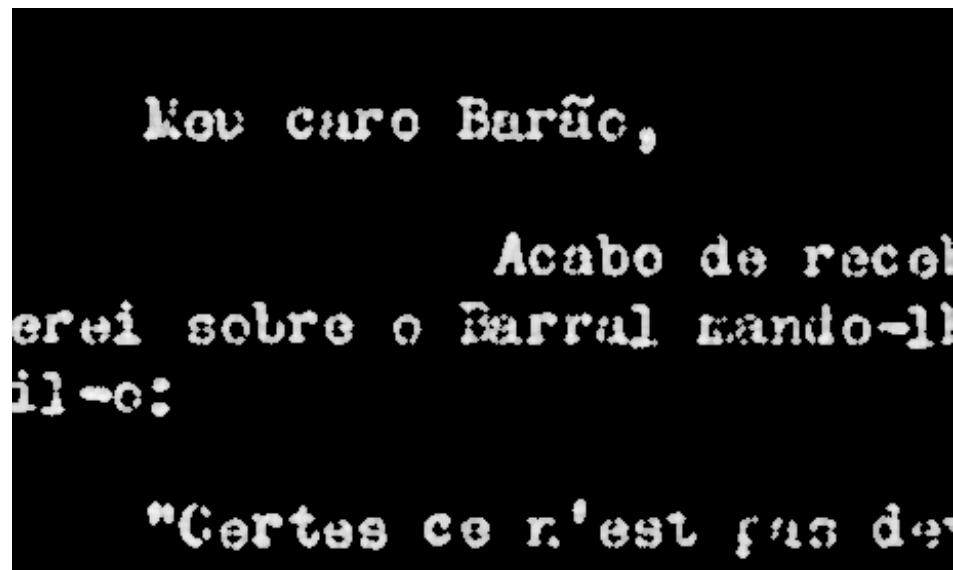


Imagem complementar  
dilatada

# Morfologia Matemática

## ■ Aplicação de Dilatação

struct =

●	○	●
○	○	○
●	○	●

Meu caro Barão,

Acabo de receber  
ereei sobre o Barral mando-lh  
il-o:

"Certes ce n'est pas de

Imagem original

Meu caro Barão,

Acabo de receber  
ereei sobre o Barral mando-lh  
il-o:

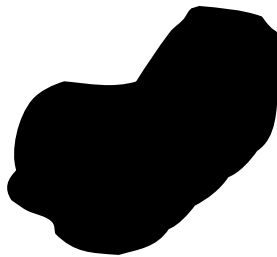
"Certes ce n'est pas de

Resultado final após  
novo complemento

# Morfologia Matemática

## ■ Erosão

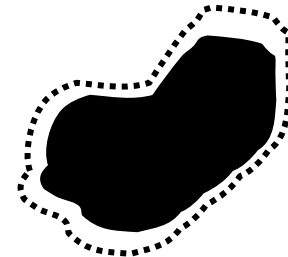
- Se a dilatação deixa um objeto mais largo, a erosão o estreita
- De forma simples, a erosão remove os pixels da camada externa de um objeto



**Objeto  
Original**



**Dilatação**



**Erosão**

# Morfologia Matemática

## ■ Erosão: Exemplo 1

im =

1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1



s =

1	1	1
1	1	1
1	1	1

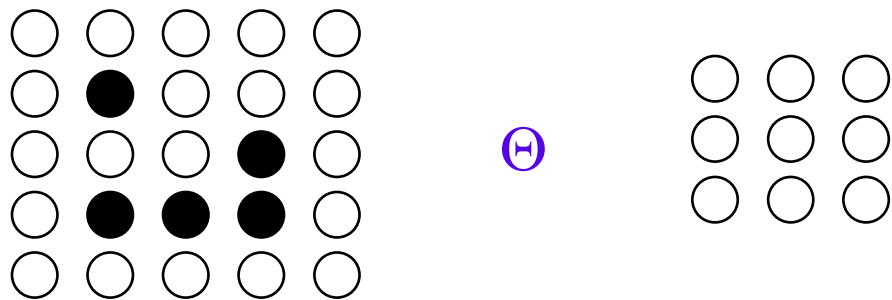
=

bw =

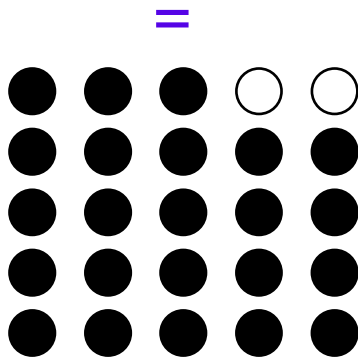
0	0	0	1	1
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

# Morfologia Matemática

## ■ Erosão: Exemplo 1

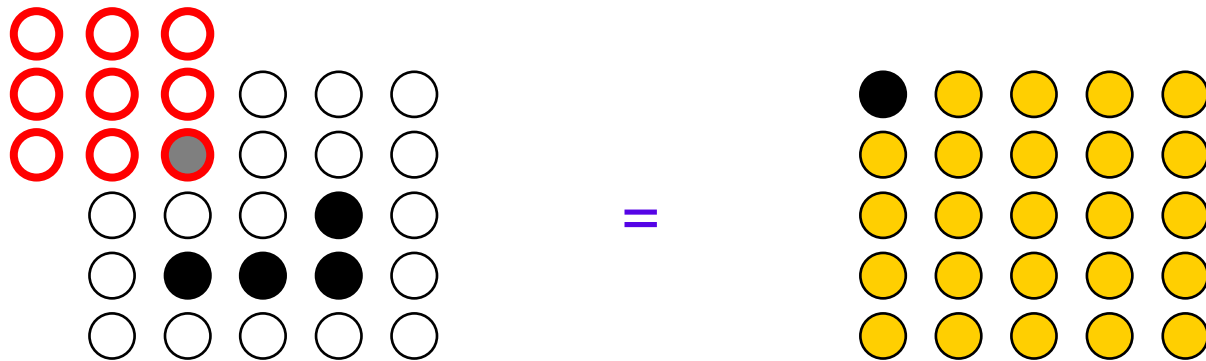


O pixel central do elemento casa com o pixel a ser processado; se **todos** os pixels da região ativa estiverem ativos, o resultado final fica ativo



# Morfologia Matemática

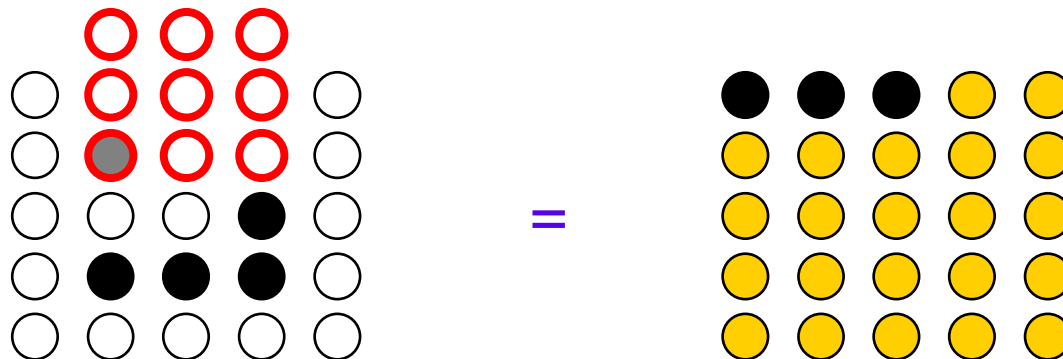
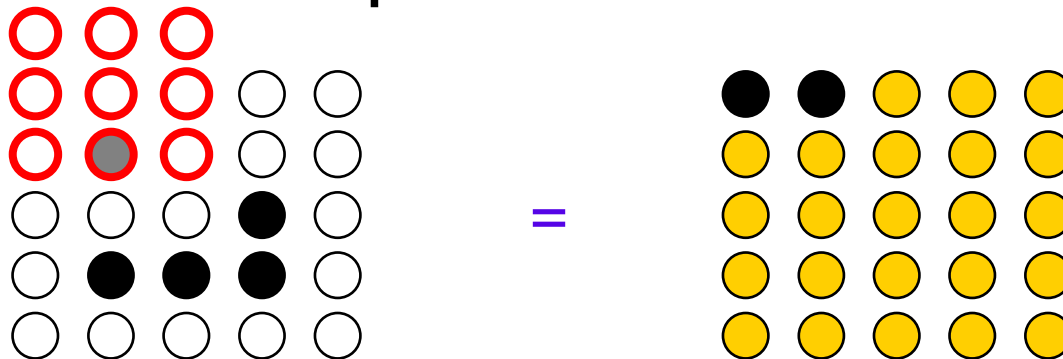
## ■ Erosão: Exemplo 1



O pixel central do elemento casa com o pixel a ser processado; se **todos** os pixels da região ativa estiverem ativos, o resultado final fica ativo

# Morfologia Matemática

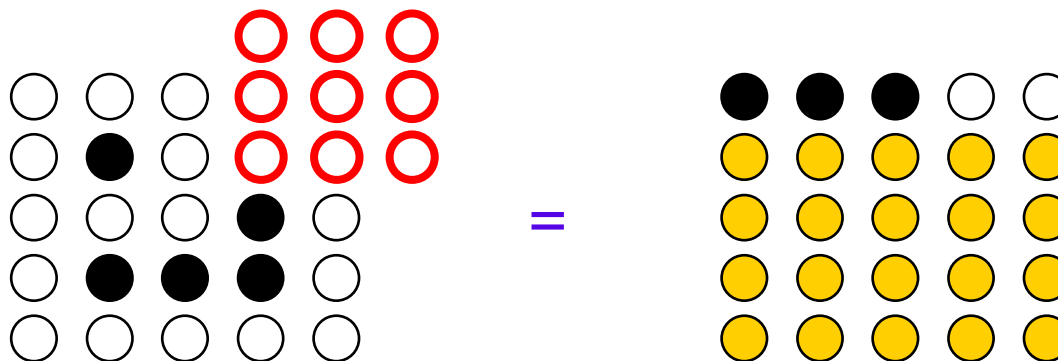
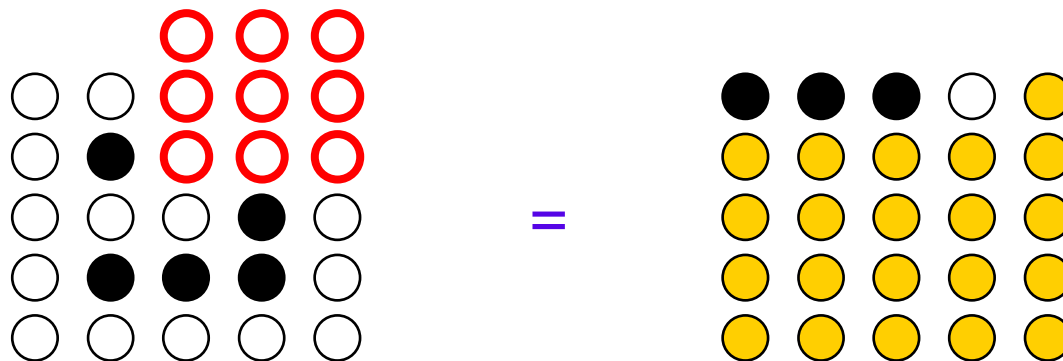
## ■ Erosão: Exemplo 1





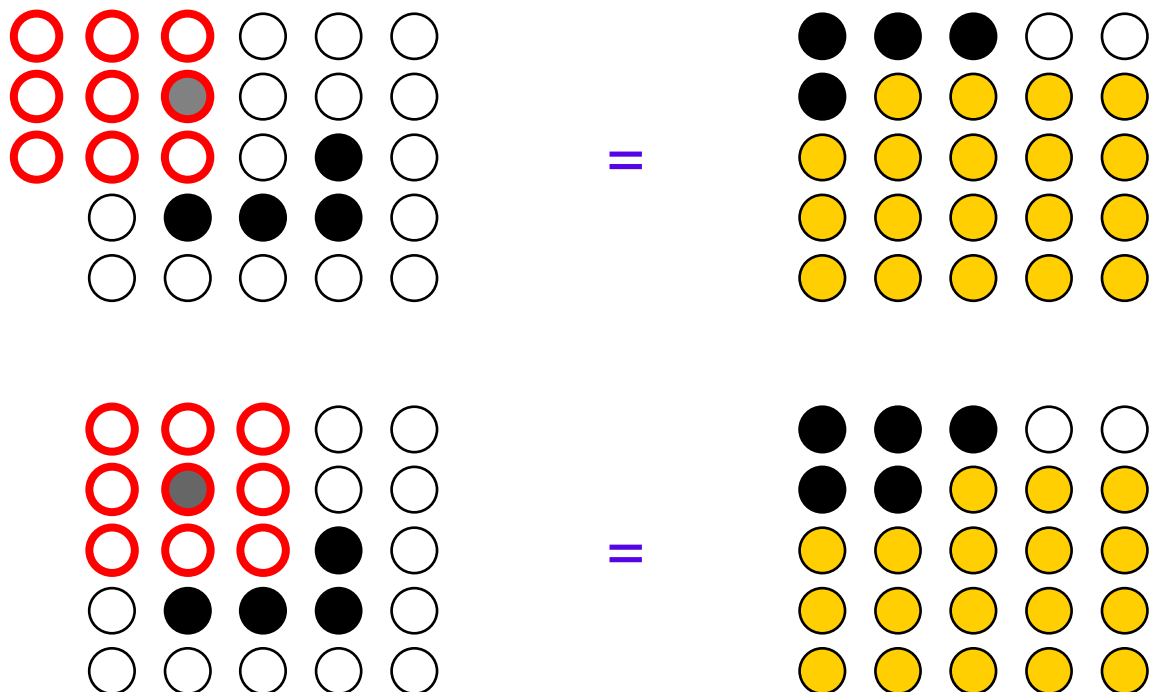
# Morfologia Matemática

## ■ Erosão: Exemplo 1



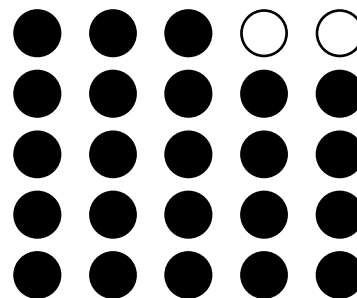
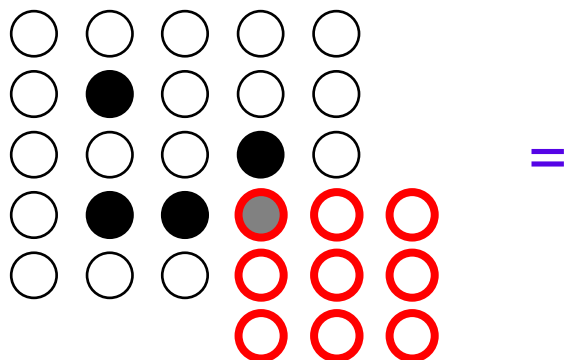
# Morfologia Matemática

## ■ Erosão: Exemplo 1



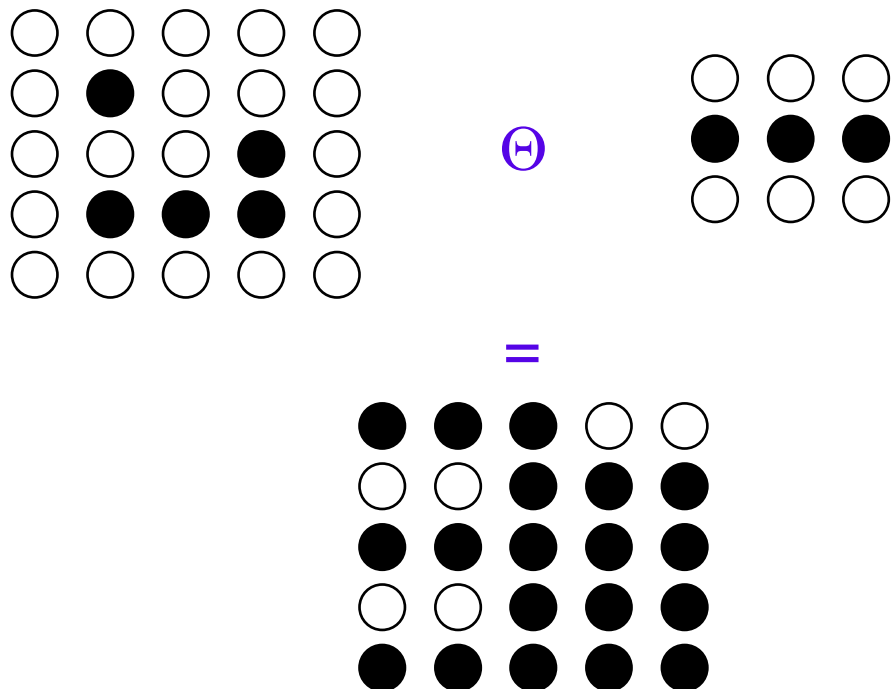
# Morfologia Matemática

## ■ Erosão: Exemplo 1



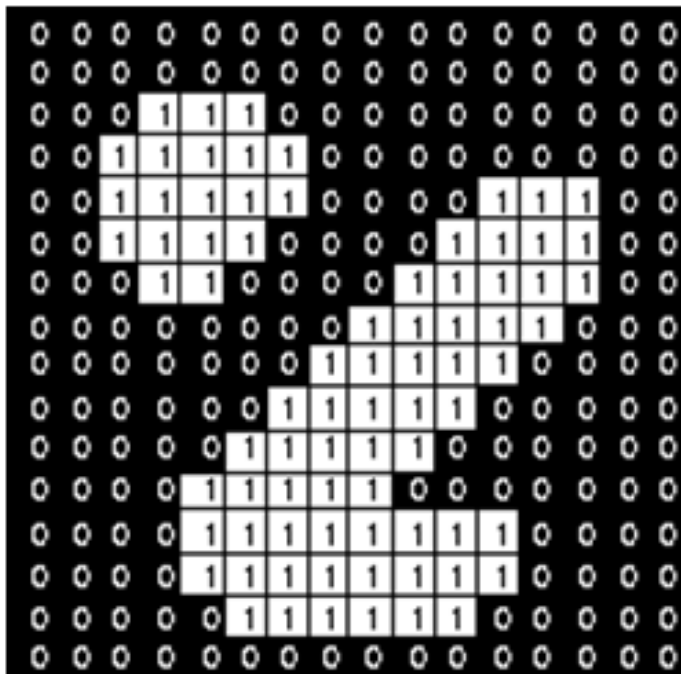
# Morfologia Matemática

## ■ Erosão: Exemplo 2

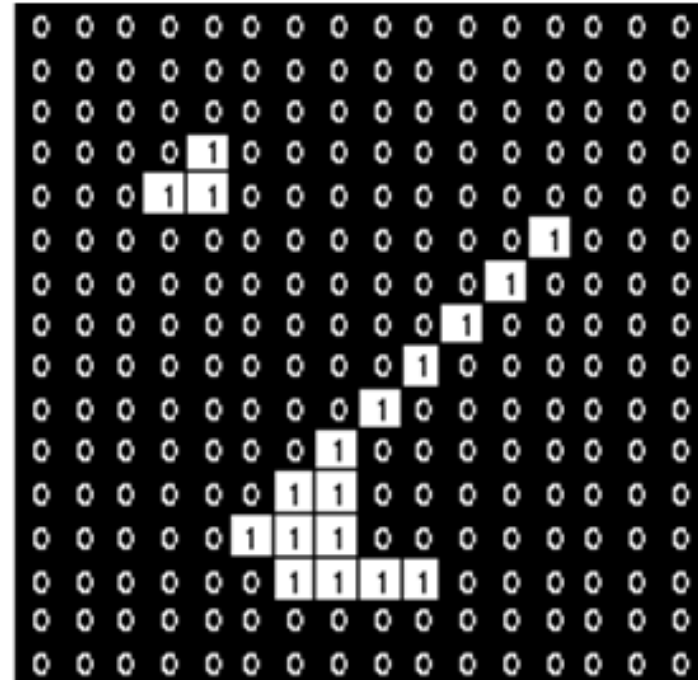


# Morfologia Matemática

## ■ Erosão: Exemplo 3



1	1	1
1	1	1
1	1	1

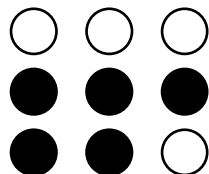




# Morfologia Matemática

---

- Exemplo 4
  - Elemento estruturante



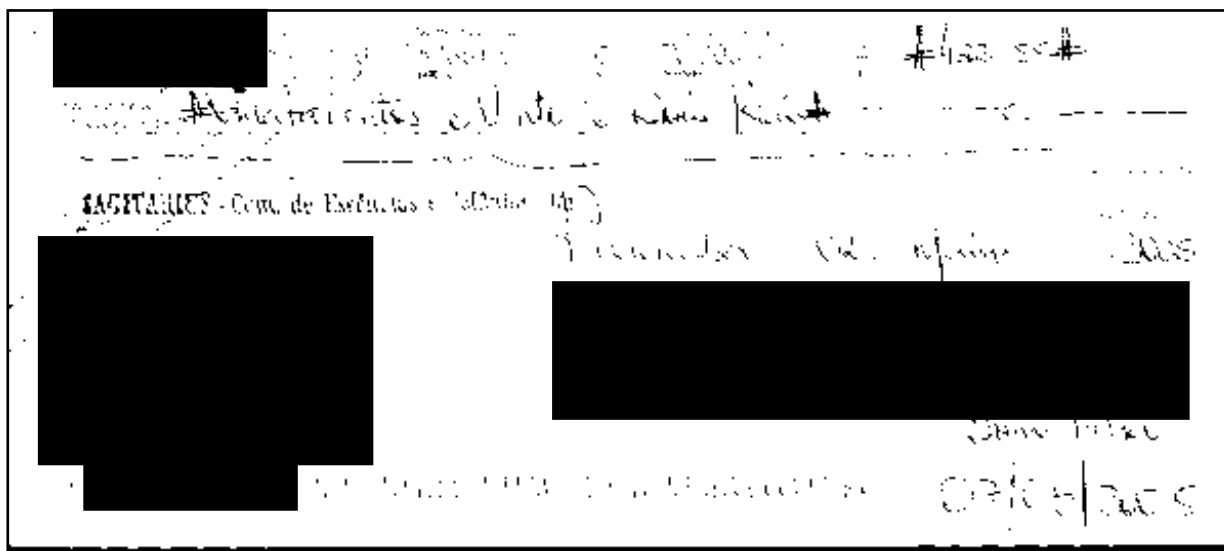
# Morfologia Matemática

## ■ Exemplo 4: Imagem original

54	0	53861-6	TV 000107	4	7/22, set
Pagamento: <u>Quinhentos e Vinte e Dois Reais</u>					
SACITARDOS - Com. de Produtos e Colônias					
Piracicaba, 02. Maio 2005					
07/08/2005					

# Morfologia Matemática

## ■ Exemplo 4: Dilatação



(lembre que crescem as áreas de branco)



# Morfologia Matemática

## ■ Exemplo 4: Erosão

Pague por este Cheque a quem se apresentar

54 | 0 | 53861-6 | TV-000107 | 4 | R\$ 422,00

SANTAROS - Com. de Rendas e Colônias TAP

Prac. de Rendas e Colônias TAP

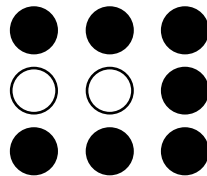
07/08/2005

0180001075# 551995386169#

07/08/2005

# Morfologia Matemática

- Exemplo 5: Erosão
  - Elemento estruturante



**Imagem Original**

**Imagem Filtrada**



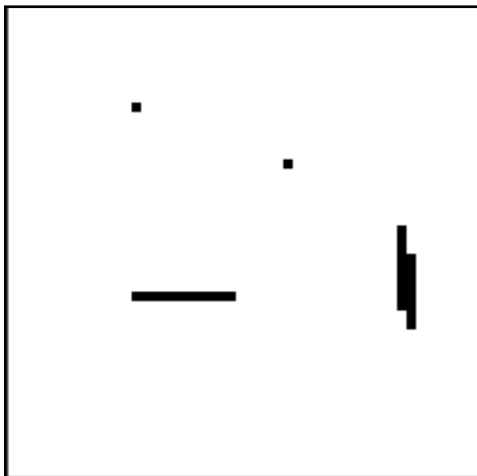
# Morfologia Matemática

---

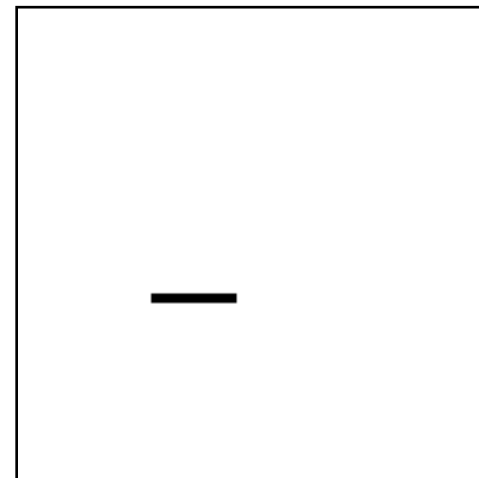
- Erosão e dilatação *não são* operações inversas
- Em algumas situações, uma erosão pode desfazer o resultado de uma dilatação, mas isso não é sempre...

# Morfologia Matemática

- Erosão e dilatação *não são* operações inversas
- Exemplo anterior: Como recuperar os elementos perdidos?



**Imagem original**



**Imagem dilatada**



# Morfologia Matemática

---

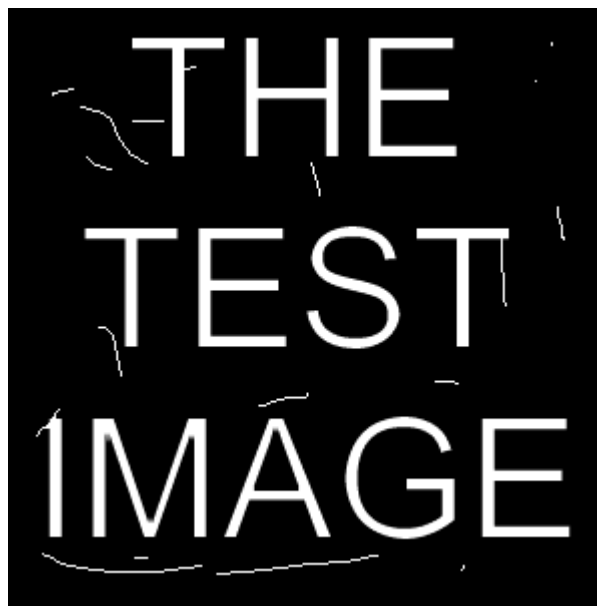
- Relações entre Erosão e Dilatação
  - $\text{erode}(\text{dilate}(S)) \neq S$
  - $\text{dilate}(\text{erode}(S)) \neq S$
  - $\text{erode}(\text{dilate}(S)) \supseteq S$
  - $\text{dilate}(\text{erode}(S)) \subseteq S$

# Morfologia Matemática

## ■ Aplicação de Erosão em Cascata



Imagem  
original



Erosão



Segunda  
Erosão



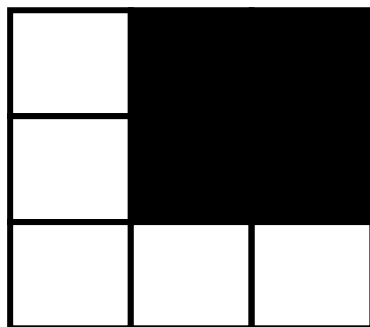
# Morfologia Matemática

---

- Mais do que mudar as características da imagem, a morfologia trabalha com a forma de objetos presentes (ou não) na imagem
- Assim, podemos usar essas operações para tentar encontrar determinados objetos ou, mais ainda, determinadas *formas* em uma imagem

# Morfologia Matemática

- Suponha, por exemplo, que queremos saber se uma imagem tem algum objeto na forma de um L, como no elemento abaixo:

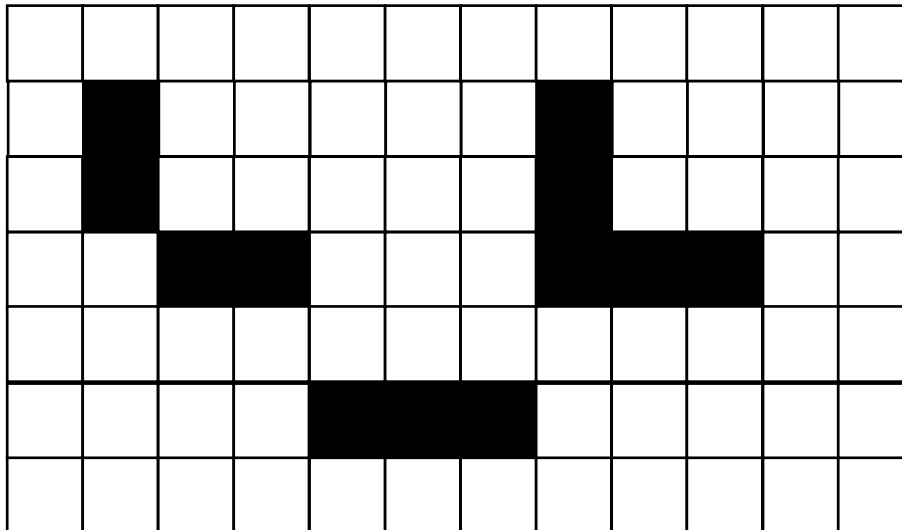


- Se essa matriz for usada como elemento estruturante, podemos usar a operação de **erosão** para identificar se o elemento existe em uma imagem ou não



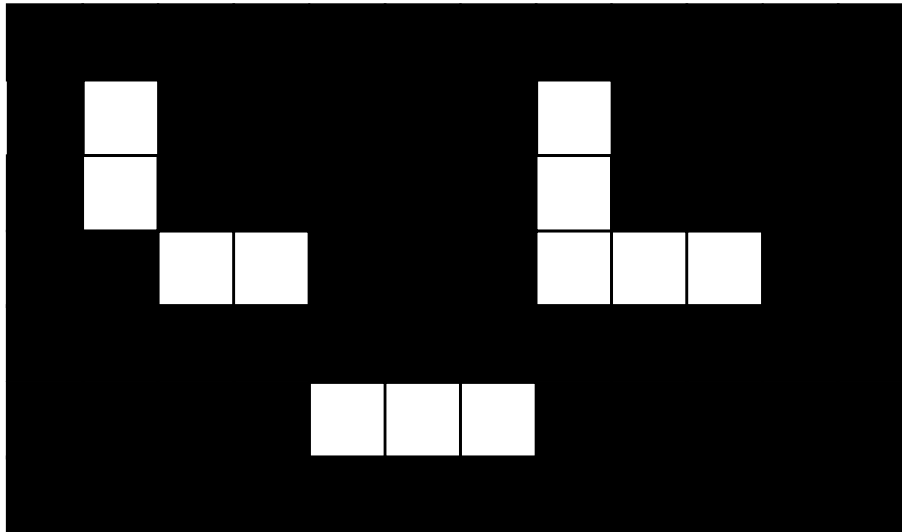
# Morfologia Matemática

- Considere a imagem a seguir:



# Morfologia Matemática

- Complementando a imagem...



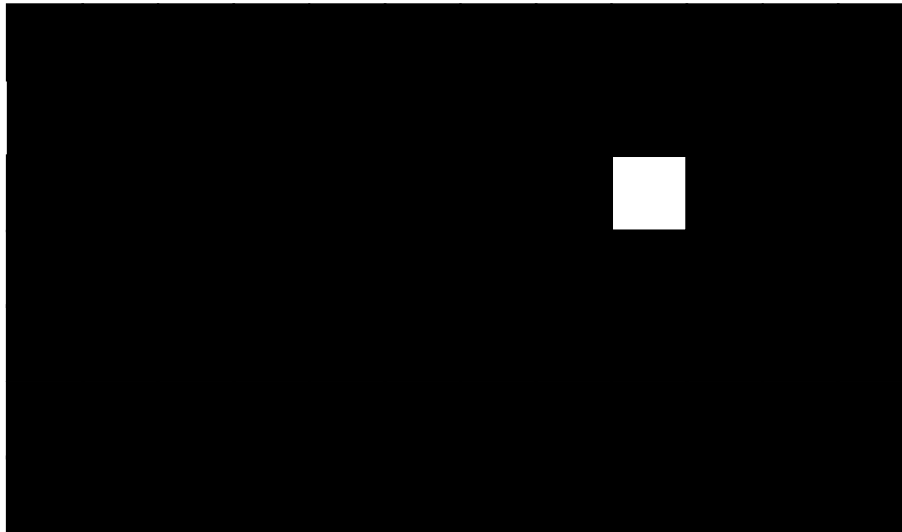
- e aplicando uma erosão com o elemento estruturante da forma do objeto que procuramos (L)



# Morfologia Matemática

---

- O resultado será:



- Ou seja, mais do que uma erosão, o retorno de um valor **verdade** indica que o objeto está presente na imagem

### ■ Abertura e Fechamento

- **Abertura** = Aplicação de uma erosão seguida por uma dilatação com o mesmo elemento estruturante
- **Fechamento** = Aplicação de uma dilatação seguida por uma erosão com o mesmo elemento estruturante



# Morfologia Matemática

---

## ■ Abertura:

- Suavização de contornos
- Remoção de ramificações
- Aumenta as áreas de preto (expande)

## ■ Fechamento:

- Preenchimento de falhas em contornos
- Diminui as áreas de preto (contraí)



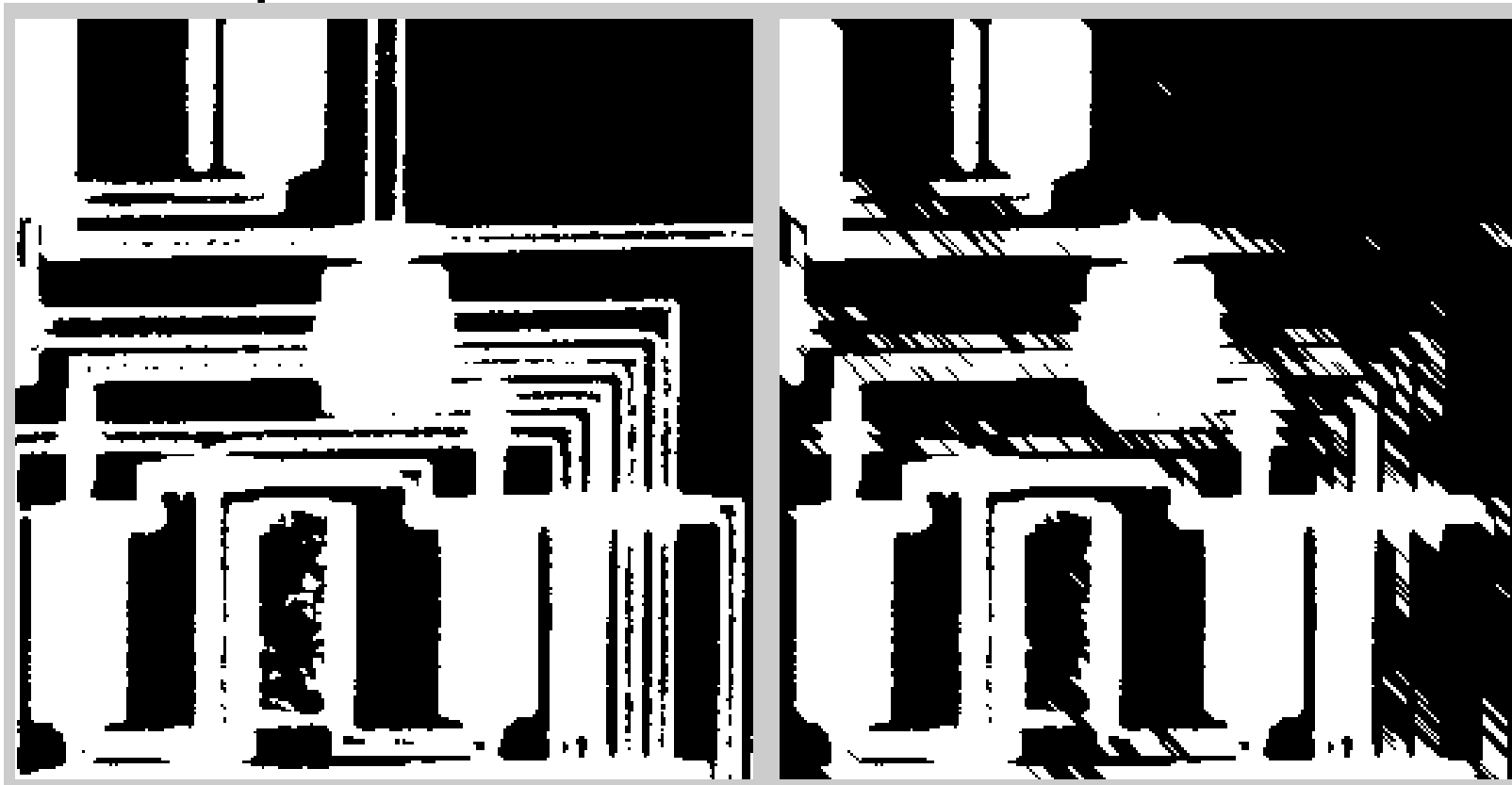
# Morfologia Matemática

---

- Por que os termos Abertura e Fechamento?
  - O nome **abertura** descreve uma operação que tende a ‘abrir’ pequenos espaços entre objetos em uma imagem
  - Por outro lado, um **fechamento** preenche esses espaços entre objetos

# Morfologia Matemática

- Exemplo de Abertura:



**Elemento Estrutural: Matriz identidade 5x5 (diagonal)**

# Morfologia Matemática

## Exemplo de Abertura:

The image shows a check from "SAGITARIUS - Com. de Essências e Colônias Ltda." dated "Piracicaba 02 de Maio de 2005". The amount is written as "Quatrocentos e Vinte e Dois Reais" (422,55). The check number is TV-000107. There are several redacted areas (black boxes) covering parts of the check, including the top left, bottom left, and bottom right. The date is written as "07/08/2005" in the bottom right corner. The text "Dom Para" is also visible.

0	53861-6	0	TV-000107	4	422,55
---	---------	---	-----------	---	--------

Pague por este  
Cheque a quantia de

Quatrocentos e Vinte e Dois Reais

SAGITARIUS - Com. de Essências e Colônias Ltda.

Piracicaba 02 de Maio de 2005

Dom Para

07/08/2005

Imagem original



# Morfologia Matemática

## ■ Exemplo de Abertura:

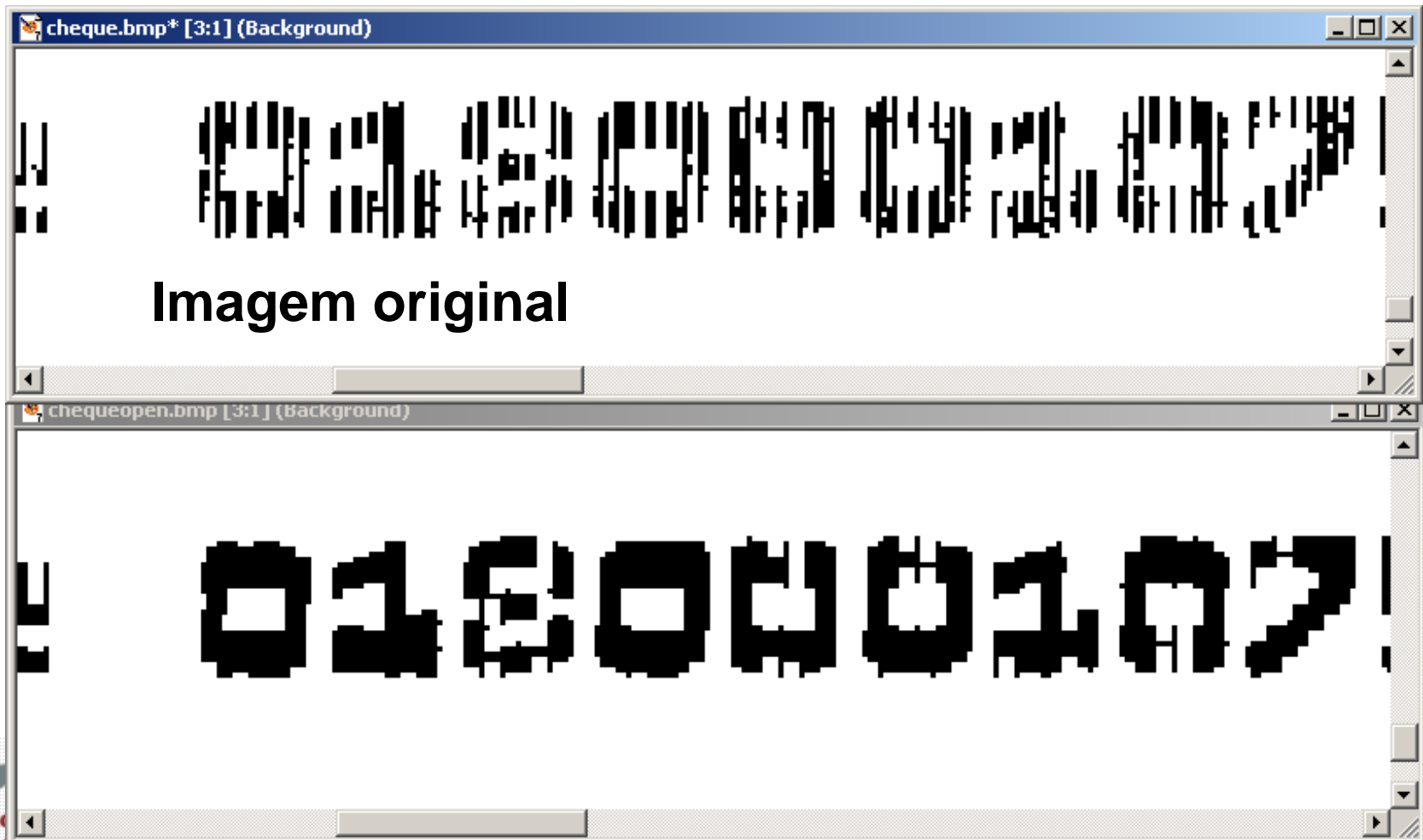
Imagem de um cheque com áreas retangulares em preto para demonstrar o processo de abertura morfológica.

**Detalhes do Cheque:**

- Número da conta:** 0 53861-6
- Número do cheque:** TV-000107
- Valor:** 4 422,50
- Assunto:** Pague por este Cheque a ordem de
- Assinatura:** Quatrocentos e Vinte e Dois Reais
- Assinatura do Beneficiário:** SACITABIOS - Com. de Reservas e Colônias Indígenas
- Assinatura do Emissor:** Duarcicaba Odo Mauro
- Data:** 07/08/2005
- Código de Barras:** 0180001075# 551995386109#

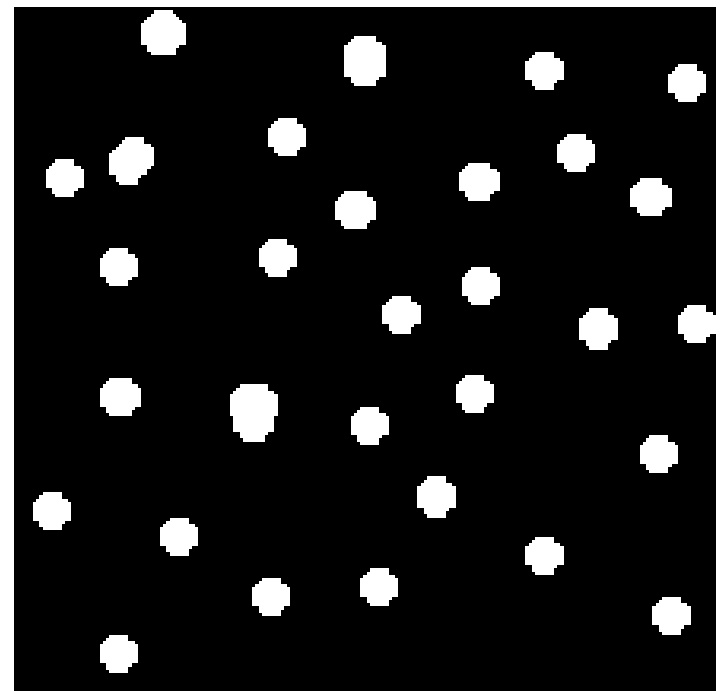
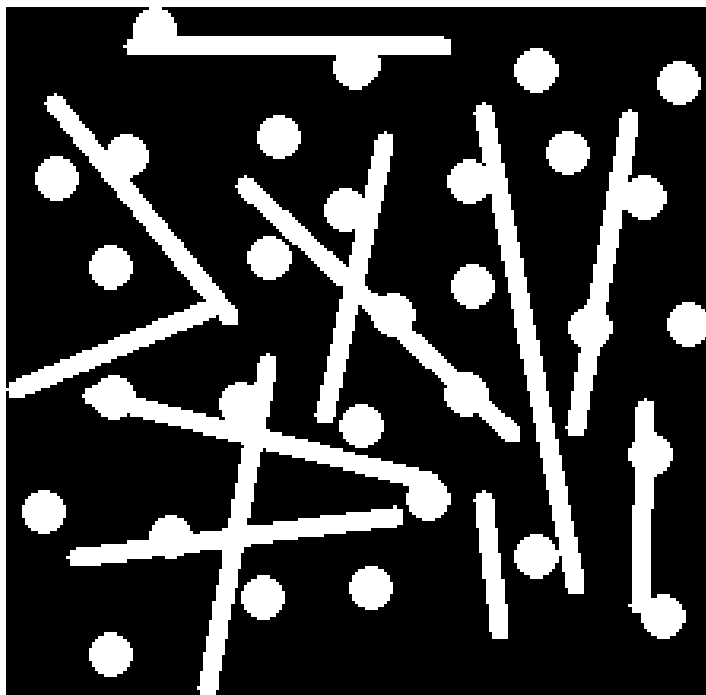
# Morfologia Matemática

- Exemplo de Abertura (detalhes)



# Morfologia Matemática

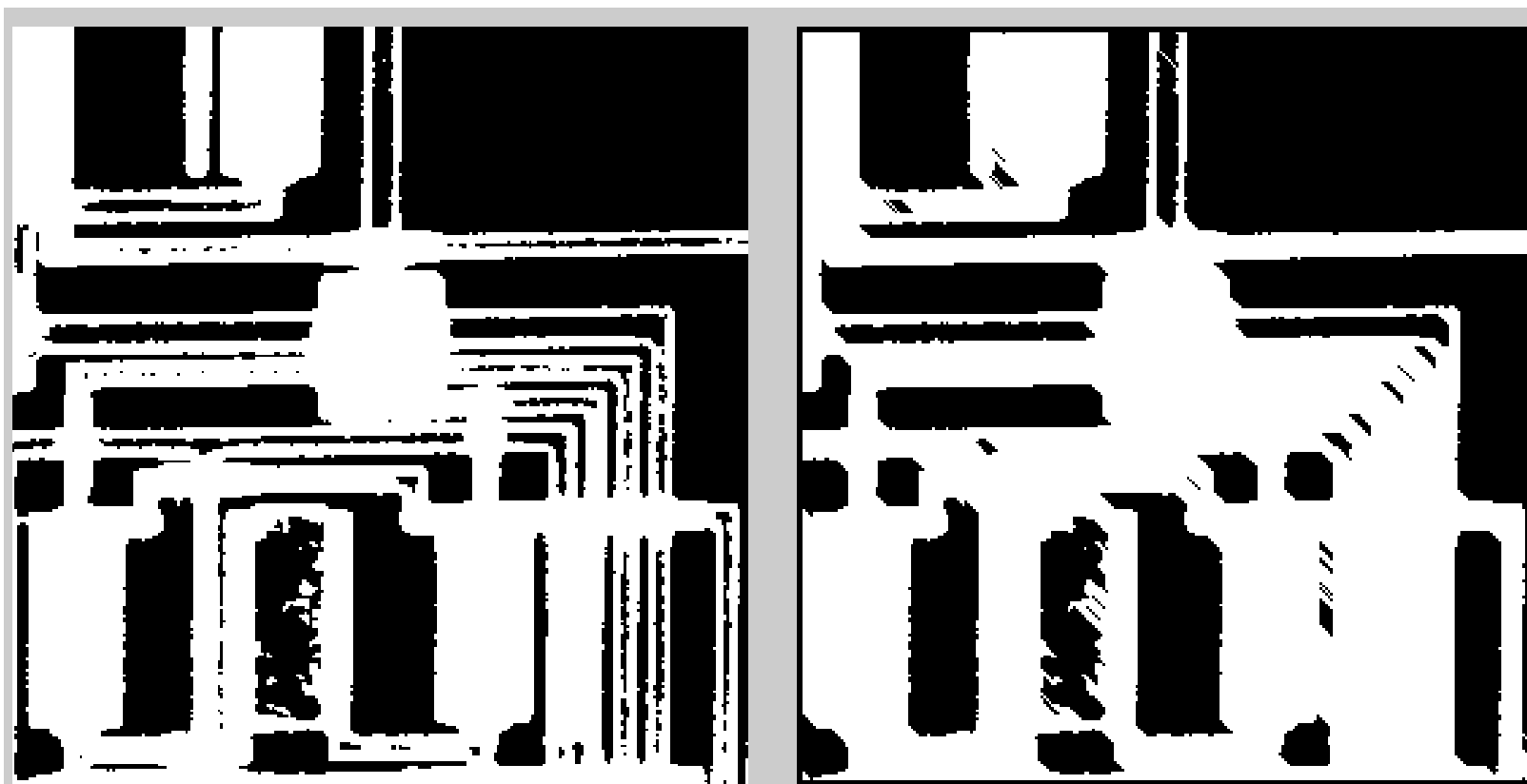
## ■ Exemplo de Abertura:



Elemento estruturante: uma matriz 11x11  
na forma de um círculo

# Morfologia Matemática

## ■ Exemplo de Fechamento:

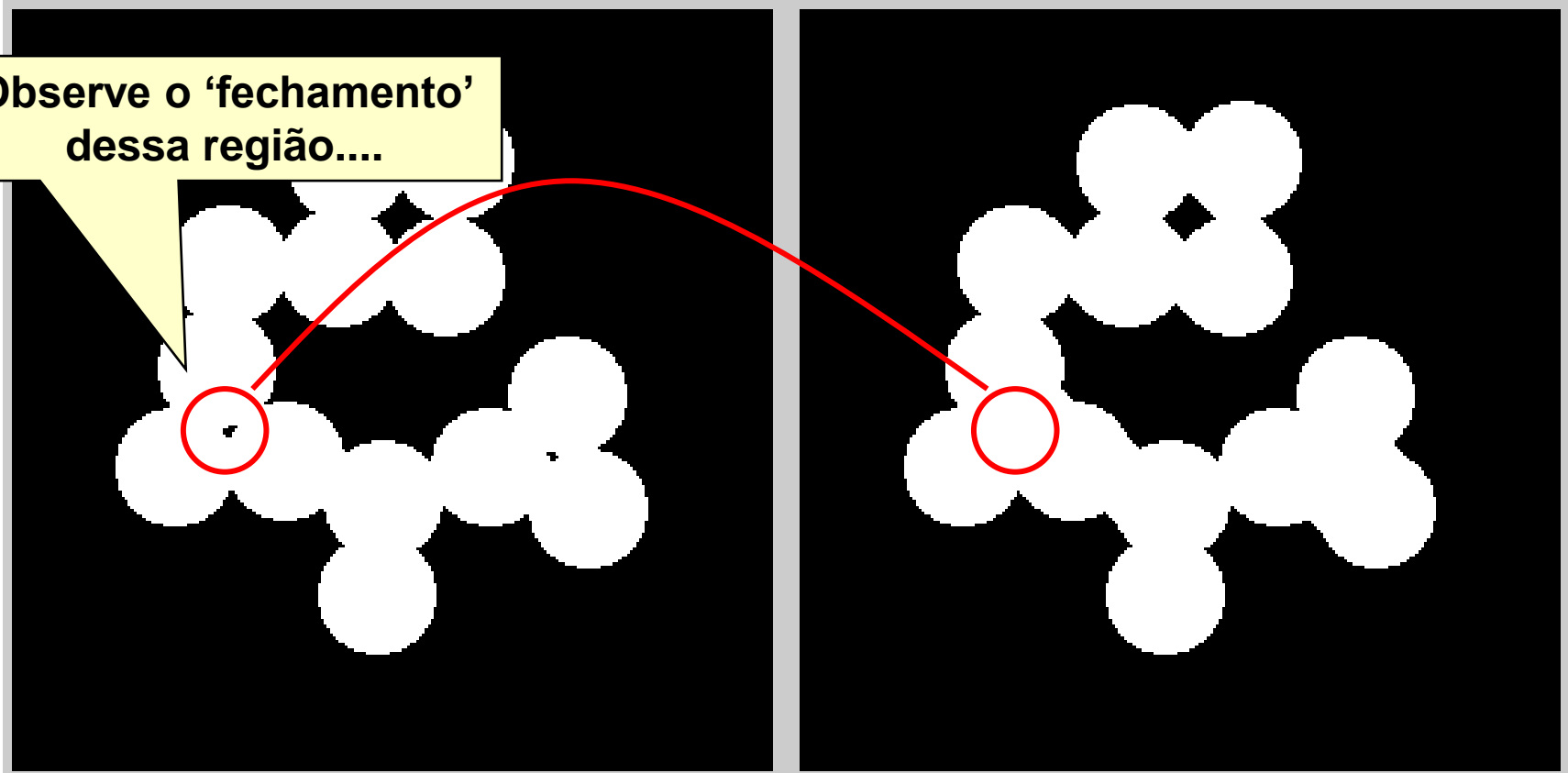


**Elemento Estrutural: Matriz identidade 5x5 (diagonal)**

# Morfologia Matemática

## ■ Exemplo de Fechamento:

Observe o 'fechamento'  
dessa região....



**Elemento Estrutural: Matriz identidade 5x5 (diagonal)**

# Morfologia Matemática

## Exemplo de Fechamento:

The image shows a Brazilian check (cheque) with the following details:

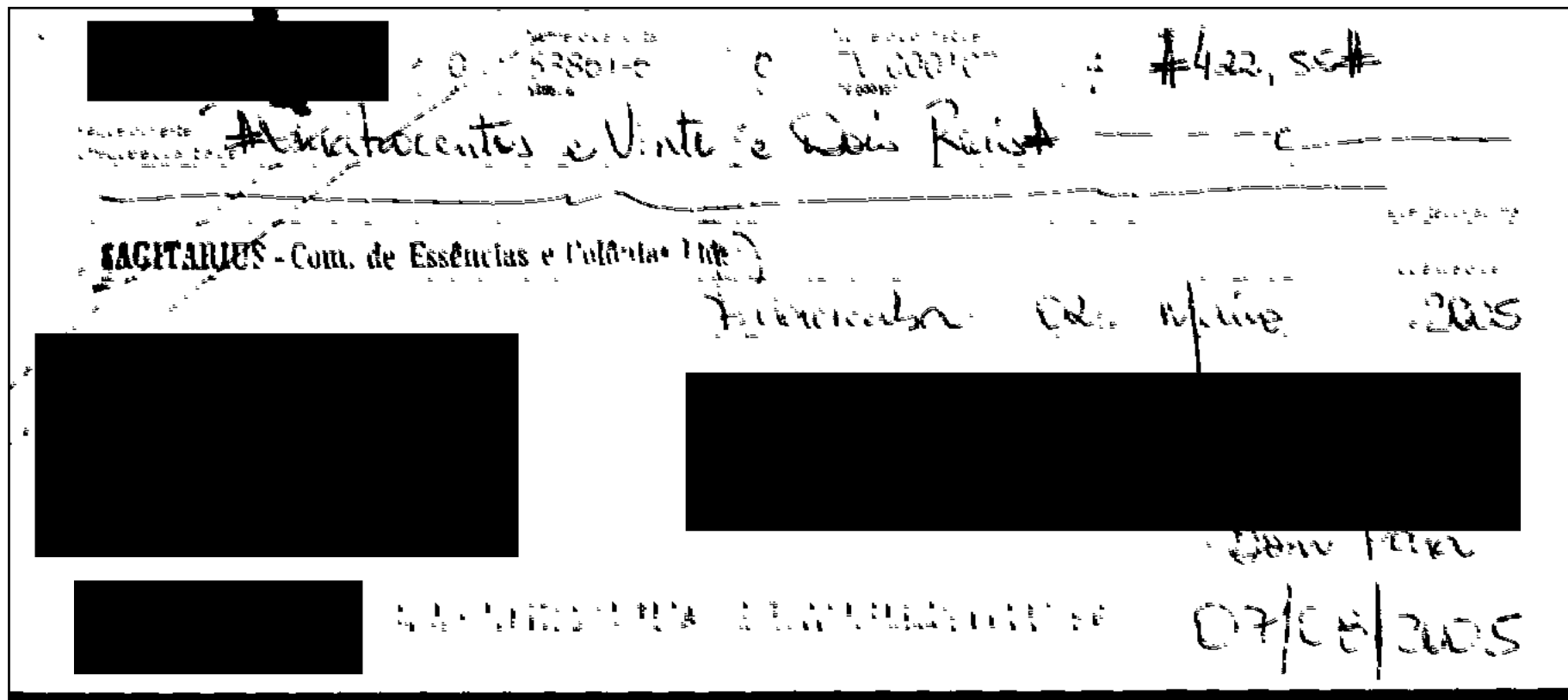
- Number of the account (Número da conta):** 53861-6
- Number of the check (Número do cheque):** TV-000107
- Value (Valor):** R\$ 422,55 (Four hundred and twenty-two and 55/100 Reals)
- Payee (Pague por este cheque a quantia de):** SACITARIUS - Com. de Essências e Colônias Ltda
- Location and Date (Local e Data):** Piraicaba, 02 de Maio de 2005
- Signature (Assinatura):** Dom Para
- Date (Data):** 07/08/2005

There are several black redaction boxes covering parts of the check, including the account number, the check number, the payee name, and the signature area.

Imagem original

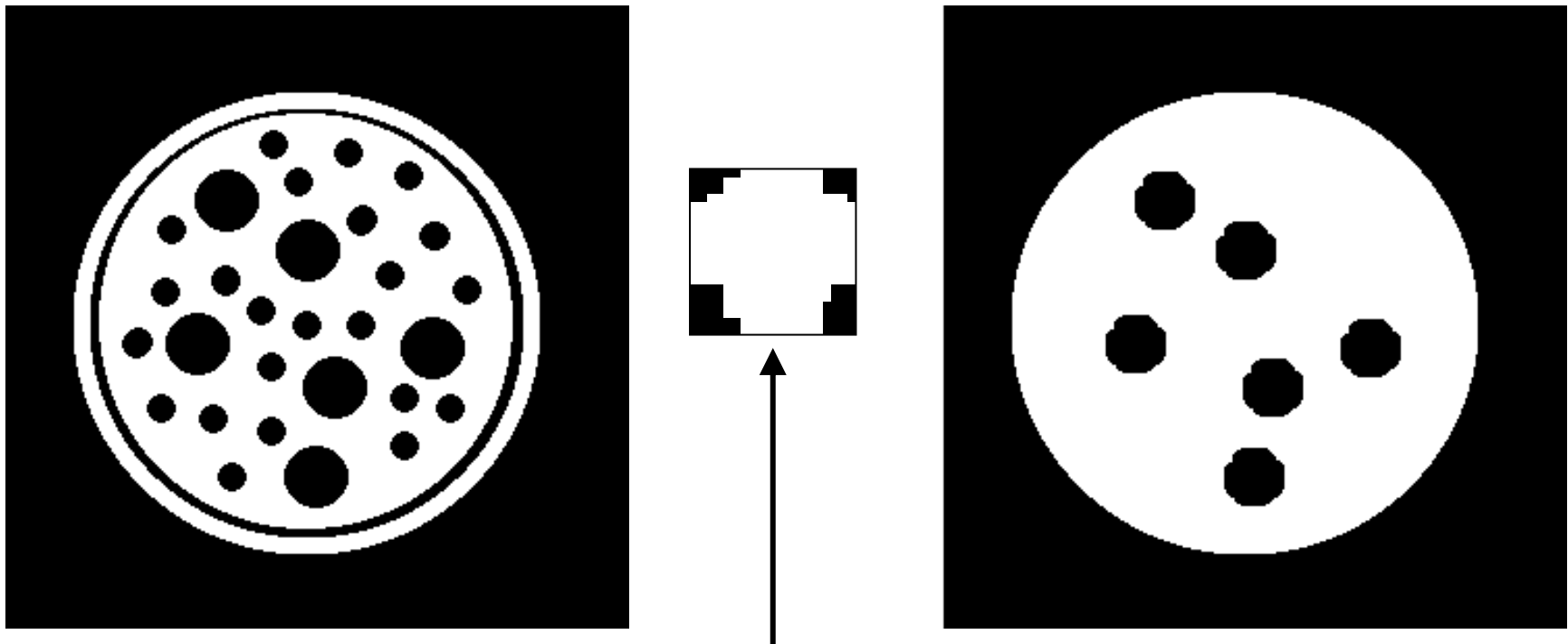
# Morfologia Matemática

## Exemplo de Fechamento:



# Morfologia Matemática

## ■ Exemplo de Fechamento: Granulometria

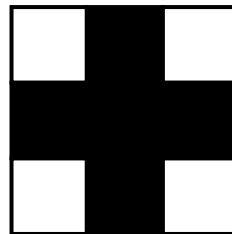


Elemento estruturante: uma matriz 30x30 na forma de um círculo



# Morfologia Matemática

- Extração de Fronteiras (Gradiente Morfológico)
  - $\beta(A) = A - (A \ominus B)$
  - Ou seja, a diferença de conjuntos entre A e sua erosão pelo elemento B
  - Exemplo: Considere o elemento estrutural B



B

# Morfologia Matemática

## ■ Extração de Fronteiras

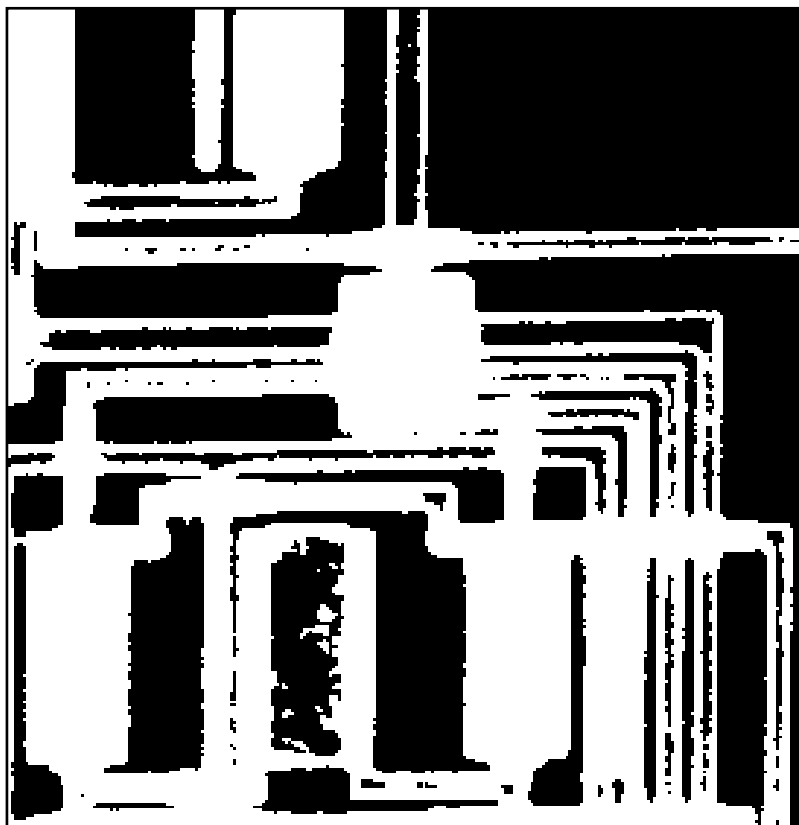
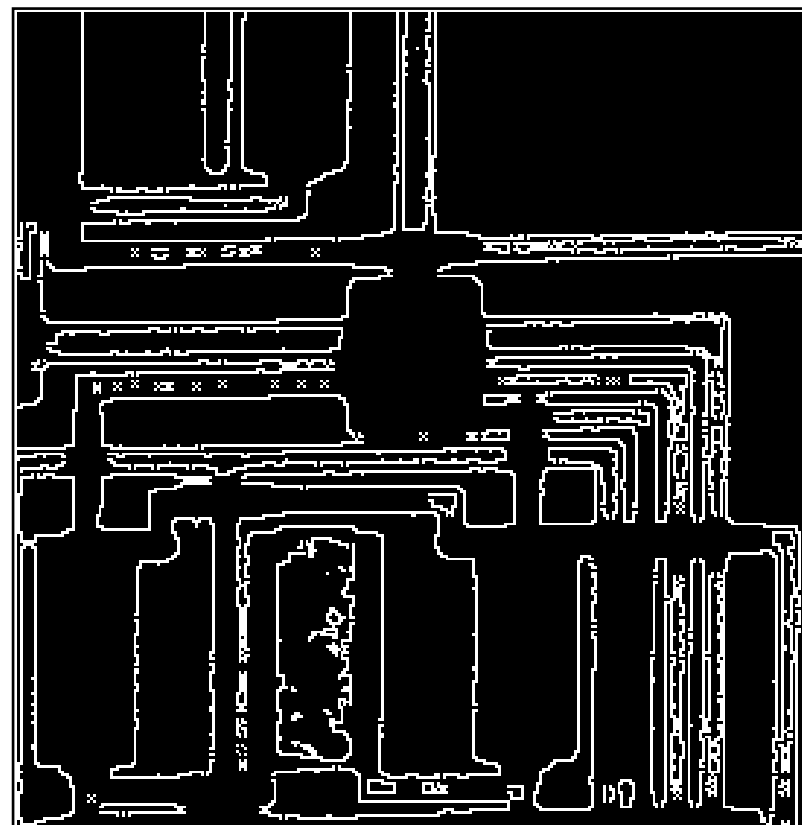
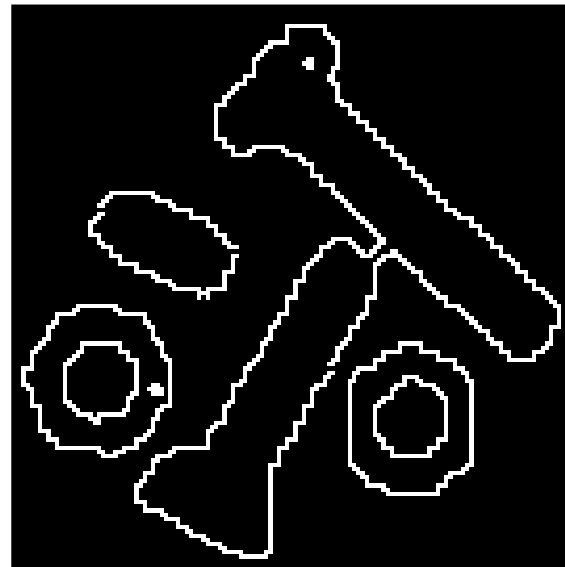
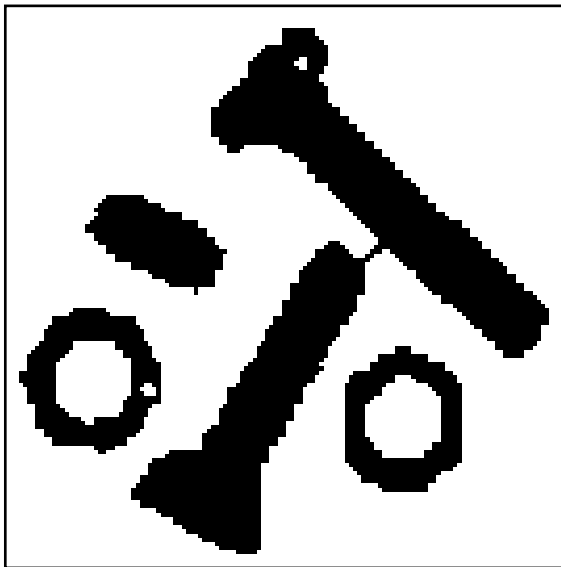


Imagem original



# Morfologia Matemática

## ■ Extração de Fronteiras



**Imagem original**

# Morfologia Matemática

- Extração de Fronteiras

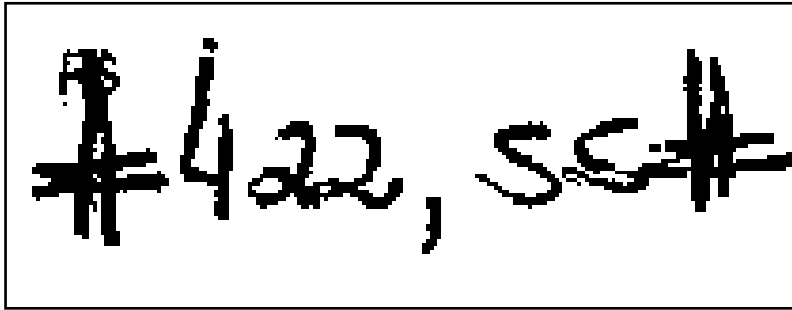
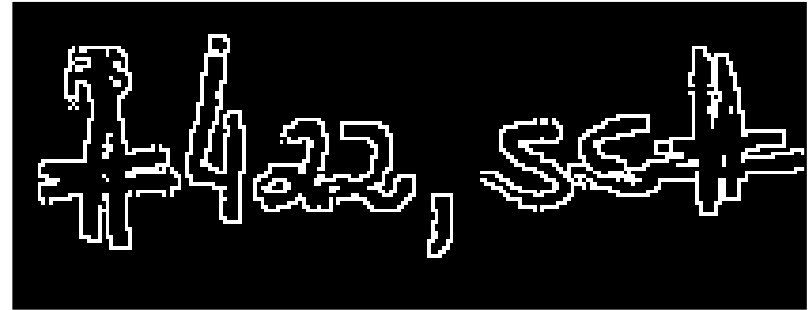


Imagem original





# Morfologia Matemática

---

- Outras operações
  - *Watershed*
  - Esqueletização
  - Afinamento
  - *Hit-and-Miss*
  - Operações aplicadas a imagens em tons de cinza



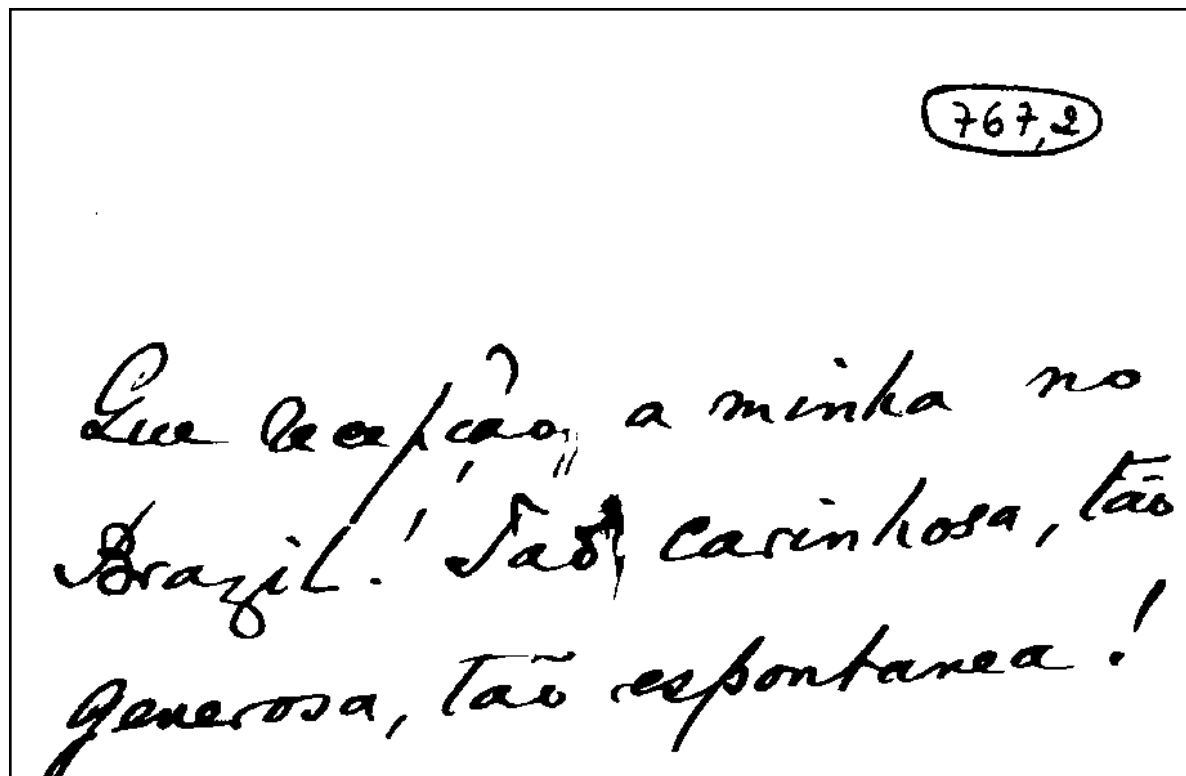
# Morfologia Matemática

---

- Watershed
  - Método de segmentação
  - Pode provocar sobre-segmentação

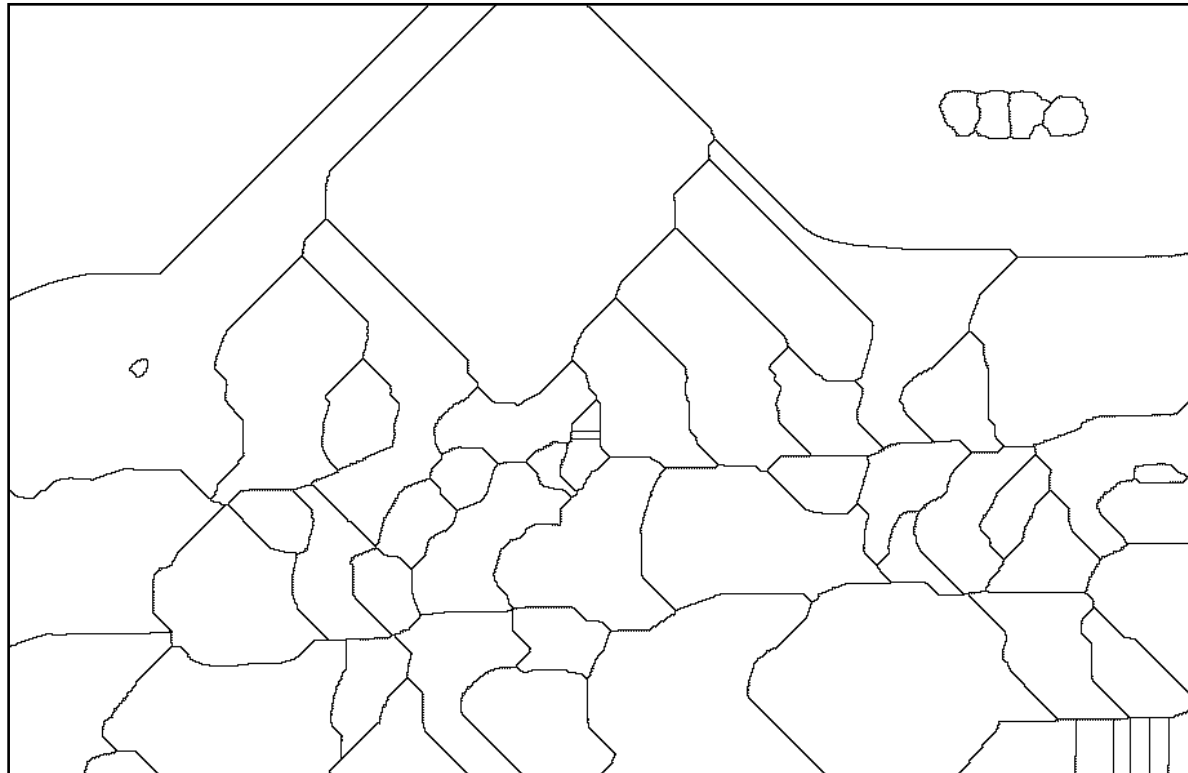
# Morfologia Matemática

## ■ Watershed



# Morfologia Matemática

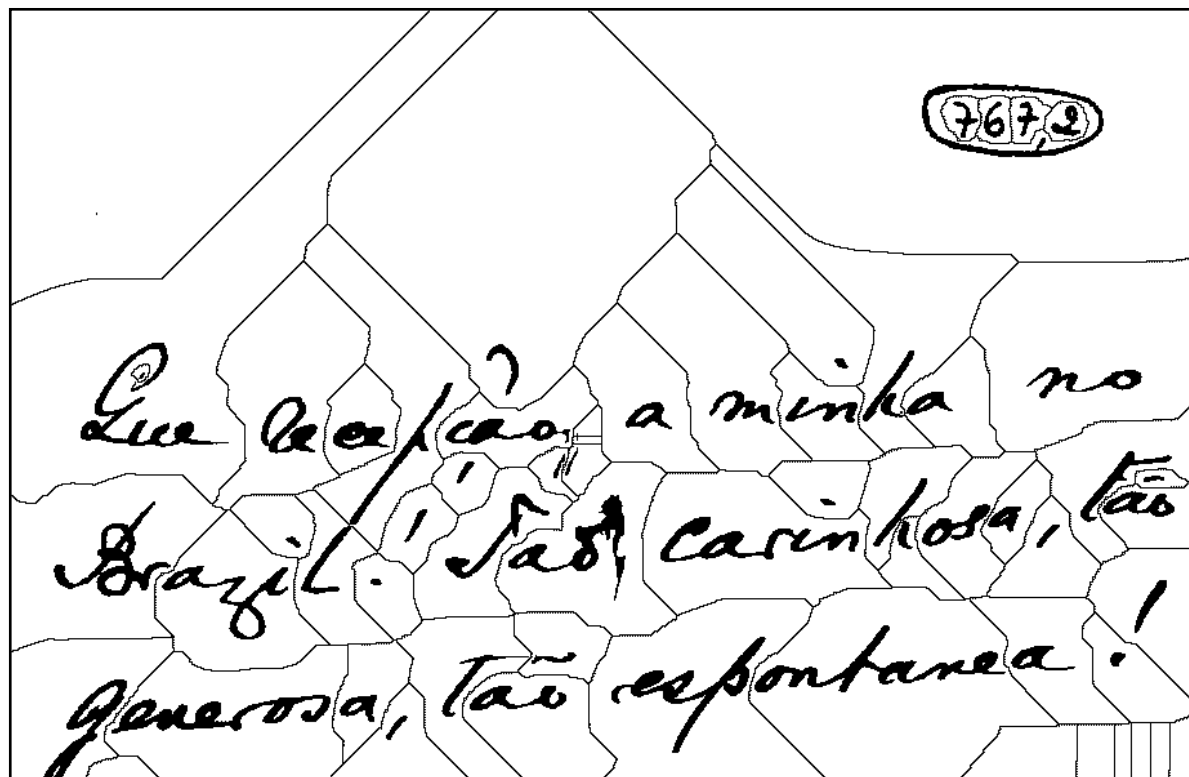
## ■ Watershed





# Morfologia Matemática

## ■ Watershed

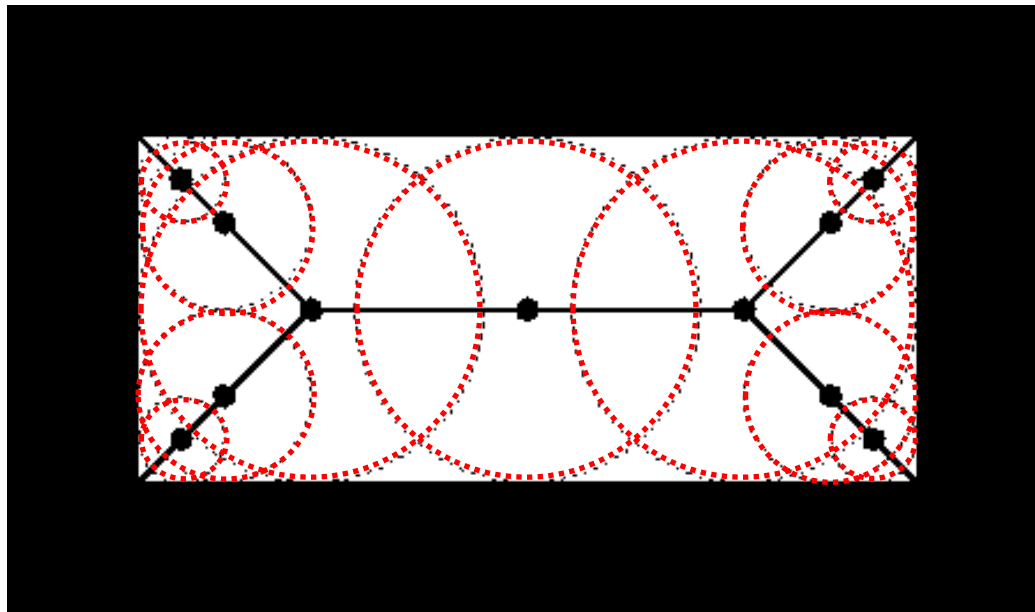


Veremos mais sobre o Watershed em Visão Computacional...

# Morfologia Matemática

## ■ Esqueletização

- O esqueleto é o centro de círculos que tangenciam a região sendo considerada



# Morfologia Matemática

## ■ Esqueletização

### ■ Alcançado por sucessivas erosões

- `>> im = imread('numeros.bmp');`
- `>> BW2 = bwmorph(im,'skel',Inf);`
  - 'Inf' provoca a aplicação do algoritmo infinitas vezes até que a imagem não mude



# Morfologia Matemática

- Esqueletização

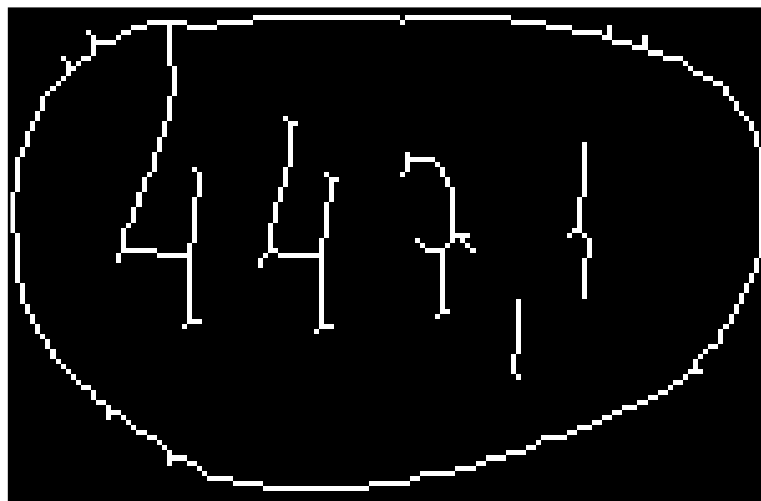
- Aplicação na imagem complementar



Imagem original

# Morfologia Matemática

- Esqueletização



**Esqueleto**

# Morfologia Matemática

- Esqueletização



**Sobreposição**



# Morfologia Matemática

---

- Afinamento (*Thinning*)

- Diversos algoritmos

- Exemplo:

- `>> im = imread('numeros.bmp');`
    - `>> BW2 = bwmorph(im,'thin',Inf);`



# Morfologia Matemática

- Afinamento

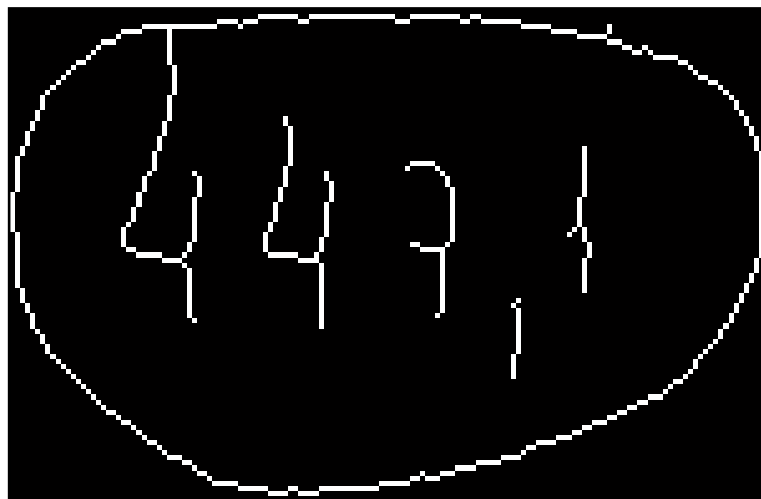


**Sobreposição**



# Morfologia Matemática

- Afinamento



**Afinamento**

# Morfologia Matemática

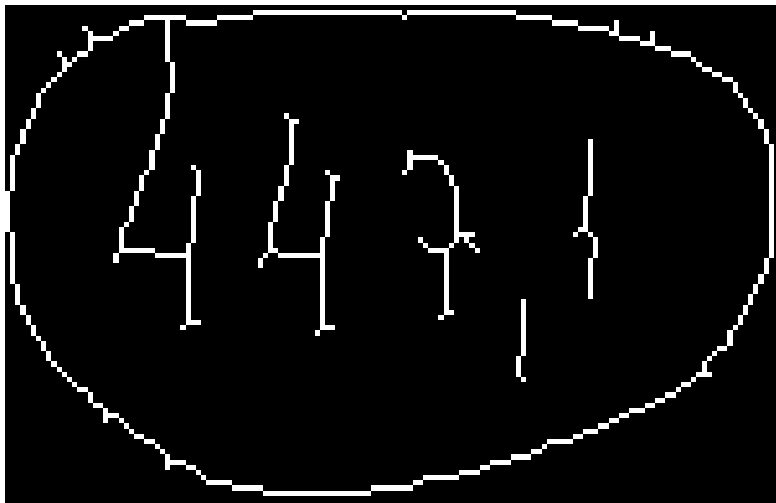
- Afinamento



**Sobreposição**

# Morfologia Matemática

- Esqueletização x Afinamento
  - Observe a diferença



**Esqueleto**



**Afinamento**

# Morfologia Matemática

## ■ Transformação *Hit and Miss*

	1			
Background	0	1	1	Foreground
	0	0		<i>Don't care</i>



# Morfologia Matemática

---

- Transformação *Hit and Miss*
  - Funciona exatamente igual às outras operações morfológicas: o centro do elemento estruturante casa com o elemento sendo processado
  - Se os pixels de foreground e background do element estruturante casam *exatamente* os pixels de foreground e background na imagem, então o pixel sob a origem do elemento estruturante assume a cor do foreground (1)
    - Se não, assume a cor do background (0)

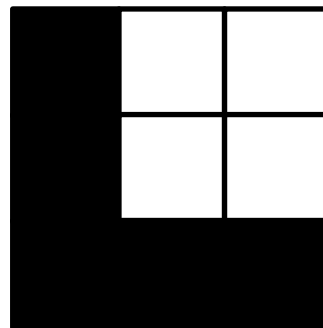
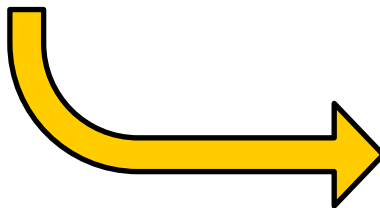
# Morfologia Matemática

## ■ Transformação *Hit and Miss*

### ■ Exemplo:

	1	
0	1	1
0	0	

Encontra um canto inferior esquerdo em uma imagem



# Morfologia Matemática

## ■ Transformação *Hit and Miss*

- Se quiséssemos encontrar todos os cantos, precisaríamos de mais elementos:

	1	
0	1	1
0	0	

	1	
1	1	0
	0	0

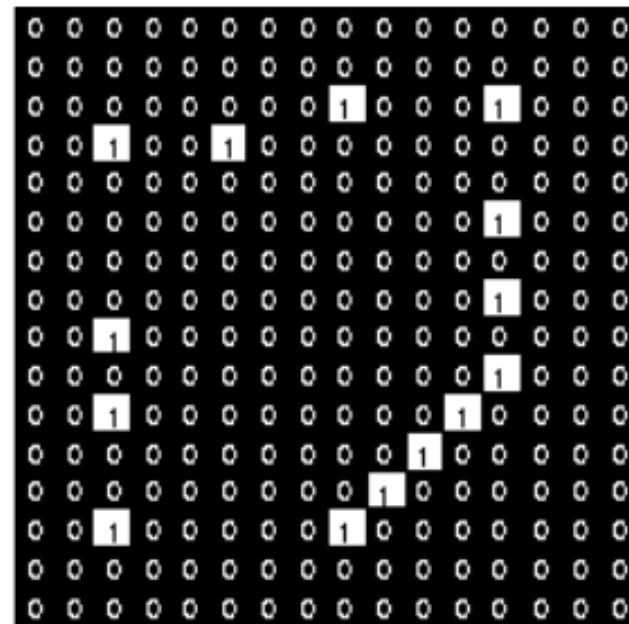
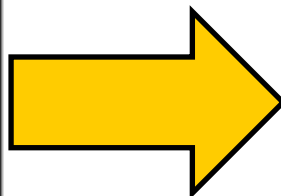
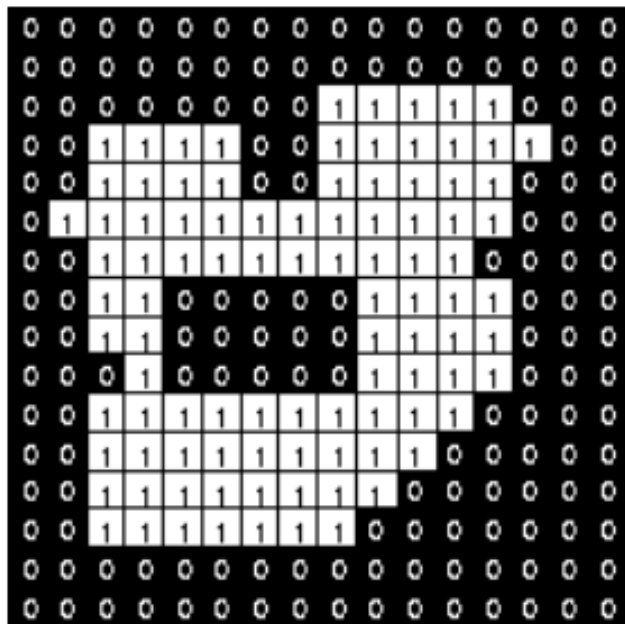
	0	0
1	1	0
	1	

0	0	
0	1	1
	1	

- Observe que o resultado seria apenas se o canto foi encontrado ou não...

# Morfologia Matemática

## ■ Transformação *Hit and Miss*



Resultado da aplicação dos elementos anteriores na imagem da esquerda



# Morfologia Matemática

## ■ Transformação *Hit and Miss*

- Observe, nesse exemplo anterior, que cada elemento precisa passar pela imagem para encontrar o canto referente àquela posição
- Ou seja, a imagem será processada 4 vezes
- Outro exemplo:

0	0	0
0	1	0
0	0	0

Localiza pontos isolados

# Operações em Imagens em Tons de Cinza

## Dilatação

0	1	0
1	1	1
0	1	0

Elemento Estruturante

O resultado é o maior tom sob o elemento estruturante...

10	23	16	19	111
42	19	255	198	111
76	11	32	56	16
16	54	123	78	61
169	49	23	19	139

Imagem de entrada

10	23	16	19	111
42	255	255	255	111
76	76	255	198	16
16	123	123	123	61
169	49	23	19	139

Imagem Final

# Operações em Imagens em Tons de Cinza

## Dilatação



Imagem com ruído  
sal e pimenta

# Operações em Imagens em Tons de Cinza

## Erosão

0	1	0
1	1	1
0	1	0

Elemento Estruturante

O resultado é o menor tom sob o elemento estruturante...

10	23	16	19	111
42	19	255	198	111
76	11	32	56	16
16	54	123	78	61
169	49	23	19	139

Imagem de entrada

10	23	16	19	111
42	11	16	19	111
76	11	11	16	16
16	11	23	19	61
169	49	23	19	139

Imagem Final

# Operações em Imagens em Tons de Cinza

## Erosão



Imagem com ruído  
sal e pimenta



# Referências

---

- <http://mtc-m21b.sid.inpe.br/col/dpi.inpe.br/ismm@80/2007/07.16.14.39/doc/book.pdf>



# Referências

---

- Morfologia no Colab:
  - <https://colab.research.google.com/drive/159D4JXORodmLy8mbtK2PQ73tWFTOSdeT>