

**Universidad Autónoma
de Ciudad Juárez**

INSTITUTO DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA
Departamento de Física y Matemáticas



Estudio de las ecuaciones diferenciales estocásticas en finanzas

Proyecto de Titulación que presenta:
Manjarrez Retes Ricardo Alonso

Como requisito parcial para obtener el título de:
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Asesor:
Dr. Boris Jesús Mederos Madrazo
Coasesor:
Mtro. Antonio Antolín Fonseca

Cd. Juárez, Chihuahua,
26 de noviembre de 2022

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

Departamento de Física y Matemáticas

Proyecto de Titulación. Memoria

**Estudio de las ecuaciones diferenciales
estocásticas en finanzas**

Autor: Manjarrez Retes Ricardo Alonso

Proyecto de Titulación presentado a la Academia de
Matemáticas como requisito parcial para
obtener el título de
Licenciado en Matemáticas por la Universidad Autónoma de
Ciudad Juárez

Programa de Licenciatura
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Asesor: Dr. Boris Jesús Mederos Madrazo
Co-Asesor: Mtro. Antonio Antolín Fonseca

Ciudad Juárez Chihuahua, Noviembre de 2022

Declaración de Originalidad

Yo, Ricardo Alonso Manjarrez Retes, declaro que el material contenido en este documento fue redactado por mí y no es un plagio total o parcial, ni ha sido usado para obtener otro título o reconocimiento en otra institución de educación superior.

A handwritten signature in black ink, consisting of a stylized 'A' followed by the word 'manjarrez' in a cursive script.

Manjarrez Retes Ricardo Alonso

Estudio de las ecuaciones diferenciales estocásticas en finanzas

Los miembros del comité evaluador que aprobaron el manuscrito del proyecto
de titulación de:

Manjarrez Retes Ricardo Alonso

Dr. Boris Jesús Mederos Madrazo _____
Asesor

Mtro. Antonio Antolín Fonseca _____
Coasesor

Dr. Gustavo Tapia Sanchez _____
Sinodal

Dr. Francisco Avila Alvarez _____
Sinodal

Dr. Oscar Hernan Estrada Estrada _____
Sinodal

Nombre del Asesor _____
Profesor de la Materia

Dedicado a todos los matemáticos del mundo....

Resumen

La evolución en la teoría de la probabilidad ha desarrollado nuevas herramientas matemáticas que se pueden llevar a la práctica mediante modelos que sirven para predecir la dinámica de instrumentos financieros a través del tiempo.

Debido a la incorporación del análisis a la probabilidad se logró desarrollar nueva teoría en nuevos espacios como espacios de Banach y espacios de Hilbert que permitieron extender los espacios de probabilidad tradicionales.

En particular la teoría desarrollada en base a los procesos estocásticos permitió el desarrollo de un modelo desplegado por Fischer Black y Myron Scholes. Este modelo ha trascendido en la historia de las matemáticas y de las finanzas y es uno de los modelos más importantes y que, según Ian Stewart [10], se coloca como una de las 17 ecuaciones que cambiaron al mundo.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres por brindarme los valores morales y éticos que me formaron como persona, así como a mis profesores que han sido pilares en mi formación profesional.

Índice general

Resumen	XI
Agradecimientos	XIII
Índice general	XV
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Planteamiento del problema	2
1.3. Solución propuesta	3
1.4. Objetivo general	3
1.5. Objetivos específicos	3
1.6. Justificación	3
1.7. Impactos	4
1.8. Alcances y delimitaciones	4
2. Preliminares	5
2.1. Estructuras algebraicas	5
2.2. Medida de probabilidad	8
2.3. Espacio de probabilidad	9
2.4. Probabilidad condicional e independencia de eventos	10
2.5. Variable aleatoria	12
2.6. Esperanza y varianza	14
2.7. Distribuciones continuas	16
2.8. Convergencia	17
2.9. Esperanza condicional	18
2.10. Procesos estocásticos	21
2.11. Martingalas	21
2.12. Movimiento Browniano	24

3. Ecuaciones diferenciales estocásticas	29
3.1. Integral de Ito	29
3.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas	37
4. Deducción de la Black-Scholes	53
4.1. Pagos en opciones	55
4.2. Pago en posición long call	55
4.3. Arbitraje	56
4.3.1. Replicación	56
4.4. Dinámica del portafolio	57
4.4.1. Condición de autofinanciamiento	57
4.5. Deducción de la Black-Scholes	57
4.5.1. Deducción	58
4.6. Solución de la Black-Scholes	60
5. Aplicación computacional	67
5.1. Programando la Black Scholes	67
5.2. Acciones	69
5.2.1. Cálculo de volatilidad	72
5.2.2. Cálculo del interés	72
5.3. Opciones	73
5.4. Resultados	76
5.4.1. Comparación de precio justo según Black-Scholes vs el precio real de venta	77
5.4.2. Errores	78
5.5. Conclusiones	83
Apéndices	85
A. Conceptos y resultados varios	87
A.1. Notación	87
A.2. Resultados	87
A.2.1. Función de distribución	87
A.2.2. Desigualdades	88
A.2.3. Dos teoremas límite	88
Bibliografía	89

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

La probabilidad actual ha desarrollado nuevas ramas en un periodo corto de tiempo y entre ellas están los procesos estocásticos. Actualmente en el mundo, los problemas de diferente índole abundan, en especial en el mundo de las finanzas y la economía. Una herramienta importante para dar solución a problemas de incertidumbre es la teoría de probabilidad. Los procesos estocásticos son una rama de estudio de la teoría de probabilidad en el que se estudia el comportamiento de las variables aleatorias respecto a un conjunto índices T comúnmente utilizado para referirse al tiempo.

La primera observación del movimiento Browniano, por Robert Brown, data de 1829. Brown reportó en una revista científica que granos de polen suspendidos en una cierta substancia y vistos a través de un microscopio realizaban un movimiento irregular e inexplicable. El movimiento Browniano es el ejemplo más importante de un proceso de Markov a tiempo continuo y con espacio de estados continuo. El primer artículo de la integral de Ito se publica en 1944, ver [5]. Allí se plantea por primera vez y se define la integral estocástica, un elemento importante para el estudio de las ecuaciones diferenciales estocásticas. Mientras tanto Joseph Doob trabajó entre 1940-1950 con teoría de martingalas y dio a conocer por primera vez la propiedad fuerte de Markov y una demostración para un caso particular. En 1948, Paul Pierre Levi sintetiza por primera vez la idea de procesos estocásticos, mostrando una colección de todos los procesos estocásticos que conocemos hasta el momento, ver [6]. Para 1953, Joseph Doob genera una serie de publicaciones en donde se hace un tratamiento riguroso del tema basado principalmente en teoría de la medida, ver [3].

Una ecuación diferencial estocástica es en esencia una ecuación diferencial

tradicional a la cual se le ha añadido un término estocástico. El término determinista describe el comportamiento en promedio del fenómeno bajo estudio y el término estocástico describe el ruido correspondiente a las perturbaciones aleatorias que influyen en el fenómeno. Muchos procesos naturales se describen por medio de ecuaciones diferenciales estocásticas ya que se consideran perturbaciones aleatorias, como la variación del tipo de interés o del tipo de cambio, el valor de una opción financiera, que corresponden a ejemplos en el área de finanzas. Un ejemplo célebre de lo anterior es la ecuación de Black Scholes publicada en 1973 por Fischer Black y Myron Scholes, en el cual se modela el precio de una opción europea o americana mediante una ecuación diferencial estocástica, ver [2].

En el modelo de Black-Scholes se considera que el precio del activo (acción) S sigue la dinámica de un movimiento Browniano geométrico, ver [8],

$$S(t) = S(0) \left(\exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B(t) \right) \right),$$

donde $S(t)$ es el precio de la acción, $B(t)$ es el movimiento Browniano, $S(0)$ es el precio inicial de la acción, μ es la rentabilidad media compuesta y σ es la volatilidad de una acción.

1.2. Planteamiento del problema

Realizando una inspección de artículos en el área de modelos matemáticos en las finanzas y las ciencias sociales, se percibe que no hay una recopilación de publicaciones extensas en el área de teoría de probabilidad y ecuaciones diferenciales estocásticas, sobre todo en idioma español.

El análisis de los modelos matemáticos se extiende en el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, así como en ecuaciones en diferencias, que tienen como solución funciones que no son un proceso estocástico, lo cual es un obstáculo para la solución de distintos problemas que no se pueden describir ni resolver con estos métodos tradicionales.

Por lo tanto, lo que se pretende en este trabajo es presentar un estudio de la teoría de las ecuaciones diferenciales estocásticas a finanzas, demostrando los teoremas de existencia y unicidad, así como la obtención de expresiones matemáticas para las soluciones en el caso de la ecuación de Black-Scholes. Además, presentaremos una implementación en lenguaje Python de ésta.

1.3. Solución propuesta

La solución propuesta a los problemas de la matemática financiera donde está presente el azar que presentaremos consistirá en el uso de las ecuaciones diferenciales estocásticas y el cálculo de Ito para obtener soluciones a la ecuación de Black-Scholes. Además, usaremos el lenguaje Python para implementar el cálculo de las soluciones de dicha ecuación y se aplicará a ejemplos prácticos concretos.

1.4. Objetivo general

Construir modelos probabilísticos que sirvan para explicar y determinar procesos de distintos activos financieros.

1.5. Objetivos específicos

- Presentar una introducción a los procesos estocásticos más importantes en las matemáticas financieras, así como al cálculo de Ito.
- Exponer los aspectos más importantes del movimiento Browniano.
- Presentar una introducción a las ecuaciones diferenciales estocásticas.
- Exhibir las definiciones financieras más importantes para su posterior uso en los modelos probabilísticos.
- Analizar los modelos estocásticos para posteriormente llegar al estudio de la ecuación de Black Scholes.

1.6. Justificación

El estudio de los modelos probabilísticos brinda una herramienta para el desarrollo de las matemáticas aplicadas en el ámbito financiero y económico. Mientras que con modelos de ecuaciones en diferencias o ecuaciones diferenciales ordinarias deterministas es impreciso describir un problema de azar que puede presentar diferentes posibles trayectorias a lo largo del tiempo, como ocurre en el mundo de las finanzas, los modelos probabilísticos brindan más potencial para el entendimiento y la solución de este tipo de problemas. Es de suma importancia conocer y entender estas herramientas para poder aplicarlas en un entorno global; en especial entender la ecuación de Black Scholes es requerimiento para entender las matemáticas y los modelos que se encuentran detrás del mundo financiero.

1.7. Impactos

Dar material que sirva de complementación a materias que involucren modelos matemáticos y teoría de probabilidades.

1.8. Alcances y delimitaciones

Se plantea contribuir a la mejora del conocimiento de los alumnos de la licenciatura en matemáticas de la UACJ, respecto a la modelación matemática en ámbitos sociales como lo son el sector financiero y económico. Así como reforzar el entendimiento y la comprensión que los alumnos ya poseen de los conceptos en la rama de teoría de probabilidades y sus aplicaciones. El avance a través del tiempo como sociedad, genera nuevos mercados y retos que nosotros como sociedad tenemos que afrontar. Es importante seguirnos educando e investigando distintos tipos de modelos matemáticos que nos sirvan para contrarrestar y resolver los nuevos problemas que afectan al mundo presente y al posible mundo futuro.

Capítulo 2

Preliminares

En este apartado, estudiaremos la teoría básica que se empleará como prerrequisito para el capítulo 3.

Comenzaremos definiendo algunos resultados importantes de probabilidad que son necesarios para definir el contexto general y ver en que área de las matemáticas estamos trabajando. Estos conceptos serán de suma relevancia pues son el pilar fundamental de nuestro proyecto. Posteriormente, utilizaremos resultados importantes de teoría de la medida ya que nos resultará conveniente el uso de la integral respecto a una medida. Finalizaremos el capítulo con algunos de los procesos estocásticos más importantes y daremos a conocer sus propiedades; en particular, nuestro tema de interés es el estudio del movimiento Browniano.

2.1. Estructuras algebraicas

Empezaremos esta sección dándole una estructura algebraica a nuestro conjunto Ω y para ello definiremos tres estructuras algebraicas importantes: álgebra, semiálgebra y σ -álgebra. Comenzaremos definiendo un álgebra.

Definición 2.1.1. (Álgebra).

Una colección \mathfrak{A} de subconjuntos de Ω es un álgebra si cumple las siguientes condiciones:

1. $\Omega \in \mathfrak{A}$.
2. Si $A \in \mathfrak{A}$, entonces $A^c \in \mathfrak{A}$.
3. Si $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$, entonces $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathfrak{A}$.

Definición 2.1.2. (Semiálgebra).

Una colección \mathfrak{C} de subconjuntos de Ω es una semiálgebra si cumple las siguientes condiciones:

1. $\Omega \in \mathfrak{C}$.
2. $A, B \in \mathfrak{C}$, entonces $A \cap B \in \mathfrak{C}$.
3. Si $A, A_1 \in \mathfrak{C}$ son tales que $A_1 \subseteq A$, entonces existen $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{C}$ tales que los conjuntos A_1, \dots, A_n son ajenos dos a dos y se cumple que

$$A = \bigcup_{k=1}^n A_k.$$

Ahora estableceremos lo que es una σ -álgebra, la estructura algebraica mas importante para fines de este documento, ya que ella nos permite agrupar ciertos subconjuntos de Ω de nuestro interés y poder calcular su probabilidad. Además, esta estructura, como se verá mas adelante, juega un papel muy importante al momento de definir conjuntos medibles.

Definición 2.1.3. (σ álgebra).

Una colección \mathfrak{F} de subconjuntos de Ω es una σ -álgebra si cumple las siguientes condiciones:

1. $\Omega \in \mathfrak{F}$.
2. Si $A \in \mathfrak{F}$, entonces $A^c \in \mathfrak{F}$.
3. Si $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{F}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$.

Definición 2.1.4. (Conjuntos medibles).

A los elementos que viven en la σ -álgebra los llamaremos conjuntos medibles.

Veamos algunos ejemplos de σ -álgebra.

1. $\mathfrak{F} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$, en donde $A \subseteq \Omega$.
2. $\mathfrak{F} = \{\emptyset, \Omega\}$.
3. $\mathfrak{F} = 2^{\Omega}$.

La definición de σ -álgebra no es única. En el siguiente ejemplo se puede observar que existen distintas maneras de enunciar la definición de σ -álgebra

Ejemplo 2.1.5. Demuestre que \mathfrak{F} es una σ -álgebra de conjuntos de Ω , si y solo si, satisface las siguientes propiedades:

1. $\emptyset \in \mathfrak{F}$.
2. $A \in \mathfrak{F} \implies A^c \in \mathfrak{F}$.
3. si $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{F}$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$.

Demostración. " \implies "

Sea \mathfrak{F} una σ -álgebra de conjuntos de Ω . Por definición $\Omega \in \mathfrak{F}$ entonces $\Omega^c = \emptyset \in \mathfrak{F}$.

Por otra parte, por hipótesis tenemos que $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{F}$, lo que implica que $A_1^c, A_2^c, \dots \in \mathfrak{F}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathfrak{F}$. Por las leyes de Morgan para conjuntos tenemos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^c \in \mathfrak{F}$. Esto implica que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$.
" \Leftarrow "

Supongamos que \mathfrak{F} es una colección de conjuntos de Ω tal que cumple las 3 propiedades del ejemplo 2.1.5. Por hipótesis tenemos que $\emptyset \in \mathfrak{F}$ entonces $\emptyset^c = \Omega \in \mathfrak{F}$.

Sabemos que $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{F}$ implica que $A_1^c, A_2^c, \dots \in \mathfrak{F}$. Entonces, por hipótesis, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \in \mathfrak{F}$. Por las leyes de Morgan, $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)^c \in \mathfrak{F}$. Esto implica que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$. □

Los conceptos de σ -álgebra, álgebra y semiálgebra están relacionados de la siguiente manera:

\mathfrak{F} es σ -álgebra $\implies \mathfrak{F}$ es álgebra $\implies \mathfrak{F}$ es semiálgebra.

Definición 2.1.6. (σ -Álgebra generada).

Sea \mathfrak{C} una colección no vacía de subconjuntos de Ω . La σ -álgebra generada por \mathfrak{C} , denotada por $\sigma(\mathfrak{C})$, es la colección

$$\sigma(\mathfrak{C}) = \bigcap \{ \mathfrak{F} : \mathfrak{F} \text{ es } \sigma\text{-álgebra y } \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{F} \}.$$

Existen distintos tipos de σ -álgebras para asociar subconjuntos de Ω , una de las σ -álgebras que más importancia tendrá a lo largo de los próximos capítulos será la σ -álgebra de Borel.

Definición 2.1.7. (σ -Álgebra de Borel de \mathbb{R}).

A la mínima σ -álgebra generada por la colección de abiertos en los números reales se le llama σ -álgebra de Borel. En símbolos,

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \sigma\{(a, b) \subseteq \mathbb{R} : b \geq a\}.$$

A los elementos de $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ se les llama conjuntos de Borel, Borelianos o conjuntos Borel medibles. Bajo la definición de arriba se puede asociar la σ -álgebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ al conjunto de números reales y así obtener un espacio medible $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. La σ -Álgebra de Borel jugará un papel imprescindible durante los últimos dos capítulos, ya que se necesitará para definir una variable aleatoria, que como se verá más adelante es una función de suma importancia.

Es fácil ver que para cualesquiera números reales a, b con $b \geq a$, los intervalos $[a, b]$, (a, ∞) , $(-\infty, b)$, $[a, b)$ y $\{a\}$, son todos elementos de $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

2.2. Medida de probabilidad

Definición 2.2.1. (Medida de probabilidad).

Sea (Ω, \mathfrak{F}) un espacio medible. Una medida de probabilidad es una función $P : \mathfrak{F} \rightarrow [0, 1]$ que satisface:

1. $P(\Omega) = 1$.
2. $P(A) \geq 0$, para cualquier $A \in \mathfrak{F}$.
3. Si $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{F}$ son ajenos dos a dos, esto es, $A_n \cap A_m = \emptyset$ para $n \neq m$, entonces $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Por lo que a cualquier función P que cumpla con los 3 postulados ya mencionados se le llamara medida de probabilidad.

Definamos ahora alguna de las propiedades elementales que cumple una medida de probabilidad.

Proposición 2.2.1. (Propiedades de una medida de probabilidad).

Sea P una medida en la σ -álgebra \mathfrak{F} entonces:

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Si $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{F}$ son ajenos 2 a 2, entonces

$$P\left(\bigcup_{n=1}^n A_n\right) = \sum_{n=1}^n P(A_n).$$

3. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
4. Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.
5. $1 \geq P(A) \geq 0$.

Demostración. 1. Dado que $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cdots$, donde es obvio que son ajenos 2 a 2, entonces tenemos que

$$P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \cdots,$$

de donde la única solución es

$$P(\emptyset) = 0.$$

2. Consideremos $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$ con A_1, A_2, \dots, A_n ajenos 2 a 2, entonces

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^n A_n\right) = \sum_{n=1}^n P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

3. Dado que $A \cup A^c = \Omega$ y $A \cap A^c = \emptyset$, tenemos que $P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1$, por lo que $P(A) + P(A^c) = 1$.

4. Podemos escribir $B = A \cup (B - A)$. De donde $P(B) = P(A) + P(B - A)$, ahora dado que para cualquier evento la probabilidad es no negativa tenemos que $P(B) - P(A) \geq 0$, despejando obtenemos $P(B) \geq P(A)$.

5. Dado que $A \subseteq \Omega$ se tiene por la propiedad anterior que $P(\Omega) = 1 \geq P(A)$ y por el axioma 2 se tiene que $P(\Omega) = 1 \geq P(A) \geq 0$.

□

Ejemplo 2.2.2. (Probabilidad clásica).

Considere un experimento aleatorio con espacio muestral un conjunto finito Ω . Asociando a este conjunto una σ -álgebra \mathfrak{F} que sea 2^ω el conjunto potencia. Además, definamos una función para cualquier subconjunto A de Ω como $P(A) = \#A/\#\Omega$. Entonces P es una medida de probabilidad y comúnmente es llamada probabilidad clásica.

2.3. Espacio de probabilidad

Una vez definida lo que es una σ -álgebra y una medida de probabilidad sobre un conjunto Ω estamos en posición de definir nuestro espacio de probabilidad. Es en este espacio donde nuestro proyecto está posicionado, los eventos de interés estarán localizados en este tipo de espacio. Así pues, definamos lo que es un espacio de probabilidad.

Definición 2.3.1. (Espacio de probabilidad).

Un espacio de probabilidad es una terna $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, en donde Ω es un conjunto arbitrario, \mathfrak{F} es una σ -álgebra de conjuntos de Ω , y P es una medida de probabilidad definida sobre \mathfrak{F}

Observación 2.3.2. De ahora en adelante a los elementos de la σ -álgebra los llamaremos eventos y tomaremos la definición del ejemplo 2.2.2 para referirnos a un espacio de probabilidad.

Es decir, Ω ya no será un conjunto arbitrario cualquiera, ahora consideraremos el espacio que contiene a todos los resultados de experimentos aleatorios, la σ -álgebra contendrá a todos los subconjuntos de interés para calcular las probabilidades y P será una medida de probabilidad.

2.4. Probabilidad condicional e independencia de eventos

Definición 2.4.1. (Probabilidad condicional).

Sean A y B dos eventos y supongamos que B tiene probabilidad estrictamente positiva. La probabilidad condicional de evento A , dado el evento B , se denota por el símbolo $P(A|B)$ y se define como el cociente:

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B). \quad (2.1)$$

Es decir, el evento B representa un evento que ha ocurrido, y la probabilidad $P(A|B)$ es la probabilidad de A modificada con la información adicional de que B ha ocurrido.

Ejemplo 2.4.2. Considere el experimento de lanzar un dado equilibrado y defina los siguientes eventos:

$A = \{2\}$ = se obtiene el número 2.

$B = \{2, 4, 6\}$ = se obtiene un número par.

Es claro que $P(A) = 1/6$, sin embargo, sabiendo que B ha ocurrido, es decir sabiendo que el resultado es un número par, la probabilidad del evento A es ahora $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = P(\{2\})/P(\{2, 4, 6\}) = (1/6)/(3/6) = 1/3$, es decir, la información adicional de la ocurrencia del evento B ha hecho que la probabilidad de A se incremente de $1/6$ a $1/3$.

Definición 2.4.3. Sea Ω el espacio muestral de un experimento aleatorio. Decimos que la colección $\{B_1, \dots, B_n\}$ es una partición finita de Ω si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $B_i \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, n$.

$$2. B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j.$$

$$3. \bigcup B_i = \Omega.$$

Teorema 2.4.4. (Teorema de probabilidad total).

Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad, y sea $\{B_1, B_2, \dots\}$ una partición de Ω tal que para cada elemento de la partición es un evento con probabilidad estrictamente positiva. Entonces para cualquier evento A ,

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A|B_n)P(B_n). \quad (2.2)$$

Demostración. Dado cualquier evento A , este admite una descomposición disjunta

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (A \cap B_i),$$

de donde se obtiene

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i).$$

□

A continuación definiremos un concepto importante. La independencia de eventos juega un papel fundamental en la probabilidad.

Daremos la definición extendida para varios eventos pero la independencia de 2, 3, \dots , $n - 1$ eventos sigue una generalidad.

Definición 2.4.5. (Independencia de varios eventos).

Los eventos A_1, A_2, \dots, A_n son independientes si se cumplen todas y cada una de las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} P(A_i \cap A_j) &= P(A_i)P(A_j), \quad \text{para } i, j \text{ distintos} \\ P(A_i \cap A_j \cap A_k) &= P(A_i)P(A_j)P(A_k), \quad \text{para } i, j, k \text{ distintos} \\ &\vdots \\ P(A_i \cap \dots \cap A_n) &= P(A_i) \dots P(A_n) \end{aligned}$$

Mas generalmente, una colección infinita de eventos es independiente si cualquier subcolección finita lo es.

Si bien la independencia juega un papel muy importante en probabilidad la definición como tal la podemos interpretar como que la ocurrencia de algún evento no proporcione información que modifique la información de los otros eventos. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2.4.6. *Se lanza una moneda equilibrada 3 veces. Defina los eventos*
 $A = \text{"Se obtiene el mismo resultado en el 1er. y 2do. lanzamiento"}$.
 $B = \text{"Se obtiene el mismo resultado en el 2do. y 3er. lanzamiento"}$.
 $C = \text{"Se obtiene el mismo resultado en el 3er. y 1er. lanzamiento"}$.
Demuestre que los eventos A, B y C son independientes dos a dos, pero no son independientes en su conjunto.

Solución: Primero definamos nuestro conjunto Ω y como ya mencionamos usaremos la definición clásica de probabilidad establecida en 2.2.2.

Así pues, consideremos a Ω el espacio muestral definido por todas las posibles tripletas generadas a partir de tirar una moneda, esto es:

$$\Omega = \{\{sss\}, \{scs\}, \{ssc\}, \{csc\}, \{ccc\}, \{ccs\}, \{css\}, \{scc\}\}$$

donde c =cara y s =sello.

Ahora calcularemos las probabilidades de los eventos antes mencionadas.

No es muy difícil comprobar que $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/2$, $P(C) = 1/2$, ahora calculando

$$P(A \cap B) = 1/4 = P(A)P(B),$$

similarmente tenemos que

$$P(B \cap C) = 1/4 = P(B)P(C)$$

y

$$P(A \cap C) = 1/4 = P(A)P(C).$$

Como podemos observar, según la definición 2.4.5, los conjuntos son ajenos 2 a 2.

Pero nótese que

$$P(A \cap B \cap C) = 1/4 \neq P(A)P(B)P(C) = 1/8,$$

es decir, los conjuntos no son ajenos 3 a 3.

2.5. Variable aleatoria

Antes de pasar a la definición de variable aleatoria será conveniente mencionar algunas definiciones de teoría de la medida, esto es con motivo de suavizar la idea en general.

Definición 2.5.1. (Función medible.)

Sea \mathfrak{F} una σ -álgebra para un espacio X , sea Y un espacio topológico, y sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Decimos que f es medible si para cada abierto V en Y tenemos que $f^{-1}(V) \in \mathfrak{F}$, es decir $f^{-1}(V)$ es un conjunto medible.

Definición 2.5.2. (Medibilidad).

A la condición $f^{-1}(V) \in \mathfrak{F}$ se le llama medibilidad.

Ahora daremos la definición del concepto de más repercusión en todo el documento, el cual es una variable aleatoria.

Definición 2.5.3. (Variable aleatoria).

Una variable aleatoria real es una función $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada cualquier conjunto boreliano B , se cumple que el conjunto $X^{-1}(B)$ es un elemento de \mathfrak{F} .

Es decir, una función que toma como dominio el espacio muestral de todos los resultados del experimento aleatorio bajo estudio y se le asignan números reales con la condición de que para cada Boreliano la imagen inversa de la función sea un conjunto medible.

Recordemos que P es una medida de probabilidad definida sobre el espacio medible (Ω, \mathfrak{F}) .

Veamos un ejemplo de una variable aleatoria

Ejemplo 2.5.4. Suponga que un experimento aleatorio consiste en lanzar al aire una moneda equilibrada y observar la cara superior que cae. Denotemos por *Cara* y *Cruz* los 2 lados de una moneda. Entonces claramente el espacio muestral es el conjunto $\Omega = \{Cara, Cruz\}$.

Definamos la variable aleatoria $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$X(Cara) = 1$ y $X(Cruz) = 0$, de este modo podemos suponer que el experimento aleatorio tiene 2 valores numéricos: el 1 y el 0. Nótese que estos números pudieron ser escogidos de manera arbitraria como valores de la variable aleatoria.

Veamos algunos posibles eventos y sus correspondientes posibilidades.

1. $P(X \in [1, 2)) = P(Cara) = 1/2$.
2. $P(X \in [0, 1)) = P(Cruz) = 1/2$.
3. $P(X \in [2, 4]) = P(\emptyset) = 0$.
4. $P(X = 1) = P(Cara) = 1/2$.

Las variables pueden tomar una infinidad de valores pues su contradominio es \mathbb{R} , si consideramos las posibles elecciones de valores podemos clasificar el tipo de variables aleatorias. Para ello, vamos a considerar 2 tipos de variables aleatorias: las discretas y las continuas.

Si la variable aleatoria toma valores discretos, esto es, si toma valores finitos o

contables la llamaremos variable aleatoria discreta. En caso de que la variable aleatoria tome valores no finitos y no numerables llamaremos a la variable aleatoria continua .

Veamos algunos resultados interesantes de las variables aleatorias.

Resultados importantes de variables aleatorias

1. Si X y Y son variables aleatorias, entonces $X + Y$ es una variable aleatoria.
2. Si Z es una variable aleatoria y a una constante, entonces aX es una variable aleatoria.
3. Si X y Y son variables aleatorias, entonces XY es una variable aleatoria
4. si X y Y son variables aleatorias con $Y \neq 0$, entonces $\frac{X}{Y}$ es una variable aleatoria.

Definición 2.5.5. (σ -álgebra asociada a X).

Si X es una función de Ω a \mathbb{R} , entonces se denota por $\sigma(X)$ a la mínima σ -álgebra de subconjuntos de Ω que hace a X variable aleatoria.

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) | B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$$

Finalizaremos la sección generalizando la definición de una variable aleatoria al estudio de \mathbb{R}^n para vectores aleatorios.

Definición 2.5.6. (Vector aleatorio).

Un vector aleatorio es una función $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que para cualquier conjunto B en $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, se cumple que la imagen inversa $X^{-1}(B)$ es un elemento de \mathfrak{F}

2.6. Esperanza y varianza

Para fines de este documento utilizaremos la integración respecto a una medida, en este caso de probabilidad, para definir lo que es la esperanza y la varianza de una variable aleatoria. Para ello antes de dar la definición estableceremos algunas definiciones de teoría de la medida como son la función indicadora, funciones simples e integración respecto a una medida.

Definición 2.6.1. (Función indicadora).

Sea $E \in \mathfrak{F}$ un conjunto medible. Definimos

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in E \\ 0 & \text{if } x \notin E \end{cases} \quad (2.3)$$

como la función indicadora del conjunto E .

Definición 2.6.2. (Función simple).

Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de medida y sea $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ medible. Decimos que f es simple si f toma una cantidad finita de valores.

Mas generalmente tenemos la siguiente definición:

Definición 2.6.3. (Forma estándar de una función simple).

Sea s una función simple y sean $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{F}$, con $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_n$, y sean a_1, a_2, \dots, a_n los distintos valores que toma la función simple. Definimos

$$s(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x),$$

donde $A_i = \{x \in \Omega : s(x) = a_i\} = s^{-1}(a_i)$.

Definición 2.6.4. (Integración respecto a una medida).

Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $S(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x)$ una función simple que a la vez es una variable aleatoria. Definimos la integral sobre la función simple como:

$$\int_{\Omega} S dP = \sum_{i=1}^n a_i P(A_i)$$

Similarmente, si X es una variable aleatoria en $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ definimos:

$$\int_{\Omega} X dP = \sup \left\{ \int_{\Omega} S dP \right\},$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones simples S , tales $X(x) \geq S(x)$ para todo $x \in \Omega$.

La esperanza es un número que representa el promedio ponderado y sus posibles valores.

Definición 2.6.5. (Valor esperado).

Definimos al valor esperado o esperanza de una variable aleatoria como:

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP. \quad (2.4)$$

Veamos alguna propiedades que cumple la esperanza de una variable aleatoria:

Propiedades:

Sean X, Y variables aleatoria y sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces

1. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
2. $E(aX) = aE(X)$.
3. $E(|X|) \geq |E(X)|$.

La demostración de las propiedades de esperanza son consecuencia inmediata de la definición de integración.

La varianza de una variable aleatoria es una medida del grado de dispersión de los diferentes valores tomados por la variable, la definición es la siguiente:

Definición 2.6.6. (Varianza).

Definimos la varianza como

$$\text{Var}(X) = E(|X - E(X)|^2). \quad (2.5)$$

Propiedades:

1. $\text{Var}(X) \geq 0$.
2. $\text{Var}(c) = 0$, donde c es una constante.
3. $\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X)$.
4. $\text{Var}(c + X) = \text{Var}(X)$.

2.7. Distribuciones continuas

Las variables aleatorias se clasifican según su correspondiente función de distribución. Se pueden clasificar en 3 tipos: continuas, discretas y una mezcla entre los 2. Para fines de este documento, solo estamos interesados en las funciones de distribución continuas, empecemos definiendo lo que es una función de densidad.

Definición 2.7.1. (Función de densidad).

Sea X una variable aleatoria continua. Decimos que la función integrable y no negativa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de densidad de X si para cualquier intervalo $[a, b]$ de \mathbb{R} se cumple la siguiente igualdad:

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x) dx.$$

Definición 2.7.2. (Función de distribución).

Sea X una variable aleatoria cualquiera. La función de distribución de X , denotada por $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, se define como la probabilidad

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Esto es, la función de distribución evaluada en un número x cualquiera es la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor menor o igual a x , o en otras palabras que tome un valor del intervalo $(-\infty, x]$. Para el caso continuo tenemos que $f(x)$ es la función de densidad de X , se tiene que

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du.$$

Definición 2.7.3. (Distribución normal).

Se dice que la variable aleatoria continua X tiene una distribución normal o gaussiana si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2},$$

y se denota como $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, en donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$ son dos parámetros.

Se puede demostrar que: $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$.

Definición 2.7.4. (Distribución log normal).

Si X tiene distribución $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces la variable $Y = e^X$ tiene una distribución log normal (μ, σ^2) , y su función de densidad es

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{y \cdot \sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}} & \text{si } y > 0, \\ 0 & \text{si } 0 \geq y. \end{cases} \quad (2.6)$$

Se puede demostrar que:

$$E(Y) = \exp(\mu + \sigma^2/2),$$

$$Var(Y) = \exp(2\mu + 2\sigma^2) - \exp(2\mu + \sigma^2).$$

2.8. Convergencia

En esta sección daremos a conocer 3 tipos de convergencia que nos serán de relevancia en los siguientes capítulos. Empezaremos por definir convergencia casi segura que se utilizará mas adelante en este capítulo al momento de definir el movimiento Browniano, después definiremos convergencia en probabilidad y finalmente definiremos convergencia en media cuadrada, que nos será útil al momento de trabajar sobre integrales de Ito.

Para empezar a definir convergencia, primero supondremos que existe un espacio

de probabilidad $(P, \Omega, \mathfrak{F})$ en donde una sucesión infinita de variables aleatorias X_1, X_2, \dots están todas ellas definidas. Cabe mencionar que además de los 3 tipos de convergencia que presentaremos en esta sección, existen otros tipos de convergencia en un espacio de probabilidad como lo son: convergencia puntual, convergencia en media y convergencia en distribución.

Podemos pensar a una sucesión de variables aleatorias como una sucesión de funciones, pero a diferencia de los cursos de introducción al análisis y análisis matemático, el dominio de estas funciones es el espacio muestral que no tiene estructura algebraica a excepción la dada por la sigma-álgebra y la medida de probabilidad.

Definición 2.8.1. (Convergencia casi segura).

La sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, X_3, \dots converge casi seguramente a la variable X , si

$$P\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1. \quad (2.7)$$

Es decir, la convergencia casi segura permite que para ciertos valores de ω , la sucesión numérica $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots$ pueda no converger sobre estos valores la medida de probabilidad es cero, es decir es un conjunto de probabilidad cero.

Para indicar convergencia casi segura escribiremos $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ c.s.

Definición 2.8.2. (Convergencia en probabilidad).

La sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, X_3, \dots converge en probabilidad a X , si para cada $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\} = 0.$$

Definición 2.8.3. (Convergencia en media cuadrada).

La sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, X_3, \dots converge en media cuadrada a X , si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|^2) = 0. \quad (2.8)$$

A este tipo de convergencia se le denotará como convergencia en L^2 .

Existen relaciones que unen a estas convergencias como se puede ver en [7], capítulo 7, en donde muestran algunas implicaciones de convergencia, como por ejemplo, que la convergencia casi segura implica la convergencia en probabilidad.

2.9. Esperanza condicional

Definición 2.9.1. (Valor esperado condicional de 2 variables aleatorias).

Sean X y Y dos variables aleatorias. Se define $E(X|Y)$ como una variable aleatoria

que cumple que la variable aleatoria es $\sigma(Y)$ medible. Se define como :

$$\int_A E(X|Y)dP = \int_A XdP, \quad \forall A \in \sigma(Y).$$

Definición 2.9.2. (Valor esperado condicional de una variable aleatoria dado una σ álgebra).

Sea V una σ álgebra. Decimos que $E(X|V)$ es una variable aleatoria V -medible que cumple

$$\int_A E(X|V)dP = \int_A XdP, \quad \forall A \in V.$$

Observación 2.9.3. Para cualesquiera variables aleatoria X y Y tenemos:

1. $E(X|Y)$ es una variable aleatoria.
2. $E(X|Y)$ es $\sigma(Y)$ medible.
3. Dado \mathfrak{F} una σ álgebra se tiene que

$$\int_A E(X|\mathfrak{F})dP = \int_A XdP = E(X), \quad \forall A \in \mathfrak{F}.$$

Veamos algunas propiedades del valor esperado condicional de una variable aleatoria dado una sigma álgebra:

Propiedades:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, X y Y variables aleatorias y \mathfrak{F} una σ álgebra entonces :

1. $E(aX + bY|\mathfrak{F}) = aE(X|\mathfrak{F}) + bE(Y|\mathfrak{F})$.
2. Si X es \mathfrak{F} -medible, entonces $E(X|\mathfrak{F}) = X$.
3. Sea X \mathfrak{F} -medible, entonces $E(XY|\mathfrak{F}) = XE(Y|\mathfrak{F})$.
4. Sea W una σ álgebra tal que $W \subseteq \mathfrak{F}$. Entonces $E(E(X|F)|W) = E(X|W)$.
5. Sea \mathfrak{F} una σ álgebra y X una variable aleatoria independiente de \mathfrak{F} entonces $E(X|\mathfrak{F}) = E(X)$.
6. Si $Y \geq X$, entonces $E(Y|\mathfrak{F}) \geq E(X|\mathfrak{F})$.

La demostración de las propiedades son consecuencia de la definición de valor esperado condicional y por propiedades de la integral.

Ejemplo 2.9.4. Demostrar que

$$E(X|\{\emptyset, B, B^c, \Omega\})(\omega) = \begin{cases} \frac{\int_B X dP}{P(B)} & \text{si } \omega \in B, \\ \frac{\int_{B^c} X dP}{P(B^c)} & \text{si } \omega \in B^c, \\ \int_{\Omega} X dP & \text{si } \omega \in \Omega, \\ 0 & \text{si } \omega \in \emptyset. \end{cases}$$

Demostración. Según la definición tenemos que calcular la integral de medida sobre cada elemento A de la σ -álgebra.

Si $A=\emptyset$, $\int_{\emptyset} X dP = 0$

$$\text{Si } A=B, \int_B \left(\frac{\int_B X dP}{P(B)} \right) dP = \frac{\int_B X dP}{P(B)} \int_B dP = \frac{\int_B X dP}{P(B)} P(B) = \int_B X dP$$

$$\text{Si } A=B^c, \int_{B^c} \left(\frac{\int_{B^c} X dP}{P(B^c)} \right) dP = \frac{\int_{B^c} X dP}{P(B^c)} \int_{B^c} dP = \frac{\int_{B^c} X dP}{P(B^c)} P(B^c) = \int_{B^c} X dP$$

Si $A=\Omega$, tomando que $P(\Omega) = 1$ y que $B \cup B^c = \Omega$ tenemos que $\int_{B \cup B^c} X dP = \int_B X dP + \int_{B^c} X dP$ de donde se sigue el resultado. \square

Ejemplo 2.9.5. Sea $\Omega = \{-1, 0, 1\}$, $\mathfrak{F} = \{\emptyset, \{-1\}, \{0, 1\}, \Omega\}$ y $X(\omega) = \omega$, y además $P(\{0\}) = P(\{1\}) = P(\{-1\}) = 1/3$. Calcular $E(X|\mathfrak{F})$

Solución:

Si $w = -1$, por el ejercicio anterior

$$\begin{aligned} E(X|\mathfrak{F})(-1) &= \frac{\int_{\{-1\}} X dP}{P(\{-1\})} = \frac{\int_{\{-1\}} -1 dP}{\frac{1}{3}} \\ &= -3 \int_{\{-1\}} dP = -3P(\{-1\}) = -1 \end{aligned}$$

Si $w = 0$,

$$E(X|\mathfrak{F})(0) = \frac{\int_{\{0,1\}} X dP}{P(\{0,1\})} = \frac{\int_{\{0,1\}} X dP}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \left(\int_{\{0\}} X dP + \int_{\{1\}} X dP \right)$$

de donde aplicando que $X(w) = w$ tenemos que

$$\frac{3}{2} \left(\int_{\{0\}} 0 dP + \int_{\{1\}} 1 dP \right) = \frac{3}{2} \left(\int_{\{1\}} 1 dP \right) = \frac{3}{2} P(\{1\}) = 1/2.$$

Si $w = 1$, se obtiene el mismo resultado de manera similar, es decir

$$E(X|\mathfrak{F})(1) = E(X|\mathfrak{F})(0) = 1/2.$$

2.10. Procesos estocásticos

Empecemos esta sección considerando un sistema el cual tiene la propiedad de pasar de estados. Supongamos que el sistema constantemente cambia de un estado a otro estado en el tiempo de acuerdo a ciertas restricciones de sistema. Consideremos un tiempo t y a X_t el estado del sistema en el tiempo t . Supongamos también que el sistema evoluciona de una forma al azar, entonces X_t es una variable aleatoria a través del tiempo para cada valor de t . La colección de estas variables aleatorias a través del tiempo es a lo que llamaremos un proceso estocástico y nos será de suma relevancia para estudiar procesos donde el sistema cambia aleatoriamente en el tiempo.

Definición 2.10.1. (Proceso estocástico).

Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{X_t : t \in \mathfrak{T}\}$ parametrizada por un conjunto \mathfrak{T} , llamado espacio parametral, en donde las variables toman valores en un conjunto \mathfrak{S} llamado espacio de estados.

En el caso que espacio parametral \mathfrak{T} , tome el conjunto discreto $\mathfrak{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$ se dirá que es un proceso a tiempo discreto y se denotara como $\{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$. De manera similar, si $\mathfrak{T} = [0, \infty]$, se dirá que es un proceso a tiempo continuo y se denotara como $\{X_t : t \geq 0\}$.

Existen distintos tipos de procesos estocásticos algunos de estos son: proceso de ensayos independientes, procesos de markov, procesos estacionarios, procesos con incrementos estacionarios, martingalas, procesos gaussianos, etc. Para interés del proyecto, solo estaremos interesados en 2 procesos estocásticos los cuales son: martingalas y procesos gaussianos.

2.11. Martingalas

Esta sección es de suma importancia para fines probabilísticos con aplicaciones a las finanzas pues las martingalas brindan herramienta matemática probabilística para juegos de apuestas.

Empezaremos la sección planteando algunas definiciones y propiedades matemáticas de las martingalas y después haremos uso de esta herramienta en el uso de juegos de apuestas.

Definición 2.11.1. (Filtración respecto a una σ -álgebra).

Una secuencia de σ -álgebras $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ que cumplen $f_0 \subseteq f_1 \subseteq f_2 \subseteq f_3 \subseteq \dots$ se le denomina filtración. En particular la filtración canónica de un proceso estocástico

es aquella sucesión de álgebras definidas por

$$\mathfrak{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{para } n \geq 1$$

Definición 2.11.2. (Proceso adaptado).

Se dice que un proceso estocástico $\{X_n : n \geq 1\}$ es adaptado a una filtración $\{\mathfrak{F}_n\}_{n \geq 1}$ si la variable X_n es \mathfrak{F}_n -medible, para cada $n \geq 1$

Definición 2.11.3. (Tiempo de paro).

Una variable aleatoria t con valores en $\{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ es un tiempo de paro respecto de una filtración $\{\mathfrak{F}_n\}_{n \geq 1}$ si para cada $n \geq 1$ se cumple $(t \leq n) \in \mathfrak{F}_n$.

Definición 2.11.4. (Martingala).

Sea $A = \{\mathfrak{F}_k\}_{k=0}^\infty$ una filtración y sea $B = \{X_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ un proceso estocástico a tiempo discreto. Se dice que el proceso estocástico B es una martingala respecto a una la filtración A si se cumplen las tres condiciones:

1. Es integrable.
2. Es adaptado a la filtración.
3. Para cualesquiera $i \leq j$,

$$E(X_i | \mathfrak{F}_j) = X_i. \quad (2.9)$$

Cuando en lugar de 2.9 se cumple $E(X_i | \mathfrak{F}_j) \geq X_i$, entonces el proceso es una submartingala, y si $E(X_i | \mathfrak{F}_j) \leq X_i$, entonces es una supermartingala.

Veamos algunos ejemplos de martingalas

Ejemplo 2.11.5. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ variables aleatorias independientes con medida 0, es decir, $E(X_i) = 0 \quad \forall X_i$.

Definamos $S_1 = X_1, S_2 = X_1 + X_2, \dots, S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ y definamos $\mathfrak{F}_1 = \sigma(X_1), \mathfrak{F}_2 = \sigma(X_1, X_2), \dots, \mathfrak{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Entonces el proceso estocástico $\{S_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ es una martingala.

Demostración.

$$E(S_n | \mathfrak{F}_{n-1}) = E(S_{n-1} + X_n | \mathfrak{F}_{n-1}).$$

Aplicando la propiedad 1 del valor esperado condicional, tenemos que

$$E(S_{n-1} | \mathfrak{F}_{n-1}) + E(X_n | \mathfrak{F}_{n-1}).$$

Aplicando la propiedad 3 del valor esperado para el primer término del sumando y la propiedad 5 para el segundo miembro del sumando, obtenemos

$$S_{n-1} + E(X_n) = S_{n-1}.$$

Ahora, sea $n > m$, entonces

$$E(S_n|f_m) = E(E(S_n|f_{n-1})|f_m) = E(S_{n-1}|f_m) \quad (\text{por propiedad 4}).$$

Aplicando de nuevo la propiedad 4, tenemos que

$$E(E(S_{n-1}|f_{n-2})|f_m) = E(S_{n-2}|f_m).$$

Aplicando un proceso inductivo obtenemos

$$E(S_m|f_m) = S_m,$$

esto último por la propiedad 3. □

Las martingalas tienen una interpretación en juegos de apuestas justos.

Ejemplo 2.11.6. Supongamos que X_i denota el capital de ganancia de un jugador en la apuesta i , con X_i variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas y definamos una nueva variable aleatoria S_n de la siguiente manera:

$$S_n = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \cdots + X_n$$

es decir S_n es la ganancia total de un jugador después de n apuestas y consideremos la filtración $\mathfrak{F}_n = \sigma(S_1, S_2, \dots, S_n)$, con $E(X_i) = 0$, es decir el promedio de las apuestas es 0. Entonces el proceso estocástico $\{S_n : n \geq 1\}$ es una martingala.

Solución:

Claramente el proceso $\{S_n : n \geq 1\}$ es integrable y adaptado. Además, para cada $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} E(S_{n+1}|\mathfrak{F}_n) &= E(X_{n+1} + S_n|\mathfrak{F}_n) \\ &= E(X_{n+1}|\mathfrak{F}_n) + E(S_n|\mathfrak{F}_n) \\ &= S_n + E(X_{n+1}) \\ &= S_n \end{aligned}$$

Observación 2.11.7. Definiendo X_i la ganancia obtenida en la apuesta i y $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \cdots + X_n$ interpretado a la ganancia después de n apuestas, entonces la igualdad 2.9 establece que la fortuna en promedio del jugador a un tiempo futuro i , conociendo la historia del juego hasta un tiempo j , implica que el juego en promedio es justo, pues nadie pierde ni gana. En el caso que el proceso sea una submartingala equivale a decir que el juego es favorable para el jugador pues en promedio el valor esperado de la ganancia es mayor que cada apuesta. En el caso contrario cuando el proceso es una supermartingala se dice que el juego es desfavorable para el jugador pues en promedio la ganancia total es menor que la suma de cada apuesta realizada por el jugador.

2.12. Movimiento Browniano

Este es el proceso estocástico de mayor relevancia del texto pues como veremos en el capítulo 3 el ruido generado en las trayectorias de acciones siguen un movimiento geométrico Browniano que es un tipo especial de movimiento Browniano. Si bien el nacimiento del movimiento Browniano tiene orígenes en la biología y es explicado mediante el movimiento irregular de partículas de polen en cierta sustancia líquida. Nosotros estamos interesados en el objeto matemático al que llamaremos Proceso de Wiener.

Definición 2.12.1. (Movimiento Browniano).

Un movimiento Browniano unidimensional de parámetro σ^2 es un proceso estocástico $\{W_t : t \geq 0\}$ con valores en \mathbb{R} que cumple las siguientes propiedades.

1. $W(0) = 0$ c.s
2. Las trayectorias son continuas
3. El proceso tiene incrementos independientes
4. Para cualesquiera tiempos $0 \leq s < t$, la variable incremento $W_t - W_s$ tiene distribución $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t - s))$

Observación 2.12.2. Los incrementos independientes de la propiedad 2 se denota como

si $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ entonces $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ son variables aleatorias independientes.

Se dice que un movimiento Browniano es estándar cuando $\sigma^2 = 1$.

Para propósito de este documento usaremos la forma estándar del movimiento Browniano es decir, de ahora en adelante supondremos que el incremento $W_t - W_s$ tiene distribución $\mathcal{N}(0, (t - s))$ es decir cada W_t tiene distribución $\mathcal{N}(0, t)$

A partir de esta suposición podemos obtener algunas propiedades básicas como lo veremos a continuación.

Propiedades

1. $E(W_t) = 0$.
2. $E((W_t)^2) = t$.
3. $E(W_t W_s) = \min\{t, s\}$.

Demostración. Veamos inciso por inciso.

1. El resultado es trivial pues cada W_t tiene distribución $\mathcal{N}(0, t)$.
2. Dado que $Var(W_t) = E(W_t^2) - E(W_t)^2 = E(W_t^2) - 0 = E(W_t^2) = t$.
3. supongamos que $t > s$ entonces

$$E((W_t W_s)) = E((W_t - W_s + W_s)W_s) = E((W_t - W_s)W_s + W_s^2) =$$

$$E((W_t - W_s)W_s) + E(W_s^2) = E(W_t - W_s)E(W_s) + s = s = \min\{t, s\}$$
de manera similar si $s > t$ obtenemos $t = \min\{t, s\}$ \square

Consideremos 2 sigmas-álgebras que en el capítulo 3 y 4 serán de importancia.

$$\mathfrak{W}(s) = \sigma(W_t : 0 \leq s \leq t)$$

a la sigma-álgebra \mathfrak{W} la interpretaremos como la historia del proceso estocástico hasta el tiempo t .

$$\mathfrak{w}(s) = \sigma(W_t - W_s : \forall t \geq s)$$

a la sigma-álgebra \mathfrak{w} la interpretaremos como el futuro del proceso estocástico a partir del tiempo s .

Como una consecuencia de que los incrementos del movimiento Browniano son independientes tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.12.1. *El movimiento Browniano es una martingala respecto a su filtración natural.*

Demostración. Claramente el proceso es adaptado a su filtración canónica natural y cada variable aleatoria del proceso es integrable. Tomando tiempos s y t tales que $0 \leq s < t$, tenemos que

$$\begin{aligned} E(W_t | \mathfrak{F}_s) &= E(W_t - W_s + W_s | \mathfrak{F}_s) \\ &= E(W_t - W_s | \mathfrak{F}_s) + E(W_s | \mathfrak{F}_s) \\ &= E(W_t - W_s) + W_s \\ &= W_s \end{aligned}$$

\square

Proposición 2.12.2. *El proceso $\{W_t^2 - t : t \geq 0\}$ es una martingala respecto a su filtración natural.*

Demostración. Similarmente a la proposición anterior el proceso es adaptado a su filtración natural, ahora bien dado que cada W_t tiene distribución $\mathcal{N}(0, t)$, entonces $W_t^2 - t$ es integrable. Entonces tomemos $t > s$. Primero calcularemos $E(W_t^2 | \mathfrak{F}_s)$, Nótese que

$$(W_t^2) = (W_t - W_s + W_s)^2 = (W_t - W_s)^2 - 2(W_t - W_s)W_s + W_s^2$$

aplicando valor esperado condicional sobre \mathfrak{F}_s tenemos que

$$E((W_t - W_s)^2 | \mathfrak{F}_s) - 2E((W_t - W_s)W_s | \mathfrak{F}_s) + E(W_s^2 | \mathfrak{F}_s)$$

$$= (t - s) - 2W_s(E(W_t - W_s) | \mathfrak{F}_s) + W_s^2$$

$$= W_s^2 + (t - s)$$

es decir

$$E(W_t^2 | \mathfrak{F}_s) = W_s^2 + (t - s)$$

que no es una martingala, pero restando t en ambos lados de la igualdad tenemos

$$E(W_t^2 - t | \mathfrak{F}_s) = W_s^2 + s \text{ que es una martingala.} \quad \square$$

El movimiento Browniano es en general no diferenciable en ningún punto fijo, se puede demostrar que:

1. Dado un $t_0 \geq 0$ fijo. Con probabilidad uno, el movimiento Browniano $\{W_t : t \geq 0\}$ no es diferenciable en t_0 .
2. Con probabilidad uno, el movimiento Browniano $\{W_t : t \geq 0\}$ no es diferenciable en ningún $t \geq 0$.

Definición 2.12.3. Sea $P = \{a = t_0 < t_1, \dots < t_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Se Define la variación cuadrática de (W_t) como el limite.

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{i+1} - W_i)^2,$$

donde $\|P\| = \sup\{t_i - t_{i-1} : i = 1, 2, \dots, n\}$.

Proposición 2.12.3. La variación cuadrática de una trayectoria del movimiento Browniano sobre el intervalo $[a, b]$ es la longitud del intervalo, es decir,

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{i+1} - W_i)^2 = b - a.$$

Para finalizar el capítulo mencionaremos el movimiento Browniano geométrico pues como se verá en apartado 3, la motivación matemática detrás de esta ecuación proviene de una ecuación diferencial estocástica.

Se demostrará en el capítulo 3 que, el proceso estocástico S_t que satisface la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW,$$

que tiene por solución

$$S_t = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right),$$

se le llamará movimiento Browniano geométrico y servirá para darle precio a una acción.

Se puede extender la definición del movimiento Browniano a \mathbb{R}^n .

Definición 2.12.4. (Movimiento Browniano n-dimensional).

Sean $\{W_1(t)\}, \{W_2(t)\}, \{W_3(t)\}, \dots, \{W_n(t)\}$ movimientos Brownianos independientes unidimensionales. El movimiento Browniano n-dimensional en \mathbb{R}^n es el proceso

$$W(t) = (W_1(t), W_2(t), W_3(t), \dots, W_n(t))$$

.

El movimiento Browniano n-dimensional es un vector aleatorio.

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales estocásticas

A lo largo de este capítulo estudiaremos la teoría básica de las ecuaciones diferenciales estocásticas demostrando resultados importantes. Esta será la herramienta con la cual modelaremos situaciones financieras como el precio justo de un activo o de una opción en el mercado financiero a través del tiempo. Las ecuaciones diferenciales estocásticas tienen aplicaciones en situaciones donde esté de por medio el azar o en trayectorias irregulares como perturbaciones. Es por eso que no solamente se aplican en el campo de las matemáticas, sino que también se usan en diferentes campos como física, biología, demografía, finanzas, economía.

Como se verá en este capítulo las ecuaciones diferenciales estocásticas tienen un tratamiento similar a las ecuaciones diferenciales ordinarias al momento de encontrar soluciones.

3.1. Integral de Ito

El principal objetivo de esta sección será presentar la integral de Ito de un proceso estocástico respecto al movimiento Browniano. Primero definiremos la integral de Ito para procesos simples y más adelante daremos la definición general.

Consideraciones: Supongamos que tenemos un espacio de probabilidad $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$, un movimiento Browniano estándar unidimensional $\{W_t : t \geq 0\}$ y su filtración natural $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$, recordemos que $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0} = \sigma\{W_1, W_2, W_3, W_4, \dots, W_t\}$ es la menor sigma álgebra que hace a W_i medible. Ahora consideremos un proceso estocástico $\{Y_t\}$ de espacio parametral $[0, T]$, y que visto como función $Y : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ es $\mathfrak{F}_T \otimes \mathfrak{B}[0, T]$ medible. Supondremos que el proceso $\{Y_t\}$ es

adaptado.

Definición 3.1.1. (El espacio $L^2(P)$).

Denotaremos por $L^2(P)$ al espacio vectorial de variables aleatorias X que son cuadrado integrables, y que cumplen la siguiente condición

$$\|X\|_{L^2(P)} = (E(|X|^2))^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

$L^2(P)$ es un espacio completo respecto a la norma $\|X\|_{L^2(P)}$, es decir un espacio de Banach.

Definición 3.1.2. (El espacio $L^2(P \times dt)$).

Denotaremos por $L^2(P \times dt)$ al espacio lineal de todos los procesos $X = \{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ que cumplan la siguiente condición

$$\|X\|_{L^2(P \times dt)} = \left(E \left(\int_0^T |X_t|^2 dt \right) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Al igual que el espacio $L^2(P)$, el espacio $L^2(P \times dt)$ es un espacio de Banach respecto a su norma $\|X\|_{L^2(P \times dt)}$.

Ejemplo 3.1.3. Veamos que la función $\|X\|_{L^2(P)}$ es una norma en $L^2(P)$.

Demostración. Consideremos el espacio $L^2(P)$ con la función

$$\|X\|_{L^2(P)} = (E|X_t|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

afirmamos que esta función es una norma en este espacio. En efecto no es difícil ver que $\|\cdot\|_{L^2(P)}$ cumple con las condiciones de una norma.

1. $\|X\|_{L^2(P)} = (E|X_t|^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0$, esto último del hecho que $|X_t|^2 \geq 0$.
2. Supongamos que $\|X\|_{L^2(P)} = 0$, lo que implica que $E|X_t|^2 = 0$, de donde $X_t = 0$.
De manera similar supongamos $X_t = 0$, entonces $|X_t|^2 = 0$, lo que implica $(E|X_t|^2)^{\frac{1}{2}} = 0$.
3. Sea c una constante entonces $(E|cX_t|^2)^{\frac{1}{2}} = (E|c|^2|X_t|^2)^{\frac{1}{2}} = |c|(E|X_t|^2)^{\frac{1}{2}}$, por lo tanto $\|cX\|_{L^2(P)} = |c|\|X\|_{L^2(P)}$.
4. Sea X, Y variables aleatorias cuadrado integrables, entonces

$$\|X + Y\|_{L^2(P)} = (E|X_t + Y_t|^2)^{\frac{1}{2}},$$

por la desigualdad de Minkowski para $r=2$ de la esperanza (ver apéndice A) tenemos

$$\begin{aligned} (E|X_t + Y_t|^2)^{\frac{1}{2}} &\leq (E|X_t|^2)^{\frac{1}{2}} + (E|Y_t|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|X\|_{L^2(P)} + \|Y\|_{L^2(P)} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\|X + Y\|_{L^2(P)} \leq \|X\|_{L^2(P)} + \|Y\|_{L^2(P)}.$$

□

Definición 3.1.4. (Espacio $L^2(0, T)$).

Denotamos por $L^2(0, T)$ al espacio de procesos estocásticos con valores reales $G(\cdot)$ progresivamente medibles y adaptados que cumplen con la condición

$$E \left(\int_0^T G^2 dt \right) < \infty.$$

Definición 3.1.5. (Proceso escalonado en $[0, T]$).

Sea \mathfrak{P} una partición finita del intervalo $[0, T]$, $\mathfrak{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ donde $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$. Un proceso estocástico simple o escalonado es de la forma

$$X_t = \sum_{k=0}^{n-1} X_{t_k} 1_{[t_k, t_{k+1})}(t)$$

donde X_{t_k} es una variable aleatoria \mathfrak{F}_{t_k} -medible y cuadrado integrable. La expresión $1_{[t_k, t_{k+1})}$ corresponde a la función indicadora del intervalo $[t_k, t_{k+1})$.

Un proceso simple es entonces un proceso a trozos. Denotaremos por H_0^2 al espacio de todos los procesos simples y se puede demostrar que el espacio H_0^2 es un espacio vectorial.

Definición 3.1.6. (Integral de Ito para procesos simples).

Sea $X \in H_0^2$ un proceso simple y sea W_t el movimiento Browniano estándar unidimensional, definimos por $I(X)$ a la integral de Ito de un proceso simple respecto al movimiento Browniano como

$$I(X) = \int_0^T X dW := \sum_{k=0}^{n-1} X_{t_k} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}).$$

Propiedades

Sean $X, Y \in H_0^2$, donde X y Y son procesos simples, entonces se cumple:

1. $\int_0^T (aX + bY)dW = a \int_0^T XdW + b \int_0^T YdW.$
2. $E(\int_0^T XdW) = 0.$
3. $E((\int_0^T XdW)^2) = E(\int_0^T X^2 dt).$

Además de las propiedades mencionadas, la integral tiene una propiedad que como se verá más adelante en esta sección es de suma relevancia para hablar de integral de Ito para procesos más generales, que es llamada de **Isometría de Ito**.

Ejemplo 3.1.7. *La integral para procesos simples es cuadrado integrable y además cumple con la llamada isometría de Ito:*

$$\|I(X)\|_{L^2(P)} = \|X\|_{L^2(P \times dt)}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \|I(X)\|_{L^2(P)} &= (E(|\sum_{k=0}^{n-1} X_k(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})|^2))^{\frac{1}{2}} \\ &= (E(\sum_{j,k=0}^{n-1} X_k X_j (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Tomemos $\Delta W_k = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$, entonces tenemos

$$\|I(X)\|_{L^2(P)} = (\sum_{j,k=0}^{n-1} E(X_k X_j (\Delta W_k)(\Delta W_j)))^{\frac{1}{2}}.$$

Usando el hecho que $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ es independiente de X_k y que $E(\Delta W_k) = 0$, obtendríamos que los únicos términos que la suma que no son cero son aquellos términos en los que los subíndices son iguales es decir los términos donde $j = k$

$$\|I(X)\|_{L^2(P)} = (\sum_{k=0}^{n-1} E((X_k^2)(\Delta W_k)^2))^{\frac{1}{2}}.$$

Elevando al cuadrado y definiendo $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$

$$\begin{aligned}
 \|I(X)\|_{L^2(P)}^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} E((X_k^2)(\Delta W_k)^2)) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} E(X_k^2) \Delta t_k \\
 &= E \left(\int_0^T |X_t|^2 dt \right) \\
 &= \|X\|_{L^2(P \times dt)}^2
 \end{aligned}$$

□

Hemos definido 3 espacios H_0^2 , $L^2(0, T)$, $L^2(P \times dt)$, es normal preguntarse si existe alguna relación entre estos 3 tipos de espacios, y la respuesta es sí.

Observación 3.1.8. *Se puede demostrar que:*

1. El espacio $L^2(0, T)$ es un subespacio lineal cerrado de $L^2(P \times dt)$.
2. Todo proceso simple es un elemento de $L^2(0, T)$.
3. $H_0^2 \subset L^2(0, T) \subset L^2(P \times dt)$.
4. H_0^2 es denso en $L^2(0, T)$ respecto a la norma en $L^2(P \times dt)$.

Lema 3.1.9. (Aproximación Mediante procesos simples).

Sea $X \in L^2(0, T)$ entonces existe una secuencia de procesos simples acotados $X_n \in H_0^2$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\int_0^T |X - X_n|^2 dt \right) = 0.$$

Definición 3.1.10. Sea X un proceso en $L^2(0, T)$, y sea X_k una sucesión de procesos simples en H_0^2 aproximante a X . Se define la integral estocástica de X como

$$I(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} I(X_k),$$

o equivalentemente

$$\int_0^T X dW = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T X_k dW.$$

Donde el límite está dentro de $L^2(P)$, es decir, se trata de la convergencia en media cuadrática de una sucesión de variables aleatorias.

Proposición 3.1.1. (Propiedades).

Sean $X, Y \in L^2(0, T)$, entonces se cumple:

1. $\int_0^T (aX + bY)dW = a \int_0^T XdW + b \int_0^T YdW.$
2. $E(\int_0^T XdW) = 0.$
3. $E((\int_0^T XdW)^2) = E(\int_0^T X^2 dt).$
4. $E(\int_0^T XdW \int_0^T YdW) = E(\int_0^T XY dt).$

La demostración de las propiedades son consecuencia inmediata de que todo proceso en $L^2(0, T)$ se puede expresar mediante una aproximación de procesos simples.

Definimos la isometría para cualquier proceso simple, ver 3.1.7, ahora definámoslo para cualquier proceso $L^2(0, T)$.

Proposición 3.1.2. (Isometría de Ito).

Para cualquier proceso X en $L^2(0, T)$ se cumple

$$\|I(X)\|_{L^2(P)} = \|X\|_{L^2(P \times dt)}.$$

Demostración. Ver [8]. □

Ejemplo 3.1.11. Sea $\{X_k\}$ una sucesión de funciones simples convergentes a una variable $X \in L^2(0, T)$. Usando la isometría de Ito podemos comprobar que la sucesión $I(X_n)$ es una sucesión de Cauchy en el espacio $L^2(P)$.

Demostración. Tomemos $\{X_n\}$ una sucesión de funciones simples en H_0^2 convergente a X en $L^2(0, T)$, sea $h \in \mathbb{N}$ tal que $h < k, l$ entonces

$$\begin{aligned} \|I(X_k) - I(X_l)\|_{L^2(P)} &= \|I(X_k - X_l)\|_{L^2(P)} \\ &= \|X_k - X_l\|_{L^2(P \times dt)} < \epsilon. \end{aligned}$$

Esto ultimo dado que $\{X_n\}$ es de Cauchy. □

Observación 3.1.12. Se puede seguir ampliando el concepto para extender la integral de Ito a procesos medibles y adaptados que cumplan con una condición menos estricta, que es el caso de **la extensión por localización** (denotada por \mathbb{L}_{LOC}^2) y se puede emplear para aproximar la integral de Ito del movimiento Browniano mediante

$$\int_0^T W_t dW = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} W_{t_k} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}).$$

La tarea de calcular integrales estocásticas entonces parece una tarea larga y tediosa por el hecho de estar calculando límites y sumas, nos gustaría tener una formula general que, a partir de una función continua obtener de manera rápida y practica la integral. Este método si existe y será conocido como **integral de Ito** y será no solo la herramienta principal para calcular integrales estocásticas sino que también nos ayudara a resolver ecuaciones diferenciales estocásticas. Antes de pasar a ella veamos un resultado interesante.

Proposición 3.1.3. *Sea W_t el movimiento Browniano estándar unidimensional y sea P una partición del intervalo $[0, t]$, entonces tenemos*

1. $\lim_{||P|| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n W_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$
2. $\lim_{||P|| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n W_{t_i}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = \frac{1}{2}W_t^2 + \frac{1}{2}t$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n W_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) &= \sum_{i=0}^n (W_{t_i}W_{t_{i-1}} - W_{t_{i-1}}^2) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (2W_{t_i}W_{t_{i-1}} - \sum_{i=0}^n W_{t_{i-1}}^2 - \sum_{i=0}^n W_{t_{i-1}}^2) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (2W_{t_i}W_{t_{i-1}} - \sum_{i=0}^n W_{t_{i-1}}^2 - \sum_{i=0}^n W_{t_i}^2 + W_t^2) \\
 &= \frac{1}{2} (W_t^2 - \sum_{i=0}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2) \\
 &= \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2.
 \end{aligned}$$

Aplicando límite a esta ultima expresión tenemos

$$\frac{1}{2}W_t^2 - \lim_{||P|| \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

La demostración del inciso 2 es similar a la del inciso 1. □

Teorema 3.1.13. (Fórmula de Ito 1).

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 , entonces:

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_s)dW + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s)ds. \quad (3.1)$$

Demostración. Ver [9] capítulo 8. □

Veamos algunas aplicaciones de la fórmula de Ito.

Ejemplo 3.1.14. Dado $f(x) = \text{sen}(x)$ cuyas derivadas son $f'(x) = \cos(x)$ y $f''(x) = -\text{sen}(x)$, Entonces la fórmula de Ito nos dice que el proceso $f(W_t)$ satisface la siguiente igualdad

$$\begin{aligned}\text{sen}(W_t) - 0 &= \int_0^T \cos(W_s) dW + \frac{1}{2} \int_0^T -\text{sen}(W_s) ds \\ \int_0^T \cos(W_s) dW &= \text{sen}(W_t) - \frac{1}{2} \int_0^T \text{sen}(W_s) ds.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.15. Consideremos $f(x) = \frac{1}{2} \text{sen}^2(x)$ con derivadas $f'(x) = \text{sen}(x)\cos(x) = \frac{1}{2} \text{sen}(2x)$ y $f''(x) = \cos(2x)$ entonces:

$$\int_0^T \text{sen}(W_s)\cos(W_s) dW = \frac{1}{2} \text{sen}^2(W_t) - \frac{1}{2} \int_0^T \cos(2W_s) ds.$$

Ejemplo 3.1.16. Tomemos $f(x) = \text{sen}(x) - x\cos(x)$ entonces:

$$\begin{aligned}\int_0^T W_s \text{sen}(W_s) dW &= \text{sen}(W_t) - W_t \cos(W_t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^T (\text{sen}(W_s) + W_s \cos(W_s)) ds.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.1.17. Tomemos $f(x) = e^x$ entonces:

$$\int_0^T e^{W_s} dW = e^{W_t} - 1 - \frac{1}{2} \int_0^T e^{W_s} ds.$$

¿Que hemos obtenido de la fórmula de Ito y porque es tan importante para la solución de ecuaciones diferenciales?

Veamos la forma integral de la ecuación del último ejemplo

$$\int_0^T e^{W_s} dW = e^{W_t} - 1 - \frac{1}{2} \int_0^T e^{W_s} ds,$$

esto es equivalente a su forma diferencial a

$$d(e_t^W) = \frac{1}{2}(e_t^W)dt + (e_t^W)dW.$$

Si definimos el proceso $e^{W_t} = X_t$

$$d(X_t) = \frac{1}{2}(X_t)dt + (X_t)dW$$

esta última ecuación es a las que llamaremos una ecuación diferencial estocástica que en este caso el proceso solución es e^{W_t} .

3.2. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Comenzaremos definiendo lo que es una ecuación diferencial estocástica.

Definición 3.2.1. (Ecuación diferencial estocástica).

Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad, y sea $\{W_t : t \geq 0\}$ un movimiento Browniano unidimensional adaptado a la filtración $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \geq 0}$. Sean $b(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ dos funciones de $[0, T] \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R} . Una ecuación estocástica es una ecuación de la forma

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW \quad (3.2)$$

La ecuación (3.2) es equivalente a la ecuación integral

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW, \quad (3.3)$$

definida para valores de t en el intervalo $[0, T]$, y con la condición inicial la variable aleatoria X_0 que es \mathfrak{F}_0 -medible e independiente del movimiento Browniano.

La primera integral de (3.3) es una integral de Riemann mientras que la segunda integral es una integral de Ito. El proceso X_t tiene la forma de (3.3) se le llamara proceso de Ito. Por lo tanto, una ecuación diferencial estocástica es en esencia una ecuación diferencial tradicional solo que se le ha agregado un término estocástico.

Proceso solución: Un proceso $\{X_t\}_{t_0 \leq t \leq T}$ se llamara solución de 3.2 si cumple con:

1. $\{X_t\}$ es continua y $\{\mathfrak{F}_t\}$ adaptada, donde \mathfrak{F}_t se tomará como la sigma álgebra conocida como la filtración natural.
2. La ecuación 3.3 para todo $t \in [t_0, T]$ con probabilidad 1.
3. $\{b(t, X_t)\} \in L^1$ y $\{\sigma(t, X_t)\} \in L^2$.

Recordemos que en el capítulo 2, en la sección de movimiento Browniano definimos 2 -álgebras importantes, las cuales eran conocidas como: la historia del proceso Browniano y el futuro del proceso Browniano. Recordemos que la sigma álgebra conocida como la historia del proceso Browniano es

$$\mathfrak{W}(s) = \sigma(W_t : 0 \leq s \leq t)$$

y la interpretaremos como la historia del proceso estocástico hasta el tiempo t .

Al igual que en el caso determinista se le debe exigir condiciones a los coeficientes de la ecuación diferencial estocástica para que las soluciones existan y sean únicas. A partir de ello tenemos el siguiente teorema de existencia y unicidad de una ecuación diferencial estocástica. Daremos la demostración del teorema de existencia y unicidad para un proceso más general que es el caso del movimiento Browniano m dimensional. La técnica de demostración para el movimiento Browniano unidimensional es similar.

Antes de pasar al teorema de existencia y unicidad enunciaremos algunas desigualdades que nos servirán para demostrar el teorema.

Lema 3.2.2. (Desigualdad de Jensen).

Sea $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Sea X una variable aleatoria con esperanza finita, entonces

$$u(E(X)) \leq E(u(X)).$$

Definición 3.2.3. (Límite superior).

Sea $\{A_n\}$ una secuencia de eventos de Ω . Entonces el evento A que consiste de todos los $\omega \in \Omega$ tal que ω pertenece a una infinidad de conjuntos A_n , es decir

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ pertenece a una cantidad infinita de } A_m\},$$

es conocido como límite superior y se denota por $\limsup A_n$.

Lema 3.2.4. (Borel-Cantelli).

Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de eventos. Sea $A = \limsup A_n$.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, entonces $P(A) = 0$.

Teorema 3.2.5. (Desigualdades en martingalas).

Sea X_t un proceso estocástico con trayectorias continuas, entonces:

1. Si X_t es una submartingala, entonces

$$P\left(\max_{0 \leq s \leq t} X_s \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} E(X_t) \quad \text{para toda } \lambda > 0 \text{ y } t \geq 0.$$

2. Si X_t es una martingala y $1 < p < \infty$ entonces:

$$E\left(\max_{0 \leq s \leq t} |X_s|^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E(|X_t|^p).$$

Lema 3.2.6. (Lema de Gronwall).

Sea ϕ y f funciones no negativas y continuas definidas es $0 \leq t \leq T$ y sea $H_0 \geq 0$ una constante. Si

$$\phi(t) \leq H_0 + \int_0^t \phi f ds \quad \text{para todo } 0 \leq t \leq T,$$

entonces

$$\phi(t) \leq H_0 e^{\int_0^t f ds} \quad \text{para todo } 0 \leq t \leq T.$$

Demostración. Sea $\Phi(t) = H_0 + \int_0^t \phi f ds$, entonces $\Phi' = \phi f$, es decir $\Phi' \leq f\Phi$ por lo que

$$(e^{-\int_0^t f ds} \Phi)' = e^{-\int_0^t f ds} (\Phi' - f\Phi) \leq (f\phi - f\phi) e^{-\int_0^t f ds} = 0.$$

en consecuencia

$$e^{-\int_0^t f ds} \Phi(t) \leq e^{-\int_0^0 f ds} \Phi(0) = H_0.$$

De esto ultimo tenemos que

$$\phi(t) \leq \Phi(t) \leq H_0 e^{-\int_0^t f ds}$$

.

□

Teorema 3.2.7. (Teorema General de existencia y unicidad).

Sea $b : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $B : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{M}^{m \times n}$ funciones continuas tales que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, para todo $0 \leq t \leq T$ y para alguna constante L se cumple:

$$\begin{aligned} |b(x, t) - b(y, t)| &\leq L|x - y| \\ |B(x, t) - B(y, t)| &\leq L|x - y|, \end{aligned}$$

y la condición sobre x

$$\begin{aligned} |b(x, t)| &\leq L(1 + |x|) \\ |B(x, t)| &\leq L(1 + |x|). \end{aligned}$$

Sea X_0 un vector aleatorio de \mathbb{R}^n tal que

$$E(|X_0|^2) < \infty,$$

y X_0 independiente de W_0 , donde $W(\cdot)$ es el movimiento Browniano m -dimensional. Entonces existe una única solución $X \in L_n^2(0, T)$ de la ecuación diferencial estocástica

$$dX = b(X, t)dt + B(X, t)dW,$$

satisfaciendo la condición inicial $X_0 = X(0)$, para $0 \leq t \leq T$.

Demostración. Unicidad:

Supongamos que X y Y son soluciones, entonces para todo $0 \leq t \leq T$

$$X_t - Y_t = \int_0^t (b(X_s, t) - b(Y_s, t)) ds + \int_0^t (B(X_s, t) - B(Y_s, t)) dW,$$

de donde por la desigualdad $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ podemos calcular

$$\begin{aligned} E(|X_t - Y_t|^2) &\leq 2E \left(\left| \int_0^t (b(X_s, t) - b(Y_s, t)) ds \right|^2 \right) + \\ &\quad 2E \left(\left| \int_0^t (B(X_s, t) - B(Y_s, t)) dW \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy Schwarzs obtenemos que

$$\left| \int_0^t f ds \right|^2 \leq t \int_0^t |f|^2 ds,$$

entonces, para cualquier $t > 0$ y $f : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$ usemos esta desigualdad para obtener

$$\begin{aligned} E \left(\left| \int_0^t (b(X_s, t) - b(Y_s, t)) ds \right|^2 \right) &\leq TE \left(\left| \int_0^t (b(X_s, t) - b(Y_s, t)) ds \right|^2 \right) \\ &\leq L^2 T \int_0^t E(|X - Y|^2) ds. \end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned} E \left(\left| \int_0^t (B(X_s, t) - B(Y_s, t)) dW \right|^2 \right) &= E \left(\int_0^t |(B(X_s, t) - B(Y_s, t))|^2 ds \right) \\ &\leq L^2 \int_0^t E(|X - Y|^2) ds. \end{aligned}$$

Entonces para alguna constante apropiada H , tendríamos que

$$E(|X_t - Y_t|^2) \leq C \int_0^t E(|X - Y|^2) ds,$$

si elegimos ahora $\phi(t) = E(|X_t - Y_t|^2)$, obtendríamos que $\phi(t) \leq H \int_0^t \phi(s) ds$ para todo $0 \leq t \leq T$. Entonces por el lema de Gronwall con $H_0 = 0$, implicaría que $\phi = 0$, por lo que $X_t = Y_t$ y así $X_r = Y_r$ para todo racional $0 \leq r \leq T$, excepto para un conjunto de probabilidad 0, y dado que X y Y tienen trayectorias continuas casi seguramente

$$P(\max_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t| > 0) = 0.$$

Existencia:

Haremos uso de un esquema de iteraciones. Definamos

$$\begin{aligned} X_t^0 &:= X_0 \\ X_t^{n+1} &:= X_0 + \int_0^t b(X_s^n, s)ds + \int_0^t B(X_s^n, s)dW \end{aligned}$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$ y para $0 \leq t \leq T$ y definamos

$$d^n(t) := E(|X_t^{n+1} - X_t^n|^2).$$

Afirmamos que

$$d^n(t) \leq \frac{(Mt)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{para toda } n = 0, 1, 2, \dots \text{ y } 0 \leq t \leq T,$$

para alguna constante M , dependiente de L, T y X_0 . En efecto veamos que para $n = 0$ se cumple la desigualdad

$$\begin{aligned} d^0(t) &= E(|X_t^1 - X_t^0|^2) \\ &= E(|X_0 + \int_0^t b(X_s^1, s)ds + \int_0^t B(X_s^1, s)dW - X_0|^2) \\ &= E(|\int_0^t b(X_s^1, s)ds + \int_0^t B(X_s^1, s)dW|^2) \\ &\leq 2E(|\int_0^t L(1 + |x|)|^2) + 2E(|\int_0^t L(1 + |x|)|^2) \\ &\leq tM. \end{aligned}$$

Para alguna constante M suficientemente grande, confirmando así el caso $n = 0$.

Ahora supongamos que la proposición es válida para $n - 1$. Entonces

$$\begin{aligned} d^n(t) &= E(|X_t^{n+1} - X_t^n|^2) \\ &= E(|\int_0^t [b(X_s^n, s) - b(X_s^{n-1}, s)]ds + \int_0^t [B(X_s^n, s) - B(X_s^{n-1}, s)]dW|^2) \\ &\leq 2TL^2E(|\int_0^t X^n - X^{n-1}|^2ds) + 2L^2E(|\int_0^t X^n - X^{n-1}|^2ds) \\ &\leq 2L^2(1 + T) \int_0^t \frac{M^n s^n}{n!} ds \\ &\leq \frac{M^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

De esta manera eligiendo $M \geq 2L^2(1+T)$ hemos obtenido la desigualdad buscada. Ahora observemos que

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} |X^{n+1} - X^n|^2 &\leq 2TL^2 \int_0^t |X^n - X^{n-1}|^2 ds \\ &\quad + 2 \max_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t B(X^n, s) - B(X^{n-1}, s) dW \right|^2, \end{aligned}$$

consecuentemente la desigualdad de martingalas implica que

$$\begin{aligned} E \left(\max_{0 \leq t \leq T} |X^{n+1} - X^n|^2 \right) &\leq 2TL^2 \int_0^t E(|X^n - X^{n-1}|^2) ds \\ &\quad + 8L^2 \int_0^t E(|X^n - X^{n-1}|^2) ds \\ &\leq C \frac{(MT)^n}{(n!)}. \end{aligned}$$

El lema de Borel-Cantelli se aplica dado que

$$\begin{aligned} P \left(\max_{0 \leq t \leq T} |X^{n+1} - X^n| > \frac{1}{2^n} \right) &\leq 2^{2n} E \left(\max_{0 \leq t \leq T} |X^{n+1} - X^n|^2 \right) \\ &\leq 2^{2n} C \frac{(MT)^n}{(n!)} \end{aligned}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} C \frac{(MT)^n}{(n!)} < \infty.$$

Por lo que

$$P \left(\max_{0 \leq t \leq T} |X^{n+1} - X^n| > \frac{1}{2^n} \text{ i.o.} \right) = 0,$$

en vista de que es para casi todos los ω

$$X^n = X^0 + \sum_{j=1}^{n-1} (X^{j+1} - X^j),$$

converge uniformemente en $[0, T]$ a un proceso X_t , entonces aplicando limite a la definición de X_t^{n+1} obtenemos

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s, s) ds + \int_0^t B(X_s, s) dW \quad \text{para todo } 0 \leq t \leq T,$$

esto es

$$dX_t = b(X_t, s)dt + B(X_t, s)dW,$$

$$X(0) = X_0,$$

para $0 \leq t \leq T$. Solo nos faltaría ver que el proceso solución X_t vive en $L_n^2(0, T)$. Tenemos

$$\begin{aligned} E(|X_t^{n+1}|^2) &\leq CE(|\int_0^t b(X_s, s)ds|^2) + CE(|\int_0^t B(X_s, s)dW|^2) \\ &\leq C(1 + E(|X_0|^2)) + C \int_0^t E(|X_s^n|^2)ds, \end{aligned}$$

donde C denota varias constantes. Entonces por inducción

$$E(|X_t^{n+1}|^2) \leq [C + C^2 + C^3 + \dots + C^{n+2} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}](1 + E(|X_0|^2)),$$

consecuentemente

$$E(|X_t^{n+1}|^2) \leq C(1 + E(|X_0|^2))e^{Ct}.$$

Tomando $n \rightarrow \infty$

$$E(|X_t|^2) \leq C(1 + E(|X_0|^2))e^{Ct} \quad \text{para toda } 0 \leq t \leq T,$$

por lo tanto $X \in L_n^2(0, T)$. □

Los teoremas de existencia y unicidad nos dicen que la solución existe y que es única, pero no de como encontrar una solución explícita a las ecuaciones diferenciales estocásticas. Por ello el siguiente resultado es importante para la solución de las ecuaciones diferenciales estocásticas.

Teorema 3.2.8. (Fórmula de Ito generalizada).

Sea X_t un proceso de Ito que satisface (3.2) y sea $f(t, x)$ una función clase C^1 en t y clase C^2 en x entonces el proceso $\{Y_t = f(t, X_t)\}$ es también un proceso de Ito y satisface la ecuación estocástica

$$dY_t = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)(dX_t)^2. \quad (3.4)$$

Donde los subíndices indican las derivadas y la ecuación (3.2) se sustituye en (3.4) usando lo siguiente:

- $dt \times dt = 0.$
- $dt \times dW = 0.$
- $dW \times dt = 0.$
- $dW \times dW = dt.$

donde \times indica la multiplicación.

Demostración. ver [9]. □

Observación 3.2.9. *Observemos que la fórmula generalizada de Ito nos permite, a partir de X_t un proceso de Ito, una función $f(t, x)$ clase C^2 en x y clase C^1 en t , construir un nuevo proceso, en donde este nuevo proceso tiene por solución $f(t, X_t)$.*

Veamos algunos ejemplos de la aplicación de la fórmula general de Ito.

Ejemplo 3.2.10. *Consideremos un proceso de Ito de la siguiente manera $dX_t = dW_t$ es decir, cuando los coeficientes $b(t, X_t) = 0$ y $\sigma(t, X_t) = 1$ y tomemos la función $f(t, x) = e^{\lambda x - \frac{\lambda^2 t}{2}}$.
¿Que ecuación diferencial satisface $Y = f(t, X_t)$?*

Solución:

Dado que el proceso $dX_t = dW_t$ es un proceso de Ito y que $f(t, x)$ es una función clase C^1 en t y clase C^2 en x , entonces la fórmula generalizada de Ito nos garantiza que el nuevo proceso $f(t, X_t)$ satisface

$$\begin{aligned}
 df(t, X_t) &= f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)(dX_t)^2 \\
 &= \frac{-\lambda^2}{2}e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}}dt + \lambda e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}}dW + \frac{1}{2}\lambda^2 e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}}(dW^2) \\
 &= \frac{-\lambda^2}{2}e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}}dt + \lambda e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}}dW + \frac{1}{2}\lambda^2 e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}}dt \\
 &= \lambda e^{\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}}dW \\
 &= \lambda f(t, X_t)dW.
 \end{aligned}$$

Es decir, la ecuación diferencial estocástica que satisface $Y = f(t, X_t) = e^{\lambda W - \frac{\lambda^2 t}{2}}$ es

$$dY = \lambda Y dW.$$

Ejemplo 3.2.11. *Encontremos la solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica*

$$dX_t = (-\alpha X_t + \beta)dt + \sigma dW,$$

donde α, β son constantes.

Demostración. Consideremos en proceso $X_t = W_t$, entonces por la fórmula generalizada de Ito, el proceso $Y = f(t, X_t)$ satisface la siguiente ecuación diferencial

$$dY_t = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)dt.$$

Igualando coeficientes tenemos

$$\begin{aligned} -\alpha f + \beta &= f_t + \frac{1}{2}f_{xx} \\ \sigma &= f_x, \end{aligned}$$

de la última ecuación tenemos que $f_{xx} = 0$, por lo que sustituyendo en el sistema de ecuaciones tenemos

$$\begin{aligned} -\alpha f + \beta &= f_t \\ \sigma &= f_x. \end{aligned}$$

Integrando la última ecuación respecto a x , obtenemos

$$f(t, x) = \sigma x + c(t). \quad (3.5)$$

Sustituyendo en la primera ecuación para obtener $c(t)$, obtendríamos la siguiente ecuación diferencial

$$c'(t) + \alpha c(t) = -\alpha \sigma x + \beta.$$

Resolviendo para $c(t)$, obtenemos que

$$c(t) = e^{-\alpha t} + \alpha(-\sigma x + \frac{\beta}{\alpha})t.$$

Sustituyendo en (3.5) el valor de $c(t)$, obtenemos finalmente

$$f(t, x) = \sigma x + e^{-\alpha t} + \alpha(-\sigma x + \frac{\beta}{\alpha})t.$$

Por lo que el proceso $f(t, X_t) = \sigma W + e^{-\alpha t} + \alpha(-\sigma W + \frac{\beta}{\alpha})t$ es solución para la ecuación diferencial. \square

Ejemplo 3.2.12. *Encontremos el proceso X_t solución con condición inicial $X_0 = 0$ para la ecuación diferencial estocástica*

$$dX_t = -X_t dt + e^{-t} dW.$$

Demostración. Buscamos una función $f(t, x)$ tal que el proceso de solución pueda escribirse como $X_t = f(t, W_t)$ junto con la condición inicial, consideremos $X_t = W_t$. Por Ito tenemos

$$dX_t = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)dt,$$

igualando coeficientes tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} f_t + \frac{1}{2}f_{xx} &= -f \\ f_x &= e^{-t}. \end{aligned}$$

Dado que $f_x = e^{-t}$ entonces $f_{xx} = 0$, por lo que el sistema se reduce a:

$$\begin{aligned} f_t &= -f \\ f_x &= e^{-t}. \end{aligned}$$

Integrando respecto a x en la segunda ecuación en un intervalo $[0, t]$ tenemos

$$\int_0^t f_x dx = f(t, x) = xe^{-t} + c(t).$$

Derivando respecto a t e igualando a la primera ecuación

$$f_t = -xe^{-t} + c'(t) = -xe^{-t} - c(t),$$

de esto ultimo, obtenemos que $c(t) = ke^{-t}$, así obtenemos que

$$f(t, x) = xe^{-t} + ke^{-t}$$

es solución para la ecuación diferencial, pero para que cumpla la condición inicial $X_0 = 0$ tendrá que ser $k = 0$, por lo que la solución particular es

$$f(t, x) = xe^{-t}.$$

De manera que si elegimos $f(t, x) = xe^{-t}$, entonces la fórmula de Ito nos garantiza que $X_t = f(t, W_t)$ es solución para $dX_t = -X_t dt + e^{-t} dW$. \square

Ejemplo 3.2.13. *Resolvamos la siguiente ecuación diferencial estocástica usando el método de igualación de coeficientes*

$$dX_t = aX_t dW.$$

Donde $a \in \mathbb{R}$ y con la condición inicial $X_0 = 1$

Demostración. Similarmente al ejemplo anterior buscamos una función $f(t, x)$ tal que es proceso de solución pueda escribirse como $f(t, W_t) = X_t$, tomemos $X_t = W_t$. Por Ito tenemos

$$\begin{aligned} dX_t &= f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dW + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)dt \\ dX_t &= aX_t dW. \end{aligned}$$

Igualando coeficientes

$$\begin{aligned} f_t + \frac{1}{2}f_{xx} &= 0 \\ f_x &= af. \end{aligned}$$

De la última ecuación implica que $f_{xx} = af_x = a^2f$, por lo que el nuevo sistema de ecuaciones queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f_t + \frac{a^2}{2}f &= 0 \\ f_x &= af. \end{aligned}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones supongamos que la solución viene dada por una función

$$f(t, x) = u(t)p(x).$$

Como consecuencia inmediata obtenemos de la segunda ecuación

$$p'(x)u(t) = au(t)p(x),$$

esto implica que $p'(x) = ap(x)$ cuya solución viene dada por $p(x) = e^{ax}$.

Por otra parte $f(t, x) = u(t)p(x)$ también implica

$$u'(t)p(x) + \frac{a^2}{2}u(t)p(x) = 0,$$

suponiendo que $p(x) \neq 0$ implicaría $u'(t) + \frac{a^2}{2}u(t) = 0$, de donde $u(t) = e^{-\frac{a^2}{2}t}$.

Por lo que

$$f(t, W_t) = e^{aW_t}e^{-\frac{a^2}{2}t},$$

es solución para el sistema de ecuaciones y a la ecuación diferencial estocástica. \square

Notemos que el conjunto de soluciones obtenidas a partir de la fórmula de Ito son procesos estocásticos y como tal podemos calcular valores numéricos con estos procesos estocásticos, como obtener la esperanza, la varianza, la media, etc.

Por ejemplo en 3.2.13 el proceso de Ito que satisface la ecuación estocástica es $X_t = f(t, W_t) = e^{aW_t} e^{-\frac{a^2}{2}t}$, que es proceso estocástico y cuya esperanza es $E(e^{aW_t} e^{-\frac{a^2}{2}t}) = e^{-\frac{a^2}{2}t} E(e^{aW_t})$, para calcular esta última esperanza haremos uso de la definición 2.7.4 para una distribución Log normal, de donde $E(e^{aW_t}) = e^{\frac{a^2}{2}t}$ por lo que $E(e^{aW_t} e^{-\frac{a^2}{2}t}) = 1$.

Ejemplo 3.2.14. *Considérese $X_t = e^{aW_t}$.*

1. *Apliquemos la fórmula de Ito y las propiedades de la Integral de Ito para demostrar que*

$$X_t = X_0 + a \int_0^t e^{aW_s} dW + \frac{a^2}{2} \int_0^t e^{aW_s} ds.$$

2. *Demostremos que*

$$E(X_t) = E(X_0) + \frac{a^2}{2} \int_0^t E(X_s) ds.$$

3. *Demostremos que*

$$\frac{d(E(X_t))}{dt} = \frac{a^2}{2} E(X_t).$$

4. *Cuanto vale*

$$E(X_t).$$

Demostración. 1. Dado que $X_t = e^{aW_t}$ es un proceso estándar de Ito, entonces eligiendo $f(t, x) = e^{ax}$ tenemos que $X_t = e^{aW_t} = f(t, W_t)$, y por la fórmula de Ito tenemos que f satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} dX_t &= f_t(t, W_t)dt + f_x(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, W_t)dt \\ dX_t &= 0dt + ae^{aW_t}dW + \frac{a^2}{2}e^{aW_t}dt, \end{aligned}$$

que equivalentemente a su forma integral es

$$X_t - X_0 = a \int_0^t e^{aW_s} dW + \frac{a^2}{2} \int_0^t e^{aW_s} ds.$$

2. Aplicando esperanza a su forma integral, usando que $X_t = e^{aW_t}$ es un proceso $L^2(0, T)$, y aplicando la propiedad 2 para obtener que $E(\int_0^s e^{aW_t} dW) = 0$ obtenemos

$$E(X_t - X_0) = E\left(a \int_0^s e^{aW_t} dW\right) + E\left(\frac{a^2}{2} \int_0^s e^{aW_t} dt\right)$$

$$E(X_t) = E(X_0) + \frac{a^2}{2} \int_0^t E(X_s) ds$$

3. Aplicando su forma diferencial a este último resultado tenemos

$$d(E(X_t)) = \frac{a^2}{2} E(X_t) dt$$

$$\frac{d(E(X_t))}{dt} = \frac{a^2}{2} E(X_t).$$

4. Notemos que esta última es una ecuación diferencial determinista de la forma $k'(t) = \frac{a^2}{2} k(t)$ donde $K(t) = E(X_t)$ que tiene por solución $k(t) = E(X_t) = \exp(\frac{a^2 t}{2})$. \square

Notemos que esto último no tiene nada de sorprendente, dado que nosotros sabemos que si W_t el proceso de Weiner entonces la variable aleatoria $Y = e^{W_t}$ tiene distribución log-normal y cuya esperanza es $E(Y) = \exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2})$, donde por hipótesis $\mu = 0$ y $\sigma^2 = t$, entonces $E(Y) = \exp 0 + \frac{t}{2} = \exp(\frac{t}{2})$. Veamos algunos ejemplos más.

Ejemplo 3.2.15. Usemos la fórmula de Ito 1 para demostrar que

1. $W_t^2 = 2 \int_0^t W_s dW + \int_0^t ds.$

2. $W_t^3 = 3 \int_0^t W_s^2 dW + \int_0^t W_s ds.$

3. Generalice el resultado anterior para cualquier n .

Demostración. 1. Consideremos $X_t = W_t$ y sea $f(x) = x^2$, a lo cual f es una función clase C^2 , entonces por la formula de Ito 1, tenemos

$$f(W_t) + f(W_0) = \int_0^t f'(W_s) dW + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds$$

$$W_t^2 + W_0^2 = \int_0^t 2W_s dW + \frac{1}{2} \int_0^t 2 ds$$

$$W_t^2 = 2 \int_0^t W_s dW + \int_0^t ds.$$

2. De manera similar consideremos $X_t = W_t$ y sea $f(x) = x^3$, a lo cual f es una función clase C^2 , entonces por la fórmula de Ito 1, tenemos

$$\begin{aligned} f(W_t) + f(W_0) &= \int_0^t f'(W_s) dW + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds \\ W_t^2 + W_0^2 &= \int_0^t 2W_s dW + \int_0^t 1 ds \\ W_t^2 &= 2 \int_0^t W_s dW + t. \end{aligned}$$

3. De una manera inductiva podemos realizar estos pasos, en particular, tomemos $f(x) = x^n$ lo cual f es una función clase C^2 , entonces por la fórmula de Ito 1, tenemos

$$\begin{aligned} f(W_t) + f(W_0) &= \int_0^t f'(W_s) dW + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds \\ W_t^n + W_0^n &= \int_0^t nW_s^{n-1} dW + \frac{1}{2} \int_0^t n(n-1)W_s^{n-2} ds \\ W_t^n &= n \int_0^t W_s^{n-1} dW + \frac{n(n-1)}{2} \int_0^t W_s^{n-2} ds. \end{aligned}$$

□

Comentábamos en el capítulo 2 en la sección de movimiento Browniano que la solución de la ecuación diferencial

$$dS_t = S_t \mu dt + \sigma S_t dW$$

sería conocida como el movimiento geométrico Browniano y servirá para dar el precio una acción. Estamos en posición de demostrar de donde proviene esta solución particular pues hemos definido una herramienta muy importante, la cual resulta ser la fórmula de Ito generalizada.

Ejemplo 3.2.16. (Movimiento geométrico Browniano).

Resolver la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW$$

Demostración. Consideremos el proceso de Ito $X_t = W_t$, entonces por la fórmula general de Ito tenemos que el nuevo proceso $S_t = f(t, X_t)$ es solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = f_t(t, X_t) dt + f_x(t, X_t) dW + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t) dt$$

comparando coeficientes tenemos

$$\begin{aligned} f_t(t, X_t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t) &= \mu f(t, X_t) \\ f_x(t, X_t) &= \sigma f(t, X_t) \end{aligned}$$

resolviendo obtenemos que $S_t = f(t, X_t) = \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t))$. \square

De este modo hemos obtenido el movimiento geométrico Browniano $S_t = \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t))$, el cual es un proceso estocástico a tiempo continuo. Veamos algunas propiedades numéricas de este proceso estocástico.

1. Esperanza del movimiento geométrico Browniano.

Usando el hecho que $Y = \exp(\sigma W_t)$ tiene distribución log-normal, cuya esperanza es $\exp(\frac{\sigma^2 t}{2})$ y que además la esperanza saca constantes para obtener:

$$\begin{aligned} E(\exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t))) &= (\exp(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t) E(\exp(\sigma W(t))) \\ &= (\exp(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t) (\exp(\frac{\sigma^2 t}{2})) \\ &= \exp(\mu t). \end{aligned}$$

2. Varianza del movimiento geométrico Browniano.

Usando el hecho que $Y = \exp(\sigma W_t)$ tiene distribución log-normal, y cuya varianza es $e^{\sigma^2 t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$ y que además $\text{var}(cX) = c^2 \text{var}(X)$ para obtener que:

$$\begin{aligned} \text{var}(\exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t))) &= (\exp(2t(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2))) \text{var}(\exp(\sigma W(t))) \\ &= \exp(2t\mu)(\exp(\sigma^2 t) - 1). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.2.17. (Proceso de Ornstein-Uhlenbeck).

Es un modelo que se emplea principalmente en física para modelar velocidades del movimiento irregular de una partícula en tiempos pequeños.

Definición 3.2.18. Sean α y σ constantes positivas. El proceso de Ornstein Uhlenbeck es aquel proceso $\{X_t : t \geq 0\}$ solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW,$$

con la condición la condición

$$X_0 = x_0,$$

y cuya solución es

$$X_t = x_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW.$$

Capítulo 4

Deducción de la Black-Scholes

Estamos en posición de hablar de uno de los modelos más importantes en el mundo de las finanzas, el cual es la ecuación diferencial parcial conocida como Black Scholes. La deducción de esta ecuación proviene de una ecuación diferencial estocástica y nos permitirá saber el precio justo de una opción.

Antes de hablar de las matemáticas que se encuentran detrás del modelo, será conveniente dar el contexto financiero en donde estamos posicionados y de donde queremos partir para lograr un modelo lo más exacto posible.

Al momento de invertir dinero nuestro principal interés es hacerlo crecer, para ello debemos considerar distintos factores como los dividendos que paga la empresa por tener la acción, el riesgo, intereses, entre otros. Podemos definir el riesgo en finanzas en base a la volatilidad de una acción o bien en la posible pérdida de dinero. Por ejemplo, una inversión en la bolsa de valores es de más riesgo que invertir en el banco pues la tasa de interés que se maneja en la bolsa de valores es una tasa de interés variable a comparación del banco que maneja una tasa de interés fija. En general una inversión financiera es adquirir un activo financiero y el principal objetivo de este es esperar ganancias a través del comportamiento de este activo. Existe un término muy importante que se relaciona con las inversiones el cual es opción y es nuestro tema principal de este capítulo. Definamos algunos conceptos importantes.

Una **Opción** es un contrato entre dos partes que le da a uno el derecho pero no obligación de vender o comprar un activo en particular en un tiempo futuro a su contraparte a un precio acordado con anterioridad. Hay dos tipos de opciones:

- Opción para compra que es llamada de **Call option**.
- Opción para venta que es llamada **Put option**.

El **strike price** es el precio acordado al que debemos comprar o vender en caso de

que la acción sea ejecutada. El **strike time** o **expiry** es el tiempo de vencimiento sobre la opción.

Existen 2 tipos de opciones en el mercado financiero: la primera es llamada la **opción europea** que permite que la opción solo sea ejecutada en la fecha límite, y la segunda, que es llamada **opción americana**, al contrario de la opción europea este tipo de opción permite ejecutarse en cualquier momento antes de la fecha límite.

Observación 4.0.1. Consideraciones.

1. Solo consideraremos opciones del tipo europea.
2. Solo consideraremos las opciones sobre acciones elementales que no paguen impuestos.

Veamos un ejemplo práctico en donde se apliquen estos conceptos.

Ejemplo 4.0.2. *Supongamos un inversor paga 10 dolares en total por una opción call europea y que el valor acordado o strike price es de 60 dolares. ¿Bajo qué circunstancias la opción debería ser ejecutada? si el valor de la acción comprada por el inversor en el tiempo de expiración es de 75 dolares, ¿Cuánto podría el inversor ganar o perder? ¿Qué pasaría si fuera de 40 dolares en el tiempo de expiración?*

Solución: La opción call le da el derecho de comprar la acción por 60 dolares en el tiempo acordado. Si en el tiempo acordado el valor de la acción es menor que 60, entonces la opción no se ejecutará, esto es dado a que la podemos comprar más barata en los mercados. Si el precio de la acción es mayor que 60 dolares en la fecha de expiración entonces la opción sera ejecutada.

En caso de que la acción cueste 75 dolares en el tiempo de expiración, la opción le da el derecho al comprador o holder que en este caso es el inversor a comprarla por 60 dolares, e inmediatamente venderla en el mercado por 75 dolares obteniendo un beneficio de $75-60=15$ dolares. Restando el valor total de la opción premium pagado al inicio del contrato para obtener el beneficio final, obtenemos que el beneficio total del inversor es de $15-10=5$ dolares.

En el segundo caso, dado que el valor a la fecha de expiración de la acción es de $40 < 60$, en este caso la opción no sera ejecutada y caduca sin valor. En este caso el inversor tendrá una pérdida de 10 dolares por la adquisición de la opción premium.

Notación matemática:

1. K = strike price.
2. r = interés.

3. T = strike time o tiempo de vencimiento de la opción.
4. C = precio de opción de compra(opción call).
5. P = precio de opción de venta(opción put).
6. S = precio de la opción en el mercado financiero.

4.1. Pagos en opciones

Existen 4 posiciones básicas para un inversor:

1. Posición long call.
2. Posición long put.
3. Posición short call.
4. Posición short put.

Para fines de nuestro documento, solo estamos interesados en la posición long call. Si nosotros mantenemos una posición long call en una opción call europea, entonces nos da el derecho de comprar el activo por el valor acordado o strike price. Si el valor de la opción en el mercado financiero se encuentra por arriba del strike price la opción call será ejecutada ya que $K < S(t)$, en caso de que $K > S(t)$, entonces la opción call no será ejecutada.

4.2. Pago en posición long call

Si la opción es ejecutada en el strike time T entonces el inversionista recibirá

$$C(S(T), T) = S(T) - K.$$

Si la opción no es ejecutada entonces el inversionista no obtiene ganancia, es decir,

$$C(S(T), T) = 0.$$

En general, podemos extender la función del pago de inversionista por una opción call al tiempo T .

$$C(S(T), T) = \begin{cases} S(T) - K & \text{si } S(T) > K \\ 0 & \text{si } S(T) \leq K, \end{cases} \quad (4.1)$$

o lo que es lo mismo

$$C(S(T), T) = \max \{0, S(T) - K\}. \quad (4.2)$$

4.3. Arbitraje

El **arbitraje** es una estrategia financiera que consiste en aprovechar la diferencia de precio entre diferentes mercados sobre un mismo activo financiero para obtener un beneficio económico, normalmente sin riesgo.

Podemos pensar al arbitraje como una manera de obtener una ganancia libre de riesgo. Una manera de ejemplificar lo que el arbitraje es suponer que deseamos adquirir cierto activo financiero en un mercado de valores y que podemos adquirir el activo (comprarlo) por una cantidad X e inmediatamente podamos venderlo en el mismo mercado de valores por una cantidad mayor a X , por lo que tendríamos una ganancia libre de riesgo.

4.3.1. Replicación

Un **portafolio** de inversión es un conjunto de activos financieros en los que una persona o empresa coloca su dinero. Supongamos que tenemos un portafolio V_t con z_t unidades de un activo S_t y k_t unidades de dinero invertidos en el banco B_t , el valor del portafolio en el tiempo t es de

$$V_t = z_t S_t + k_t B_t.$$

Por otro lado, supongamos que tenemos otro portafolio U_t en donde solo tenemos al contrato call de una opción europea.

Se puede demostrar que si $U_t > V_t$ entonces existe una oportunidad de arbitraje, similarmente si $U_t < V_t$ existe una oportunidad de arbitraje, por lo que la única posibilidad para que no exista una oportunidad de arbitraje es que $U_t = V_t$. Por lo tanto, para una opción europea con strike price K con un tiempo de expiración T , los valores del portafolio deben coincidir con la opción call para cualquier escenario posible, esto se hace mediante un proceso llamado **replicación** reajustando el número de acciones que se tiene en el portafolio para que coincidan para todo t , es decir,

$$h(S_t) = \max \{S_t - K, 0\} = V_t.$$

Es importante que no se agregue dinero extra al portafolio, si se hace esto, entonces no se puede garantizar la igualdad entre el portafolio y la opción call.

4.4. Dinámica del portafolio

En esta sección definiremos la dinámica que nuestro portafolio seguirá y que nos servirá para la deducción de la Black-Scholes.

En general la dinámica que sigue el portafolio no es única y desde la primera dinámica generada por Black y Scholes se han desarrollado nuevas maneras de generar la dinámica. En este presente proyecto presentaremos la dinámica conocida como condición de autofinanciamiento.

4.4.1. Condición de autofinanciamiento

Tomemos z unidades invertidas en un activo S y k unidades en un activo B . La idea de la condición de autofinanciamiento es que la unidades invertidas en los activos no cambian, es decir el valor del portafolio solo se ve afectado por los cambios que sufren los precios de los activos en el portafolio en el tiempo. En un contexto matemático si tomamos un intervalo $[t, t + dt)$ entonces el valor del portafolio en el tiempo t es

$$V_t = z_t S_t + k_t B_t, \quad (4.3)$$

y en el tiempo $t + dt$ es

$$V_{t+dt} = z_{t+dt} S_{t+dt} + k_{t+dt} B_{t+dt}, \quad (4.4)$$

entonces dado que z_t y k_t quedan invariantes en el tiempo se tiene

$$V_{t+dt} - V_t = z_t (S_{t+dt} - S_t) + k_t (B_{t+dt} - B_t), \quad (4.5)$$

$$dV_t = z_t dS_t + k_t dB_t. \quad (4.6)$$

A la ecuación (4.6) se le conoce como condición de autofinanciamiento del portafolio V_t .

4.5. Deducción de la Black-Scholes

Realizaremos la deducción de la ecuación Black-Scholes en base a los siguientes puntos.

1. Suponer que la evolución del precio de los activos siguen el movimiento geométrico Browniano .
2. Suponer una dinámica determinista de una cuenta de banco.

3. La eliminación del arbitraje mediante la replicación.
4. El lema de Ito.

Cuenta bancaria: Sea B_t una cuenta bancaria con una tasa de interés fija r y vamos que suponer que B_t sigue la siguiente dinámica determinista

$$dB_t = rB_t dt.$$

4.5.1. Deducción

Consideremos un portafolio que contiene 2 activos, el activo la acción S que sigue la dinámica del movimiento Browniano geométrico y una cuenta bancaria elemental B que sigue una dinámica determinista, también supongamos que tenemos z_t unidades del activo S en el tiempo t y que tenemos k_t unidades de dinero en la cuenta bancaria B en el tiempo t . El valor total de este portafolio en el tiempo t es

$$V_t = z_t S_t + k_t B_t, \quad (4.7)$$

por la condición de autofinanciamiento tenemos que la dinámica del portafolio es

$$dV_t = z_t dS_t + k_t dB_t. \quad (4.8)$$

Sustituyendo la dinámica del activo S y de la cuenta bancaria B en (4.8) obtenemos

$$dV_t = z_t dS_t + k_t dB_t \quad (4.9)$$

$$= z_t (\mu S_t dt + \sigma S_t dW) + k_t (r B_t dt) \quad (4.10)$$

$$= (z_t \mu S_t + k_t r B_t) dt + z_t \sigma S_t dW. \quad (4.11)$$

Ahora supongamos que nuestro portafolio puede ser escrito como $V_t = f(S_t, t)$, entonces por la fórmula general de Ito

$$\begin{aligned} dV_t &= f_t(t, S_t) dt + f_x(t, S_t) dS_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, S_t) (dS_t)^2 \\ &= f_t(t, S_t) dt + f_x(t, S_t) (\mu S_t dt + \sigma S_t dW) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, S_t) (\mu S_t dt + \sigma S_t dW)^2 \\ &= f_t(t, S_t) dt + f_x(t, S_t) \mu S_t dt + f_x(t, S_t) \sigma S_t dW \\ &\quad + \frac{1}{2} f_{xx}(t, S_t) ((\mu S_t dt)^2 + 2\mu S_t dt \sigma S_t dW + (\sigma S_t dW)^2) \\ &= f_t(t, S_t) dt + f_x(t, S_t) \mu S_t dt + f_x(t, S_t) \sigma S_t dW + \frac{1}{2} f_{xx} \sigma^2 S_t^2 dt. \end{aligned}$$

Agrupando,

$$dV_t = (f_t(t, S_t) + f_x(t, S_t)\mu S_t + \frac{1}{2}f_{xx}\sigma^2 S_t^2)dt + f_x(t, S_t)\sigma S_t dW. \quad (4.12)$$

Igualando los coeficientes de (4.11) con los de (4.12), obtenemos

$$f_t(t, S_t) + f_x(t, S_t)\mu S_t + \frac{1}{2}f_{xx}\sigma^2 S_t^2 = z_t\mu S_t + k_t r B_t \quad (4.13)$$

$$z_t\sigma S_t = f_x(t, S_t)\sigma S_t, \quad (4.14)$$

de donde

$$z_t = f_x(t, S_t).$$

Dado que $z_t = f_x(t, S_t)$, sustituyendo esto en (4.13), obtenemos

$$z_t\mu S_t + k_t r B_t = f_t(t, S_t) + z_t\mu S_t + \frac{1}{2}f_{xx}\sigma^2 S_t^2,$$

de donde obtenemos k_t

$$k_t = \frac{f_t(t, S_t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2}{r B_t}.$$

Dado que $V_t = f(t, S_t) = z_t S_t + k_t B_t$, entonces sustituyendo los coeficientes de z_t y k_t obtenemos una ecuación diferencial parcial para $f(t, S_t)$

$$\begin{aligned} f(t, S_t) &= z_t S_t + k_t B_t \\ &= f_x(t, S_t) S_t + \frac{f_t(t, S_t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2}{r B_t} B_t. \end{aligned}$$

Cancelando el termino B_t obtenemos

$$f(t, S_t) = f_x(t, S_t) S_t + \frac{f_t(t, S_t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2}{r},$$

multiplicando por r y reemplazando S_t por x

$$r f(t, x) = r f_x(t, x) x + f_t(t, x) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, x) \sigma^2 x^2, \quad (4.15)$$

con la condición de frontera

$$f(T, x) = h(x) = \max\{x - K, 0\}.$$

A la ecuación (4.15) con la variable $x = S_t$ se le conoce como la ecuación Black-Scholes. Obtuvimos la deducción de Black-Scholes a partir de la idea de replicación, pero esta deducción no es única, existen distintas maneras de obtenerla como se muestra en [4], donde plantean la formulación de la Black-Scholes de 3 maneras diferentes.

4.6. Solución de la Black-Scholes

A partir de la deducción de la Black-Scholes hemos obtenido una ecuación diferencial parcial. Para encontrar la solución de esta ecuación haremos uso la transformada de Fourier para llevar la ecuación diferencial parcial a una ecuación diferencial ordinaria y haremos uso de la transformada inversa de Fourier para obtener la solución. Para ello, recordemos algunos resultados muy conocidos de la transformada de Fourier. Recordemos que la transformada de Fourier \mathfrak{F} de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida como

$$\hat{f}(w) = \mathfrak{F}[f](w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} f(x) dx,$$

y la transformada inversa de Fourier está definida como

$$\mathfrak{F}^{-1}[\hat{f}(w)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} dw.$$

Además, haremos uso de las siguientes propiedades:

1. $\mathfrak{F}\left[\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right] = (iw)^n \mathfrak{F}[f]$
2. $\mathfrak{F}[f + g] = \mathfrak{F}[f] + \mathfrak{F}[g]$
3. $\mathfrak{F}[cf] = c\mathfrak{F}[f]$
4. $\mathfrak{F}^{-1}[\mathfrak{F}[f]] = f$
5. $\mathfrak{F}^{-1}[c\hat{f}] = c\mathfrak{F}^{-1}[\hat{f}]$
6. $\mathfrak{F}\left[\frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{s^2}\right)^2}\right] = e^{-iwm - \frac{s^2 w^2}{2}}$
7. $\mathfrak{F}[f * g] = \mathfrak{F}[f]\mathfrak{F}[g]$

donde c, s, m son constantes y $*$ indica la convolución definida como

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(x - z)dz.$$

Solución: Primero haremos un cambio de variable sobre la ecuación (4.15) para dejar la condición de frontera como una condición inicial. Definamos $\tau = T - t$, si $\tau = 0$ implica $T = t$. Ahora podemos escribir la ecuación en términos de x y τ pero podemos ahorrarnos algunos pasos si primero definimos $y = \log(x)$. Reescribamos

$f(t, x)$ como $g(\tau, y)$, entonces aplicando la regla de la cadena para varias variables obtenemos

$$f_t(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial g(\tau, y)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} = -\frac{\partial g(\tau, y)}{\partial \tau} = -g_\tau(\tau, y),$$

$$f_x(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial g(\tau, y)}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial g(\tau, y)}{\partial y} \left(\frac{1}{x}\right) = g_y(\tau, y) \left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\begin{aligned} f_{xx}(t, x) &= \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial g(\tau, y)}{\partial y} \frac{1}{x} \right] \\ &= \frac{\partial^2 g(\tau, y)}{\partial y^2} \left(\frac{1}{x}\right) \frac{dy}{dx} + \frac{\partial g(\tau, y)}{\partial y} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{\partial^2 g(\tau, y)}{\partial y^2} \left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\partial g(\tau, y)}{\partial y} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{\partial^2 g(\tau, y)}{\partial y^2} \left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\partial g(\tau, y)}{\partial y} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= g_{yy}(\tau, y) \frac{1}{x^2} - g_y(\tau, y) \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

A partir de esto podemos reescribir la ecuación (4.15) en términos de $g(\tau, y)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} rg(\tau, y) &= rg_y(\tau, y) \left(\frac{1}{x}\right)x - g_\tau(\tau, y) + \frac{1}{2} [g_{yy}(\tau, y) \frac{1}{x^2} - g_y(\tau, y) \frac{1}{x^2}] \sigma^2 x^2 \\ &= rg_y(\tau, y) - g_\tau(\tau, y) + \frac{1}{2} [g_{yy}(\tau, y) - g_y(\tau, y)] \sigma^2. \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos

$$rg(\tau, y) = \frac{1}{2} \sigma^2 g_{yy}(\tau, y) - g_\tau(\tau, y) + \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2\right) g_y, \quad (4.16)$$

con la condición inicial

$$g(0, y) = h(e^y) = \max\{e^y - k, 0\}. \quad (4.17)$$

Aplicando la transformada de Fourier a (4.16), se obtiene

$$\mathfrak{F}[rg(\tau, y)] = \mathfrak{F}\left[\frac{1}{2} \sigma^2 g_{yy}(\tau, y)\right] - \mathfrak{F}[g_\tau(\tau, y)] + \mathfrak{F}\left[\left(r - \frac{1}{2} \sigma^2\right) g_y\right],$$

de manera que conseguimos obtener la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{g}}{\partial \tau} &= \frac{-w^2 \sigma^2}{2} \hat{g} + iw(r - \frac{1}{2} \sigma^2) \hat{g} - r \hat{g} \\ &= [\frac{-w^2 \sigma^2}{2} + iw(r - \frac{1}{2} \sigma^2) - r] \hat{g},\end{aligned}$$

que tiene por solución

$$\hat{g} = e^{[\frac{-w^2 \sigma^2}{2} + iw(r - \frac{1}{2} \sigma^2) - r] \tau},$$

que bajo la condición inicial obtenemos

$$\hat{g} = e^{-r\tau} \hat{h} e^{[iw(r - \frac{1}{2} \sigma^2) - \frac{\sigma^2}{2} w^2] \tau}. \quad (4.18)$$

Por otra parte, de la propiedad (6) tomando $m = (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau$, y $s = \sigma\sqrt{\tau}$, obtenemos

$$e^{-iw(\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau - \frac{(\sigma\sqrt{\tau})^2 w^2}{2}} = \mathfrak{F}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(y - (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau)^2}{(\sigma\sqrt{\tau})^2}\right)}\right],$$

entonces

$$\hat{g} = e^{-r\tau} \hat{h} \mathfrak{F}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(y - (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau)^2}{(\sigma\sqrt{\tau})^2}\right)}\right],$$

por la propiedad (7), y usando el hecho que la transformada saca constantes, tenemos

$$\hat{g} = e^{-r\tau} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \mathfrak{F}[h * e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(y - (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau)^2}{(\sigma\sqrt{\tau})^2}\right)}].$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier y la convolución, se obtiene

$$\begin{aligned}g(y, \tau) &= e^{-r\tau} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} h(z) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(y - z - (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau)^2}{(\sigma\sqrt{\tau})^2}\right)} dz \\ &= e^{-r\tau} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \max(e^z - K, 0) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(y - z - (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau)^2}{(\sigma\sqrt{\tau})^2}\right)} dz,\end{aligned}$$

ajustando los límites de la integral en donde no sea 0, es decir cuando $e^z - K \geq 0$, de donde obtenemos que $e^z \geq K$. Aplicando logaritmos obtenemos que z debe

ser $z \geq \ln K$. Una vez ajustado el límite de la integral, podemos descomponer la integral de la siguiente manera

$$\begin{aligned} g(y, \tau) &= e^{-r\tau} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\ln K}^{\infty} (e^z - K) e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y-z - (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau}{(\sigma\sqrt{\tau})^2} \right)^2} dz \\ &= e^{-r\tau} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\ln K}^{\infty} e^z e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y-z - (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau}{(\sigma\sqrt{\tau})^2} \right)^2} dz \\ &\quad - e^{-r\tau} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\ln K}^{\infty} K e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y-z - (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau}{(\sigma\sqrt{\tau})^2} \right)^2} dz, \end{aligned}$$

por lo tanto, solo nos faltaría resolver estas 2 integrales para encontrar la solución. Veamos paso a paso cada una de estas integrales empezando con la última integral que resulta ser mas fácil. De la integral obtenemos

$$I = e^{-r\tau} \int_{\ln K}^{\infty} K e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y-z - (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau}{(\sigma\sqrt{\tau})^2} \right)^2} dz.$$

Haciendo un cambio de variable, $u = \frac{y-z - (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau}{(\sigma\sqrt{\tau})}$, obtendríamos que $du = \frac{-dz}{\sigma\sqrt{\tau}}$

y además cuando $z \rightarrow \ln K$ se tiene que $u \rightarrow \frac{y - [\ln K + (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau]}{(\sigma\sqrt{\tau})}$. Similarmente, cuando $z \rightarrow \infty$ implica que $u \rightarrow -\infty$. Haciendo el cambio de variable obtenemos

$$K e^{-r\tau} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\frac{y - [\ln K + (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau]}{(\sigma\sqrt{\tau})}}^{-\infty} e^{-\frac{1}{2} u^2} (-\sigma\sqrt{\tau}) du.$$

Cancelando el término $\sigma\sqrt{\tau}$ y cambiando límites de integración, se obtiene

$$K e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\frac{y - [\ln K + (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau]}{(\sigma\sqrt{\tau})}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} u^2} du = K e^{-r\tau} \Phi\left(\frac{(y - \ln K + (\frac{-\sigma^2}{2} + r)\tau)}{\sigma\sqrt{\tau}}\right),$$

donde Φ es la función de distribución acumulada definida de la siguiente manera

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} u^2} du.$$

El caso de la primera integral sigue un paso similar solo que tendremos que completar el cuadrado para dejar la integral como una función de distribución acumulada. Recordemos que la primer integral es

$$\begin{aligned} I &= e^{-r\tau} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\ln K}^{\infty} e^z e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y-z - (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau}{(\sigma\sqrt{\tau})^2} \right)^2} dz \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\ln K}^{\infty} e^z e^{-r\tau} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y-z - (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau}{(\sigma\sqrt{\tau})^2} \right)^2} dz. \end{aligned}$$

Nuestra tarea será completar el cuadrado del numerador en términos de la variable z , por lo que trabajando sobre los exponentes de las exponenciales, tenemos

$$\frac{2z\sigma^2\tau - 2\sigma^2r\tau^2 - [y - (z + (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau)]^2}{2\sigma^2\tau}.$$

Elevando al cuadrado el término $[y - (z + (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau)]$

$$\begin{aligned} & \frac{2z\sigma^2\tau - 2\sigma^2r\tau^2 - y^2 + y\tau\sigma^2 - 2y\tau r - \frac{\sigma^4}{4}\tau^2 + \sigma^2r\tau^2 - r^2\tau^2 + 2yz}{2\sigma^2\tau} \\ & + \frac{-z^2 - z\tau\sigma^2 + 2z\tau r}{2\sigma^2\tau}. \end{aligned}$$

Agrupando los términos que tienen a la variable z

$$\begin{aligned} & \frac{(-2\sigma^2r\tau^2 - y^2 + y\tau\sigma^2 - 2y\tau r - \frac{\sigma^4}{4}\tau^2 + \sigma^2r\tau^2 - r^2\tau^2)}{2\sigma^2\tau} \\ & + \frac{(-z^2 - z\tau\sigma^2 + 2z\tau r + 2z\sigma^2\tau + 2yz)}{2\sigma^2\tau}, \end{aligned}$$

la parte que tiene en factor común la variable z se puede expresar como

$$\begin{aligned} \frac{(-z^2 - z\tau\sigma^2 + 2z\tau r + 2z\sigma^2\tau + 2yz)}{2\sigma^2\tau} &= \frac{-z^2 + 2z([\frac{\sigma^2}{2} + r]\tau + y)}{2\sigma^2\tau} \\ &= \frac{-(z^2 - 2z([\frac{\sigma^2}{2} + r]\tau + y))}{2\sigma^2\tau} \end{aligned}$$

agregando y restando el término $([\frac{\sigma^2}{2} + r]\tau + y)^2$ obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{-(z^2 - 2z([\frac{\sigma^2}{2} + r]\tau + y) + ([\frac{\sigma^2}{2} + r]\tau + y)^2 - ([\frac{\sigma^2}{2} + r]\tau + y)^2)}{2\sigma^2\tau} \\ &= \frac{-(z^2 - 2z([\frac{\sigma^2}{2} + r]\tau + y) + ([\frac{\sigma^2}{2} + r]\tau + y)^2)}{2\sigma^2\tau} + \frac{([\frac{\sigma^2}{2} + r]\tau + y)^2}{2\sigma^2\tau} \\ &= \frac{-(z - ([\frac{\sigma^2}{2} + r]\tau + y))^2}{2\sigma^2\tau} + \frac{([\frac{\sigma^2}{2} + r]\tau + y)^2}{2\sigma^2\tau} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{z - ([\frac{\sigma^2}{2} + r]\tau + y)}{\sigma\sqrt{\tau}} \right)^2 + \frac{([\frac{\sigma^2}{2} + r]\tau + y)^2}{2\sigma^2\tau} \end{aligned}$$

reincorporando los términos que no tienen a la variable z

$$\begin{aligned} & \frac{(-2\sigma^2r\tau^2 - y^2 + y\tau\sigma^2 - 2y\tau r - \frac{\sigma^4}{4}\tau^2 + \sigma^2r\tau^2 - r^2\tau^2)}{2\sigma^2\tau} \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{z - ([\frac{\sigma^2}{2} + r]\tau + y)}{\sigma\sqrt{\tau}} \right)^2 + \frac{([\frac{\sigma^2}{2} + r]\tau + y)^2}{2\sigma^2\tau} \end{aligned}$$

la mayoría de los términos que no tienen a la variable z van a cancelarse dado que desarrollando $([\frac{\sigma^2}{2} + r]\tau + y)^2$ se cancelan con los casi todos los términos reincorporados

$$([\frac{\sigma^2}{2} + r]\tau + y)^2 = \frac{\sigma^4}{4}\tau^2 + \tau^2\sigma^2r + \tau^2\sigma^2 + \tau y\sigma^2 + 2\tau r y + y^2.$$

Comparándolo con los términos reincorporados

$$-\sigma^2r\tau^2 - y^2 + y\tau\sigma^2 - 2y\tau r - \frac{\sigma^4}{4}\tau^2 - r^2\tau^2,$$

por lo tanto,

$$([\frac{\sigma^2}{2} + r]\tau + y)^2 - \sigma^2r\tau^2 - y^2 + y\tau\sigma^2 - 2y\tau r - \frac{\sigma^4}{4}\tau^2 - r^2\tau^2 = 2\tau y\sigma^2.$$

Regresando a la integral tenemos

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\ln K}^{\infty} e^z e^{-r\tau} e^{-\frac{1}{2}(\frac{y-z-(\frac{\sigma^2}{2}-r)\tau}{(\sigma\sqrt{\tau})^2})^2} dz \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{\ln K}^{\infty} e^{\frac{2\tau\sigma^2 y}{2\tau\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{z-([\frac{\sigma^2}{2}+r]\tau+y)}{\sigma\sqrt{\tau}})^2} dz \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^y \int_{\ln K}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{z-([\frac{\sigma^2}{2}+r]\tau+y)}{\sigma\sqrt{\tau}})^2} dz \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^y \int_{\ln K}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{([\frac{\sigma^2}{2}+r]\tau+y)-z}{\sigma\sqrt{\tau}})^2} dz. \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable, $u = \frac{y-z+(\frac{\sigma^2}{2}+r)\tau}{(\sigma\sqrt{\tau})}$, implica $-\sigma\sqrt{\tau}du = dz$,

cuando $z \rightarrow \ln K$ implica que $u \rightarrow \frac{y-\ln K+(\frac{\sigma^2}{2}+r)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$. Similarmente cuando $z \rightarrow \infty$ implica que $u \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} e^y \int_{\frac{y-\ln K+(\frac{\sigma^2}{2}+r)\tau}{(\sigma\sqrt{\tau})}}^{-\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} - \sigma\sqrt{\tau}du \\ &= e^y \int_{-\infty}^{\frac{(y-\ln K+(\frac{\sigma^2}{2}+r)\tau)}{(\sigma\sqrt{\tau})}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\ &= e^y \Phi\left(\frac{y-\ln K+(\frac{\sigma^2}{2}+r)\tau}{(\sigma\sqrt{\tau})}\right), \end{aligned}$$

por lo tanto la solución es

$$g(y, \tau) = e^y \Phi\left(\frac{y - \ln K + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{(\sigma\sqrt{\tau})}\right) - Ke^{-r\tau} \Phi\left(\frac{y - \ln K + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right).$$

Regresando a la variable x mediante $y = \ln x$

$$\begin{aligned} f(x, \tau) = & x \Phi\left(\frac{\ln x - \ln K + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{(\sigma\sqrt{\tau})}\right) \\ & - Ke^{-r\tau} \Phi\left(\frac{\ln x - \ln K + (r - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right). \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando que propiedades de logaritmos tenemos la solución de la ecuación

$$f(x, \tau) = x \Phi\left(\frac{\log(x/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - Ke^{-r\tau} \Phi\left(\frac{\log(x/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right). \quad (4.19)$$

Cuando regresamos a la variable proceso $x = S$, la ecuación (4.19) será conocida como la solución de la ecuación de la Black-Scholes. Se puede demostrar que la ecuación (4.19) es equivalente a

$$f(x, t) = xN[d_1(x, t)] - e^{-r(T-t)}KN[d_2(x, t)], \quad (4.20)$$

donde N es la función acumulativa para la distribución $N[0,1]$ y

$$\begin{aligned} d_1(x, t) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \right] \\ d_2(x, t) &= d_1(x, t) - \sigma\sqrt{T-t}. \end{aligned}$$

En el párrafo anterior dimos una equivalencia entre (4.19) y (4.20). En el trabajo de investigación de Freddy Marín [11] se muestra cómo obtener (4.20) mediante la función de distribución acumulativa.

Capítulo 5

Aplicación computacional

En este capítulo haremos uso de la teoría ya estudiada de la ecuación de Black Scholes con el fin de realizar una aplicación computacional que nos sirva para ejemplificar y exponer de manera gráfica y práctica el comportamiento de las opciones en el mercado financiero. El principal objetivo de este capítulo será mostrar cómo el modelo formulado por Fisher Black y Myron Scholes es una aproximación real a lo que pasa en el mercado financiero de las opciones. Haremos uso del lenguaje de programación Python y de algunas paqueterías para obtener datos del mercado financiero.

5.1. Programando la Black Scholes

Empezaremos importando algunas librerías que nos permitirán trabajar con la función normal, arreglos de números y con visualizaciones gráficas. Ahora presentaremos una clase llamada BS que implementa un método llamado `bs_call` que calcula el precio de la opción usando la formulación de Black-Scholes. Además,

```
import numpy as np
from scipy.stats import norm
import matplotlib.pyplot as plt
!pip install requests-cache
```

Figura 5.1: Código que importa las librerías numpy para trabajar con arreglos de números y matplotlib para hacer visualizaciones.

esta clase cuenta con 4 métodos como se observa en la figura (5.1). Estos métodos le dan funcionalidad a los objetos de la clase BS.

El método `__init__` permitirá la creación e inicialización de los objetos de la clase BS. Este método recibe los valores numéricos a cada parámetro, que corresponde a:

1. S = Precio de la acción en el mercado.
2. K = Strike price.
3. T = strike time o fecha de vencimiento.
4. r = interés bancario.
5. σ = volatilidad .

```
class BS():
    def __init__(self, S, K, T, r, sigma):
        self.price = S
        self.strk_price = K
        self.strk_time = T/365
        self.interest = r
        self.volat = sigma

    def d1(self):
        return (np.log(self.price / self.strk_price)+(self.interest + 0.5*self.volat **2)*self.strk_time)/(self.volat*np.sqrt(self.strk_time))

    def d2(self):
        return self.d1() - self.volat * np.sqrt(self.strk_time)

    def bs_call(self):
        d1 = self.d1()
        d2 = self.d2()
        return self.price*norm.cdf(d1) - self.strk_price*np.exp(-self.interest*self.strk_time)*norm.cdf(d2)
```

Figura 5.2: Clase que implementa la fórmula Black-Scholes

La función $d1$ implementa la fórmula

$$d_1(S, t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) \right],$$

similarmente, la función d_2 implementa la fórmula

$$d_2(S, t) = d_1(S, t) - \sigma\sqrt{T - t},$$

y por último, el método `bs_call` implementa la programación de (4.20), en donde usaremos la función `norm` que nos dará la función de densidad acumulada normal.

5.2. Acciones

Del sitio web <https://finance.yahoo.com> se lee el historial de las acciones de empresas que cotizan en la bolsa de valores. Para leer las tablas de acciones de Yahoo Finance se usó la clase `Ticker` implementada por Nikola Krivacevik que se puede obtener del sitio web github <https://github.com/krivi95/option-pricing-models>. Usando esta clase extraeremos la columna correspondiente al precio de cierre ajustado de la acción `Adj Close` y se graficará a lo largo del tiempo. El siguiente código realiza la graficación del precio de cierre de 4 distintas empresas: Apple, Microsoft, Tesla y Google.

```
tickers = ['TSLA', 'AAPL', 'MSFT', 'GOOGL']
for tk in tickers:
    data = Ticker.get_historical_data(tk)
    print(Ticker.get_columns(data))
    print(Ticker.get_last_price(data, 'Adj Close'))
    Ticker.plot_data(data, tk, 'Adj Close')
```

Figura 5.3: Código que grafica las acciones de las compañías TSLA, AAPL, MSFT, GOOGL a lo largo del tiempo

Nos interesa el precio de cierre de la acción o `Adj Close` dado que es el valor de la última cotización en el día, es decir, el precio que tiene la acción al final del día. Las gráficas obtenidas se muestran a continuación.

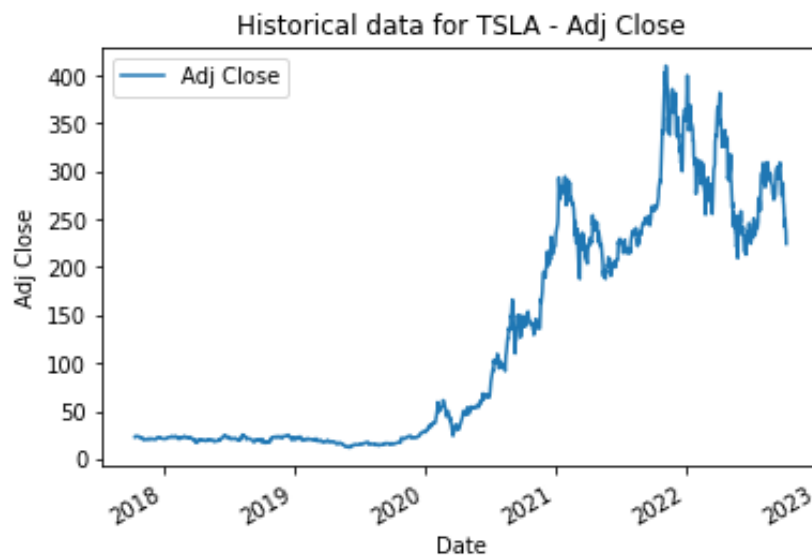


Figura 5.4: Historia del Adj Close de Tesla desde el 2018 hasta la fecha actual.

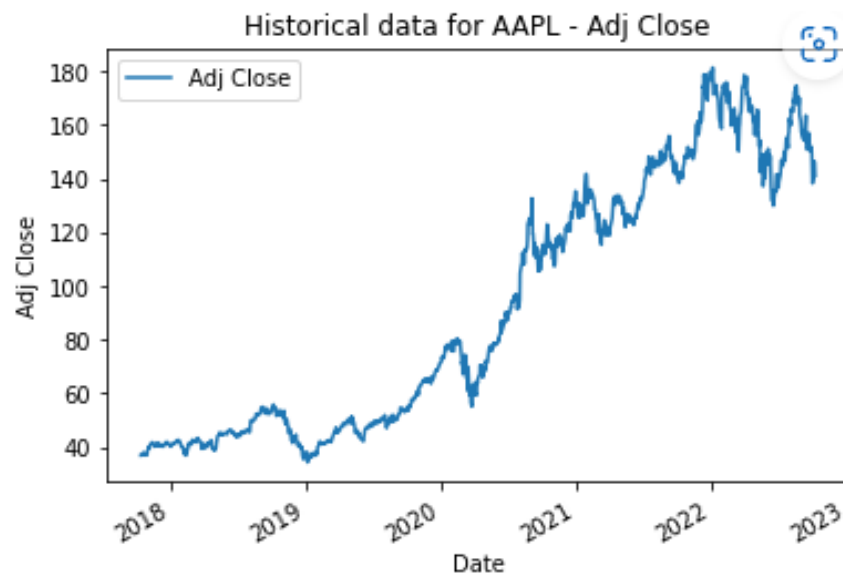


Figura 5.5: Historia del Adj Close de Apple desde el 2018 hasta la fecha actual.

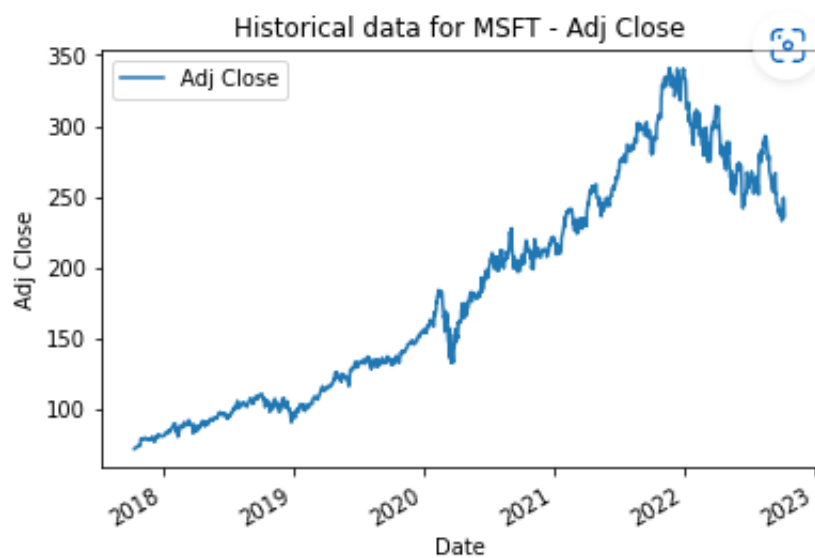


Figura 5.6: Historia del Adj Close de Microsoft desde el 2018 hasta la fecha actual.

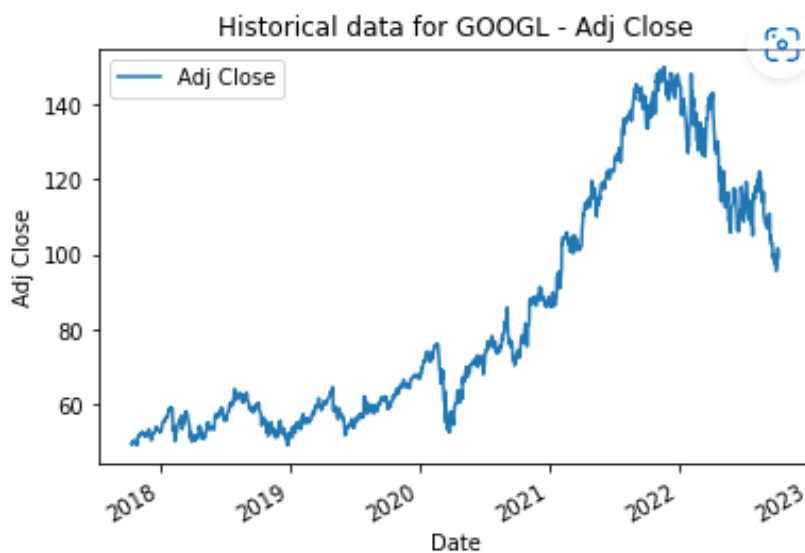


Figura 5.7: Historia del Adj Close de Google desde el 2018 hasta la fecha actual.

5.2.1. Cálculo de volatilidad

Calcularemos la volatilidad de la acción en base a lo siguiente. Considerar los retornos relativos de la siguiente manera

$$r_t = \frac{c_t - c_{t-1}}{c_t}, \quad (5.1)$$

donde r_t es el retorno relativo en el tiempo t y c_t, c_{t-1} son los precios de cierre en el tiempo t y $t - 1$. Usando el retorno relativo calcularemos la desviación estándar para ver qué tan dispersos están los retornos relativos de la media

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}{n - 1}}, \quad (5.2)$$

donde \bar{r} es la media de los retornos relativos y n es la cantidad de retornos que consideramos. Finalmente, multiplicaremos la desviación estándar por la raíz cuadrada del número de días de negociación hábiles en el mercado en un año que corresponden a 252, para finalmente obtener la volatilidad σ

$$\sigma = \sqrt{252}s. \quad (5.3)$$

Mediante la función `compute_volatility` mostrada en la siguiente figura se realiza el cálculo de la volatilidad (5.3).

```
def compute_volatility(df):
    df = df.assign(close_day_before = df.Close.shift(1))
    df['returns'] = (df.Close - df.close_day_before)/df.close_day_before
    sigma = np.sqrt(252) * df['returns'].std()
    return sigma, df
```

Figura 5.8: Cálculo de la volatilidad

5.2.2. Cálculo del interés

En el apartado anterior hemos calculado la volatilidad de las acciones de una empresa y solo nos faltaría hacer el cálculo de la tasa de interés para poder obtener todos los parámetros que se necesitan conocer para calcular el precio justo de la

opción mediante la Black-Scholes. Para esto, usaremos Treasury Yield 10 years para leer la tasa de interés desde una fecha pasada hasta la fecha actual. Treasury Yield 10 years es un Bono emitido por parte del Gobierno de los Estados Unidos con un vencimiento de 10 años y proporciona una tasa de interés fija garantizada (una vez cada medio año) sobre una obligación de deuda prestada.

```
today = datetime.now()
one_year_ago = today.replace(year=today.year-1)
interest = Ticker.get_historical_data("^TNX",start_date=today.replace(day=today.day-1), end_date=today)
interest = interest['Close'].iloc[-1]/100
```

Figura 5.9: Lectura de la tasa de interés a partir del Treasury yield.

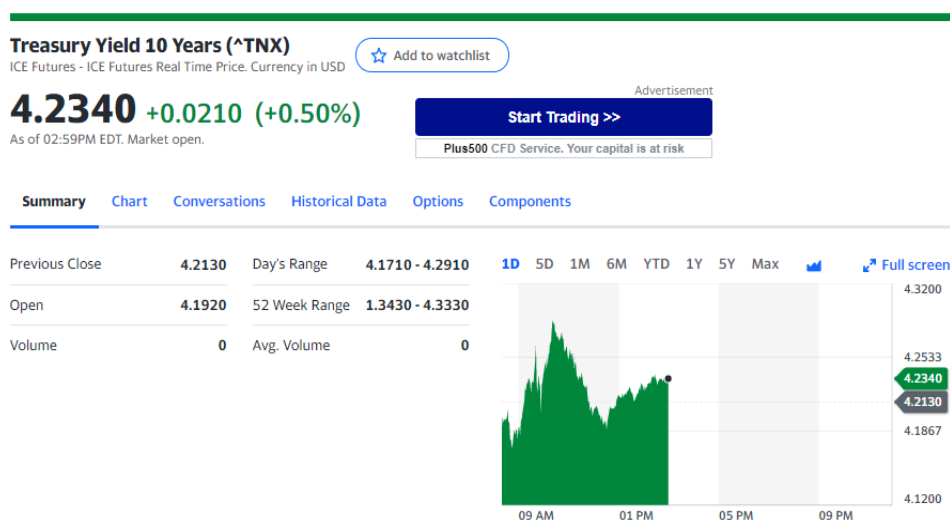


Figura 5.10: Determinación de la tasa de interés

5.3. Opciones

Yahoo Finance es un sitio web perteneciente a Yahoo Inc, cuyo lanzamiento fue el 19 de enero de 1997. Es un dominio de internet que proporciona noticias financieras, datos, cotizaciones de acciones e información financiera. El sitio web muestra en tiempo real el precio de las acciones que cotizan en la bolsa de valores

americana, y posee distintos apartados que nos permite navegar por distintas peculiaridades financieras, en especial un apartado en donde se muestran las opciones de compra y venta referente a cada empresa que cotiza en el mercado de valores. El apartado de opciones contiene una tabla genérica para cualquier empresa en la que se muestran distintas columnas como se muestra en la siguiente figura.

Contract Name	Last Trade Date	Strike ^	Last Price	Bid	Ask	Change	% Change	Volume	Open Interest	Implied Volatility
AAPL221021C00050000	2022-10-19 3:57PM EDT	50.00	93.73	93.55	94.25	-0.62	-0.66%	10	839	537.50%
AAPL221021C00060000	2022-10-19 2:42PM EDT	60.00	83.35	83.65	84.35	-2.50	-2.91%	12	625	520.31%
AAPL221021C00070000	2022-10-19 12:42PM EDT	70.00	73.25	73.65	74.85	+3.76	+5.41%	9	612	507.03%
AAPL221021C00075000	2022-10-19 2:14PM EDT	75.00	68.26	68.65	69.20	+3.01	+4.61%	1	744	359.38%
AAPL221021C00080000	2022-10-18 2:57PM EDT	80.00	64.75	62.65	64.50	+2.30	+3.68%	1	929	462.11%
AAPL221021C00085000	2022-10-19 2:03PM EDT	85.00	57.95	58.00	59.45	+0.90	+1.58%	28	569	414.06%
AAPL221021C00090000	2022-10-19 1:21PM EDT	90.00	52.72	52.80	54.65	+1.27	+2.47%	67	1,070	398.24%
AAPL221021C00095000	2022-10-19 10:24AM EDT	95.00	49.80	48.10	49.70	+1.15	+2.36%	5	692	225.00%
AAPL221021C00100000	2022-10-19 2:03PM EDT	100.00	42.95	42.85	44.70	-0.32	-0.74%	43	906	326.76%
AAPL221021C00105000	2022-10-19 9:31AM EDT	105.00	38.20	38.10	39.95	+1.15	+3.10%	11	857	212.89%
AAPL221021C00110000	2022-10-19 2:41PM EDT	110.00	33.17	33.05	34.95	-0.21	-0.63%	112	1,114	180.47%
AAPL221021C00115000	2022-10-19 3:45PM EDT	115.00	28.40	28.60	29.55	+1.75	+6.57%	9	512	166.21%
AAPL221021C00116000	2022-10-18 10:00AM EDT	116.00	29.70	27.00	28.75	0.00	-	3	8	110.94%
AAPL221021C00117000	2022-10-19 9:51AM EDT	117.00	26.50	26.35	27.70	+1.30	+5.16%	3	2	148.44%
AAPL221021C00118000	2022-10-19 9:51AM EDT	118.00	25.50	25.00	26.70	-2.95	-10.37%	2	14	202.05%
AAPL221021C00119000	2022-10-19 2:19PM EDT	119.00	24.55	24.80	25.05	+1.95	+8.63%	31	9	119.14%
AAPL221021C00120000	2022-10-19 3:08PM EDT	120.00	23.04	23.80	24.05	+0.59	+2.63%	47	1,812	114.84%
AAPL221021C00121000	2022-10-18 3:38PM EDT	121.00	22.10	21.90	23.85	0.00	-	25	23	91.41%
AAPL221021C00123000	2022-10-18 3:13PM EDT	123.00	18.95	20.15	21.70	0.00	-	22	57	100.78%
AAPL221021C00124000	2022-10-19 3:03PM EDT	124.00	19.20	19.05	20.05	-0.13	-0.67%	20	43	115.43%
AAPL221021C00125000	2022-10-19 3:50PM EDT	125.00	18.40	18.85	19.00	-0.10	-0.54%	123	895	91.80%

Figura 5.11: Tabla de las diferentes opciones de la empresa Apple

Veamos que significa cada columna:

1. Strike: Es el precio acordado de la opción.
2. Last price: Es el precio de la opción de la anterior subasta.
3. Change: Es que tanto cambió el last price con su anterior subasta.
4. Bid: Precio al que los compradores intentan comprar la opción.

5. Ask: Precio al que los vendedores intentan vender la opción.
6. Volume: Cantidad de contratos disponibles en la subasta actual.
7. Open interest: Son el numero de transacciones que no se han decretado.

El sitio web nos permite posicionarnos en el día actual y ver las futuras fechas de expiración de las opciones, que pueden ser desde un día hasta 3 años en el futuro, como se muestra en la siguiente figura.



Figura 5.12: Futuras fechas de expiración de opciones de Apple.

Usaremos la paquetería `yfinance` de `python` para obtener los datos de las tablas de opciones en el mercado a través del sitio web yahoo finance desde la fecha presente hasta una fecha futura específica de expiración como se muestra a continuación.

```
list_companies = ['TSLA', 'AAPL', 'MSFT', 'GOOGL']
dt = datetime(2022, 11, 30)
option_filtered = {}
for cpny in list_companies:
    print(cpny)
    option_filtered[cpny] = option_list[cpny][option_list[cpny].expirationDate < dt]
    display(option_filtered[cpny].expirationDate)

option_filtered = option_filtered
```

Figura 5.13: Filtrado de las opciones por fecha de expiración para las empresas Tesla, Google, Microsoft y Apple desde el día actual hasta el 30 de noviembre del 2022.

De esta manera podemos obtener el tiempo de expiración para cada empresa mediante lo siguiente:

$$\text{days to expire} = T - t \quad (5.4)$$

$$= 30/11/22 - \text{fecha actual}, \quad (5.5)$$

donde T es el strike time.

5.4. Resultados

En las secciones anteriores explicamos como calcular los parámetros usados en la formulación de la Black Sholes para calcular el precio justo de una opción. En esta sección haremos una comparación de los resultados obtenidos con la Black-Scholes contra el precio ask al que se intentan vender la opción, esto se realizará para cada una de las 4 empresas y veremos que tan justo es el precio al que intentan vender las opciones. Tenemos todo lo necesario para aplicar la Black-Scholes dado que

1. $S_t = \text{Adj Close}$.
2. $\text{days to expire} = 30/11/22 - \text{fecha actual}$.
3. $\sigma = \sqrt{252}s$.
4. r se puede leer en Treasury Yield 10 years.
5. Strike price se puede leer en las tablas de yahoo Finance.

Lo que obtendremos al aplicar la Black-Scholes para cada opción de las 4 compañías será una columna de la misma dimensión que la columna ask y tendrá los precios justos de compra.

```
for stock in list_companies:
    df_stock = Ticker.get_historical_data(stock)
    df_stock = df_stock.sort_values(by="Date")
    df_stock = df_stock.dropna()
    sigma, df_stock = compute_volatility(df_stock)
    stock_price = df_stock['Close'].iloc[-1]
    days2exp = option_list[stock].days2exp
    strike_price = option_list[stock].strike
    bs_obj = BS(stock_price, strike_price, days2exp, interest, sigma)
    call_price = bs_obj.bs_call()
    bs[stock] = call_price
```

Figura 5.14: Cálculo de los precios justos de las acciones para cada compañía

5.4.1. Comparación de precio justo según Black-Scholes vs el precio real de venta

Para obtener que tan acertada fue la comparación del precio justo obtenido con la Black-Scholes, se calcula el valor absoluto de la diferencia del precio real $(Ak)_i$ y el estimado por la Black-Scholes $(BS)_i$ para cada opción analizada,

$$Err_i = |(Ak)_i - (BS)_i|. \quad (5.6)$$

Es decir, para cada entrada en la columna Ask tendremos una correspondiente entrada numérica obtenida a través de la formula Black-Scholes y realizaremos la diferencia (5.6) para cada entrada, por lo que esta diferencia se hará un total de veces igual al número de entradas Ask que estemos manejando. Una vez calculados

```
errors[stock] = np.abs(np.array(option_list[stock]['ask']) - bs[stock])
mse[stock] = np.sqrt(np.mean(errors[stock]**2) / bs[stock].shape[0])
print('The Option Price of option {} is {}'.format(stock, mse[stock]))
```

Figura 5.15: Cálculo del error cuadrático medio entre la estimación por la Black-Scholes y el de la columna Ask.

los errores individuales (5.6) se calcula el error medio cuadrático mse para cada

compañía de la siguiente manera

$$mse = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Err_i^2,$$

donde n es el número total de entradas de la columna Ask.

5.4.2. Errores

Haremos uso de la paquetería seaborn de python para realizar algunas visualizaciones estadísticas, en particular usaremos el histograma y los box-plots para visualizar los errores obtenidos para cada una de las 4 compañías. Los histogramas representan el número de errores por cantidad de datos. Los diagramas de caja representan en porcentaje la cantidad de errores que obtuvo.

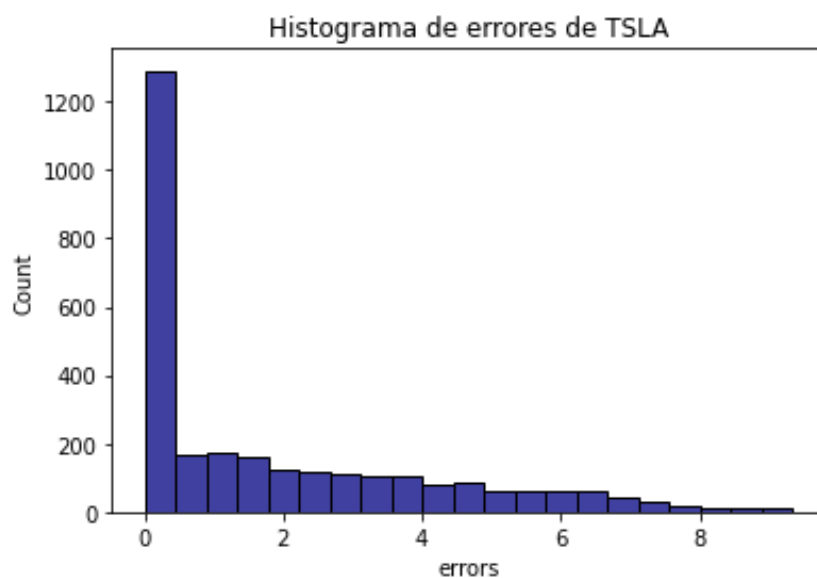


Figura 5.16: La mayor cantidad de errores se encuentran entre 0 y 2 dólares

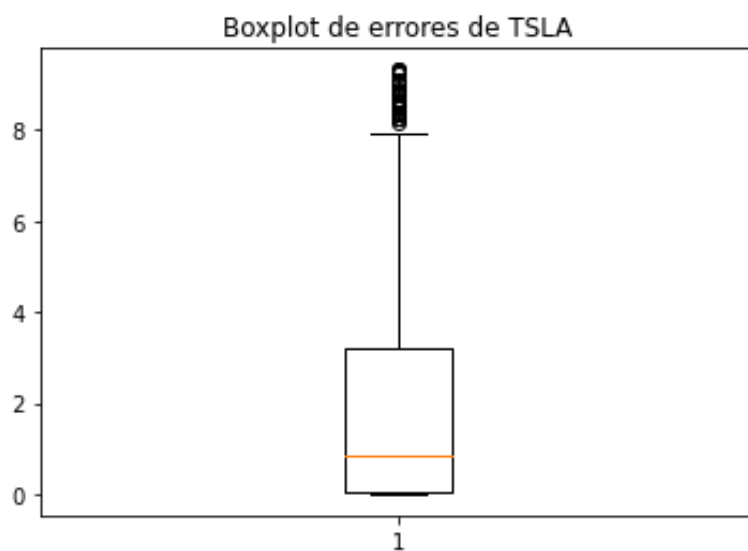


Figura 5.17: Cerca del 75 por ciento de los datos obtenidos tienen un error menor a 3 dolares.

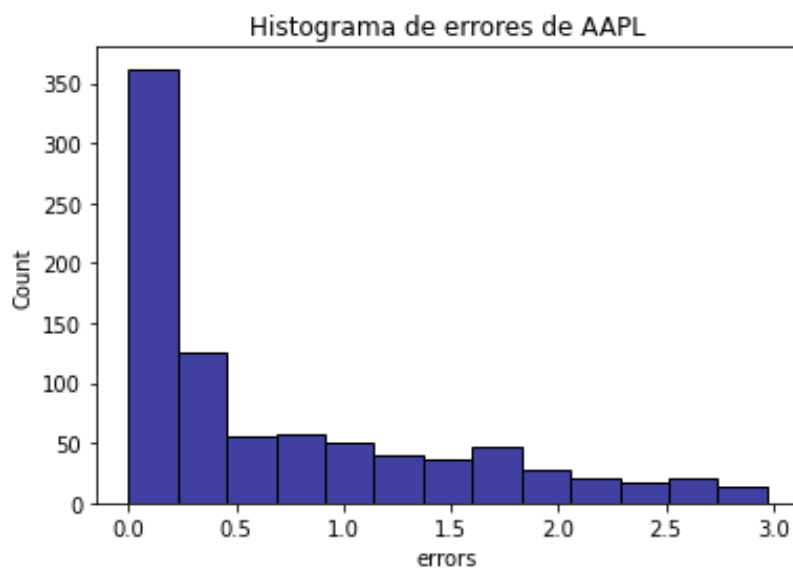


Figura 5.18: La mayor cantidad de errores para la empresa Apple se distribuyen entre los 0 y 0.5 dolares.

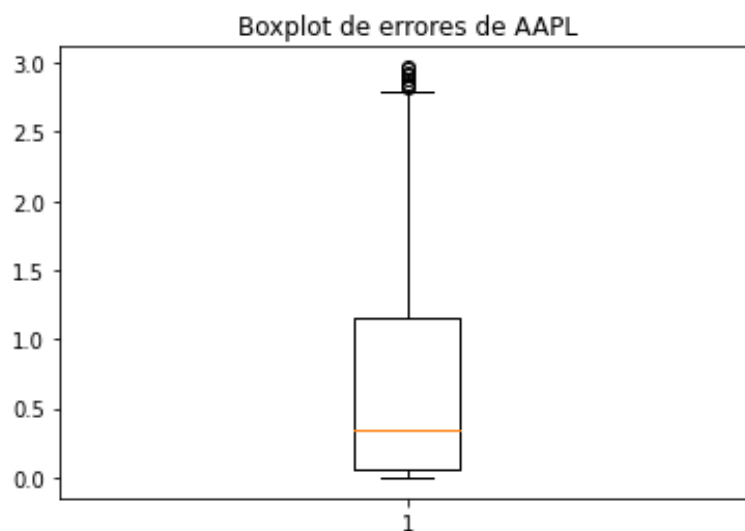


Figura 5.19: Aproximadamente el 75 por ciento de los datos tienen un error menor a 1.25 dolares.

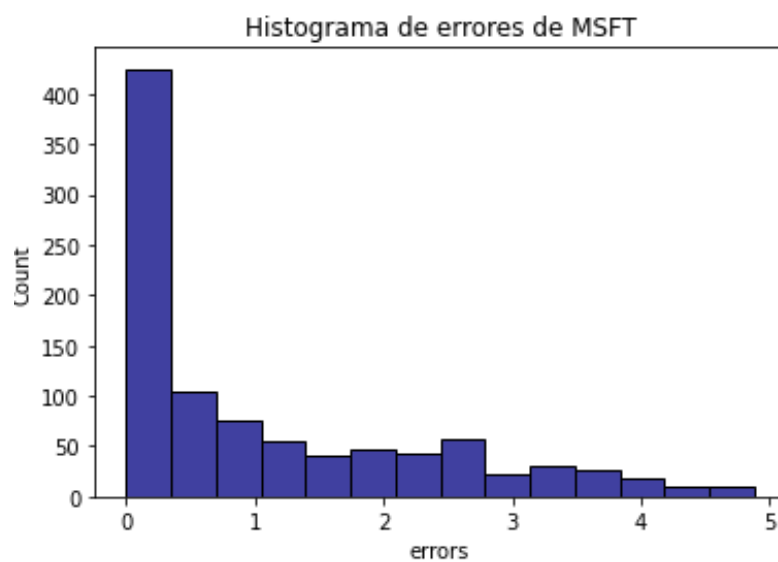


Figura 5.20: La mayor cantidad de errores se encuentran localizados en datos de entre 0 a 1 dolares.

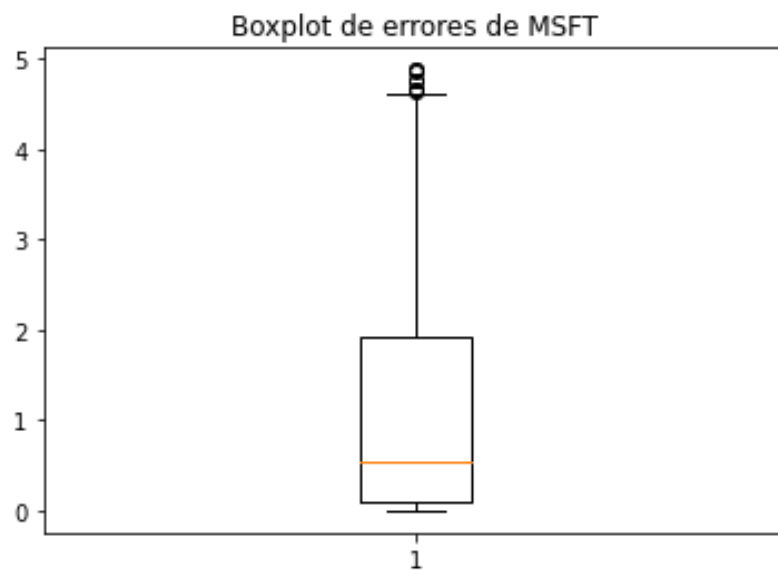


Figura 5.21: 75 por ciento de los datos mantienen un error menor a 2 dolares.

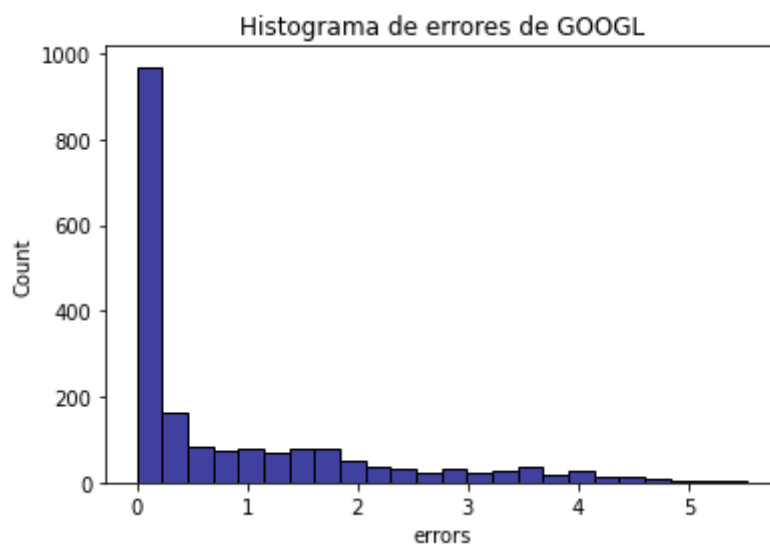


Figura 5.22: La mayor distribución de errores se obtiene en datos cuya variación es de 0 a 1 dolar.

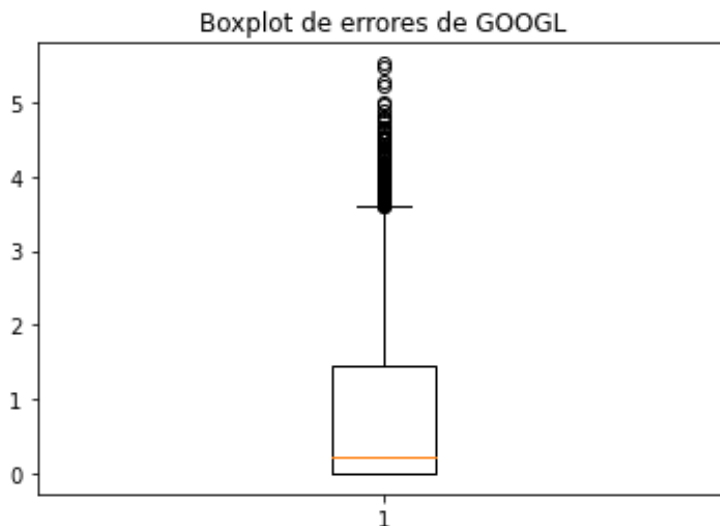


Figura 5.23: Aproximadamente el 75 por ciento de los datos mantienen un error menor a 1.75 dolares.

	stock	min	max	mean	median
0	TSLA	0.0	9.329729	1.841153	0.840072
1	AAPL	0.0	2.969409	0.698241	0.336864
2	MSFT	0.0	4.876382	1.095471	0.539748
3	GOOGL	0.0	5.523478	0.859074	0.231000

Figura 5.24: Tabla donde se muestran los errores máximos, mínimos, medios y la mediana de cada compañía.

Se puede observar que para la empresa Tesla el máximo error fue de 9.32 dolares y en promedio el error fue de 1.84 dolares. En el caso de Apple obtuvimos un error máximo de 2.96 dolares y el error promedio fue de 0.69 dolares. Para Microsoft, obtuvimos que el máximo error fue de 4.87 dolares y en promedio el error fue de 1.09 dolares. Por ultimo, el error máximo para Google fue de 5.52 dolares y el error

promedio fue de 0.85 dolares.

5.5. Conclusiones

A partir de los errores que obtuvimos se puede concluir que al comparar las estimaciones que obtenemos con la Black-Shole comparados con los precios reales son en promedio pequeños, lo que quiere decir que la ecuación Black-Scholes realiza una buena predicción del precios justo de una opción.

La ecuación de Black-Scholes es uno de los tantos modelos matemáticos que ejemplifican la aplicación de las matemáticas a las finanzas. Por otra parte, las finanzas también motivan a desarrollar nuevos conceptos matemáticos para explicar conceptos financieros y que, de no ser por esta motivación financiera, estos nuevos conceptos matemáticos no existirían.

Como hemos apreciado a lo largo de este trabajo, las matemáticas juegan un papel importante en la solución de problemas de ciencias sociales que involucren procesos aleatorios. En palabras de Robert Merton [1]: "Las matemáticas del modelo a tiempo continuo contienen alguna de las más bellas aplicaciones de las probabilidades y de la teoría de optimización. Por supuesto, no todo lo bello de la ciencia es necesariamente práctico. Y con seguridad no todo lo práctico es bello. Aquí tenemos ambas cualidades".

Apéndice

Apéndice A

Conceptos y resultados varios

A.1. Notación

$\#A$: Cardinalidad del conjunto A .

$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$: Sigma algebra de Borel.

μ : Media.

σ^2 : Varianza.

$E(X)$: Esperanza de la variable aleatoria X .

$Var(X)$: Varianza de la variable aleatoria X .

\hat{h} : Fourier de la función h .

$A \otimes B$: Mínima sigma álgebra generada por el espacio producto $A \times B$.

A.2. Resultados

A.2.1. Función de distribución

Definición A.2.1. Convergencia en distribución

La sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, \dots converge en distribución a X si para todo punto x en donde la función $F_X(x)$ es continua, se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

A.2.2. Desigualdades

Teorema A.2.2. Desigualdad de Hölder

Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sean X y Y variables aleatorias, entonces

$$E|XY| \leq (E|X|^r)^{\frac{1}{r}} (E|Y|^s)^{\frac{1}{s}},$$

con la condición de que r y s sean dos números reales tales que $r, s > 1$ y $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.

Teorema A.2.3. Desigualdad de Minkowsky

Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad y sean X y Y variables aleatorias, entonces

$$(E|X + Y|^r)^{\frac{1}{r}} \leq (E|X|^r)^{\frac{1}{r}} + (E|Y|^r)^{\frac{1}{r}},$$

con la condición de que $r > 0$.

Teorema A.2.4. Desigualdad de Markov

Sea $X \geq 0$ una variable aleatoria con esperanza finita. Para cualquier $\epsilon > 0$,

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{E(X)}{\epsilon}.$$

Teorema A.2.5. Desigualdad de Chebyshev

Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza finita σ^2 . Para cualquier $\epsilon > 0$,

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

A.2.3. Dos teoremas límite

Teorema A.2.6. Ley fuerte de los grandes números

Sean X_1, X_2, \dots variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ . Entonces

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow \mu,$$

donde la convergencia es casi segura.

Teorema A.2.7. Teorema central del límite

Sean X_1, X_2, \dots variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tales que para cada natural n , $E(X_n) = \mu$ y $\text{Var}(X_n) = \sigma^2 < \infty$. Entonces

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \rightarrow N(0, 1),$$

donde la convergencia es en distribución.

Bibliografía

- [1] Peter Bernstein. *Capital Ideas: The Improbable Origins of Modern Wall Street*. Simon and Schuster., 1993.
- [2] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *In World Scientific Reference on Contingent Claims Analysis in Corporate Finance*, 1:3–21, 2019.
- [3] Joseph Doob. *Stochastic processes*. New York: Wiley, 1953.
- [4] Oleaga Gerardo. Sobre la ecuación de black-scholes. *Boletín de Matemáticas*, 18(1):85–104, 2011.
- [5] Kiyosi Ito. Stochastic integral. *Proceedings of the Imperial Academy*, 20(8):519–524, 1944.
- [6] Paul Lévy and Michel Loeve. *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Gauthier-Villars, 1965.
- [7] Luis Rincon. *Curso intermedio de probabilidad*. Facultad de ciencias, UNAM, 2015.
- [8] Luis Rincón. *Introducción a los procesos estocásticos*. Facultad de ciencias, UNAM, 2012.
- [9] Michael Steele. *Stochastic Calculus and Financial Applications*. New York: Springer, 2001.
- [10] Ian Stewart. *17 ecuaciones que cambiaron el mundo*. Barcelona: Crítica, 2013.
- [11] Marín Sánchez. Ecuaciones diferenciales estocásticas y casos de aplicación en finanzas. *Bull. Soc. Math. Belg*, 41:417–463, 1989.