Análisis del Método de Punto Fijo

Santiago Romero, Sandra Chavez, Ricardo Bernal

20 de Septiembre del 2020

1. Introducción

Existen diversos métodos para hallar las raíces de una función que ofrecen garantizar la precisión decimal que sea deseada, entre estos métodos encontramos el punto fijo que permite calcular las raíces con tolerancias de error grandes, además de esto, es uno de los métodos mas eficientes y efectivos para hallarlas.

A continuación se presentará un taller enfocado en el método de punto fijo que constará de 11 puntos, cada uno de estos puntos permitirá analizar y abarcar mas a fondo el método.

2. Preguntas

1. Cuales son condiciones para aplicar el método?

   Para establecer si una función $g(x)$ puede converger a un cero de la función $f(x)$, dicha función debe cumplir las siguientes condiciones:

   - **Teorema de Unicidad y Existencia de puntos fijos:** Sea $f(x)$ una función continua y diferenciable en un intervalo $[a, b] \to \mathrm{R}$, y sea $g(x)$ una función que es continua se tiene que:

     $$g'(x) \leq 1$$

   - **Criterio de Convergencia:** Si $g(x)$ y $g'(x)$ son continuas en el intervalo [a,b] alrededor de una raíz de la ecuación $g(x)$ y si se cumple:

     $$f(x) = 0$$

     para todo el intervalo, entonces X_i convergerá hacia la raíz

2. Proporcione una explicación geométrica del algoritmo del método

   En el método de punto fijo, para determinar de forma geométrica como converge o diverge una función $f(x) = 0$, se parte de la ecuación de recurrencia dada por:

   $$f(x) = 0 \; g(x) = x$$

Dicha ecuación puede replantear de la siguiente forma para su ilustración geométrica:

$$y_1 = x \; y_2 = g(x)$$

El valor de la raíz $f(x) = 0$ corresponde el valor de la abscisa (distancia horizontal desde eje vertical) en la intersección de las curvas trazadas o definidas por y_1, y_2 (ver Figura 1)

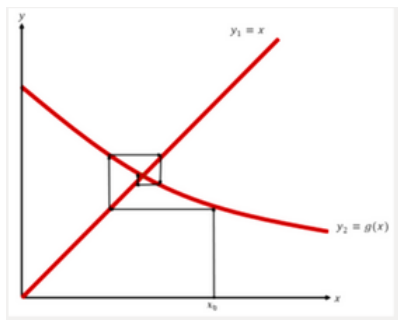


Figura 1: Intersección donde se encuentra la raíz

Teniendo en cuenta los criterios de convergencia explicados anteriormente, la convergencia o divergencia puede variar según los valores que g'(x) en un intervalo $[x_a, x_b]$ establecido. Se pueden caracterizar o distinguirse cuatro casos:

- **Caso 1:** Si el valor k de la derivada $g'(x) < -1$, el método diverge por lo que se alejara del valor aproximado de la raíz en cada iteración.

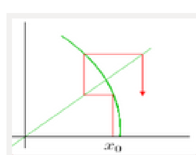


Figura 2: Ejemplo del caso 1

- **Caso 2:** Si el valor k de la derivada $|g'(x)|$ se encuentra en el intervalo $-1 < k < 0$, el método converge en forma de espiral.

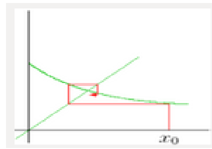


Figura 3: Ejemplo del caso 2

- **Caso 3:** : Si el valor k de la derivada $|g'(x)|$ se encuentra en el intervalo $0 < k < 1$, el método converge en forma de escalera.

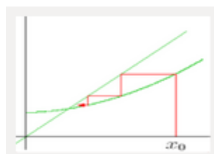


Figura 4: Ejemplo del caso 3

- **Caso 4:** Si el valor k de la derivada $g(`x) < 1$, el método diverge por lo que se alejara del valor aproximado de la raíz en cada iteración.

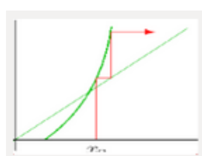


Figura 5: Ejemplo del caso 4

3. Realice un diagrama de flujo que muestre como se debe operar el algoritmo.

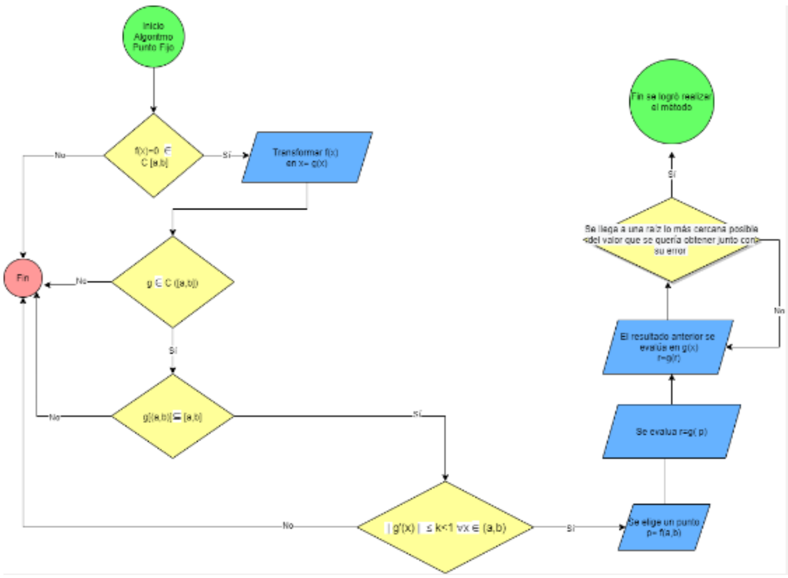
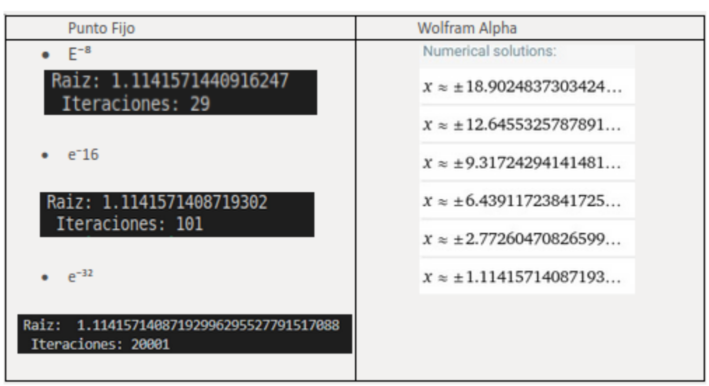


Figura 6: Diagrama de flujo del algoritmo

4. Cuál son las raíces. Valide su resultado.

   Para validar los resultados (raíces) obtenidas por el algoritmo implementado, se hizo uso de Wolfram Alpha, una herramienta matemática online en la cual calculamos las raíces para cada una de las funciones.



Punto Fijo	Wolfram Alpha
• E^{-8} Raiz: 1.1141571440916247 Iteraciones: 29 • e⁻16 Raiz: 1.1141571408719302 Iteraciones: 101 • e^{-32} Raiz: 1.114157140871929962955277915170 88 Iteraciones: 20001	Numerical solutions: $x \approx \pm 18.9024837303424\ldots$ $x \approx \pm 12.6455325787891\ldots$ $x \approx \pm 9.31724294141481\ldots$ $x \approx \pm 6.43911723841725\ldots$ $x \approx \pm 2.77260470826599\ldots$ $x \approx \pm 1.11415714087193\ldots$

Figura 7: Raices de la funcion 2

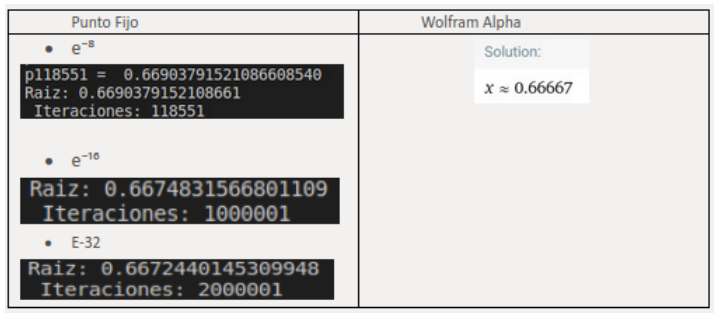


Figura 8: Raices de la funcion 3

5. Como se comporta el método en cuanto: perdida de significancia, el número de iteraciones, la convergencia, en cada caso?

    - **Punto B:** Como se puede observar en el punto anterior entre mayor el número de iteraciones la perdida de significancia es mucho menor.
    - **Punto C:** Como se puede observar en el punto anterior entre mayor el número de iteraciones la perdida de significancia es mucho menor, sin embargo, la cantidad de iteraciones que se realizan para hallar la raíz de esta función es mucho mayor y en este caso la perdida de significancia es considerable.

6. Cómo se puede solucionar el problema de significancia? Es remediable o está destinado al fracaso?

    Para resolver el problema de significancia se pueden agregar métodos alternativos en este caso, el método que ayuda a acelerar la convergencia es el de Stiffensen.
    El principio detrás del método de Steffensen es que se piensa que x0 es una mejor aproximación al punto fijo x* que x_2, por lo que debe usarse como la siguiente iteración para la iteración de punto fijo.

7. Que pasa con el método cuando hay más de dos raíces? Explique su respuesta.

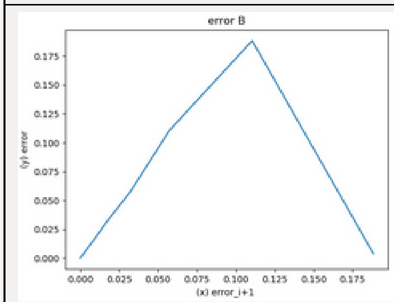
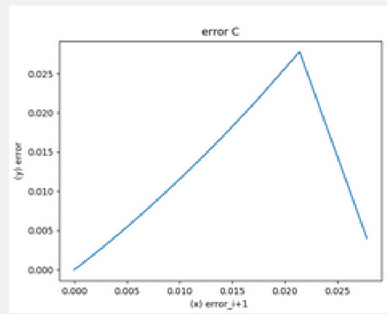
    Al realizar las iteraciones encuentra la raíz más cercana al x0 dado inicialmente.

8. Qué pasa con el método cuando la función es periódica, par o impar, estas características influyen?

    En el caso de funciones periódicas, la convergencia hacia una de las raíces puede fallar si uno de los valores x iniciales en los cuales se van a evaluar $g(x)$ o una iteración en la cual se evalúa $g(x)$ coincide con uno ciclo:

Este ejemplo indica que la función tiene un ciclo de periodo dos, pero otros ciclos de otros ordenes mayores pueden existir también. Estos problemas se pueden evitar si se elige un x0 inicial correctamente y analizando la gráfica de las derivadas de la función en cuestión.

9. Realice una gráfica que muestre la relación entre $\varepsilon_i + 1$ y ε_i, qué representa esa gráfica? Encuentre una relación de la forma $\varepsilon_i + 1 = f(\varepsilon_i)$.

<table>
<tr><th>Punto B</th><th>Punto C</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">

- Como se puede observar ambas graficas son parecidas en cuanto a su forma debido a que ambas en algún momento encuentran un pico de error máximo donde a partir de allí el error tiende a disminuir (Es válido aclarar que este pico se da dependiendo del error inicial que se asigne, en este caso asignamos un error inicial de 0.004).
- Del pico hacia la derecha son los valores de error iniciales.
- Del pico hacia la izquierda son los valores de error finales, pues como se puede observar estos valores tienden a 0. o a la tolerancia de error dada.

</td></tr>
</table>

Figura 9: Tablas de comparacion de errores

10. Realice una gráfica que muestre cómo se comporta el método en cada caso con respecto a la tolerancia y al número de iteraciones.

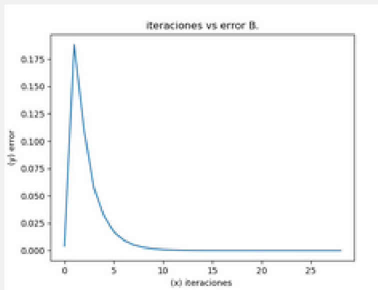
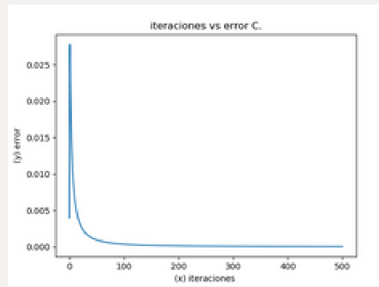
Punto B	Punto C
	
• Como se puede observar, las gráficas son similares en cuanto a su forma. • A medida que van aumentando las iteraciones la función converge. • La grafica del punto B converge aproximadamente en su 8va iteración. • La grafica del punto C converge en 90 (nonagésima) iteración	

Figura 10: Tolerancia vs Iteraciones

11. Como se comporta el método con respecto al de bisección?

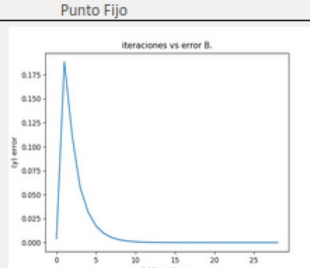
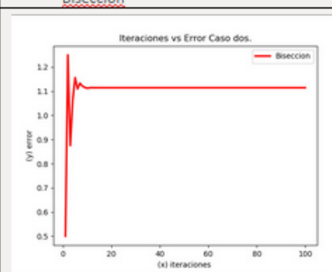
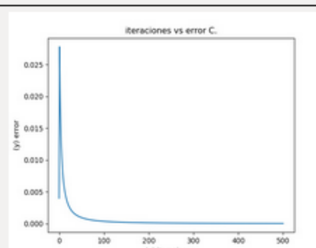
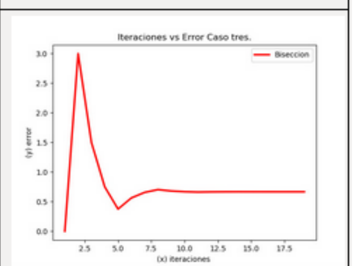
	Punto Fijo	Bisección
B		
C		

Figura 11: Biseccion vs Punto Fijo

Referencias

- Burton A. (1992). Newton's Method and Fractals. Whitman College. Recuperado de: https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/burton.pdf
- Olvera G. Lorena. (2016). Metodos numericos para resolver ecuaciones y problemas de optimizacion no lineales. Universidad Nacional Autonoma de Mexico. Recuperado de: http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/jspui/bitstream/132.248.52.100/10589/1/t