Exercise 1

a)

$\mathcal{X} = \{S_A, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_B\}$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.15 & 0.35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

Com base na resposta anterior, temos:

$x_3 = x_0 \times P^3$

$$x_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.15 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.15 & 0.35 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.15 & 0.35 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.15 & 0.35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.35 & 0.15 \end{bmatrix}$$

Como tal,

$x_3 = \begin{bmatrix} 0.15 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix}$

Ou seja, existe uma probabilidade de 15% de o comboio estar na Estação A, 50% de estar na paragem 3 e 35% de estar na estação B.

c)

Existem 3 ramos possíveis que conduzem desde a paragem 4 até, de volta, à paragem 4. Consideremos o ramo A que passa pela paragem 1, o ramo B que vai diretamente para a 4 e o ramo C que passa pela 5. Sejam t_A, t_B e t_C os tempos correspondentes a um único ciclo (partindo da paragem 4 e indo até à paragem imadiatamente anterior à estação B).

$t_A = 5 * 10 + 5 * 2 = 60$

$t_B = 3 * 10 + 2 * 2 = 34$

$t_C = 4 * 10 + 4 * 2 = 48$

Assim, é possível construir uma equação que permite calcular o tempo esperado, utilizando estes tempos "parciais" e a probabilidade de cada ramo ser tomado. Seja T esse tempo:

$$T = P_A * (t_A + T) + P_B * t_B + P_C * (t_C + T)$$
$$\Leftrightarrow T = 0.5 * (60 + T) + 0.15 * 34 + 0.35 * (48 + T)$$
$$\Leftrightarrow T = 346$$