Universidade Federal do Ceará
Departamento de Computação

Métodos de Runge-Kutta

Métodos Numéricos II

Ricardo Bustamante de Queiroz

Universidade Federal do Ceará

06 de junho de 2017

Apresentação

- Ricardo Bustamante de Queiroz
- Doutorado CRAb - UFC
- ricardobqueiroz+mn2@gmail.com
- http://www.busta.com.br/mn2/ - Estão me mandando e-mail?

- Página do Face (informativos, noticias etc)
  - https://www.facebook.com/groups/computacaoufc/
- Chat do Telegram (conversas casuais)
  - https://t.me/joinchat/AAAAAEOSM3hT241gbi92RA

Agenda

Agenda

- Observações Aula Anterior
- Métodos de Runge-Kutta
  - Introdução
  - Runge-Kutta de Segunda Ordem
  - Runge-Kutta de Terceira Ordem
  - Runge-Kutta de Quarta Ordem

Recapitulando

Recapitulando

Métodos de Euler

$$\begin{cases} u'(t) = f(u,t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Forward Euler

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \; f(u_n, t_n)$$

Backward Euler

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \; f(u_{n+1}, t_{n+1})$$

Euler Modificado ("mistura das duas ideias")

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{2}\left(f(u_n, t_n) + f(u^0_{n+1}, t_{n+1})\right)$$

Recapitulando

Outra forma de ver Euler Modificado

$$\begin{cases} u'(t) = f(u,t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

$$\int_n^{n+1} u' dt = u_{n+1} - u_n$$

Então...

$$\int_n^{n+1} f(u,t) dt = u_{n+1} - u_n$$

Recapitulando

Outra forma de ver Euler Modificado

Usando método do trapézio para resolver a integral:

$$\int_{n}^{n+1} f(u,t)dt = \frac{f(u_n, t_n) + f(u_{n+1}, t_{n+1})}{2}\Delta t$$

Então...

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{2}\left(f(u_n, t_n) + f(\boxed{u_{n+1}^0}, t_{n+1})\right)$$

Como não temos o valor de u_{n+1}, aproximamos por u_{n+1}^0 que é o resultado do *Forward* Euler.

Métodos de Runge-Kutta

Métodos de Runge-Kutta

Família de métodos interativos implícitos e explícitos, usados em discretização temporal para solução de **Equações Diferenciais Ordinárias** - *Wikipedia*

Métodos Desenvolvidos pelos matemáticos alemães *Carl David Tolmé Runge* e *Martin Wilhelm Kutta* por volta de 1900.

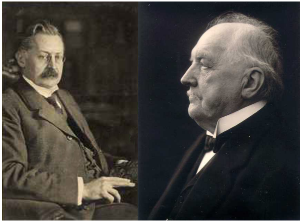


Figura: Carl Runge (esq) e Martin Kutta (dir)

Métodos de Runge-Kutta

Muitas variações existem, mas todas podem ser descritas em uma forma geral:

$$y_{n+1} = y_n + \phi h$$

Onde ϕ é uma **função de incremento** que representa a curvatura do intervalo, e h o tamanho do intervalo.

Sabendo que ϕh é uma aproximação de $\int_{t_n}^{t_{n+1}} y' dt$, podemos determinar o valor de ϕ usando aproximações para essa integral.

Métodos de Runge-Kutta

ϕ pode ser descrito como a soma de vários $a_i k_i$, ou seja, $\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_o k_o$ onde o é a ordem do método de Runge-Kutta, k_i é um ponto da função $f(y, t)$ e a_i é uma constante. Os valores de p e q são constantes que dependem do método.

$$
\begin{aligned}
&k_1 = f(t_n, y_n) \\
&k_2 = f(t_n + p_1 h, y_n + q_1^1 k_1 h) \\
&k_3 = f(t_n + p_2 h, y_n + q_2^1 k_1 h + q_2^2 k_2 h) \\
&\vdots \\
&k_i = f(t_n + p_{i-1} h, y_n + q_{i-1}^1 k_1 h + \cdots + q_{i-1}^{i-1} k_{i-1} h)
\end{aligned}
$$

Métodos de Runge-Kutta

É possivel organizar esses coeficientes em uma tabela, onde a matriz $[q_{ij}]$ é conhecida como a *Matriz Runge-Kutta*.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & \\
p_1 & q_1^1 & & & & \\
p_2 & q_2^1 & q_2^2 & & & \\
\vdots & \vdots & & \ddots & & \\
p_{o-1} & q_{o-1}^1 & q_{o-1}^2 & \cdots & q_{o-1}^{o-1} & \\
\hline
 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{o-1} & a_o
\end{array}
$$

Tabela: Uma forma de memorizar os métodos é através de um diagrama, conhecido como *Butcher tableau* (em homenagem a *John C. Butcher*)

Métodos de Runge-Kutta de Primeira Ordem

Métodos de Runge-Kutta de Primeira Ordem

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y)dt \approx y_n + y'\Delta t$$

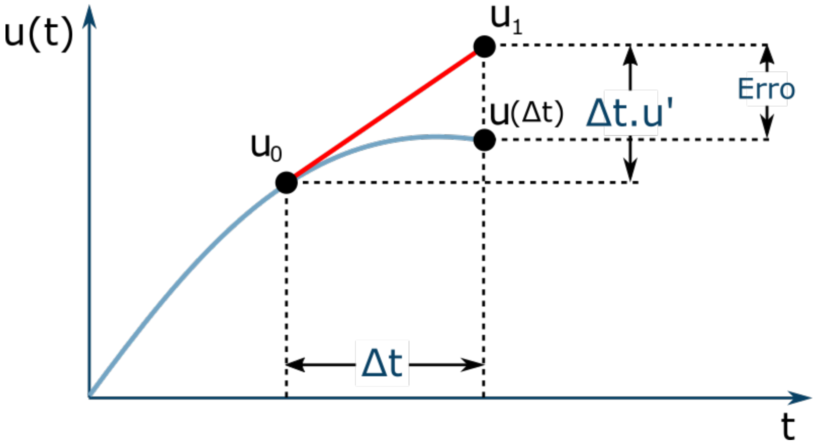
O Método de Runge-Kutta de primeira ordem, ou seja, quando ϕ é apenas um elemento k_1, é o próprio **Método de Euler**.

$$\phi = a_1 k_1 = y' = f(t_n, y_n)$$
$$h = \Delta t$$

Então...

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)\Delta t$$

Métodos de Runge-Kutta de Primeira Ordem



Métodos de Runge-Kutta de Segunda Ordem

Métodos de Runge-Kutta de Segunda Ordem

Em vez de usar apenas o ponto do começo do intervalo, usaremos os pontos do começo e do final do intervalo para computar a aproximação da curva.

Usando a regra do trapézio para solucionar a integral:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y)dt \approx \Delta t \frac{f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})}{2}$$

Métodos de Runge-Kutta de Segunda Ordem

Como não sabemos o valor de y_{n+1}, usamos a fórmula do método de Euler para computar em apenas uma única iteração:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \left[\frac{f(t_n, y_n)}{2} + \frac{f(t_{n+1}, \boxed{y_n + f(t_n, y_n)\Delta t})}{2} \right]$$

Dessa forma, o Método de Runge-Kutta de segunda ordem corresponde ao **Método de Heun**, ou **Euler Modificado**.

Na notação geral, seria equivalente a ter $a_1 = a_2 = 1/2$, e $p_1 = q_1^1 = 1$ e $h = \Delta t$.

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2 \right) h$$

Métodos de Runge-Kutta de Segunda Ordem

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & & \\
1 & 1 & \\
\hline
 & 1/2 & 1/2
\end{array}
$$

Tabela: Método Euler Modificado em forma de *tableau*

Métodos de Runge-Kutta de Segunda Ordem

Outros métodos de segunda ordem são conhecidos:

Ponto Intermediário - Valores de $a1 = 0, a2 = 1$ e $p1 = q_1^1 = 1/2$.

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + k_2 h \\
k_1 &= f(t_n, y_n) \\
k_2 &= f(t_n + h/2, y_n + k_1 h/2)
\end{aligned}
$$

Então...

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n + h/2, y_n + f(t_n, y_n)h/2)h$$

Métodos de Runge-Kutta de Segunda Ordem

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & & \\
1/2 & 1/2 & \\
\hline
 & 0 & 1
\end{array}
$$

Tabela: Método Ponto Intermediário em forma de *tableau*

Métodos de Runge-Kutta de Segunda Ordem

Outros métodos de segunda ordem são conhecidos:

Método de Ralston - Valores de $a1 = 1/3, a2 = 2/3$ e $p1 = q_1^1 = 3/4$.

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \left(\tfrac{1}{3}k_1 + \tfrac{2}{3}k_2\right) h \\
k_1 &= f(t_n, y_n) \\
k_2 &= f(t_n + \tfrac{3}{4}h, y_n + \tfrac{3}{4}k_1 h)
\end{aligned}
$$

Então...

$$
y_{n+1} = y_n + \left(\frac{1}{3}f(t_n, y_n) + \frac{2}{3}f(t_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}f(t_n, y_n)h)\right) h
$$

Métodos de Runge-Kutta de Segunda Ordem

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 3/4 & 3/4 & \\ \hline & 1/3 & 2/3 \end{array}$$

Tabela: Método de Ralston em forma de *tableau*

Métodos de Runge-Kutta de Terceira Ordem

Métodos de Runge-Kutta de Terceira Ordem

Resolvendo a integral usando Simpson 1/3:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Então...

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left[f(t_n, y_n) + 4f(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}}) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right]$$

Como não temos os valores de y, calcula $\bar{y}_{n+\frac{1}{2}}$ e $\bar{y}_{n+1}$ usando Euler:

$$\bar{y}_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \tfrac{h}{2} f(t_n, y_n)$$
$$\bar{y}_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \text{ ou } y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+\frac{1}{2}}, \bar{y}_{n+\frac{1}{2}})$$

Métodos de Runge-Kutta de Terceira Ordem

$\bar{y}_{n+1}$ pode ser encontrado por uma interpolação linear das duas opções citadas anteriormente.

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + h\left[\theta f(t_n, y_n) + (1-\theta) f(t_{n+\frac{1}{2}}, \bar{y}_{n+\frac{1}{2}})\right]$$

O valor ótimo para essa equação ocorre quando $\theta = -1$. Então...

$$\bar{y}_{n+1} = y_n + h\left[-f(t_n, y_n) + 2f(t_{n+\frac{1}{2}}, \bar{y}_{n+\frac{1}{2}})\right]$$

Métodos de Runge-Kutta de Terceira Ordem

Assim, $a_1 = 1/6, a_2 = 4/6, a_3 = 1/6$ e
$p_1 = 1/2, p_2 =, q_1^1 = 1/2, q_2^1 = -1, q_2^2 = 2$.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 h + 4k_2 h + k_3 h)$$

e

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_1 h) \\ k_3 &= f(t_n + h, y_n - k_1 h + 2k_2 h) \end{aligned}$$

Substituindo, você obtém a fórmula para calcular a aproximação de y_{n+1} usando apenas valores já conhecidos.

Métodos de Runge-Kutta de Terceira Ordem

0			
1/2	1/2		
1	-1	2	
	1/6	4/6	1/2

Tabela: Método de Runge-Kutta de Terceira Ordem Simpson 1/3 em forma de *tableau*

Método clássico de Range-Kutta, de Quarta Ordem (RK4)

Método RK4

Assim como os métodos de segunda e terceira ordem, existem diversas versões diferentes de métodos de quarta ordem. Esse é o método mais conhecido da família dos métodos de Range-Kutta, e por isso é chamado de Método Clássico de Range-Kutta, ou apenas RK4.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

Com $a_1 = a_4 = 1/6, a_2 = a_3 = 2/6$ e $p_1 = 1/2, p_2 = 1/2ep_3 = 1$, e $q_1^1 = 1/2, q_2^1 = 0, q_2^2 = 1/2, q_3^1 = 0, q_3^2 = 0$ e $q_3^3 = 1$.

Métodos de Runge-Kutta de Quarta Ordem (RK4)

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, y_n),\\
k_2 &= f(t_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_1),\\
k_3 &= f(t_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}k_2),\\
k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3).
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & \\
1/2 & 0 & 1/2 & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6
\end{array}$$

Tabela: Método RK4 em forma de *tableau*

Método RK4

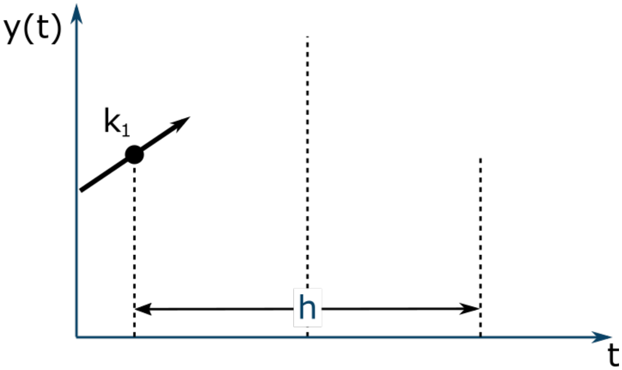


Figura: Gráfico ilustrando o método RK4. Informação inicial. Ponto k_1, que corresponde à curvatura de u em t

Método RK4

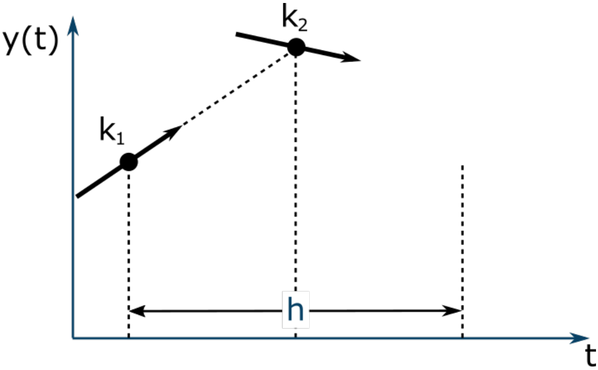


Figura: Gráfico ilustrando o método RK4. Segundo cálculo, encontrar k_2 usando a informação de k_1.

Método RK4

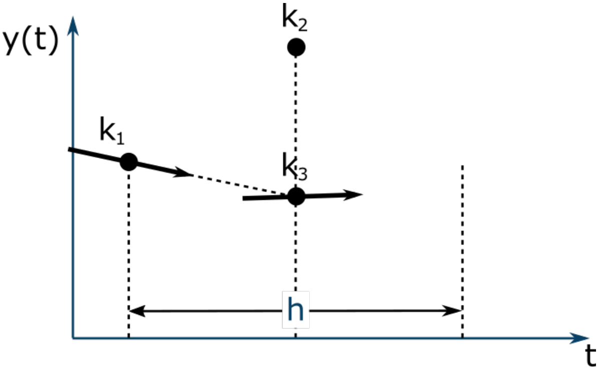


Figura: Gráfico ilustrando o método RK4. Segundo cálculo, encontrar k_3 usando a informação de k_2.

Método RK4

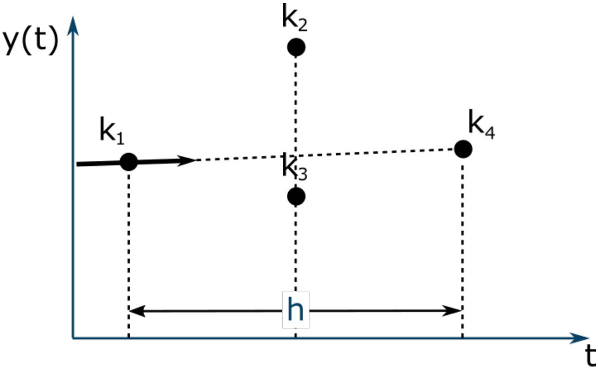


Figura: Gráfico ilustrando o método RK4. Segundo cálculo, encontrar k_4 usando a informação de k_3.

Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem 3/8

Alternativa - Método de Quarta Ordem 3/8 (Apostila)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{8}\left(\bar{k}_1 + 3\bar{k}_2 + 3\bar{k}_3 + \bar{k}_4\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{8}[f(t_n, y_n) + 3f(t_{n+\frac{1}{3}}, \bar{y}_{n+\frac{1}{3}}) + \\ + 3f(t_{n+\frac{2}{3}}, \bar{y}_{n+\frac{2}{3}}) + f(t_{n+1}, \bar{y}_{n+1})]$$

0				
1/3	1/3			
2/3	1/3	1/3		
1	1	-1	1	
	1/8	3/8	3/8	1/8

Tabela: Método RK 3/8 em forma de *tableau*

Exercício!

Exercício!

Resolver o seguinte sistema usando um método de Runge-Kutta de Quarta-Ordem, no intervalo $t = [0, 1]$

$$\begin{cases} y' = 4e^{0{,}8t} - 0{,}5y \\ y(0) = 2 \\ \Delta t = 1 \end{cases}$$

- **Para sala**: Usar o método RK4
- **Para casa**: Usar o método $3/8$ e comparar os resultados.

Obs: exercício tirado do livro "Applied Numerical Methods With Matlab" de Steven C. Chapra.

Exercício!

Solution. For this case, the slope at the beginning of the interval is computed as

$$k_1 = f(0, 2) = 4e^{0.8(0)} - 0.5(2) = 3$$

This value is used to compute a value of y and a slope at the midpoint:

$$y(0.5) = 2 + 3(0.5) = 3.5$$
$$k_2 = f(0.5, 3.5) = 4e^{0.8(0.5)} - 0.5(3.5) = 4.217299$$

This slope in turn is used to compute another value of y and another slope at the midpoint:

$$y(0.5) = 2 + 4.217299(0.5) = 4.108649$$
$$k_3 = f(0.5, 4.108649) = 4e^{0.8(0.5)} - 0.5(4.108649) = 3.912974$$

Next, this slope is used to compute a value of y and a slope at the end of the interval:

$$y(1.0) = 2 + 3.912974(1.0) = 5.912974$$
$$k_4 = f(1.0, 5.912974) = 4e^{0.8(1.0)} - 0.5(5.912974) = 5.945677$$

Finally, the four slope estimates are combined to yield an average slope. This average slope is then used to make the final prediction at the end of the interval.

$$\phi = \frac{1}{6}[3 + 2(4.217299) + 2(3.912974) + 5.945677] = 4.201037$$
$$y(1.0) = 2 + 4.201037(1.0) = 6.201037$$

which compares favorably with the true solution of 6.194631 ($\varepsilon_t = 0.103\%$).

Fim!