

Representations of $SU(2)$

$$SU(2) = \{ A \in \text{Mat}_2(\mathbb{C}) \mid A^* A = 1, \det(A) = 1 \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

Lemma: Let K be a metrizable compact group, and let ρ be a representation over a Hilbert space (of finite dimension) $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. There is $S \in GL(V)$ such that the representation of $S\rho S^{-1}$ is unitary.

Proof: Let's suppose that we may prove that there is a second interior product $\langle \cdot, \cdot \rangle$, in V , such that ρ is unitary with respect to $\langle \cdot, \cdot \rangle$. All interior product in V is of the form $\langle v, w \rangle = \langle Sv, Sw \rangle$, for some $S \in GL(V)$, then $S\rho S^{-1}$ is unitary.

$$\langle \rho(x)v, \rho(x)w \rangle = \langle v, w \rangle, \quad x \in K.$$

$$\langle S\rho(x)v, S\rho(x)w \rangle = \langle Sv, Sw \rangle$$

$$v = S^{-1}v^{-1}, \quad w = S^{-1}w^{-1}$$

$$\langle S\rho(x)S^{-1}v^{-1}, S\rho(x)S^{-1}w^{-1} \rangle = \langle S S^{-1}v^{-1}, S S^{-1}w^{-1} \rangle$$

$$\langle S\rho(x)S^{-1}v^{-1}, S\rho(x)S^{-1}w^{-1} \rangle = \langle v^{-1}, w^{-1} \rangle$$

It only remains for us to prove that such an interior product exists.

for $v, w \in V$

$$\langle v, w \rangle = \int_K \langle \rho(K^{-1})v, \rho(K^{-1})w \rangle dK$$

Moreover, ρ is unitary with respect to himself, such that $k_0 \in K, v, w \in V$.

$$\begin{aligned} \langle \rho(k_0)v, \rho(k_0)w \rangle &= \int_K \langle \rho(K^{-1})\rho(k_0)v, \rho(K^{-1})\rho(k_0)w \rangle dK \\ &= \int_K \langle \rho(k_0^{-1}K)^{-1}v, \rho(k_0^{-1}K)^{-1}w \rangle dK \\ &= \int_K \langle \rho(K^{-1})v, \rho(K^{-1})w \rangle dK = \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$



Lie's algebra

The Lie's algebra of $SU(2)$ is algebra of the matrices

$$SU(2) = \{ X \in \text{Mat}_n(\mathbb{C}) / X^* = -X, \text{tr}(X) = 0 \}$$

If we fix a base for $SU(2)$

$$X_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad X_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

satisfies

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2.$$

Let $\pi: SU(2) \rightarrow \text{End}(V)$, in a space of finite dimension, and a *-representation of the Lie's algebra. Let

$$L_j = \pi(X_j) \in \text{End}(V), \quad j = 1, 2, 3.$$

$$[L_1, L_2] = L_3, \quad [L_2, L_3] = L_1, \quad [L_3, L_1] = L_2$$

$$L_j^* = \pi(X_j)^* = \pi(X_j^*) = \pi(-X_j) = -L_j$$

Thus, each L_j is skew-hermitian. It follows that it is diagonalizable.

(Let $A: V \rightarrow V$, $AA^* = A^*A$, is normal, and diagonalizable)

for each $\mu \in \mathbb{C}$, let $V_\mu = \{v \in V / L_1 v = i\mu v\}$. The space V decompose in a direct sum of eigen-spaces.

$$V = \bigoplus V_\mu$$

$$i\mu \in \text{spec}(L_1)$$

where $\text{spec}(L_1)$ the specter of L_1 i.e., the set of eigen-values.

Let

$$L_+ = L_2 - iL_3, \quad L_- = L_2 + iL_3$$

It's fulfilled that

$$[L_1, L_\pm] = \pm i L_\pm$$

Proposition: The operator L_\pm maps V_μ in $V_{\mu \pm 1}$. In particular if $\mu \in \text{spec}(L_1)$ then L_\pm is zero in V_μ or $i(\mu \pm 1) \in \text{spec}(L_1)$.

Proof: Let $v \in V_\mu$, then

$$\begin{aligned} L_1(L+v) &= L_+L_1v + i(L+v) \\ &= i(\mu+1)L+\mu \end{aligned}$$

$$L_+V_\mu \subseteq V_{\mu+1}$$

In a similar way for $L_-V_\mu \subseteq V_{\mu-1}$. ■

Let $C = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$, and satisfies that

$$CL_j = L_jC, \text{ for } j=1,2,3.$$

Lemma: (Schur) If π is irreducible, there is $\lambda \in \mathbb{C}$, such that $C = \lambda \text{Id}$.

Proof: Let λ be an eigen-value of C , then L_i commutes with C , leaving the vectorial eigen-space invariant, therefore this is an invariant eigen-space. As π is irreducible, this space is all V . ■

Proposition: Let π an irreducible representation of $\text{SU}(2)$ in V . Then the specter of L_1 is a succession

$$\{i\mu_0, i(\mu_0+1), \dots, i(\mu_0+k) \equiv i\mu, \}$$

with $L_+: V_{\mu_0+j} \xrightarrow{\quad} V_{\mu_0+j+1}$ a isomorphism for $0 \leq j \leq k-1$
and $L_-: V_{\mu_0-1} \xrightarrow{\quad} V_{\mu_0-j-1}$ a isomorphism for $0 \leq j \leq k-1$.

$$\begin{array}{ccccccc} \overset{\circ}{\mu}_0 & \overset{\circ}{\mu}_0+1 & \overset{\circ}{\mu}_0+2 & \cdots & \overset{\circ}{\mu}_{i-1} & \overset{\circ}{\mu}_i \\ \xrightarrow{L_+} & \xrightarrow{L_+} & & & \xrightarrow{L_+} & \\ \xleftarrow{L_-} & \xleftarrow{L_-} & & & \xleftarrow{L_-} & \end{array}$$

The spaces V_{μ_0+j} are unidimensionals for $j=0,1,\dots,k$.
And $\dim V = k+1$, $\mu_0 = -k/2$, $\mu_i = k/2$.

Proof: By a previously Lemma, we may assume that the representation is unitary

$$\begin{aligned} L_+L_- &= (L_2 + iL_3)(L_2 - iL_3) = L_2^2 + L_3^2 + [L_3, L_2] \\ &= C - L_1^2 - iL_1 = \lambda - L_1^2 - iL_1. \end{aligned}$$

and

$$L_- L_+ = (L_2 - iL_3)(L_2 + iL_3) = C - L_1^2 + iL_1 = \lambda - L_1^2 + iL_1.$$

in V_μ

$$L_+ L_- = \lambda + (\mu - 1)$$

$$L_- L_+ = \lambda + (\mu + 1)$$

As L_2 and L_3 are skew-hermitians, then

$$L_+^* = (L_2 - iL_3)^* = -L_-$$

then $L_+ L_-$ and $L_- L_+$ are hermitians.

Lemma: Let $V \in V$ be a Hilbert space (of finite dimension) and A a linear operator, then $\text{Ker } A = \text{Ker } A^* A$.

Proof: Let $v \in V$, $v \in \text{Ker } A \iff Av = 0$

$$\iff \langle Av, Aw \rangle = 0, \forall w \in V$$

$$\iff \langle A^* Av, Aw \rangle = 0, \forall w \in V$$

$$\iff \langle A^* Av \rangle = 0 \iff v \in \text{Ker } A^* A$$

this implies that

$$\text{Ker } L_- = \text{Ker } L_+ L_-$$

$$\text{Ker } L_+ = \text{Ker } L_- L_+$$

Let $\mu_0, \mu_0+1, \dots, \mu_0+k \equiv \mu_1$ a succession of maximum length with $\mu_0+j \neq 0$, for $j=0, \dots, k$.

Then $L_+ V_{\mu_0+k} = 0$ and $0 = \lambda = \mu_1(\mu_1+1) = \lambda + \mu_0(\mu_0-1)$ or $\mu_0(\mu_0-1) = -\lambda = \mu_1(\mu_1+1)$.

So $-\mu_0 = \mu_0(2k+1) + k(k+1)$, therefore $\mu_0 = -k/2$. The space $V = V_{\mu_0} \oplus V_{\mu_0+1} \oplus \dots \oplus V_{\mu_0+k}$

It is preserved under L_1, L_2, L_3 i.e., by $\text{Lie}(SU(2))$, thus it's an invariant subspace, and all V_{μ_0+j} unidimensional.

$$\dim V = k+1, \mu_0 = -\frac{k}{2}, \mu_1 = \frac{k}{2}$$

Topología de grupos

Definición:

Sea (X, τ) un espacio topológico,

- I) Un subconjunto $C \subseteq X$ es **cerrado** si su complemento $X \setminus C$ es abierto.
- II) Para $x \in X$ un subconjunto $U \subseteq X$ es **un entorno** de x si existe un subconjunto abierto $O \subseteq X$ tal que $O \subseteq U$ tal que $x \in O \subseteq U$. Notamos $U(x)$ o $U_x(x)$ al conjunto de todos los entornos de x ; i.e.,

$$U(x) = \{U \subseteq X \text{ es entorno de } x\}$$

U se llamará **entorno abierto** de x si se tiene que $x \in U$ y el mismo U es abierto. De la misma forma notamos

$$U^o(x) = \{U \subseteq X : U \text{ es entorno abierto de } x\} = U(x) \cap \tau$$

a todos los entornos abiertos de x .

Definición:

Sea (X, τ) un espacio topológico y $E \subseteq X$ un subconjunto.

- I) $\bar{E} := \bigcap \{F \subseteq X : E \subseteq F, F \text{ cerrado}\}$ es llamado **la clausura** de E . Es el subconjunto cerrado más pequeño de X que contiene a E .
- II) $E^o := \bigcup \{U \subseteq X : U \subseteq E, U \text{ es abierto}\}$ es llamado **el interior** de E . Es el subconjunto más grande de X contenido en E .
- III) $\partial E := \bar{E} \setminus E^o$ es llamado **la frontera** de E .

Lema:

Sea (X, τ) un espacio topológico, $E \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces tenemos las siguientes afirmaciones:

- I) $x \in E^\circ \Leftrightarrow$ existe $U \in \mathcal{U}(x)$, $U \subseteq E \Leftrightarrow E \in \mathcal{U}(x)$
- II) $x \in \bar{E} \Leftrightarrow$ para todo $U \in \mathcal{U}(x)$, $U \cap E \neq \emptyset$
- III) $x \in \partial E \Leftrightarrow$ para todo $U \in \mathcal{U}(x)$, $U \cap E \neq \emptyset$ y $U \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$

Definición:

Sea (X, τ) un espacio topológico. Dicemos que X es un espacio Hausdorff si dados $x, y \in X$ distintos existen

$$U \in \mathcal{U}(x) \text{ y } V \in \mathcal{U}(y) \text{ tales que } U \cap V = \emptyset$$

Definición:

Sea (X, τ) un espacio topológico. Dicemos que X es un espacio completamente regular si para cualquier $F \subseteq X$, F cerrado y $x \in X \setminus F$ existe una función $f: X \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $f(x) = 0$, mientras que $f(F) \subseteq \{1\}$.

Funciones continuas

Definición:

- I) Una función $f: X \rightarrow Y$ es llamada continua si para cada subconjunto abierto $O \subseteq Y$ la imagen inversa $f^{-1}(O)$ es un abierto de X . f también es llamado morfismo de espacios topológicos.

Notamos $C(X, Y)$ al conjunto de todas las funciones continuas $f: X \rightarrow Y$

- II) Una función $f: X \rightarrow Y$ se dice abierta si para cada subconjunto $O \subseteq X$ la imagen $f(O)$ es un subconjunto abierto de Y . De forma similar definimos una función cerrada $f: X \rightarrow Y$ como aquella que manda subconjuntos cerrados de X en subconjuntos cerrados de Y .

III) Una función continua $f: X \rightarrow Y$ es llamada **homeomorfismo** si existe una función continua $g: Y \rightarrow X$ tal que

$$f \circ g = \text{id}_Y \quad \text{y} \quad g \circ f = \text{id}_X$$

En otras palabras, f es hómeo si es biyectiva, continua y abierta.

Proposición:

Si $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$ son funciones continuas entonces su composición $g \circ f: X \rightarrow Z$ es continua.

Lema:

I) Si $f: X \rightarrow Z$ es una función continua y $Y \subseteq X$ un subconjunto, entonces $f|_Y: Y \rightarrow Z$ es continua con respecto a la topología de subespacio en Y .

II) Si $f: X \rightarrow Z$ es una función y $Y \subseteq Z$ es un subespacio que contiene a $f(X)$, entonces f es continuo si y solo si la restricción $f|_Y: X \rightarrow Y$ es continua con respecto a la topología inducida en Y .

Definición: Sean X y Y espacios topológicos y $x \in X$. Una función $f: X \rightarrow Y$ se dice **continua en x** si para cada entorno V de $f(x)$ existe un entorno U de x con $f(U) \subseteq V$. Notemos que esta condición es equivalente a que $f^{-1}(V)$ sea un entorno de x .

Lema:

Sea $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$ funciones entre espacios topológicos. Si f es continua en x y g es continua en $f(x)$ entonces la composición $g \circ f$ es continua en x .

