Representations of SU(2)

$$SU(2) = \{A \in Mat_2(\mathbb{C}) \,/\, A^* \cdot A = 1, \det(A) = 1\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \Big/ a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

Lemma: Let K be a metrizable compact group, and let ρ be a representation over a Hilbert space (of finite dimension) $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. There is $s \in GL(V)$ such that the representation of $s\rho s^{-1}$ is unitary.

Proof: Let's suppose that we may prove that there is a second interior product $(\cdot,\cdot)$ in V, such that ρ is unitary with respect to $(\cdot,\cdot)$. All interior product in V is of the form $(v, w) = \langle sv, sw \rangle$, for some $s \in GL(V)$, then $s\rho s^{-1}$ is unitary.

$$(\rho(x)v, \rho(x)w) = (v, w) \quad , \quad x \in K.$$

$$\langle s\rho(x)v, s\rho(x)w \rangle = \langle sv, sw \rangle$$

$$v = s^{-1}v^{-1} \quad , \quad w = s^{-1}w^{-1}$$

$$\langle s\rho(x)s^{-1}v^{-1}, s\rho(x)s^{-1}w^{-1} \rangle = \langle ss^{-1}v^{-1}, ss^{-1}w^{-1} \rangle$$

$$\langle s\rho(x)s^{-1}v^{-1}, s\rho(x)s^{-1}w^{-1} \rangle = \langle v^{-1}, w^{-1} \rangle$$

It only remains for us to prove that such an interior product exists.

For $v, w \in V$

$$(v, w) = \int_K \langle \rho(k^{-1})v, \rho(k^{-1})w \rangle \, dk$$

moreover, ρ is unitary with respect to himself, such that $k_0 \in K$, $v, w \in V$.

$$(\rho(k_0)v, \rho(k_0)w) = \int_K \langle \rho(k^{-1})\rho(k_0)v, \rho(k^{-1})\rho(k_0)w \rangle \, dk$$

$$= \int_K \langle \rho(k_0^{-1}k)^{-1}v, \rho(k_0^{-1}k)^{-1}w \rangle \, dk$$

$$= \int_K \langle \rho(k^{-1})v, \rho(k^{-1})w \rangle \, dk = (v, w).$$

$\blacksquare$

Lie's algebra

The Lie's algebra of SU(2) is algebra of the matrices

$$su(2) = \{ \underline{X} \in Mat_n(\mathbb{C}) \,/\, \underline{X}^* = -\underline{X},\ tr(\underline{X}) = 0 \}$$

If we fix a base for $su(2)$

$$\underline{X}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \underline{X}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{X}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

satisfies

$$[\underline{X}_1, \underline{X}_2] = \underline{X}_3, \quad [\underline{X}_2, \underline{X}_3] = \underline{X}_1, \quad [\underline{X}_3, \underline{X}_1] = \underline{X}_2.$$

Let $\pi : su(2) \longrightarrow End(V)$, in a space of finite dimension, and a $*$-representation of the Lie's algebra. Let

$$L_j = \pi(\underline{X}_j) \in End(V), \quad j = 1,2,3.$$

$$[L_1, L_2] = L_3, \quad [L_2, L_3] = L_1, \quad [L_3, L_1] = L_2$$

$$L_j^* = \pi(\underline{X}_j)^* = \pi(\underline{X}_j^*) = \pi(-\underline{X}_j) = -L_j$$

Thus, each L_j is skew-hermitian. It follows that it is diagonalizable.

(Let $A : V \longrightarrow V$, $AA^* = A^*A$, is normal, and diagonalizable)

for each $\mu \in \mathbb{C}$, let $V_\mu = \{ v \in V \,/\, L_1 \mu = i\mu v \}$. The space v descompose in a direct sum of eigen-spaces.

$$V = \bigoplus_{i\mu \,\in\, spec(L_1)} V_\mu$$

where $spec(L_1)$ the specter of L_1 i.e., the set of eigen-values.

Let

$$L_+ = L_2 - iL_3, \quad L_- = L_2 + iL_3$$

It's fulfilled that

$$[L_1, L_\pm] = \pm i L_\pm$$

Proposition: The operator $L_\pm$ maps V_μ in $V_{\mu+1}$. In particular if $\mu \in spec(L_1)$ then L_+ is zero in V_μ or $i(\mu+1) \in spec(L_1)$.

Proof: Let $v \in V_\mu$, then

$$L_1(L_+ v) = L_+ L_1 v + i L_+ v$$
$$= i(\mu+1) L_+ \mu$$

$$L_+ V_\mu \subseteq V_{\mu+1}$$

in a similar way for, $L_- V_\mu \subseteq V_{\mu+1}$.

■

Let $C = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$, and satisfies that

$$C L_j = L_j C, \quad \text{for } j = 1,2,3.$$

Lemma: (Schur) If π is irreducible, there is $\lambda \in \mathbb{C}$, such that $C = \lambda Id$.

Proof: Let λ be an eigen-value of C, then L_j commutes with C. Leaving the vectorial eigen-space invariant, therefore this is an invariant eigen-space. As π is irreducible, this space is all V.

■

Proposition: Let π an irreducible representation of $SU(2)$ in V. Then the specter of L_1 is a succesion

$$\} i\mu_0, i(\mu_0+1), \dots, i(\mu_0+K) \equiv i\mu_1 \{$$

with $L_+ : V_{\mu_0+j} \longrightarrow V_{\mu_0+j+1}$ a isomorphism for $0 \le j \le K-1$ and $L_- : V_{\mu_1-1} \longrightarrow V_{\mu-j-1}$ a isomorphism for $0 \le j \le K-1$.

$$\begin{tikzcd} \mu_0 \arrow[r, shift left, "L_+"] & \mu_0+1 \arrow[l, shift left, "L_-"] \arrow[r, shift left, "L_+"] & \mu_0+2 \arrow[l, shift left, "L_-"] & \cdots & \mu_1-1 \arrow[r, shift left, "L_+"] & \mu_1 \arrow[l, shift left, "L_-"] \end{tikzcd}$$

the spaces V_{μ_0+j} are unidimensionals for $j = 0,1,\dots,K$. and $\dim V = K+1$, $\mu_0 = -K/2$, $\mu_1 = K/2$.

Proof: By a previously Lemma, we may assume that the representation is unitary

$$L_+ L_- = (L_2 + iL_3)(L_2 - iL_3) = L_2^2 + L_3^2 + [L_3, L_2]$$
$$= C - L_1^2 - iL_1 = \lambda - L_1^2 - iL_1$$

and

$$L_-L_+ = (L_2 - iL_3)(L_2 + iL_3) = C - L_1^2 + iL_1 = \lambda - L_1^2 + iL_1.$$

in V_μ

$$L_+L_- = \lambda + (\mu - 1)$$

$$L_-L_+ = \lambda + (\mu + 1)$$

As L_2 and L_3 are skew-hermitians, then

$$L_+^* = (L_2 - iL_3)^* = -L_-$$

then L_+L_- and L_-L_+ are hermitians.

Lemma: Let $v \in V$ be a Hilbert space (of finite dimension) and A a linear operator, then $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^*A$.

Proof: Let $v \in V$, $v \in \operatorname{Ker} A \longleftrightarrow Av = 0$

$$\longleftrightarrow \langle Av, Aw \rangle = 0, \forall w \in V$$

$$\longleftrightarrow \langle A^*Av, Aw \rangle = 0, \forall w \in V$$

$$\longleftrightarrow \langle A^*Av \rangle = 0 \longleftrightarrow v \in \operatorname{Ker} A^*A$$

$\blacksquare$

this implies that

$$\operatorname{Ker} L_- = \operatorname{Ker} L_+L_-$$

$$\operatorname{Ker} L_+ = \operatorname{Ker} L_-L_+$$

Let $\mu_0, \mu_0 + 1, \dots, \mu_0 + K = \mu_1$ a succession of maximum length with $\mu_0 + j \neq 0$, for $j = 0, \dots, K$.

Then $L_+ V_{\mu_0 + K} = 0$ and $0 = \lambda = \mu_1(\mu_1 + 1) = \lambda + \mu_0(\mu_0 - 1)$ or $\mu_0(\mu_0 - 1) = -\lambda = \mu_1(\mu_1 + 1)$.

So $-\mu_0 = \mu_0(2K+1) + K(K+1)$, therefore $\mu_0 = -K/2$. The space $V = V_{\mu_0} \oplus V_{\mu_0+1} \oplus \dots \oplus V_{\mu_0+K}$

It is preserved under L_1, L_2, L_3 i.e., by $\operatorname{Lie}(SU(2))$, thus it's an invariant subspace, and all V_{μ_0+j} unidimensionals.

$$\dim V = K + 1, \quad \mu_0 = -\frac{K}{2}, \quad \mu_1 = \frac{K}{2}$$

$\blacksquare$

Topología de grupos

Definición:

Sea (X,τ) un espacio topológico,

i) Un subconjunto $C \subseteq X$ es **cerrado** si su complemento $X \setminus C$ es abierto.

ii) Para $x \in X$ un subconjunto $U \subseteq X$ es **un entorno** de x si existe un subconjunto abierto $O \subseteq X$ tal que $O \subseteq X$ tal que $x \in O \subseteq U$. Notamos $U(x)$ o $U_X(x)$ al conjunto de todos los entornos de x; i.e.,

$$U(x) = \{ U \subseteq X \text{ es entorno de } X \}$$

U se llamará **entorno abierto** de x si se tiene que $x \in U$ y el mismo U es abierto. De la misma forma notamos

$$U^{\circ}(x) = \{ U \subseteq X : U \text{ es entorno abierto de } X \} = U(x) \cap \tau$$

a todos los entornos abiertos de x.

Definición:

Sea (X,τ) un espacio topológico y $E \subseteq X$ un subconjunto.

i) $\overline{E} := \bigcap \{ F \subseteq X : E \subseteq F, F \text{ cerrado} \}$ es llamado **la clausura** de E. Es el subconjunto cerrado más pequeño de X que contiene a E.

ii) $E^{\circ} := \bigcup \{ U \subseteq X : U \subseteq E, U \text{ es abierto} \}$ es llamado **el interior** de E. Es el subconjunto más grande de X contenido en E

iii) $\partial E := \overline{E} \setminus E^{\circ}$ es llamado **la frontera** de E.

Lema:

Sea (X, τ) un espacio topológico, $E \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces tenemos las siguientes afirmaciones:

i) $x \in E^\circ \Leftrightarrow$ existe $U \in \mathcal{U}(x)$, $U \subseteq E \Leftrightarrow E \in \mathcal{U}(x)$

ii) $x \in \overline{E} \Leftrightarrow$ para todo $U \in \mathcal{U}(x)$, $U \cap E \neq \emptyset$

iii) $x \in \partial E \Longleftrightarrow$ para todo $U \in \mathcal{U}(x)$, $U \cap E \neq \emptyset$ y $U \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$

Definición:

Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que X es un espacio Hausdorff si dados $x, y \in X$ distintos existen

$$U \in \mathcal{U}(x) \quad y \quad V \in \mathcal{U}(x) \quad \text{tales que} \quad U \cap V = \emptyset$$

Definición:

Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que X es un espacio completamente regular si para cualquier $F \subseteq X$, F cerrado y $x \in X \setminus F$ existe una función $f: X \longrightarrow [0,1]$ continua tal que $f(x) = 0$, mientras que $f(F) \subseteq \{1\}$.

Funciones continuas

Definición:

i) Una función $f: X \longrightarrow Y$ es llamada continua si para cada subconjunto abierto $O \subseteq Y$ la imagen inversa $f^{-1}(O)$ es un abierto de X. f también es llamado morfismo de espacios topológicos.

Notamos $C(X, Y)$ al conjunto de todas las funciones continuas $f: X \longrightarrow Y$

ii) Una función $f: X \longrightarrow Y$ se dice abierta si para cada subconjunto $O \subseteq X$ la imagen $f(O)$ es un subconjunto abierto de Y.
De forma similar definimos una función cerrada $f: X \longrightarrow Y$ como aquella que manda subconjuntos cerrados de X en subconjuntos cerrados de Y

III) Una función continua $f: X \to Y$ es llamada homeomorfismo si existe una función continua $g: Y \to X$ tal que

$$f \circ g = id_Y \qquad y \qquad g \circ f = id_X$$

En otras palabras, f es hómeo si es biyectiva, continua y abierta.

Proposición:

Si $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$ son funciones continuas entonces su composición $g \circ f: X \to Z$ es continua.

Lema:

I) Si $f: X \to Z$ es una función continua y $Y \subseteq X$ un subconjunto, entonces $f|_Y: Y \to Z$ es continua con respecto a la topología de subespacio en Y.

II) Si $f: X \to Z$ es una función y $Y \subseteq Z$ es un subespacio que contiene a $f(X)$, entonces f es continuo si y solo si la correstricción $f|^Y: X \to Y$ es continua con respecto a la topología inducida en Y.

Definición: Sean X y Y espacios topológicos y $x \in X$. Una función $f: X \to Y$ se dice continua en x si para cada entorno V de $f(x)$ existe un entorno U de x con $f(U) \subseteq V$. Notemos que esta condición es equivalente a que $f^{-1}(V)$ sea un entorno de x.

Lema:

Sea $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$ funciones entre espacios topológicos. Si f es continua en x y g es continua en $f(x)$ entonces la composición $g \circ f$ es continua en x.