Linear operator

Let X, Y be Banach spaces, and let $T: X \longrightarrow Y$ a linear map, usually called operator, defined on X. T is said that is bounded if there exists a c, such that

$$\|Tx\|_Y \leq C\|X\|_X \quad \text{for all } x \in X.$$

If T is bounded, we define

$$\|T\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|Tx\|}{Tx}$$

Plainly $\|Tx\| < C$, with $\|X\| = 1$, then $\|T\| \leq C$.

The family of bounded linear operators is a linear space with respect to the sum and multiplication by scalar. We can see that $\|T\|$ defines a norm.

We will write as $\mathcal{L}(X, Y)$ the set of bound operators with the norm previously defined.

From the definition of norm, $\|T_x\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$.

Theorem: Let X be a normed space and Y a complete normed space. Then $\mathcal{L}(X,Y)$ is from Banach.

Proof: Let $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a Cauchy's succession on $\mathcal{L}(X, Y)$ for all $\varepsilon > 0$, there exists $N \in \mathbb{N}$ such that if $m, n \geq N$

$$\|A_n - A_m\| \leqslant \varepsilon$$

this implies that for all $x \in X$, and $m, n \geq N$

$$\begin{aligned} \|A_n(x) - A_m(x)\|_Y &= \|(A_n - A_m)(x)\|_Y \\ &\leq \|A_n - A_m\| \, \|X\| \\ &\leq \varepsilon \|X\| \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $x \in X$, la sucesión $\{A_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en Y. Como Y es de Banach esto tiene un límite, sea $A(x) \in Y$ y por lo tanto definamos para todo $x \in X$

$$A(x) = \lim_{n\to\infty} A_n(x).$$

A es un operador lineal acotado:

$$\|A(x)\|_Y \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n(x)\| \leq \|x\|_X \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|$$

$$\Rightarrow \|A\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| \supset A \in \mathcal{L}(X, Y)$$

Ahora debemos probar que $A_n \to A$.

Como $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ N \in \mathbb{N}$, tal que para $n, m \geq N$.

$$\|A_m - A_n\| < \varepsilon$$

Esto significa que para tales m, n y x, tal que $\|x\| \leq 1$.

Tenemos que $\|A_m x - A_n x\| < \varepsilon$

Tomando $m \to \infty$, tenemos que $\|Ax - A_n x\| \leq \varepsilon$, para todo x, con $\|x\| \leq 1$. Luego $\|A - A_n\| \leq \varepsilon$ para cualquier $n \geq N$, implicando que

$$\lim_{n\to\infty} \|A - A_n\| = 0.$$

Observaciones:

i) A es un operador Acotado sii A es continuo.

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}$$

ii) El conjunto $\operatorname{Ker} A = \{x : Ax = 0\}$ es subespacio cerrado.

iii) El teorema implica que para cualquier espacio normado X, el espacio dual X^* es completo,

$$\mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = X^*$$

Ejemplos:

i) En $C([0,1])$, definamos

$$Af = \int_0^1 K(t,\tau)\, f(\tau)\, d\tau$$

con K una función continua en dos variables.

Probar que Af es acotado.

Rta//: $\|Af\|_{C[0,1]} \leq \max_t |f| \max_t \int_0^1 |K(t,\tau)\, d\tau$

$$\sup_{f\neq 0} \frac{\|Af\|_{C[0,1]}}{\max_{t,\, f\neq 0} |f|} \leq \max_t \int_0^1 |K(t,\tau)|\, d\tau$$

$$\|A\| \leq \max_t \int_0^1 |K(t,\tau)\, d\tau$$

II) El espacio de traslación en l_2. definido por

$$T_x = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

Para $a_n \in l_2$, $\|T_x\| = \|x\| \to \|T\| = 1$.

III) Sea $(\alpha_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ una matriz infinita y sea

$$K^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}|^2 < \infty$$

entonces el operador A definido en l_2 por

$$A\left((\alpha_i)_{i=1}^{\infty}\right) = (\beta_i)$$

con $\beta_i = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \alpha_j$, para $i \in \mathbb{N}$.

es un operador lineal acotado.

$$\|A(\alpha_i)\|_{l_2} \leq K \|(\alpha_i)\|_{l_2}$$

Compacto

Pre-compacto