Abdel Pérez (74-A)

- Group theory → Poincaré
  - H. Georgi, Lie algebras in particle physics.
- Canonic Quantization.
- Path integral (Gauge).

## Group theory

**Group:**

$$(G, \times) \,/\, \times : G \times G \longrightarrow G$$

$$g_1 \times g_2 \longmapsto g_3$$

- operation
- set

such that:

I. Closure: $\forall\, g_1, g_2 \in G \,/\, g_1 \times g_2 \in G$

II. Associativity: $\forall\, g_1, g_2, g_3 \in G \,/$
$$(g_1 \times g_2) \times g_3 = g_1 \times (g_2 \times g_3).$$

III. Identity: $\exists\, e \in G \,/\, \forall g_1 \in G:\ e \times g_1 = g_1 \times e = g_1$

IV. Inverse: $\forall\, g \in G,\ \exists\, g^{-1} \in G \,/\, g \times g^{-1} = e = g^{-1} \times g.$

**Example:** let be the group $Z_3 = \{e, a, b\}$

**Definition:** Multiplication table.

| × | e | a | b |
|---|---|---|---|
| e | e | a | b |
| a | a | b | e |
| b | b | e | a |

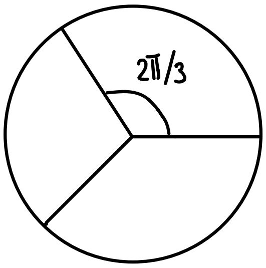
→ Commutative

**Definition:** Abelian Group. such that. × is commutative.

**Definition:** Order of G, not of the elements of G.

$$o(G) := o(Z_3) = 3$$

Example: $\mathbb{C}$




$\{1, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}\}$

$\times$ : product in $\mathbb{C}$

$\{\mathbb{1}, R(2\pi/3), R(4\pi/3)\}$

$\left.\begin{array}{l}\times : \text{Matrices product.} \\ \text{- Rotations sum.}\end{array}\right\} \mathbb{Z}_3$

Definition: Representation of $G$

Is a map $D: G \longrightarrow GL_n$

linear operators of dim $= n$.

$GL_n : V_n \longrightarrow V_n$

$V_n =:$ Vector space of dim $= n$.

I. $D(e) = \mathbb{1}$

II. $D(g_1) \cdot D(g_2) = D(g_1 \times g_2)$

homomorphism.

Definition: Dimension of the representation: $\dim(V_n) \equiv \dim r$.

Definition: Regular representation: $\dim r = o(G)$.

Example:

$$D(e) = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dim $= 3$.

How is built?

1. let's take $|e_1\rangle \equiv |e\rangle, |e_2\rangle \equiv |a\rangle, |e_3\rangle = |b\rangle$.

$$[D(g)]_{ij} = \langle e_i | D(g) | e_j \rangle$$

and define

$$D(g)|e_i\rangle \equiv |g \times e_i\rangle$$

**Definition:** Equivalence:

D and D' are equivalent if $\exists\, S \in GL_n$ such that

$$\forall g \in G : D'(g) = S^{-1} D(g) S.$$

**Definition:** Unitary Representation

$$D / \forall g \in G \quad D^{\dagger}(g) = D(g)$$

**Theorem:** All the representations of the finite groups are equivalent to unitary representations.

**Definition:** Reducible representation: Is the one which there is an invariant subspace

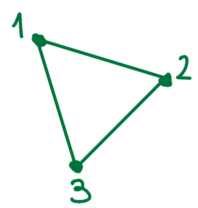
$$\exists\, D(g) \subset GL_n(V),\ \forall g \in G.$$

If $\exists\, W \subset V / \forall D(g),\ \forall W : D(g) w \in W$, then $W$ is an invariant subspace of $D(g)$ or there is a projector; $P : V \longrightarrow W / \forall g \in G : P D(g) P = D(g) P$.

**Corollary:** W defines a representation.

**Definition:** An irreducible representation is when is not reducible.

**Example:** $S_3 :=$ Group of permutations of 3 elements.




$a_1 = (1,2,3)$ Cyclic permutation

$a_2 = (3,2,1)$ Anti-Cyclic permutation

$$\left.\begin{array}{l} a_3 = (1,2) \\ a_4 = (2,3) \\ a_5 = (3,1) \end{array}\right\} \text{Pair permutations}$$

$e = \mathbb{1}$

$o(S_3) = 6$

$\times :=$ Non-Abelian composition

**Homework:** Make the multiplication table of $S_3$

Unitary representation: Irrepresentation. $\quad Dim = 2$

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D(a_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$D(a_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \qquad D(a_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D(a_4) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \qquad D(a_5) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Reducibility

$$V = \oplus W.$$

## Solución tarea #1:

Sea el grupo $S_3$ dado por

$$e = \mathbb{1}, \quad a_1 = (1,2,3), \quad a_2 = (3,2,1), \quad a_3 = (1,2), \quad a_4 = (2,3), \quad a_5 = (3,1)$$

donde $a_1$ realiza una permutación cíclica, $a_2$ es el inverso de $a_1$ y $a_3, a_4$ y $a_5$ intercambian las posiciones.

Luego la operación de composición $a_i \circ a_j$, $i,j = 1,\ldots,5$, son aplicadas sobre la identidad, por lo que su tabla de multiplicar es.

| $\times$ | $e$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |
| $a_1$ | $a_1$ | $a_2$ | $e$ | $a_5$ | $a_3$ | $a_4$ |
| $a_2$ | $a_2$ | $e$ | $a_1$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_3$ |
| $a_3$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $e$ | $a_1$ | $a_2$ |
| $a_4$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_3$ | $a_2$ | $e$ | $a_1$ |
| $a_5$ | $a_5$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_1$ | $a_2$ | $e$ |

Tabla de multiplicación de $S_3$.

# Solución tarea #2:

## Lema de Schur

**Teorema 1:** Sean $D_1(g)$ y $D_2(g)$ representaciones irreducibles, no equivalentes de $G$. Si $\forall g \in G: D_1(g)A = A D_2(g)$ con $A$ una matriz, luego $A=0$.

**Demostración:** Sea el vector $|\mu\rangle$, tal que $A|\mu\rangle = 0$. Luego existe un proyector $P$ distinto de cero tal que anula a $A$ por la derecha. Dicho subespacio es invariante con respecto a la representación $D_2$, i.e.,

$$A D_2(g) P = D_1(g) A P = 0 \quad ; \quad \forall\, g \in G.$$

Como $D_2$ es irreducible, $P$ proyecta sobre todo el espacio y $A$ se desaparece. Si $A$ anula un estado, luego debe anular todos los estados.

De modo similar se puede ver que $A$ desaparece si existe $\langle \nu|$ el cual anula a $A$. Si ningún vector anula a $A$ por ninguno de los dos lados, luego $A$ es una matriz cuadrada invertible.

Recordemos que una matriz es invertible si su determinante es distinto de cero, pero si el determinante es cero, el conjunto de ecuaciones lineales homogeneas

$$A|\mu\rangle = 0$$

no tiene solucion trivial, lo que significa que existe un vector tal que anula a $A$.

Pero si $A$ es invertible (matriz cuadrada), se tiene

$$A^{-1} D_1(g) A = D_2(g) \, , \quad \forall\, g \in G.$$

lo que significa que $D_1$ y $D_2$ son equivalentes, esto es una contradicción a la hipótesis. ■

**Teorema 2:** Si $D(g)A = AD(g)$, $\forall\, g \in G$. Si $D$ es una representación irreducible, luego $A \propto \mathbb{I}$. ($[D(g), A] = 0$)

**Demostración:** Partiendo del hecho de que estamos trabajando en espacios de dimensión finita, luego hay una representación de dimensión finita, por lo tanto cualquier matriz de dimensión finita tiene asociado almenos un valor propio, otorgado por la equación característica

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$$

que nos dice que almenos existe una raiz; ahora, podemos solucionar la ecuación lineal homogénea para las componentes del eigenvector $|\mu\rangle$.

Entonces,

$$D(g)(A - \lambda\mathbb{I}) = (A - \lambda\mathbb{I})D(g) \; ; \quad \forall g \in G.$$

y

$$(A - \lambda\mathbb{I})|\mu\rangle = 0.$$

por lo tanto, usando la demostración del teorema anterior se tiene que.

$$(A - \lambda\mathbb{I}) = 0.$$

$\blacksquare$