The fourier transform

Let A be a finite abelian group, the Hilbert space

$$\ell^2(A)$$

Coincides with the space $\mathbb{C}^A$ of all maps from A to $\mathbb{C}$.
In particular, the characters

de

$$\chi : A \longrightarrow \mathbb{T} \subseteq \mathbb{C}$$

are elements of $\ell^2(A)$.

Let S be an arbitrary set; $\ell^2(S)$, is the set of the functions.

$$f : S \longrightarrow \mathbb{C}$$

such that

$$\|f\|^2 = \sum_{s \in S} |f(s)|^2 < \infty$$

$\ell^2(S)$, forms a Hilbert space with product

$$\langle f, g \rangle = \sum_{s \in S} f(s)\overline{g(s)} \quad , \quad f, g \in \ell^2(S)$$

Lemma: Let χ, η be characters of A, then

$$\langle \chi, \eta \rangle = \begin{cases} |A| & \text{if } \quad \chi = \eta \\ 0 & \text{other form} \end{cases}$$

Proof: Let's consider the case $\chi = \eta$, then

$$\langle \chi, \eta \rangle = \sum_{a \in A}' \chi(a)\overline{\eta(a)} = \sum_{a \in A}' |\chi(a)|^2 = \sum_{a \in A}' 1 = |A|$$

Now, let's assume than $\chi \neq \eta$, then the character $\alpha = \chi\eta^{-1} \neq 1$.

$$\langle \chi, \eta \rangle = \sum_{a \in A}' \chi(a)\eta^{-1}(a) = \sum_{a \in A}' \alpha(a).$$

Let $b \in A$, with $\alpha(b) \neq 1$.

$$\langle \chi, \eta \rangle \alpha(b) = \sum_{a \in A}' \alpha(a)\alpha(b) = \sum_{a \in A}' \alpha(ab).$$

Replacing the sum index of a for ab^{-1}, which runs through the entire group

$$\sum_{a\in A} \alpha(ab) = \sum_{a\in A} \alpha(a) = \langle \chi, \eta \rangle$$

So $(\alpha(b)-1)\langle \chi,\eta\rangle = 0$, that implies that $\langle \chi,\eta\rangle = 0$.

Thus, for $f\in \ell^2(A)$, let's define the fourier transform.

$$\hat{f} : \hat{A} \longrightarrow \mathbb{C},$$

for

$$\hat{f}(\chi) = \frac{1}{\sqrt{|A|}} \langle f, \chi \rangle = \frac{1}{\sqrt{|A|}} \sum_{a\in A} f(a)\overline{\chi(a)}$$

In the case of $\mathbb{R}$, e^{ixy} or $e^{2\pi ixy}$, the normalization factor it is codified in the dual.

Theorem: The map $f \longmapsto \hat{f}$ is an isomorphism of Hilbert space's $\ell^2(A) \longmapsto \ell^2(\hat{A})$. This can apply to the group $\hat{A}$ and the composition of two fourier transforms gives the map $f \longmapsto \hat{\hat{f}}$, and its given by

$$\hat{\hat{f}}(\delta_a) = f(a^{-1}).$$

Proof: Let $f, g \in \ell^2(A)$, we have to prove $\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle = \langle f, g\rangle$ with products in $\hat{A}$ and $\hat{A}$ respectively

$$\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle = \sum_{a\in\hat{A}} \hat{f}(\chi)\overline{\hat{g}(\chi)}$$

$$= \frac{1}{|A|} \sum_{\chi\in\hat{A}} \sum_{a\in A} \sum_{b\in A} f(a)\overline{g(b)}\,\overline{\chi(a)}\chi(b)$$

$$= \frac{1}{|A|} \sum_{a,b\in A} f(a)\overline{g(b)} \sum_{\chi\in\hat{A}} \overline{\delta_a(\chi)}\delta_b(\chi)$$

$$= \frac{1}{|A|} \sum_{a,b\in A} f(a)\overline{g(b)} \langle \delta_b, \delta_a\rangle$$

$$= \sum_{a\in A} f(a)\overline{g(a)} = \langle f, g\rangle$$

Now,

$$\hat{\hat{f}}(\delta_a) = \frac{1}{\sqrt{|A|}} \sum_{\chi \in \hat{A}} \hat{f}(\chi)\, \overline{\delta_a(\chi)}$$

$$= \frac{1}{|A|} \sum_{\chi \in \hat{A}} \sum_{b \in A} f(b)\, \overline{\chi(b)}\, \overline{\chi(a)}$$

$$= \frac{1}{|A|} \sum_{\chi \in \hat{A}} \sum_{b \in A} f(b^{-1})\, \chi(b)\, \overline{\chi(a)}$$

$$= \frac{1}{|A|} \sum_{b \in A} f(b^{-1}) \langle \delta_b, \delta_a \rangle$$

$$= f(a^{-1})$$

Convolution

For valued functions in an abelian finite group, there exist a product of convolution of the reals. Let $f, g \in \ell^2(A)$, let's define the product of convolution

$$(f * g)(a) = \frac{1}{\sqrt{|A|}} \sum_{b \in A} f(b)\, g(b^{-1}a)$$

Theorem: For $f, g \in \ell^2(A)$, then

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\, \hat{g}$$

Proof:

$$\widehat{f * g}(\chi) = \frac{1}{\sqrt{|A|}} \sum_{b \in A} (f * g)(b)\, \overline{\chi(b)}$$

$$= \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \sum_{b \in A} f(a)\, g(a^{-1}b)\, \overline{\chi(b)}$$

Changing b by ab we get

$$\widehat{f * g}(\chi) = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} f(a)\, \overline{\chi(a)} \sum_{b \in A} g(b)\, \overline{\chi(b)} = \hat{f}(\chi)\, \hat{g}(\chi)$$

Locally Compact Groups (LCA)

A metrizable abelian group, is an abelian group A with a metric (with the topology coming from that metric) such that the multiplication and the inverse

$$A \times A \longrightarrow A \qquad\qquad A \longrightarrow A$$
$$(x,y) \longmapsto xy \qquad\qquad x \longmapsto x^{-1}$$

be continuous, in other words when x_n, a succession that converges to x, and y_n converges to y.

The succession

$$x_n y_n \longrightarrow xy \;,\; x_n^{-1} \longrightarrow x^{-1}$$

Example: Any group with the discrete metric is metrizable.

Let X be a set,

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y \\ 1 & \text{if } x \neq y \end{cases}$$

- Let $\mathbb{R}^{\times}$, to the set $\mathbb{R}/\{0\}$. The groups $(\mathbb{R},+)$ and $(\mathbb{R}^{\times},\cdot)$ with the topology of $\mathbb{R}$, are metrizable groups

If $x_n \longrightarrow x$, $y_n \longrightarrow y$, then

$$x_n + y_n \longrightarrow x + y \;,\; -x_n \longrightarrow -x.$$

A metrizable space $\underline{X}$, its called σ-compact. if there is a succession

$$K_n \subset K_{n+1}$$

of compact subsets such that

$$\underline{X} = \bigcup_n K_n$$

A space $(\underline{X}\ d)$ is compact if all succession x_n of $\underline{X}$, has a convergent subsuccession (closed, delimited)

Example:

1. $[a,b] \in \mathbb{R}$
2. $\mathbb{R}$ is σ-compact, since $\mathbb{R}$ is the union of compact intervals $[-n,n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Finally, a space $\underline{X}$ is locally compact if each $x \in \underline{X}$ has a compact neighborhood. Given a metric in $\underline{X}$, for each $x \in \underline{X}$, there is $r>0$, such that the closed ball.

$$\overline{B_r(x)} = \}y \in \underline{X} / d(x,y) \leq r\{$$

is compact

Example: $\mathbb{R}$.

A σ-compact abelian group, and locally compact is a group (LCA)

Example: Any abelian numerable group with the discrete metric is LCA.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Lemma: A locally compact abelian group, contains a dense numerable subset

Proof: This property is a result of the σ-compacity.

Let $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ of compacts and let's choose a metric for A. Then K_1 can be covered with a finite number of open balls of ratio 1.

Let $a_1, \dots, a_{r_1}$ its centers. Then K_2 can be covered with a finite number of balls with ratio of $1/2$ with centers of $a_{r_1+1}, \dots, a_{r_2}$ and so on.

Then K_j is covered with a finite number of balls with ratio $1/j$ with center $a_{r_{j-1}}, \dots, a_{r_j}$

The succession a_k is dense in A. ■

A Locally Compact Abelian Group $\longrightarrow$
- Metrizable.
- σ-compact.
- Locally compact.

A character of a LCA group is a homomorfism of a continuous groups $\chi : A \longrightarrow \mathbb{T}$, and it is denoted by $\hat{A}$

Proposition: The characters of the following groups are:

a) The characters of $\mathbb{Z}$ are given by $k \longmapsto e^{2\pi i k x}$, for $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

b) The characters of $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ are given by $x \longmapsto e^{2\pi i k x}$, for $k \in \mathbb{Z}$.

c) The characters of $\mathbb{R}$ are given by $x \longmapsto e^{2\pi i x y}$, for $y \in \mathbb{R}$.

Proof:

a) Let $\varphi : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{T}$ a character, $\varphi(1) = e^{2\pi i x}$, $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ and then $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi(k) = \varphi(1)^k = e^{2\pi i k x}$.

c) Let $\varphi : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{T}$ a character. By continuity there is $\varepsilon > 0$, such that $\varphi([-\varepsilon, \varepsilon]) \subseteq \{\mathrm{Re}(z) > 0\}$.

Let y be an element of $[-1/4\,\varepsilon, 1/4\,\varepsilon]$, such that

$$\varphi(\varepsilon) = e^{2\pi i \varepsilon y},$$

then we ensure

$$\varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = e^{2\pi i \frac{\varepsilon}{2} y}$$

to prove it, we note that $\varphi(\varepsilon/2)^2 = \varphi(\varepsilon) = e^{2\pi i \varepsilon y}$, thus

$$\varphi\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right) = e^{2\pi i \frac{\varepsilon}{2^n} y}.$$

For $k \in \mathbb{Z}$

$$\varphi\left(\frac{k}{2^n}\varepsilon\right) = \varphi\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right)^k = e^{2\pi i k \frac{\varepsilon}{2^n} y},$$

as φ is continuous, then $\varphi(x) = e^{2\pi i x y}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lemma: Let $\underline{X}, \underline{Y}$ be metrizable spaces, let f, g be continuous of $\underline{X}$ and $\underline{Y}$, if f and g are the same in a dense $D \subseteq \underline{X}$, then $f = g$.

b) The characters of $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ are the characters of $\mathbb{R}$, but they send $\mathbb{Z}$ to 1.

$\blacksquare$

Topología

Definición: Dado un conjunto, X, se dice que τ es una topología definida sobre X si τ es una colección de subconjuntos de X tales que.

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. if $U_\alpha \in \tau$, $\bigcup_\alpha U_\alpha \in \tau$
3. $U_1, U_2, \dots, U_n \in \tau \longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$

Además a los elementos de τ se les llama abiertos y se dice que el par (X, τ) es un espacio topológico.

Notación:

Como en el caso de espacios métricos, muchas veces se abrevia (X, τ) por X si τ se sobre entiende.

Definición: Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que $F \subset X$ es un cerrado, si su complemento es abierto. es decir

$$X - F \in \tau$$

Observación: De la definición de topología se deduce que la intersección arbitraria de cerrados es un cerrado y que la unión finita de cerrados es un cerrado. La notación "F" viene de la inicial cerrado en Francés.

Ejemplo-Definición: Se llama topología discreta sobre X, τ_{dis} a la que se forma por todos los subconjuntos de X.

Ejemplo: Si $X=\{\alpha,\beta,\gamma\}$

$$\tau_{dis}=\{\phi,\{\alpha\},\{\beta\},\{\gamma\},\{\alpha,\beta\},\{\alpha,\gamma\},\{\beta,\gamma\},X\}$$

$\hookrightarrow \{\alpha,\beta,\gamma\}$

Ejemplo-Definición: Se llama topología Trivial sobre X a $\tau_{tr}=\{X,\phi\}$. Es decir solo hay dos abiertos que además son cerrados.

Aunque en ambas sus elementos sean simultaneamente abiertos y cerrados, en cierto sentido estas dos topologías son complementarias:

- La primera distingue demasiado los elementos de X.
- La segunda demasiado poco.

Ejemplo:

Sea $X=\{P,T,D,C\}$. Las colecciones de subconjuntos de X.

$$\tau_1=\{\phi,X,\{P\},\{P,T\},\{P,T,D\}\} \quad y$$

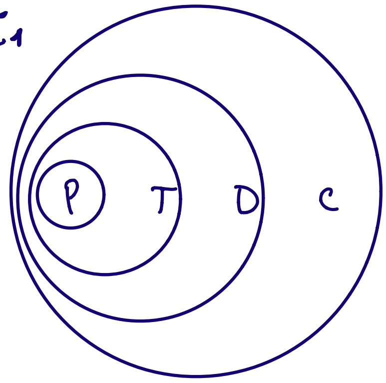
$$\tau_2=\{\phi,X,\{D\},\{D,C\},\{P,T,D\}\}.$$

Es fácil notar que τ_1 y τ_2 son topologías sobre X, ya que ϕ y X se encuentran dentro de τ_1 y τ_2 y si se hace la unión arbitraria de abiertos se obtienen abiertos, y del mismo modo para sus intersecciones.

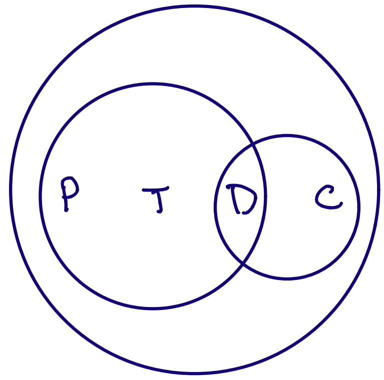
Pero si definimos $\tau_3 = \{\phi, X, \{D\}, \{C\}\}$, se obtiene como resultado que no es una topología, ya que si hacemos la unión de $\{D\}$ y $\{C\}$ obtene $\{D, C\}$, el cual es un cerrado, por lo que contradice que la unión de abiertos da como resultado un conjunto abierto.

Gráficamente se tiene que

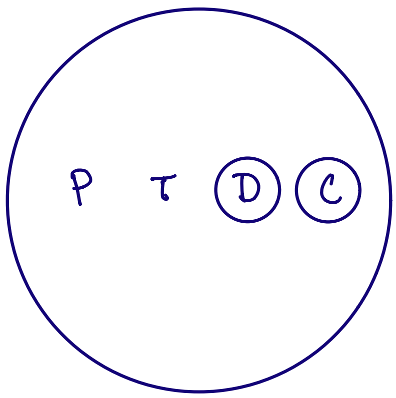
τ_1



τ_2



τ_3



Ejemplo - Definición: En cualquier conjunto X, se define la topología cofinita como aquella tal que sus abiertos son ϕ, X y todos los subconjuntos de X cuyo complementario tenga un número finito de elementos.

Ejemplo:

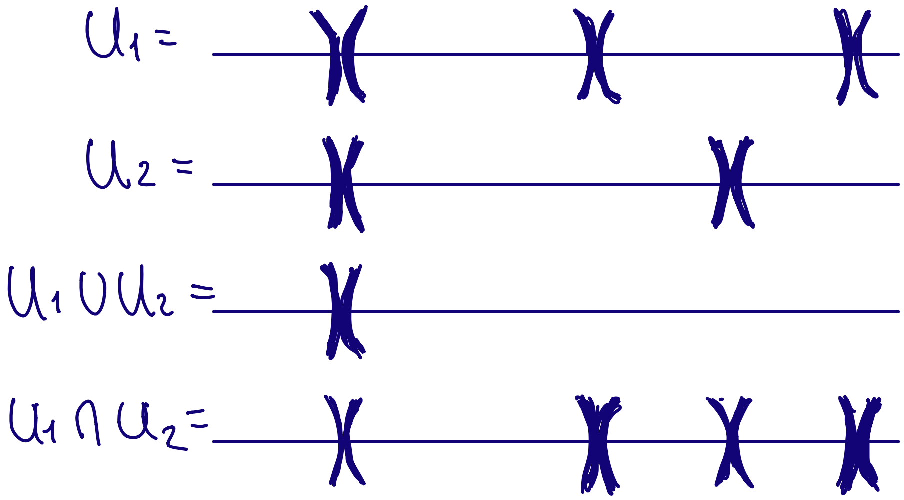
Si $X = \mathbb{R}$, el intervalo $(-\infty, 1)$ no es abierto en la topología cofinita porque su complementario, $[1, \infty)$ no contiene un número finito de puntos; sin embargo $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ sí es abierto.

La definición nos dice que todos los abiertos, a parte de ϕ y $\mathbb{R}$, son de la forma

$$U = \mathbb{R} - \bigcup_{n=1}^{N} \{x_n\}.$$

Observación: Es posible notar que en realidad la topología cofinita es siempre una topología.

Veamos los siguientes ejemplos:



Observación: Si X es un conjunto finito, todos sus subconjuntos son abiertos con la topología cofinita, por lo tanto esta pierde interés ya que coincide con la discreta.

En una topología la intersección infinita de abiertos o la unión infinita de cerrados no tiene por qué ser un abierto o un cerrado, respectivamente.

Por ejemplo, en la cofinita, tomando los abiertos

$$U_x = \mathbb{R} - \{x\}$$

se obtiene

$$\bigcap_{x \in \mathbb{Q}} U_x = \mathbb{R} - \{\mathbb{Q}\} \notin \tau_{cof}$$

Una manera de crear artificialmente una topología, es dividir un conjunto en unos cuantos trozos y sacar todas sus intersecciones y uniones necesarias para que satisfaga la condición necesaria de topología.

Definición: Se dice que S es una subbase si es una colección de subconjuntos de X, donde su unión es X, y se llama topología generada por la subbase S a aquella cuyos abiertos son ϕ y las uniones (arbitrarias) de intersecciones finitas de S.

Observación: La demostración de que la topología generada por una subbase es realmente una topología se reduce a la distributiva para $\cup$ y $\cap$.

Ejemplo: En $X=\mathbb{R}$ si decimos que

$$U_1=(-\infty,0]$$
$$U_2=(0,2]$$
$$U_3=[1,\infty)$$
$$U_4=[2,3]$$

Y consideremos la subbase $S=\{U_1,U_2,U_3,U_4\}$ aparecen los abiertos

$$U_2\cap U_3=[1,2]$$
$$U_2\cap U_4=\{2\}$$

Las intersecciones de tres o más son vacías.

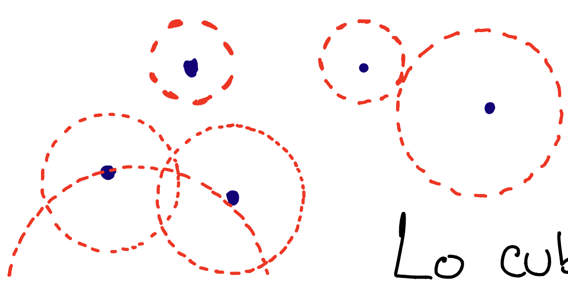
Y sus uniones son.

$$\tau=\{\phi,\mathbb{R},(-\infty,0],(0,2],[1,\infty),[2,3],[1,2],\{2\},(-\infty,0]\cup[1,\infty),\dots\}$$

Si queremos estudiar continuidad y convergencia uno debería saber especificar lo que son los abiertos muy, muy pequeños.

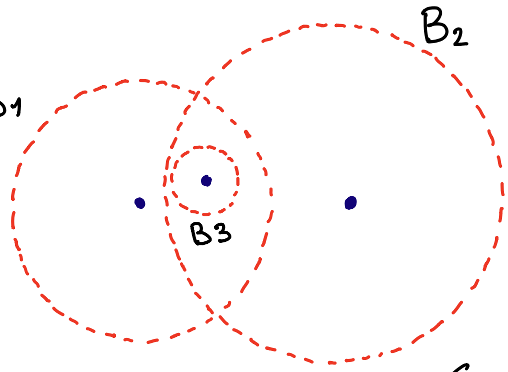
Por eso se introduce el concepto de base que es una subbase en la que podemos empequeñecer los subconjuntos arbitrariamente

> Una imagen más clara de esto es imaginar en $\mathbb{R}^2$ cada elemento como bolas abiertas y dos definiciones nos dirán que



Lo cubren todo.

4.



Se pueden empequeñecer.

Definición:

Dado un conjunto X, se dice que $\mathcal{B}$ es una base si es una colección de subconjuntos de X que satisface

1) $\forall x \in X \; \exists B \in \mathcal{B} : x \in B$

2) $\forall x \in B_1 \cap B_2$, con $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $\exists B_3 \in \mathcal{B} : x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Si los elementos de las bases son como las bolas abiertas en espacios métricos, entonces los abiertos se definen de igual manera.

Definición: Dada una base $\mathcal{B}$ en X la topología generada por $\mathcal{B}$, es aquella tal que U es abierto si y solo si para todo $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset U$.

Notación - Definición: Muchas veces se escribe $U(x)$ ó $B(x)$ para indicar que U ó B son entornos de x, esto es, abreviatura de "$U \in \tau$ tal que $x \in U$" o "$B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$".

Con esta notación las propiedades de base se definen como

Recordar: $\begin{cases} 1) \; \forall x \in X \; \exists B(x) \in \mathcal{B} \\ 2) \; \forall B_1(x), B_2(x) \in \mathcal{B} \; \exists B_3(x) \in \mathcal{B} : B_3(x) \subset B_1(x) \cap B_2(x) \end{cases}$

Lema: Dada una base $\mathcal{B}$, cada uno de sus elemento es abierto en la topología que genera; de hecho, todo abierto en dicha topología se puede escribir como unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Observación:

Evidentemente si τ es una topología, también es una base y la topología que genera es ella misma.

Demostración:

Sea $U = B$, con $B \in \mathcal{B}$, por la definición anterior, se tiene que B es abierto.

Por otro lado

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} B(x) \subset U$$

$\blacksquare$

Proposición:

La topología generada por una base es realmente una topología.

Demostración:

Vamos a comprobar cada una de las propiedades de las definición de topología

1) Se tiene que ϕ y $X \in \tau$

2) Si U_α son abiertos en la topología generada por $\mathcal{B}$, luego debemos probar que

$$\bigcup U_\alpha$$

también lo es, entonces, sea $x \in \bigcup U_\alpha$, entonces $x \in U_{\alpha_0}$ para algún α_0. Como U_{α_0} es abierto, existe $B(x) \in \mathcal{B}$ tal que

$$B(x) \subset U_{\alpha_0} \subset \bigcup U_\alpha .$$

Por lo tanto $\bigcup U_\alpha$ es abierto.

3) Se quiere demostrar que la intersección finita de abiertos en la topología generada por la base $\mathcal{B}$ también es abierto.

Sean los abiertos U_1 y U_2, y sea $x \in U_1 \cap U_2$, luego por la definición de topología generada sean $B_1(x)$ y $B_2(x) \in \mathcal{B}$, tal que

$$B_1(x) \subset U_1 \quad , \quad B_2(X) \subset U_2$$

luego, usando la segunda propiedad de base, se tiene que existe $B_3(x) \in \mathcal{B}$ tal que

$$B_3(x) \subset B_1(x) \cap B_2(x) \subset U_1 \cap U_2$$

luego, esto es suficiente para notar que $U_1 \cap U_2$ es abierto.

Por lo tanto se ha terminado la demostración.

$\blacksquare$

Ejemplos.

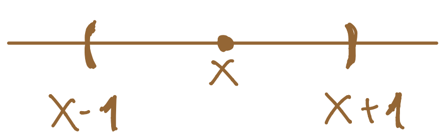
La colección de todos los intervalos abiertos, $\mathcal{B}_1 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$ es una base en $\mathbb{R}$

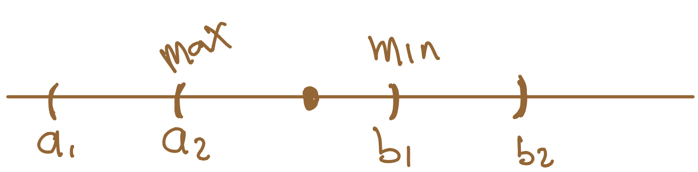
Es posible notar que los intervalos abiertos cubren todo el conjunto y se pueden achicar cuanto uno quiera, pero de manera explícita.

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in (x-1, x+1) \in \mathcal{B}_1$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \in (a_1,b_1) \cap (a_2,b_2) \Rightarrow x \in (\max(a_1,a_2), \min(b_1,b_2)) \subset (a_1,b_1) \cap (a_2,b_2)$.

De manera gráfica.





Ejemplo:

La colección $\mathcal{B}_2 = \{[a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ es una base en $\mathbb{R}$.

Definición.

A la topología en $\mathbb{R}$ generada por $\mathcal{B}_1$ se le llama topología usual y a la generada por $\mathcal{B}_2$ se le llama topología de límite inferior o topología sorgenfrey

Ejemplo:

El conjunto $\mathbb{Q}$ no es ni abierto, ni cerrado en la topología usual y de sorgenfrey, porque no existe ningún intervalo (a,b) ni $[a,b)$, $a<b$, totalmente contenido en $\mathbb{R}$. ni en $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

Ejemplo:

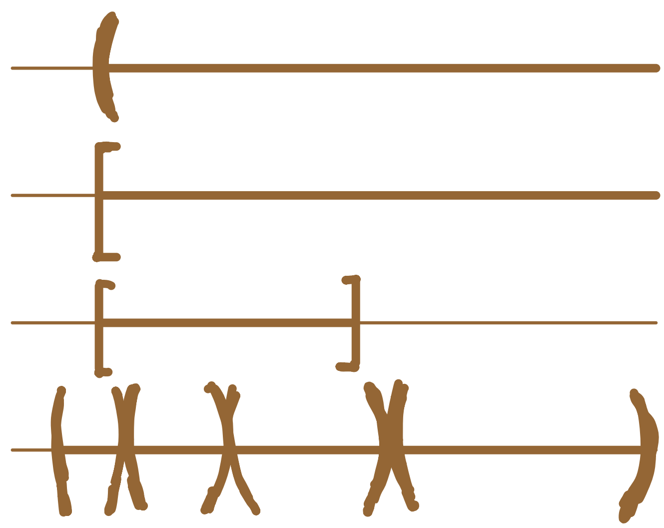
Consideremos los siguientes subconjuntos en $\mathbb{R}$:

$A_1 = \{x > 0\}$

$A_2 = \{x \geq 0\}$

$A_3 = [0,1]$

$A_4 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$

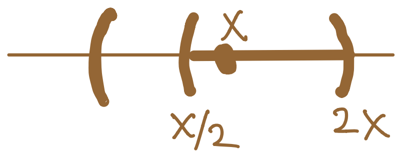


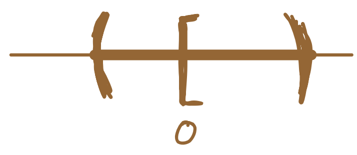
A_1 es un abierto en la topología usual porque si $x \in A_1$, entonces $x \in (x/2, 2x) \in \mathcal{B}_1$.

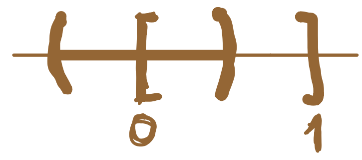
A_2 no es abierto porque no existe ningún intervalo (a,b) tal que $0 \in (a,b) \subset A_2$

A_3 tiene el mismo problema que A_2.

Tanto A_2 como A_3 son son cerrados en la topología usual ya que sus complementarios son abiertos







Definición: Dadas dos topologías τ, τ' sobre X, se dice que τ es más fina que τ' si $\tau' \subset \tau$. Si además $\tau \neq \tau'$, se dice que τ es estrictamente más fina que τ'

Proposición 2.3:

Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases para las topologías τ y τ', respectivamente, sobre X, entonces

$$\tau' \subset \tau \iff \forall x \in X \ \forall B'(x) \in \mathcal{B}' \ \exists B(x) \in \mathcal{B} : B(x) \subset B'(x)$$

Demostración:

$\Rightarrow$) Sean $x \in X$ y $B'(x) \in \mathcal{B}'$ con $x \in B'$. Queremos probar que $B(x) \in \mathcal{B}$, $B(x) \subset B'(x)$.

Como $B'(x) \in \tau'$, entonces $B'(x) \in \tau$, teniendo en cuenta que $\mathcal{B}$ es una base de τ, luego existe $B(x) \in \mathcal{B}$ tal que $B(x) \subset B'(x)$.

$\Leftarrow$) Sea $U' \in \tau$, queremos probar $U' \in \tau'$

Como $\mathcal{B}'$ es base y U' es abierto; para todo $x \in U'$ existe $B(x) \in \mathcal{B}'$ tal que $B'(x) \subset U'$; por hipótesis se tiene que $B(x) \in \mathcal{B}$ tal que $B(x) \subset B'(x) \subset U'$ por lo tanto $U' \in \tau$.

$\blacksquare$