

The Fourier transform

Let A be a finite abelian group, the Hilbert space

$$l^2(A)$$

Coincides with the space \mathbb{C}^A of all maps from A to \mathbb{C} .
In particular, the characters

$$\chi : A \longrightarrow \mathbb{T} \subseteq \mathbb{C}$$

are elements of $l^2(A)$.

Let S be an arbitrary set; $l^2(S)$, is the set of the functions.

$$f : S \longrightarrow \mathbb{C}$$

such that

$$\|f\|^2 = \sum_{s \in S} |f(s)|^2 < \infty$$

$l^2(S)$, forms a Hilbert space with product

$$\langle f, g \rangle = \sum_{s \in S} f(s) \overline{g(s)} , \quad f, g \in l^2(S)$$

Lemma: Let χ, η be characters of A , then

$$\langle \chi, \eta \rangle = \begin{cases} |A| & \text{if } \chi = \eta \\ 0 & \text{other form} \end{cases}$$

Proof: Let's consider the case $\chi = \eta$, then

$$\langle \chi, \eta \rangle = \sum_{a \in A} \chi(a) \overline{\eta(a)} = \sum_{a \in A} |\chi(a)|^2 = \sum_{a \in A} 1 = |A|$$

Now, let's assume than $\chi \neq \eta$, then the character $\alpha = \chi \eta^{-1} \neq 1$.

$$\langle \chi, \eta \rangle = \sum_{a \in A} \chi(a) \eta^{-1}(a) = \sum_{a \in A} \alpha(a).$$

Let $b \in A$, with $\alpha(b) \neq 1$.

$$\langle \chi, \eta \rangle \alpha(b) = \sum_{a \in A} \alpha(a) \alpha(b) = \sum_{a \in A} \alpha(ab).$$

Replacing the sum index of a for ab^{-1} , which runs through the entire group

$$\sum_{a \in A} \alpha(ab) = \sum_{a \in A} \alpha(a) = \langle \chi, n \rangle$$

So $(\alpha(b) - 1)\langle \chi, n \rangle = 0$, that implies that $\langle \chi, n \rangle = 0$.

Thus, for $f \in l^2(A)$, let's define the Fourier transform.

$$\hat{f}: \widehat{A} \longrightarrow \mathbb{C},$$

for

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{|A|} \langle f, \chi_x \rangle = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} f(a) \overline{\chi(a)}$$

In the case of \mathbb{R} , e^{ixy} or $e^{2\pi ixy}$, the normalization factor is codified in the dual.

Theorem: The map $f \mapsto \hat{f}$ is an isomorphism of Hilbert space's $l^2(A) \xrightarrow{\sim} l^2(\widehat{A})$. This can apply to the group \widehat{A} and the composition of two Fourier transforms gives the map $f \mapsto \hat{\hat{f}}$, and its given by

$$\hat{\hat{f}}(\delta_a) = f(a^{-1}).$$

Proof: Let $f, g \in l^2(A)$, we have to prove $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = \langle f, g \rangle$ with products in \widehat{A} and A respectively

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle &= \sum_{x \in \widehat{A}} \hat{f}(x) \overline{\hat{g}(x)} \\ &= \frac{1}{|A|} \sum_{x \in \widehat{A}} \sum_{a \in A} \sum_{b \in A} f(a) \overline{g(b)} \overline{\chi(a)} \chi(b) \\ &= \frac{1}{|A|} \sum_{a, b \in A} f(a) \overline{g(b)} \sum_{x \in \widehat{A}} \overline{\delta_a(x)} \delta_b(x) \\ &= \frac{1}{|A|} \sum_{a, b \in A} f(a) \overline{g(b)} \langle \delta_b, \delta_a \rangle \\ &= \sum_{a \in A} f(a) \overline{g(a)} = \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

Now,

$$\begin{aligned}\widehat{\widehat{f}}(\delta_a) &= \frac{1}{|A|} \sum_{x \in \widehat{A}} \widehat{f}(x) \overline{\delta_a(x)} \\ &= \frac{1}{|A|} \sum_{x \in \widehat{A}} \sum_{b \in A} f(b) \overline{x(b)} \overline{x(a)} \\ &= \frac{1}{|A|} \sum_{x \in \widehat{A}} \sum_{b \in A} f(b^{-1}) x(b) \overline{x(a)} \\ &= \frac{1}{|A|} \sum_{b \in A} f(b^{-1}) \langle \delta_b, \delta_a \rangle \\ &= f(a^{-1})\end{aligned}$$

Convolution

For valued functions in an abelian finite group, there exist a product of convolution of the reals. Let $f, g \in l^2(A)$, let's define the product of convolution

$$(f * g)(a) = \frac{1}{|A|} \sum_{b \in A} f(b) g(b^{-1}a)$$

Theorem: For $f, g \in l^2(A)$, then

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$$

Proof:

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(x) &= \frac{1}{|A|} \sum_{b \in A} (f * g)(b) \overline{x(b)} \\ &= \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \sum_{b \in A} f(a) g(a^{-1}b) \overline{x(b)}\end{aligned}$$

Changing b by ab we get

$$\widehat{f * g}(x) = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} f(a) \overline{x(a)} \sum_{b \in A} g(b) \overline{x(b)} = \widehat{f}(x) \widehat{g}(x)$$

Locally Compact Groups (LCA)

A metrizable abelian group, is an abelian group A with a metric (with the topology coming from that metric) such that the multiplication and the inverse

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \longrightarrow & A \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

be continuous, in other words when x_n , a succession that converges to x , and y_n converges to y .

The succession

$$x_n y_n \longrightarrow xy, \quad x_n^{-1} \longrightarrow x^{-1}$$

Example: Any group with the discrete metric is metrizable.

Let X be a set,

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y \\ 1 & \text{if } x \neq y \end{cases}$$

- Let $(\mathbb{R}^{\times}, \cdot)$ to the set $\mathbb{R}/\{0\}$. The groups $(\mathbb{R}, +)$ and $(\mathbb{R}^{\times}, \cdot)$ with the topology of \mathbb{R} , are metrizable groups

If $x_n \longrightarrow x, y_n \longrightarrow y$, then

$$x_n + y_n \longrightarrow x + y, \quad -x_n \longrightarrow -x.$$

A metrizable space X , its called σ -compact. If there is a succession

$$K_n \subset K_{n+1}$$

of compact subsets such that

$$X = \bigcup_n K_n$$

A space (X, d) is compact if all succession x_n of X , has a convergent subsuccession (closed, delimited)

Example:

1. $[a, b] \in \mathbb{R}$

2. \mathbb{R} is σ -compact, since \mathbb{R} is the union of compact intervals $[-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Finally, a space X is locally compact if each $x \in X$ has a compact neighborhood. Given a metric in X , for each $x \in X$, there is $r > 0$, such that the closed ball.

$$\overline{B_r(x)} = \{y \in X / d(x, y) \leq r\}$$

is compact

Example: \mathbb{R} .

A σ -compact abelian group, and locally compact is a group (LCA)

Example: Any abelian numerable group with the discrete metric is LCA.

$$\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

Lemma: A locally compact abelian group, contains a dense numerable subset

Proof: This property is a result of the σ -compactity.

Let $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ of compacts and let's choose a metric for A. Then K_1 can be covered with a finite number of open balls of ratio $\frac{1}{2}$.

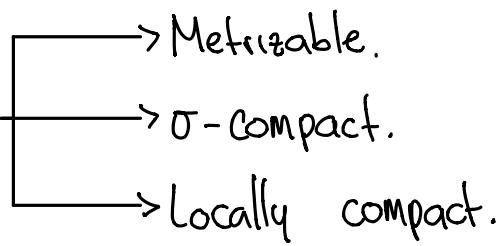
Let a_1, \dots, a_{r_1} its centers. Then K_2 can be covered with a finite number of balls with ratio of $\frac{1}{2}$ with centers of $a_{r_1+1}, \dots, a_{r_2}$ and so on.

Then K_j is covered with a finite number of balls with ratio $\frac{1}{2^j}$ with center $a_{r_{j-1}}, \dots, a_{r_j}$

The succession a_k is dense in A.



A Locally Compact Abelian Group



A character of a LCA group is a homomorphism of a continuous groups $\chi: A \rightarrow \mathbb{T}$, and it is denoted by \hat{A}

Proposition: The characters of the following groups are:

- The characters of \mathbb{Z} are given by $x \mapsto e^{2\pi i kx}$, for $k \in \mathbb{Z}$.
- The characters of \mathbb{R}/\mathbb{Z} are given by $x \mapsto e^{2\pi i kx}$, for $k \in \mathbb{Z}$.
- The characters of \mathbb{R} are given by $x \mapsto e^{2\pi i qx}$, for $q \in \mathbb{R}$.

Proof:

- Let $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{T}$ a character, $\varphi(1) = e^{2\pi i x}$, $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ and then $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi(k) = \varphi(1)^k = e^{2\pi i kx}$.
- Let $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ a character. By continuity there is $\varepsilon > 0$, such that $\varphi([- \varepsilon, \varepsilon]) \subseteq \{\operatorname{Re}(z) > 0\}$.

Let y be an element of $[-\frac{1}{4}\varepsilon, \frac{1}{4}\varepsilon]$, such that

$$\varphi(\varepsilon) = e^{2\pi i \varepsilon y},$$

then we ensure

$$\varphi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = e^{2\pi i \frac{\varepsilon}{2} y}$$

to prove it, we note that $\varphi(\varepsilon/2)^2 = \varphi(\varepsilon) = e^{2\pi i \varepsilon y}$, thus

$$\varphi\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right) = e^{2\pi i \frac{\varepsilon}{2^n} y}.$$

For $k \in \mathbb{Z}$

$$\varphi\left(\frac{k}{2^n} \varepsilon\right) = \varphi\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right)^k = e^{2\pi i \frac{k}{2^n} \varepsilon y},$$

as φ is continuous, then $\varphi(x) = e^{2\pi i x^4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lemma: Let X, Y be metrizable spaces, let f, g be continuous of X and Y , if f and g are the same in a dense $D \subseteq X$, then $f = g$.

b) The characters of \mathbb{R}/\mathbb{Z} are the characters of \mathbb{R} , but they send \mathbb{Z} to 1.



Topología

Definición: Dado un conjunto, X , se dice que τ es una topología definida sobre X si τ es una colección de subconjuntos de X tales que.

1. $\emptyset, X \in \tau$

2. $\text{if } U_i \in \tau, \bigcup_i U_i \in \tau$

3. $U_1, U_2, \dots, U_n \in \tau \rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$

Además a los elementos de τ se les llama abiertos y se dice que el par (X, τ) es un espacio topológico.

Notación:

Como en el caso de espacios métricos, muchas veces se abrevia (X, τ) por X si τ se sobreentiende.

Definición: Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que $F \subset X$ es un cerrado, si su complemento es abierto.

$$X - F \in \tau$$

Observación: De la definición de topología se deduce que la intersección arbitraria de cerrados es un cerrado y que la unión finita de cerrados es un cerrado. La notación "F" viene de la inicial cerrado en Francés.

Ejemplo-Definición: Se llama topología discreta sobre X , τ_{dis} a la que se forma por todos los subconjuntos de X .

Ejemplo: Si $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$$\begin{aligned}\tau_{dis} = & \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \\ & \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, X\} \\ & \hookrightarrow \{\alpha, \beta, \gamma\}\end{aligned}$$

Ejemplo-Definición: Se llama topología trivial sobre X , $\tau_{triv} = \{X, \emptyset\}$. Es decir solo hay dos abiertos que además son cerrados.

Aunque en ambas sus elementos sean simultáneamente abiertos y cerrados, en cierto sentido estas dos topologías son complementarias:

- La primera distingue demasiado los elementos de X .
- La segunda demasiado poco.

Ejemplo:

Sea $X = \{P, T, D, C\}$. Las colecciones de subconjuntos de X :

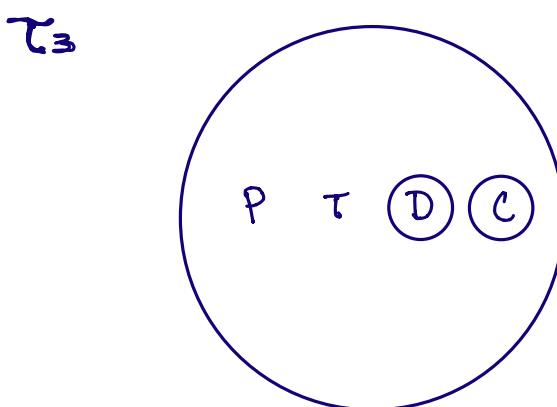
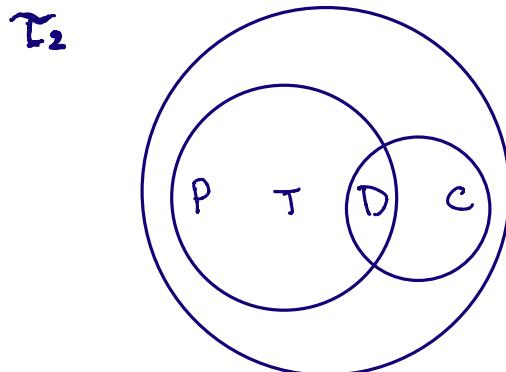
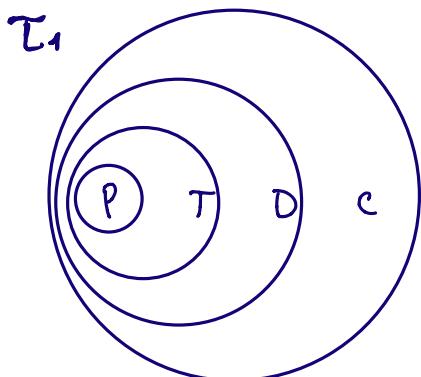
$$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{P\}, \{P, T\}, \{P, T, D\}\} \quad 4$$

$$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{D\}, \{D, C\}, \{P, T, D\}\}.$$

Es fácil notar que τ_1 y τ_2 son topologías sobre X , ya que \emptyset y X se encuentran dentro de τ_1 y τ_2 y si se hace la unión arbitraria de abiertos se obtienen abiertos, y del mismo modo para sus intersecciones.

Pero si definimos $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, X, \{D\}, \{C\}\}$, se obtiene como resultado que no es una topología, ya que si hacemos la unión de $\{\emptyset, C\}$ obtenemos $\{D, C\}$, el cual es un cerrado, por lo que contradice que la unión de abiertos sea como resultado un conjunto abierto.

Gráficamente se tiene que



Ejemplo - Definición: En cualquier conjunto X , se define la **topología cofinita** como aquella tal que sus abiertos son \emptyset, X y todos los subconjuntos de X cuyo complementario tenga un número finito de elementos.

Ejemplo:

Si $X = \mathbb{R}$, el intervalo $(-\infty, 1)$ no es abierto en la topología cofinita porque su complementario, $[1, \infty)$ no contiene un número finito de puntos; sin embargo $(-\infty, 1) \cup [1, \infty)$ sí es abierto.

La definición nos dice que todos los abiertos, a parte de \emptyset y \mathbb{R} , son de la forma

$$U = \mathbb{R} - \bigcup_{n=1}^N \{x_n\}.$$

Observación: Es posible notar que en realidad la topología cofinita es siempre una topología.

Veamos los siguientes ejemplos:

$$U_1 = \underline{\quad X \quad X \quad X}$$

$$U_2 = \underline{X \quad \quad \quad X}$$

$$U_1 \cup U_2 = \underline{X \quad \quad \quad}$$

$$U_1 \cap U_2 = \underline{X \quad X \quad X}$$

Observación: Si X es un conjunto finito, todos sus subconjuntos son abiertos con la topología cofinita, por tanto, esta pierde interés ya que coincide con la discreta.

En una topología la intersección infinita de abiertos o la unión infinita de cerrados no tiene por qué ser un abierto o un cerrado, respectivamente.

Por ejemplo, en la cofinita, tomando los abiertos.

$$U_x = \mathbb{R} - \{x\}$$

se obtiene

$$\bigcap_{x \in \mathbb{Q}} U_x = \mathbb{R} - \{ \} \notin \mathcal{T}_{\text{cof}}$$

Una manera de crear artificialmente una topología, es dividir un conjunto en unos cuantos trozos y sacar todas sus intersecciones y uniones necesarias para que satisfaga la condición necesaria de topología.

Definición: Se dice que S es una **subbase** si es una colección de subconjuntos de X , donde su unión es X , y se llama **topología generada por la subbase S** a aquella cuyos abiertos son \emptyset y las uniones (arbitrarias) de intersecciones finitas de S .

Observación: La demostración de que la topología generada por una subbase es realmente una topología se reduce a la distributiva para \cup y \cap .

Ejemplo: En $X = \mathbb{R}$ si decimos que

$$U_1 = (-\infty, 0]$$

$$U_2 = (0, 2]$$

$$U_3 = [1, \infty)$$

$$U_4 = [2, 3]$$

y consideremos la subbase $S = \{U_1, U_2, U_3, U_4\}$ aparecen los abiertos

$$U_2 \cap U_3 = [1, 2]$$

$$U_2 \cap U_4 = \{2\}$$

Las intersecciones de tres o más son vacías.

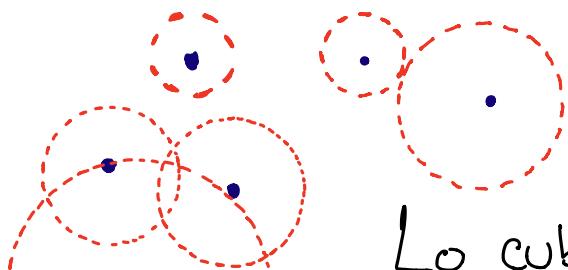
y sus uniones son.

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, 0], (0, 2], [1, \infty), [2, 3], [1, 2], \{2\}, (-\infty, 0] \cup [1, \infty), \dots\}$$

Si queremos estudiar continuidad y convergencia uno debería saber especificar lo que son los abiertos muy, muy pequeños.

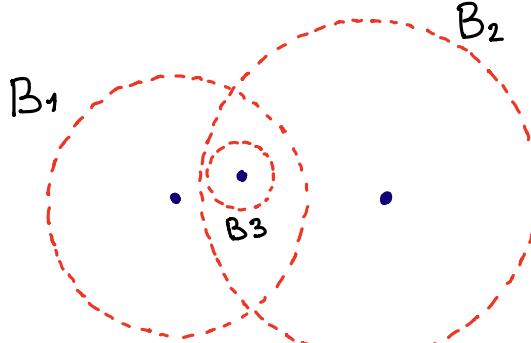
Por eso se introduce el concepto de **base** que es una subbase en la que podemos enriquecer los subconjuntos arbitrariamente.

Una imagen más clara de esto es imaginar el \mathbb{R}^2 cada elemento como bolas abiertas y las definiciones nos dirán que



Lo cubren todo.

9.



Se pueden empequeñecer.

Definición:

Dado un conjunto X , se dice que B es una **base** si es una colección de subconjuntos de X que satisface

$$1) \forall x \in X \exists B \in B : x \in B$$

$$2) \forall x \in B_1 \cap B_2, \text{ con } B_1, B_2 \in B, \exists B_3 \in B : x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$$

Si los elementos de las bases son como las bolas abiertas en espacios métricos, entonces los abiertos se definen de igual manera.

Definición: Dada una base B en X la **topología generada** por B , es aquella tal que U es abierto si y solo si para todo $x \in U$ existe $B \in B$ tal que $x \in B \subset U$.

Notación - Definición: Muchas veces se escribe $U(x) \circ B(x)$ para indicar que U o B son entornos de x , esto es, abbreviatura de "existe tal que $x \in U$ " o " $B \in B$ tal que $x \in B$ ".

Con esta notación las propiedades de base se definen como

Recordar. $\left\{ \begin{array}{l} 1) \forall x \in X \exists B(x) \in B \\ 2) \forall B_1(x), B_2(x) \in B \exists B_3(x) \in B : B_3(x) \subset B_1(x) \cap B_2(x) \end{array} \right.$

Lema: Dada una base B , cada uno de sus elementos es abierto en la topología que genera; de hecho, todo abierto en dicha topología se puede escribir como unión de elementos de B .

Observación:

Evidentemente si τ es una topología, también es una base y la topología que genera es ella misma.

Demarcación:

Sea $U = B$, con $B \in \mathcal{B}$, por la definición anterior, se tiene que B es abierto.

Por otro lado

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} B(x) \subset U$$

■

Proposición:

La topología generada por una base es realmente una topología.

Demarcación:

Vamos a comprobar cada una de las propiedades de las definición de topología

1) Se tiene que \emptyset y $X \in \tau$

2) Si U_x son abiertos en la topología generada por B , luego debemos probar que

$$\bigcup U_x$$

también lo es, entonces, sea $x \in \bigcup U_x$, entonces $x \in U_{x_0}$ para algún x_0 . Como U_{x_0} es abierto, existe $B(x) \in B$ tal que

$$B(x) \subset U_{x_0} \subset \bigcup U_x.$$

Por lo tanto $\bigcup U_x$ es abierto.

3) Se quiere demostrar que la intersección finita de abiertos en la topología generada por la base \mathcal{B} también es abierto.

Sean los abiertos U_1 y U_2 , y sea $x \in U_1 \cap U_2$, luego por la definición de topología generada, sean $B_1(x)$ y $B_2(x) \in \mathcal{B}$, tal que

$$B_1(x) \subset U_1, B_2(x) \subset U_2$$

Luego, usando la segunda propiedad de base, se tiene que existe $B_3(x) \in \mathcal{B}$ tal que

$$B_3(x) \subset B_1(x) \cap B_2(x) \subset U_1 \cap U_2$$

Luego, esto es suficiente para notar que $U_1 \cap U_2$ es abierto.

Por lo tanto se ha terminado la demostración. ■

Ejemplos.

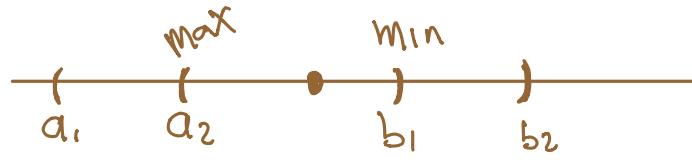
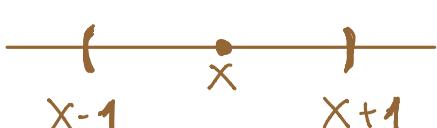
La colección de todos los intervalos abiertos, $\mathcal{B}_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ es una base en \mathbb{R} .

Es posible notar que los intervalos abiertos cubren todo el conjunto y se pueden achicar cuanto uno quiera, pero de manera explícita.

$$1) \forall x \in \mathbb{R}, x \in (x-1, x+1) \in \mathcal{B}_1$$

$$2) \forall x \in \mathbb{R}, x \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) \Rightarrow x \in (\max(a_1, a_2), \min(b_1, b_2)) \subset (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2).$$

De manera gráfica.



Ejemplo:

La colección $B_2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ es una base en \mathbb{R} .

Definición.

A la topología en \mathbb{R} generada por B_1 se le llama topología usual y a la generada por B_2 se le llama topología de límite inferior o topología Sorgenfrey.

Ejemplo:

El conjunto \mathbb{Q} no es ni abierto, ni cerrado en la topología usual q de Sorgenfrey, porque no existe ningún intervalo contenido en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ que sea $(a, b) \cap \mathbb{Q} = [a, b] \cap \mathbb{Q}$, cuya totalmente contenida en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Ejemplo:

Consideremos los siguientes subconjuntos en \mathbb{R} :

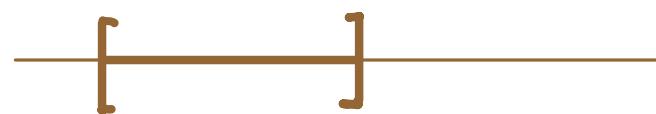
$$A_1 = \{x > 0\}$$



$$A_2 = \{x \geq 0\}$$



$$A_3 = [0, 1]$$



$$A_4 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)$$

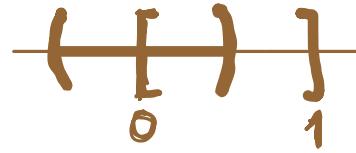
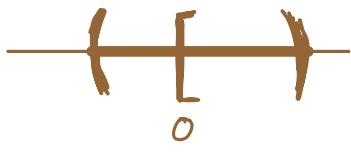
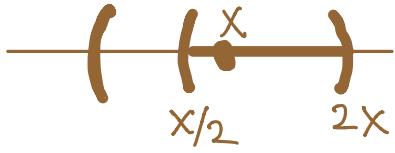


A_1 es un abierto en la topología usual porque si $x \in A_1$, entonces $x \in (x/2, 2x) \in B_1$.

A_2 no es abierto porque no existe ningún intervalo (a, b) tal que $a \in (a, b) \subseteq A_2$.

A_3 tiene el mismo problema que A_2 .

Tanto A_2 como A_3 son cerrados en la topología usual ya que sus complementarios son abiertos.



Definición: Dadas dos topologías τ, τ' sobre X , se dice que τ es más fina que τ' si $\tau' \subset \tau$. Si además $\tau' \neq \tau$, se dice que τ es estrictamente más fina que τ' .

Proposición 2.3:

Sean B y B' bases para las topologías τ y τ' , respectivamente, sobre X , entonces

$$\tau' \subset \tau \iff \forall x \in X \quad \forall B'(x) \in B' \quad \exists B(x) \in B : B(x) \subset B'(x)$$

Demostración:

\rightarrow) Sean $x \in X$ y $B'(x) \in B'$ con $x \in B'$. Queremos probar que $B(x) \in B$, $B(x) \subset B'(x)$.

Como $B'(x) \in \tau'$, entonces $B'(x) \in \tau$, teniendo en cuenta que B' es una base de τ' , luego existe $B(x) \in B$ tal que $B(x) \subset B'(x)$.

\leftarrow) Sea $U' \in \tau$, queremos probar $U' \in \tau'$

Como B' es base y U' es abierto; para todo $x \in U'$ existe $B(x) \in B'$ tal que $B'(x) \subset U'$; por hipótesis se tiene que $B(x) \in B$ tal que $B(x) \subset B'(x) \subset U'$ por lo tanto $U' \in \tau$.

