Tarea 6. MCMC: Metropolis-Hastings

Ricardo Chávez Cáliz

October 18, 2017

Problema 1. Simular $n = 5$ y $n = 30$ v.a Bernoulli $Be(1/3)$; sea r el número de éxitos en cada caso.

Para simular X variable aleatoria Bernoulli se tomó un elemento en una muestra simulada de manera uniforme en el intervalo $[0,1]$, si dicho elemento era menor o igual que $1/3$ entonces se consideraba éxito i.e. $X = 1$ y de lo contrario se tomaba $X = 0$.

Para verificar este algoritmo de simulación se generaron muestras desde 1 hasta 5000 elementos y se calculó el promedio para cada uno. Obteniendo los siguientes resultados.

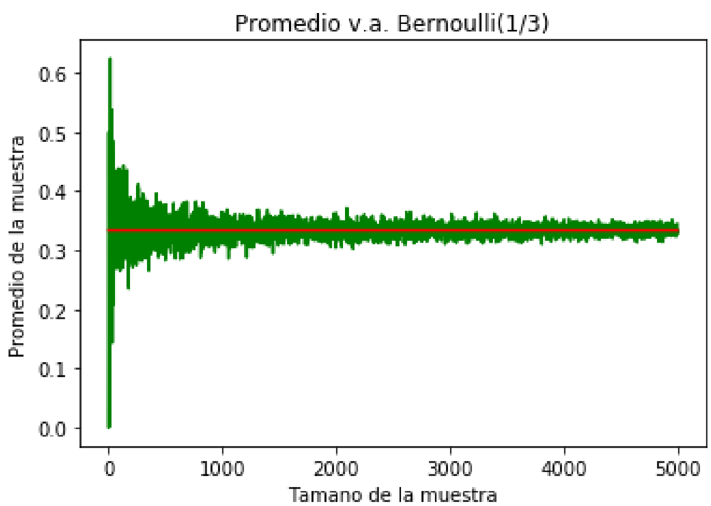

Figure 1: Se muestra el valor estimado de p para distintos tamaños de muestra

El promedio de las muestras es cada vez menos sesgado a $1/3$ a medida que el tamaño de la muestra aumenta.

Para los resultados consecutivos aquí mostrados se obtuvieron $r = 4$ cuando $n = 5$ y $r = 11$ cuando $n = 30$.

Problema 2. Implementar el algoritmo Metropolis-Hastings para simular de la posterior

$$f(p|\bar{x}) \propto p^r(1-p)^{n-r}\cos(\pi p)I_{[0,\frac{1}{2}]}(p),$$

con los dos casos de n y r de arriba. Para ello poner la propuesta $q(p'|p) = q(p') \sim Beta(r+1, n-r+1)$ y la distribución inicial de la cadena $\mu \sim U(0,\frac{1}{2})$.

Para el algoritmo MCMH visto en clase es necesario calcular $\rho(p,p')$, para la densidad instrumental propuesta se obtuvo.

$$\rho(p,p') = min\left\{1, \frac{\mathbb{1}_{[0,1/2]}(p') \cdot cos(\pi p')}{\mathbb{1}_{[0,1/2]}(p) \cdot cos(\pi p)}\right\}$$

Note que como $supp(\mu) = supp(f) = [0,1/2]$ entonces $p \in [0,1/2]$ en el tiempo inicial y por la indicadora en el numerador $p \in [0,1/2]$ para todo tiempo, por lo tanto $\rho(p,p')$ está bien definida para todo tiempo.

A continuación se presentan resultados de muestras de tamaño 10000 de las simulaciones para $n = 5, r = 4$ y $n = 30, r = 11$ de f, es decir para $f(p) \propto p^4(1-p)^1 \cos(\pi p)$ y $f(p) \propto p^{11}(1-p)^{19} \cos(\pi p), p \in [0,1/2]$

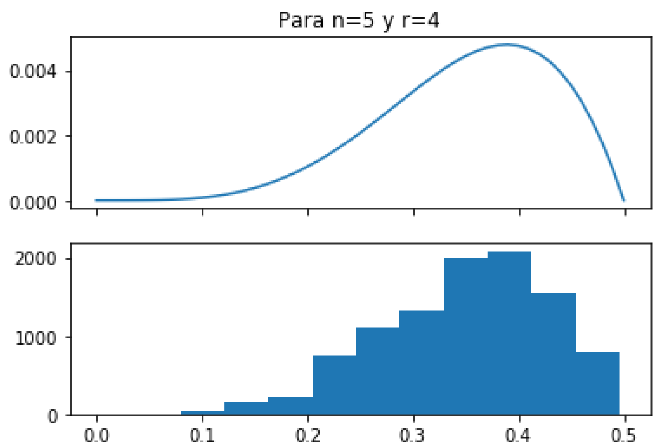

Figure 2: Se muestra la gráfica de f a simular (sin normalizar) con $n = 5$ y $r = 4$ y el histograma de la simulación

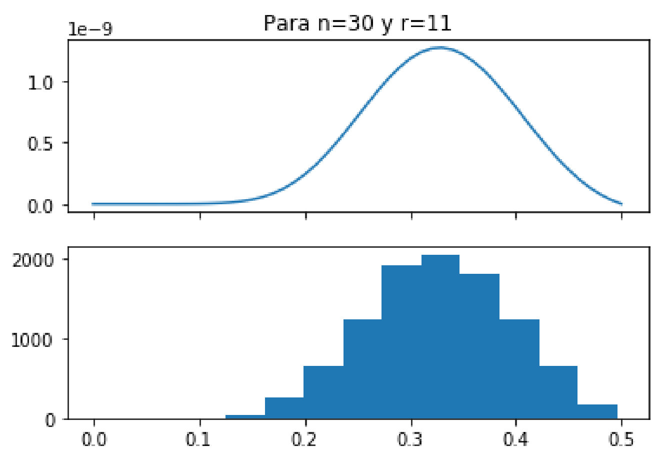

Figure 3: Se muestra la gráfica de f a simular (sin normalizar) con $n = 30$ y $r = 11$ y el histograma de la simulación

En ambas figuras se puede apreciar que el histograma sigue la forma de la función deseada. Para obtener la constante de normalización basta calcular la integral de f

Problema 3. Argumentar porque la cadena es f-irreducible y porque es ergódica. Implementar el algoritmo con los datos descritos y discutir los resultados.

Sea A un conjunto de medida positiva, de las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov tenemos que

$$K^n(x, A) = \int K^{n-1}(x, A) K(x, dy)$$

para ver existe un n en el que el Kernel a n pasos es positivo recordemos que el Kernel de MH está dado por

$$K(p, p') = q(p, p') \cdot \rho(p, p') + (1 - r(p)) \cdot \delta_p(p')$$

$$\text{donde } r(p) = \int q(p'|p) \cdot \rho(p, p') dp'$$

Como la densidad instrumental se tomó independiente a los datos, tenemos que $q(p'|p) = q(p') \sim Beta(r+1, n-r+1)$, la cual sólo se anula fuera del soporte de la función y además $supp(f) \subset sup(q)$, por lo tanto $q(p'|p) > 0$ y por lo tanto $K(p, p') > 0$ y así $K^n(x, A) > 0$ por lo tanto la cadena es f-irreducible.

Teorema 1. Si la cadena de Markov asociada a un algoritmo de Metropolis Hasting es f-irreducible entonces es Harris recurrente

Por el teorema anterior tenemos que la cadena es Harris recurrente, además sabemos que para probar que la cadena es ergódica basta probar que la cadena es fuertemente aperiódica. La aperiodicidad fuerte se deduce de que $K(p, \{p\}) > 0 \forall p \in X$ pues si $\rho(p, p') < 1$ entonces la probabilidad de rechazar el valor propuesto p' es positivo, y en este caso el algoritmo MH establece que $X_{t+1} = X_t$ (la probabilidad de que te quedarse en un estado de la cadena es positiva por cómo está dada ρ y por la construcción de MCMH.

La irreducibilidad es importante porque nos permite simular de cualquier parte del dominio de la función deseada, en las simulaciones esto se ve reflejado en la ausencia de huecos. La ergodicidad garantiza la convergencia de la cadena, lo cual también puede apreciarse al ver como los histogramas siguen la misma forma de la función buscada.

Problema 4. Implementar el algoritmo Metropolis-Hastings con la posterior de arriba tomando una propuesta diferente.

Se tomó $q(p'|p) \sim U(0, 1/2)$, como la densidad instrumental se tomó independiente entonces los resultados del ejercicio anterior se satisfacen con esta propuesta de igual manera. En este caso

$$\rho = min\left\{1, \frac{\mathbb{1}_{[0,1/2]}(p') \cdot (p')^r (1-p')^{n-r} cos(\pi p')}{\mathbb{1}_{[0,1/2]}(p) \cdot p^r (1-p)^{n-r} cos(\pi p)}\right\}$$

De igual manera a ejercicio como $supp(\mu) = supp(f) = [0, 1/2]$ entonces $p \in [0, 1/2]$ para todo tiempo, y por lo tanto $\rho(p, p')$ está bien definida para todo tiempo.

A continuación se presentan resultados de muestras de tamaño 10000 de las simulaciones para $n = 5, r = 4$ y $n = 30, r = 11$ de f, es decir para $f(p) \propto p^4(1-p)^1 \cos(\pi p)$ y $f(p) \propto p^{11}(1-p)^{19} \cos(\pi p), p \in [0, 1/2]$

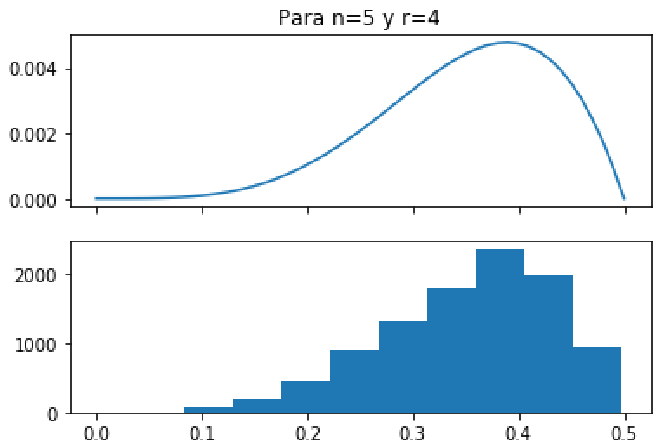

Figure 4: Se muestra la gráfica de f a simular (sin normalizar) con $n = 5$ y $r = 4$ y el histograma de la simulación

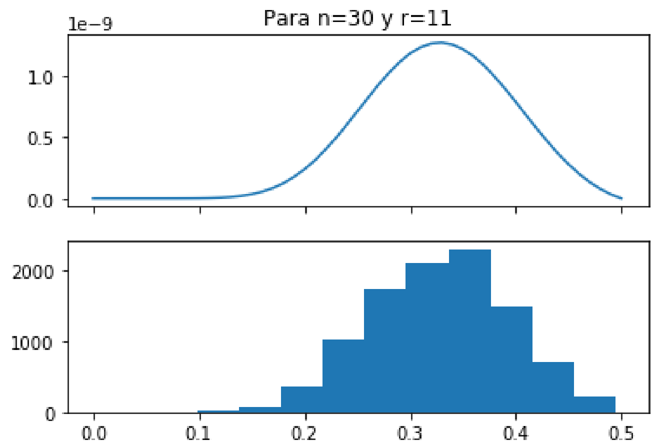

Figure 5: Se muestra la gráfica de f a simular (sin normalizar) con $n = 30$ y $r = 11$ y el histograma de la simulación

Nuevamente en ambas figuras se puede apreciar que el histograma sigue la forma de la función deseada. De nuevo para obtener la constante de normalización basta calcular la integral de f