



Proyecto

IEE3610 – SISTEMAS DINÁMICOS (S2-2024)

Profesor: Alejandro Maass **Fecha de entrega:** 07/07/2025

Ayudante: Francisco Aguilera

Instrucciones

- El proyecto debe entregarse a través de la plataforma Canvas, incluyendo:
 - (i) Informe en formato .pdf que detalle el trabajo realizado (explicaciones, cálculos, resultados y gráficos obtenidos, comentarios, etc.). Debe estar en formato digital y redactado en un editor de texto como LaTeX o Word; no se aceptarán trabajos escritos a mano o en tablet.
 - (ii) Archivos MATLAB/SIMULINK utilizados para generar las simulaciones y que permiten, en caso necesario, replicar los resultados presentados en el informe. Si se utilizó otro software, adjunte los archivos correspondientes.
- El proyecto puede realizarse en grupos de máximo **dos personas**.

Descripción del problema

Considere un satélite orbitando alrededor de la Tierra, como se ilustra en la figura. La dinámica a la que está sujeto un satélite en órbita se modela mediante un sistema no lineal, debido principalmente a la fuerza de atracción gravitacional (F_g). Si bien en el plano terrestre, esta fuerza se aproxima por la constante 9.81, no hay que olvidar que esta se calcula como

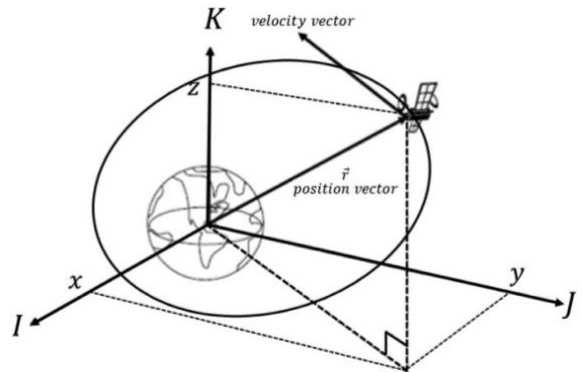
$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Donde m_i son las masas de los cuerpos involucrados, mientras que r es la distancia entre ellos, que en el contexto de un satélite en órbita puede llegar a variar. Es en esta situación en la que aparecen no linealidades en el modelo de los satélites en órbita.

En este proyecto, vamos a estudiar cómo construir variados controladores con tal de poder estabilizar este tipo de sistemas. Para ello, considere que la dinámica de la distancia radial del satélite respecto a la Tierra se puede escribir como

$$\ddot{r} = -\eta \frac{1}{r^2} + \frac{1}{m} F_r + a_r, \quad (1)$$

donde η es una constante de $8 \cdot 10^{17} \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}^2} \right]$, m la masa del satélite de 2000 Kg, F_r la fuerza radial manipulada por el propulsor del satélite, y a_r las perturbaciones que sufre el satélite en el sentido radial. Estas perturbaciones son modeladas como una variable aleatoria normal de media 0 y desviación estándar σ_r .



Preguntas (Total: 100pts)

1. [5pts] Considere que $a_r = 0$. Encuentre los puntos de equilibrio y linealice el sistema descrito en (1) en variables de estados (r y \dot{r} son medibles). Utilice el Jacobiano para linealizar.
2. [10pts] Considere que $a_r = 0$. Construya un controlador por realimentación de estados “ $-Kx$ ” que logre estabilizar el satélite a una órbita de $r_{ref} = 8000$ km. Muestre gráficamente que su controlador converge a r_{ref} con diferentes condiciones iniciales. Note que $r_{ref} > R_{Tierra}$, porque si no, ¡El satélite se estrellaría!
3. [10pts] Ahora considere el efecto a a_r , utilizando un σ_r no despreciable. ¿Qué ocurre con el controlador anteriormente diseñado? Realice simulaciones para determinar hasta qué valor $\hat{\sigma}_r$ puede incrementarse σ_r manteniéndose un comportamiento del controlador que aún pueda considerarse “estable”. Utilice el modelo linealizado para su análisis.
4. [10pts] Diseñe un controlador LQG que permita solucionar lo anterior y mantenga la distancia $\Delta r = r - r_{ref}$ en 0, comparando las salidas de ambos controladores. ¿Existe algún inconveniente con el LQG en esta situación? Asuma que se puede medir todos los estados (*Hint: Puede utilizar un ruido de medición despreciable en caso de que alguna funcionalidad de Matlab lo requiera*).

Con las preguntas anteriores, se logró hacer un controlador que mantiene al satélite a una distancia r_{ref} constante, que solamente sirve cuando el satélite no se mueve tangencialmente. Normalmente, interesa que el satélite gire a la misma velocidad que la rotación terrestre, por lo que hay que modificar el modelo para que considere la dinámica angular del satélite. Sea θ el ángulo que describe la posición del satélite dentro de su órbita, el modelo anteriormente presentado cambia como sigue

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= -\eta \frac{1}{r^2} + \frac{1}{m} F_r + a_r + r\dot{\theta}^2 \\ \ddot{\theta} &= \frac{1}{m} F_\theta - 2\frac{\dot{r}\dot{\theta}}{r} + a_\theta\end{aligned}\quad (2)$$

Donde F_θ es la actuación del propulsor tangencial, mientras que a_θ las perturbaciones en el sentido tangencial. Nuevamente, estas son modeladas por una variable aleatoria normal de media 0 y desviación estándar σ_θ .

5. [10pts] Repita lo pedido en la Pregunta 1 para el nuevo sistema (2), pero esta vez no linealice alrededor de un punto de equilibrio, sino que alrededor de una trayectoria en la que el satélite orbita a una distancia $r_{ref} = 8000$ km constante y una velocidad $\dot{\theta}_{Tierra} = 1670$ km/h también constante, donde $\dot{\theta}_{Tierra}$ es la velocidad de rotación de la Tierra. Es importante que considere que para el sistema linealizado, \ddot{r} como $\ddot{\theta}$ sean igual a cero, para que el satélite no se escape de la órbita, y que tampoco se convierta en un acelerador de partículas.
6. [10pts] Considere $a_r = 0$ y $a_\theta = 0$. Construya nuevamente un controlador que mantenga la distancia a r_{ref} , pero que también mantenga una velocidad tangencial $\dot{\theta}$ igual a la rotación terrestre.
7. [10pts] Incorporando las perturbaciones, ¿Cómo se comporta el controlador anteriormente diseñado? Utilizando $0.01\hat{\sigma}_r$ de la Pregunta 3, realice simulaciones hasta poder identificar de manera aproximada cuál es el valor máximo $\hat{\sigma}_\theta$ de σ_θ hasta que el controlador logra mantener la velocidad angular deseada de forma “aceptable”.
8. [10pts] El estudiante Alambrito Delgado al realizar este proyecto se emocionó tanto que decidió hacer él mismo un satélite con los fondos del DIE y probar los controladores que usted diseñó en órbita. Lamentablemente, por falta de presupuesto, costos de envío muy altos y atrasos en las compras del departamento, Alambrito tuvo que reciclar sensores del Fablab, los cuales son muy ruidosos, que contaminan las mediciones con un ruido \mathbf{n} . Diseñe un controlador LQG que ayude a Alambrito a superar este inconveniente. Use ruido \mathbf{n} de media 0 y escoja su desviación estándar. En cuanto a las perturbaciones, use $0.01\hat{\sigma}_r$ y $0.01\hat{\sigma}_\theta$ en base a las Preguntas 3 y 7.

9. [5pts] ¡Oh no! El satélite de Alambrito chocó con un marciano y ahora el propulsor radial F_r no funciona, ni es capaz de medir el ángulo θ ni la velocidad \dot{r} . ¿Se encuentra comprometida la misión Alambrito 1, o aún se puede mantener la órbita ante este accidente?
10. [10pts] Después de toda esta travesía, Alambrito decidió diseñar una segunda versión del satélite, el cual quiere equipar con un **controlador no lineal**. Es por esto que le pide ayuda a usted para que investigue e implemente cómo implementar el controlador no lineal por *backstepping* para el nuevo satélite, el cual logre estabilizar el satélite no lineal a una órbita de $r_{ref} = 8000$ km. Debido a que aún está probando este controlador, diseñelo **para el modelo simplificado en (1)**. (*Hint: Revise el capítulo 14.3 del libro “Nonlinear Systems” de Hassan K. Khalil*)
11. [10pts] Implemente el controlador no lineal diseñado en la Pregunta 10 en un entorno de simulación, para simular el lazo cerrado con el sistema no lineal (1). Grafique $r(t)$, el cual debe ser capaz de converger a la órbita de r_{ref} . Además, implemente el controlador por realimentación de estado diseñado en la Pregunta 2, pero ahora, debe ser usado sobre el sistema **no lineal** (1). Recuerde que este controlador fue diseñado en base al sistema linealizado, y por ende tenja ojo con las coordenadas. En base a los gráficos realizados, compare cómo se desempeña cada controlador sobre el sistema no lineal.