



**UNIVERSIDAD  
AUTÓNOMA  
METROPOLITANA**  
Unidad Iztapalapa

---

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Posgrado en Ciencias (Física)

Propuesta de Investigación Doctoral

**Fenómenos fuera de equilibrio en  
sistemas multimodo espín-bosón**

Propuesto por: **M. en C. Ricardo Herrera Romero**

Matrícula: **2221801209**

Para sustentar el **Examen Predoctoral**

Asesor: **Dr. Miguel Angel Bastarrachea Magnani**

---

Coordinador: **Dr. Orlando Guzmán López**

---

18 de marzo de 2025

Iztapalapa, Ciudad de México

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Modelos de interacción espín-bosón . . . . .	2
1.2. Sistemas abiertos y dinámica fuera del equilibrio . . . . .	5
1.3. Modelo de Rabi y Dicke abierto . . . . .	5
1.4. Conclusión . . . . .	6
<b>2. Objetivos</b>	<b>7</b>
<b>3. Metodología</b>	<b>7</b>
3.1. Modelo de Rabi de dos qubits con interacciones materiales . . . . .	7
3.1.1. Diagonalización numérica exacta . . . . .	7
3.1.2. Aproximación adiabática . . . . .	8
3.1.3. Aproximación de la onda rotante generalizada . . . . .	8
3.2. Átomos gigantes en guías de onda de arreglo de cavidades . . . . .	9
3.2.1. Modelo básico y transformación de Fourier . . . . .	9
3.2.2. Función espectral y dinámica no markoviana . . . . .	9
3.2.3. Transformada de Laplace y solución exacta . . . . .	9
3.2.4. Extensión a átomos gigantes multimodo . . . . .	10
3.3. Átomos Gigantes con modos multimodo . . . . .	11
3.4. Modelo de Dicke multimodal con interacciones materiales . . . . .	11
<b>4. Resultados Esperados</b>	<b>11</b>
<b>5. Avances</b>	<b>12</b>
<b>6. Bibliografía</b>	<b>12</b>
<b>7. Calendario</b>	<b>17</b>
<b>8. Objetivos</b>	<b>18</b>
<b>9. Metodología y/o Desarrollo del Tema</b>	<b>18</b>
<b>10. Resultados Esperados</b>	<b>19</b>
<b>11. Cronología</b>	<b>19</b>
<b>12. Bibliografía</b>	<b>20</b>

## 1. Introducción

En las últimas décadas, los sistemas de interacción spin-bosón se han convertido en un área central en la física [1] CITAR. El desarrollo de plataformas experimentales como cavidades y circuitos en electrodinámica cuántica (*Quantum Electrodynamics* o QED) [2, 3], sistemas de átomos fríos [4], trampas ópticas [5] o semiconductores acoplados a microcavidades [6], han permitido explorar el acoplamiento controlado entre excitaciones bosónicas (fotones) y sistemas discretos de dos niveles (qubits o átomos de espín 1/2).

Los sistemas abiertos y fuertemente acoplados, donde la interacción entre spin-bosón es comparable o mayor que las frecuencias propias del sistema— han cobrado relevancia experimental en los últimos años [7-10]. La disipación y el bombeo generan estados de equilibrio dinámico con coherencia colectiva, que reflejan nuevas formas de comportamiento organizado [11-13]. El interés se centra, por tanto, en la competencia entre coherencia, interacción spin-bosón y disipación, lo que permite comprender y controlar el comportamiento colectivo en regímenes de acoplamiento intenso [14-18].

Es en este marco conceptual modelos de spin-bosón como Rabi y Dicke adquieren relevancia, permitiendo analizar la dinámica de bombeo y disipación en estos sistemas [19-23]. La propuesta de tesis doctoral se enmarca en esta dirección, con un enfoque sistemático y progresivo: comenzar con el modelo de Rabi abierto y avanzar hacia el modelo de Dicke abierto, incorporando tanto múltiples qubits como múltiples modos bosónicos, para explorar la interacción colectiva y multimodal en presencia de bombeo y disipación.

### 1.1. Modelos de interacción espín-bosón

El estudio de la interacción entre la radiación y sistemas de dos niveles (espín-bosón) tiene su origen en el modelo de Rabi, propuesto para describir el acoplamiento coherente entre un átomo y un modo del campo electromagnético [24]. Su Hamiltoniano,

$$\hat{H}_{\text{Rabi}} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (1.1)$$

describe la energía del campo (frecuencia  $\omega$ ) y del átomo (frecuencia  $\omega_0$ ). El parámetro  $g$  caracteriza el acoplamiento entre ambos, mientras que los términos rotantes ( $\hat{\sigma}_- \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger$ ) representan procesos que conservan el número de excitaciones: la emisión o absorción de un fotón acompañada de la desexcitación o excitación atómica.

El modelo de Jaynes–Cummings [25] se obtiene aplicando la aproximación de onda rotante (RWA), que descarta los términos contra-rotantes ( $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_- \hat{a}$ ) válidos sólo en el régimen de acoplamiento débil ( $g \ll \omega, \omega_0$ ). Esta aproximación permitió una descripción analítica del intercambio coherente de energía entre el átomo y el campo [26-28]. Sin embargo, los avances experimentales han permitido acceder a los regímenes ultrastrong ( $g/\omega \gtrsim 0.1$ ) y deep strong ( $g/\omega \gtrsim 1$ ), donde la RWA deja de ser válida [15, 29], y se requiere el modelo de Rabi completo.

Un paso natural para extender el modelo a sistemas multiqubit consiste en analizar el caso de dos qubits acoplados colectivamente a un modo del campo, descrito por:

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_{01}}{2} \hat{\sigma}_z^1 + \frac{\omega_{02}}{2} \hat{\sigma}_z^2 + \frac{g}{2} (\hat{\sigma}_x^1 + \hat{\sigma}_x^2) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}). \quad (1.2)$$

Mediante los coeficientes de Clebsch–Gordan, los estados de los dos qubits pueden representarse en la base de espín total  $|J, M\rangle$ , que se descompone en un subespacio simétrico triplete ( $J = 1$ ) y un singlete antisimétrico ( $J = 0$ ). Si las frecuencias atómicas son similares  $\omega_{01} \approx \omega_{02}$ , el sistema es invariante bajo permutación y puede describirse dentro del subespacio simétrico  $J = 1$ . En esta representación, los operadores individuales se reemplazan por operadores colectivos  $\hat{J}_\alpha = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_\alpha^1 + \hat{\sigma}_\alpha^2)$ , obteniendo el Hamiltoniano efectivo:

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + g \hat{J}_x (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \eta_x \hat{J}_x^2 + \eta_z \hat{J}_z^2. \quad (1.3)$$

Los términos  $\eta_z \hat{J}_z^2$  y  $\eta_x \hat{J}_x^2$  introducen interacciones efectivas entre los qubits. El primero corresponde a un acoplamiento tipo Ising, que modula la energía según la alineación de los momentos atómicos; el segundo, de tipo XY, describe el intercambio coherente de excitaciones responsable de la correlación dinámica entre los emisores.

La generalización a un número arbitrario de átomos lleva al modelo de Dicke [30], que describe la interacción colectiva entre  $N$  átomos idénticos y un modo del campo electromagnético:

$$\hat{H}_D = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z^j + \frac{g}{\sqrt{N}} \hat{\sigma}_x^j (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \right]. \quad (1.4)$$

Bajo la aproximación de onda larga [30], todos los átomos experimentan el mismo campo, y el sistema puede describirse mediante los operadores de pseudospín colectivos  $\hat{J}_\mu = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_\mu^i$ , lo que conduce a la forma compacta:

$$\hat{H}_D = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + \frac{2g}{\sqrt{N}} \hat{J}_x (\hat{a}^\dagger + \hat{a}). \quad (1.5)$$

Este modelo predice fenómenos críticos como las transiciones de fase cuánticas (QPT) y las transiciones de fase cuánticas de estados excitados (ESQPT) [31-35]. Cuando el acoplamiento luz-materia supera un valor crítico, el sistema pasa de un estado normal (sin fotones) a un estado superradiante caracterizado por emisión coherente colectiva [36]. El modelo de Dicke ha sido implementado experimentalmente en diversas plataformas, como circuitos superconductores [37, 38] y cavidades ópticas con transiciones Raman [22, 39], y se ha consolidado como un marco relevante en información cuántica [16, 17, 40].

La inclusión de interacciones entre los átomos en el modelo de Dicke permite explorar nuevas fases y modificar los puntos críticos del sistema. En mi trabajo de maestría, estudié un modelo de Dicke anisotrópico con interacciones colectivas entre emisores, analizando su diagrama de fases y la aparición de QPT y ESQPT [41]. Posteriormente identifiqué modos de fase y amplitud, relacionando anisotropía y criticidad en sistemas luz-materia fuertemente acoplados [42]. El Hamiltoniano correspondiente es:

$$\hat{H}_I = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + \frac{\gamma}{\sqrt{N}} \left[ \hat{a} \hat{J}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{J}_- + \xi \left( \hat{a} \hat{J}_- + \hat{a}^\dagger \hat{J}_+ \right) \right] + \frac{1}{N} \sum_{i=x,y,z} \eta_i \hat{J}_i^2. \quad (1.6)$$

Los términos rotantes  $(\hat{a} \hat{J}_+, \hat{a}^\dagger \hat{J}_-)$  y contra-rotantes  $(\hat{a} \hat{J}_-, \hat{a}^\dagger \hat{J}_+)$  son modulados por el parámetro anisotrópico  $\xi$ , mientras que los términos  $\eta_i$  cuantifican la interacción entre emisores.

Recientemente, se han propuesto extensiones multimodo del modelo de Dicke [43-45], donde múltiples modos del campo electromagnético interactúan con los átomos:

$$\hat{H}_{\text{Multimodo}} = \sum_k \left( \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z^j + \sum_k \frac{g_k}{\sqrt{N}} \hat{\sigma}_x^j \left( \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k \right) \right] \right). \quad (1.7)$$

Estos sistemas presentan fenómenos como competencia entre modos, fases no convencionales y efectos de desorden [46-49], con implicaciones en el almacenamiento cuántico y redes neuronales cuánticas [44, 50, 51].

De manera paralela, la física de los llamados “átomos gigantes” ha emergido como una extensión natural de estos modelos. En ellos, un solo emisor se acopla a un campo en múltiples puntos espaciales, generando retardos, interferencias y efectos no markovianos [52-55]. Su tamaño efectivo, comparable con la longitud de onda del campo, rompe la aproximación dipolar y permite fenómenos como estados ligados dentro y fuera del continuo (BIC y BOC) [56, 57]. Experimentalmente, estos sistemas se implementan en circuitos superconductores donde qubits tipo transmon se acoplan en múltiples puntos de una guía de onda [58].

Los átomos gigantes constituyen un puente entre los modelos multiqubit y multimodo, donde la estructura espacial y temporal del acoplamiento genera nuevas dinámicas colectivas. Su estudio abre oportunidades para comprender efectos de memoria cuántica y explorar arquitecturas de simulación cuántica con acoplamientos no markovianos. Esta línea se alinea con el enfoque progresivo de esta tesis: analizar cómo la inclusión de grados de libertad multiqubit y multifrecuencia bosónica en sistemas espín-bosón modifica la dinámica colectiva y ofrece nuevas oportunidades para la simulación y las tecnologías cuánticas.

## 1.2. Sistemas abiertos y dinámica fuera del equilibrio

La física de sistemas cuánticos abiertos proporciona el marco teórico esencial para describir sistemas reales que interactúan con su entorno, desde átomos fríos y condensados de Bose–Einstein hasta circuitos superconductores y plataformas de óptica cuántica [59]. A diferencia de los sistemas cerrados, cuya evolución es puramente unitaria, los sistemas abiertos presentan disipación, ruido y pérdida de coherencia debido al acoplamiento con grados de libertad externos [11, 60].

En estos sistemas, el intercambio de energía con el entorno puede ser de dos tipos: el bombeo coherente, que permite transferencia controlada de energía preservando coherencia cuántica, y el bombeo incoherente, de origen térmico o aleatorio, que introduce ruido y degradación de información [61]. Esta dualidad permite estudiar cómo coherencia y disipación compiten o cooperan para generar dinámicas estacionarias fuera del equilibrio.

La evolución temporal se describe mediante ecuaciones maestras para el operador densidad. La ecuación de Lindblad incorpora sistemáticamente procesos de disipación y bombeo, llevando a estados estacionarios que no corresponden a estados térmicos, sino a configuraciones mantenidas por flujos continuos de energía [10, 62]. Complementariamente, el formalismo de Keldysh ofrece una formulación de campo fuera del equilibrio que unifica coherencia y disipación en un marco de acción efectiva [11, 63].

Estas herramientas teóricas han sido cruciales para describir la competencia entre coherencia, interacción y pérdida en plataformas experimentales como cavidades ópticas [64], circuitos superconductores [65] y condensados de polaritones [66]. En el contexto de esta tesis, permiten abordar sistemáticamente los regímenes de bombeo y disipación en modelos de interacción luz-materia, desde el modelo de Rabi abierto hasta extensiones multimodo y sistemas con átomos gigantes.

## 1.3. Modelo de Rabi y Dicke abierto

Los modelos de Rabi y Dicke proporcionan el marco teórico para estudiar sistemas abiertos con disipación [19, 20, 67-70]. En el modelo de Rabi abierto emerge una transición de fase disipativa de segundo orden, donde la competencia entre acoplamiento ultrastrong y disipación conduce a un estado estacionario con incremento significativo de excitaciones, incluso en sistemas pequeños [20].

El modelo de Dicke abierto incorpora explícitamente disipación (pérdida de fotones y relajación atómica) y bombeo externo, dando lugar a transiciones de fase dinámicas [17, 71] como oscilaciones coherentes sostenidas [72] y cristales de tiempo [73].

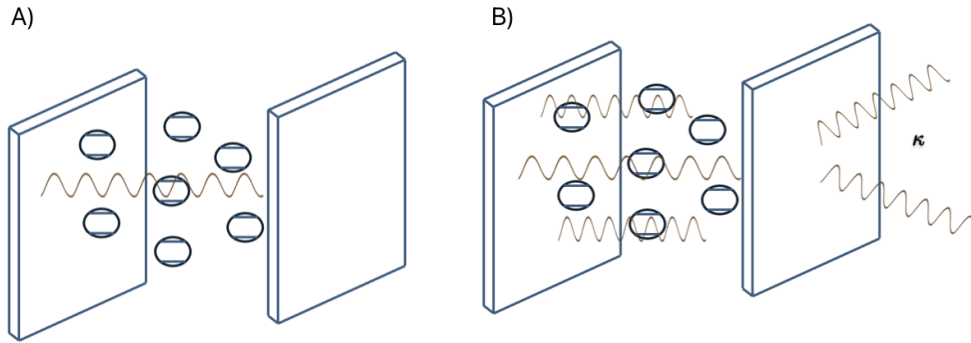


Figura 1: Ilustración del modelo de Dicke. A)  $N$  átomos de dos niveles interactúan con un único modo electromagnético. B)  $N$  átomos interactúan con múltiples modos, incorporando bombeo y disipación  $\kappa$ .

La primera observación experimental de la transición superradiante fue realizada por Baumann et al. [74] acoplando un condensado de Bose–Einstein (BEC) a una cavidad óptica abierta. Este experimento reveló la ruptura espontánea de simetría durante la transición, mostrando cómo las fluctuaciones cuánticas y efectos disipativos compiten en regímenes fuera del equilibrio [75]. Experimentos posteriores con BEC en cavidades ópticas demostraron que la transición superradiante puede mantenerse en régimen no térmico [23, 75], mientras que en circuitos QED se observaron dinámicas colectivas estacionarias inducidas por disipación [2]. Estos resultados establecieron la disipación como elemento activo para generar y estabilizar orden cuántico colectivo.

Los sistemas optomecánicos [76] y los qubits superconductores [77] han emergido como plataformas experimentales clave. Los primeros permiten estudiar acoplamientos entre modos ópticos y mecánicos, mientras que los segundos ofrecen control preciso sobre parámetros fundamentales, facilitando la exploración experimental de los modelos de Rabi y Dicke [78] y su interacción con el entorno [20, 79].

Recientemente, el modelo de Dicke multimodo en regímenes fuera de equilibrio ha mostrado comportamientos análogos a memorias asociativas, con capacidad de reconocer patrones almacenados [44]. Más allá del régimen Markoviano, sistemas no-Markovianos como los átomos gigantes —donde un emisor se acopla al campo en múltiples puntos espaciales— introducen retardos y correlaciones temporales que permiten simular interacciones con memoria [57, 80]. Estas configuraciones consolidan el *reservoir engineering* como técnica para diseñar entornos que protegen o inducen coherencia, estabilizando estados coherentes y entrelazados [81, 82].

## 1.4. Conclusión

Este proyecto de investigación doctoral tiene como objetivo principal estudiar sistemáticamente los modelos de Rabi y Dicke en regímenes multimodo y multiqubit, con especial énfasis en sistemas abiertos y fuera de equilibrio. La investigación se estructura progresivamente, comenzando con el modelo de Rabi de dos qubits, sistemas de multifrecuencia

bosónica como los átomos gigantes y avanzando hacia configuraciones colectivas más complejas del modelo de Dicke donde los efectos no-Markovianos y la estructura extendida enriquecen sustancialmente la dinámica.

## 2. Objetivos

El objetivo general de este proyecto es estudiar esquemas fuera de equilibrio en el modelo de Dicke abierto para explorar nuevas fases cuánticas y aplicaciones en el terreno de la información cuántica.

- Comprender el modelo de Dicke multimodo analizando las transiciones de fase superradiante, considerando el caso de 1 o 2 hasta  $N$  emisores.
- Estudiar el modelo de Dicke multimodo abierto y fuera de equilibrio utilizando el formalismo de Keldysh.
- Analizar como la competencia entre fluctuaciones cuánticas, disipación y bombeo afecta las propiedades del sistema a diferentes escalas de energía.
- Explorar aplicaciones como la posibilidad de cristales de tiempo en el modelo de Dicke multimodo en baños no markovianos, la presencia de memoria a largo plazo y el caso de interacciones entre emisores.

## 3. Metodología

### 3.1. Modelo de Rabi de dos qubits con interacciones materiales

Este estudio sistemático del modelo de Rabi de dos qubits con interacciones materiales representa un paso inicial hacia la comprensión de sistemas multiqubit. Implementamos tres aproximaciones para elucidar cómo la adición de un segundo qubit y las interacciones materiales modifican el espectro energético y los estados del sistema.

#### 3.1.1. Diagonalización numérica exacta

Como referencia, empleamos diagonalización numérica directa del Hamiltoniano (1.3), que proporciona resultados exactos para validar nuestras aproximaciones analíticas. La elección del subespacio simétrico ( $j = 1$ ) se justifica por la invariancia del Hamiltoniano bajo permutación de qubits idénticos ( $\omega_{01} \approx \omega_{02}$ ), confinando la dinámica al sector triplete donde los operadores colectivos  $\hat{J}_\alpha$  capturan completamente el comportamiento del sistema.

En la base producto  $|\Psi\rangle = |n\rangle \otimes |j, m\rangle$  con  $j = 1$ , los elementos de matriz son:



$$\begin{aligned}
 \langle n', m' | \hat{H} | n, m \rangle = & \omega n \delta_{n', n} + (\omega_0 + \eta_z m) m \delta_{m', m} + \frac{g}{2} \left( \sqrt{n+1} \delta_{n', n+1} + \sqrt{n} \delta_{n', n-1} \right) \\
 & \times \left( \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \delta_{m', m+1} + \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \delta_{m', m-1} \right) \\
 & + \frac{\eta_x}{4} \left( \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \sqrt{j(j+1) - (m+1)(m+2)} \delta_{m', m+2} \right. \\
 & \quad \left. + 2 \left( j(j+1) - m^2 \right) \delta_{m', m} \right. \\
 & \quad \left. + \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \sqrt{j(j+1) - (m-1)(m-2)} \delta_{m', m-2} \right) \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

### 3.1.2. Aproximación adiabática

Como primera aproximación analítica, consideramos el límite adiabático ( $\omega_0 \rightarrow 0$ ) donde el oscilador se ajusta instantáneamente a la configuración de los qubits. La transformación  $\hat{U} = \exp \left[ \beta (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \right]$  genera estados de Fock desplazados que describen el reacomodo del campo para cada configuración de qubits.

Esta aproximación conserva solo acoplamientos entre estados con el mismo número de excitaciones, proporcionando una imagen física intuitiva pero limitada al ignorar efectos de tunelado cuántico.

### 3.1.3. Aproximación de la onda rotante generalizada

La Aproximación Generalizada de Onda Rotante (*Generalized Rotating Wave Approximation* o GRWA) [83-88] extiende el enfoque adiabático reintroduciendo consistentemente el tunelado cuántico mediante la transformación polarónica:

$$\hat{U} = \exp \left[ \beta \hat{J}_x (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \right], \quad (3.2)$$

con  $\beta = g/\omega$ . Esta transformación captura el desplazamiento colectivo del campo electromagnético inducido por los qubits, mientras que la minimización variacional de la energía del estado fundamental incorpora autoconsistentemente los efectos de  $\omega_0$ .

La GRWA preserva la estructura de bloques manejable de la aproximación adiabática pero incluye correcciones esenciales que permiten describir transiciones entre diferentes números de excitaciones, logrando alta precisión incluso para acoplamientos fuertes.

Esta metodología progresiva —desde la aproximación adiabática simple hasta la GRWA más sofisticada, validadas contra resultados numéricos exactos— establece las bases para extender nuestro análisis a sistemas multiqubit más complejos, donde las interacciones materiales y efectos colectivos juegan roles cruciales en la formación del espectro energético.

### 3.2. Átomos gigantes en guías de onda de arreglo de cavidades

El estudio de átomos gigantes representa una extensión natural de nuestros modelos previos hacia sistemas donde la estructura espacial extendida del emisor introduce efectos no markovianos y de interferencia. A diferencia de los emisores puntuales tradicionales, los átomos gigantes acoplan al campo electromagnético en múltiples puntos espaciales separados, lo que modifica fundamentalmente la dinámica de emisión espontánea.

#### 3.2.1. Modelo básico y transformación de Fourier

Consideramos un emisor de dos niveles acoplado a un arreglo unidimensional de cavidades, descrito por el Hamiltoniano:

$$H = \delta\sigma^+\sigma^- + \omega_0 \sum_n a_n^\dagger a_n + \xi \sum_n \left( a_{n+1}^\dagger a_n + a_n^\dagger a_{n+1} \right) + g_0 \left( \sigma^+ a_0 + \sigma^- a_0^\dagger \right).$$

La clave para resolver este sistema está en aprovechar la invariancia traslacional mediante la transformación de Fourier discreta  $a_k = N^{-1/2} \sum_n e^{ikn} a_n$ , que diagonaliza la guía de onda y revela la relación de dispersión  $\omega_k = 2\xi \cos k$ . Físicamente, esto significa que en lugar de pensar en cavidades individuales, trabajamos con modos extendidos que se propagan a lo largo de la guía.

#### 3.2.2. Función espectral y dinámica no markoviana

La función espectral  $J(\omega) = \frac{2g_0^2}{\sqrt{4\xi^2 - \omega^2}}$  captura cómo los diferentes modos de frecuencia  $\omega$  contribuyen al acoplamiento. Las singularidades en  $\omega = \pm 2\xi$  (bordes de banda) indican el colapso de la aproximación markoviana. Cerca del centro de la banda,  $J(\omega)$  es aproximadamente constante y recuperamos la decadencia exponencial tradicional, pero cerca de los bordes la dinámica se vuelve altamente no markoviana.

#### 3.2.3. Transformada de Laplace y solución exacta

Para ir más allá de la aproximación de Weisskopf-Wigner, empleamos la transformada de Laplace que permite descomponer la solución en contribuciones de estados ligados y de scattering:

$$\alpha(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\omega_{\max}}^{-\omega_{\min}} dy \frac{J(-y)e^{iyt}}{2\pi [y + \Delta - iG(-\epsilon + iy)] [y + \Delta - iG(\epsilon + iy)]} + \sum_j r_j e^{-iy_j t}.$$

El primer término representa estados de scattering dentro del continuo, mientras que el segundo corresponde a estados ligados (BOC) que persisten en el estado estacionario. Esta descomposición explica físicamente por qué parte de la excitación queda atrapada localmente alrededor del emisor.

### 3.2.4. Extensión a átomos gigantes multimodo

La generalización a átomos gigantes que se acoplan en  $N_c$  posiciones introduce dependencia espacial explícita:

$$\tilde{g}_k = \frac{g_0}{N_c \sqrt{N}} \frac{\sin(kdN_c/2)}{\sin(kd/2)}.$$

La función espectral efectiva  $J_{\text{eff}}(\omega) = J(\omega)\mathcal{G}(\omega)$  ahora presenta ceros en frecuencias específicas  $\omega_m = 2\xi \cos(\pi(2m+1)/d)$ , donde emergen estados ligados dentro del continuo (BIC). Estos BIC surgen de interferencia destructiva que confina fotones entre los puntos de acoplamiento.

### 3.3. Átomos Gigantes con modos multimodo

### 3.4. Modelo de Dicke multimodal con interacciones materiales

En este proyecto, se abordará el estudio de sistemas cuánticos abiertos y fuera de equilibrio. Se iniciará con el modelo de Rabi [24], empleando técnicas de diagonalización numéricas [83] y aproximaciones perturbativas, como la transformación del polarón y métodos variacionales [89], para sentar las bases conceptuales. A continuación, se avanzará hacia el modelo de Rabi multimodo [90]. Finalmente, se continuará al modelo de Dicke multimodo, permitiendo el estudio de transiciones de fase disipativas y fenómenos críticos en sistemas abiertos.

Para abordar el estudio de sistemas de interacción luz-materia en sistemas abiertos y fuera de equilibrio, se empleará la teoría de Keldysh. Esta metodología es particularmente adecuada para sistemas cuánticos con interacciones fuertes, donde coexisten dinámicas coherentes y disipativas [91, 92]. A diferencia de los métodos tradicionales basados en ecuaciones maestras, la teoría de Keldysh permite describir tanto la evolución unitaria como los efectos disipativos, facilitando el análisis de estados estacionarios no térmicos y transiciones de fase en sistemas complejos [11]. La formulación de Keldysh extiende la teoría cuántica de campos (*Quantum Field Theory* o QFT) a través de las integrales de camino en el contorno de Keldysh, para calcular funciones de correlación y respuesta en tiempo real, lo que es esencial para comprender la dinámica del sistema y su comportamiento crítico.

Además, se integrará la teoría de renormalización funcional *Functional Renormalization Group* o FRG), basada en la ecuación de Wetterich [93], para analizar la disipación a diferentes escalas de energía, especialmente en regímenes críticos o durante transiciones de fase. La FRG permitirá una descripción completa del sistema desde escalas microscópicas hasta macroscópicas, capturando efectos no perturbativos y estudiando la competencia entre coherencia y disipación [94]. Esta aproximación será fundamental para investigar fenómenos como la relajación hacia estados estacionarios y la formación de nuevas fases no convencionales.

En el estudio de sistemas cuánticos abiertos, la teoría de sistemas cuánticos disipativos proporciona un enfoque para describir la interacción entre un sistema y su entorno. Bajo la aproximación markoviana, donde se asume que la memoria del baño es despreciable, esta interacción puede modelarse mediante ecuaciones maestras de Lindblad [60, 95], las cuales describen la evolución temporal del sistema de manera efectiva. Este enfoque es esencial para comprender la dinámica de sistemas acoplados a baños markovianos, donde la disipación ocurre de manera instantánea y sin correlaciones temporales significativas [96].

Finalmente, se explorará la aparición de memoria a largo plazo en sistemas de Dicke acoplados a baños no markovianos [44, 73, 97]. A diferencia de los baños markovianos, donde la disipación es instantánea, los baños no markovianos introducen correlaciones temporales que pueden alterar significativamente la dinámica del sistema [98]. Este enfoque permitirá estudiar cómo la memoria a largo plazo influye en la relajación del sistema y en la naturaleza de las transiciones de fase fuera de equilibrio [97].

## 4. Resultados Esperados

## 5. Avances

## 6. Bibliografía

- [1] S. Haroche y J.-M. Raimond, *Exploring the quantum: atoms, cavities, and photons* (Oxford university press, 2006).
- [2] A. Blais, A. L. Grimsmo, S. M. Girvin y A. Wallraff, Circuit quantum electrodynamics, *Rev. Mod. Phys.* **93**, 025005 (2021).
- [3] A. A. Clerk, K. W. Lehnert, P Bertet, J. R. Petta e Y Nakamura, Hybrid quantum systems with circuit quantum electrodynamics, *Nature Physics* **16**, 257-267 (2020).
- [4] I. B. Mekhov y H. Ritsch, Quantum optics with ultracold quantum gases: towards the full quantum regime of the light–matter interaction, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **45**, 102001 (2012).
- [5] Y. Yang, Y. Ren, M. Chen, Y. Arita y C. Rosales-Guzmán, Optical trapping with structured light: a review, *Advanced Photonics* **3**, 034001 (2021).
- [6] C. Schneider, M. M. Glazov, T. Korn, S. Höfling y B. Urbaszek, Two-dimensional semiconductors in the regime of strong light-matter coupling, *Nature Communications* **9**, 2695 (2018).
- [7] M Grifoni, E Paladino y U Weiss, Dissipation, decoherence and preparation effects in the spin-boson system, *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems* **10**, 719-729 (1999).
- [8] H.-D. Zhang, R.-X. Xu, X. Zheng e Y. Yan, Nonperturbative spin–boson and spin–spin dynamics and nonlinear Fano interferences: A unified dissipaton theory based study, *The Journal of Chemical Physics* **142**, 024112 (2015).
- [9] A. Burger, L. C. Kwek y D. Poletti, Digital Quantum Simulation of the Spin-Boson Model under Markovian Open-System Dynamics, *Entropy* **24** (2022).
- [10] R. Fazio, J. Keeling, L. Mazza y M. Schirò, Many-body open quantum systems, *SciPost Phys. Lect. Notes*, 99 (2025).
- [11] L. M. Sieberer, M. Buchhold y S. Diehl, Keldysh field theory for driven open quantum systems, *Reports on Progress in Physics* **79**, 096001 (2016).
- [12] C.-M. Halati, A. Sheikhan, H. Ritsch y C. Kollath, Numerically Exact Treatment of Many-Body Self-Organization in a Cavity, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 093604 (2020).
- [13] O. Chelpanova, *Dissipative phases in open quantum systems*, eng (Mainz, 2025).
- [14] Y. Subaşı, C. H. Fleming, J. M. Taylor y B. L. Hu, Equilibrium states of open quantum systems in the strong coupling regime, *Phys. Rev. E* **86**, 061132 (2012).
- [15] P. Forn-Díaz, L. Lamata, E. Rico, J. Kono y E. Solano, Ultrastrong coupling regimes of light-matter interaction, *Rev. Mod. Phys.* **91**, 025005 (2019).
- [16] P. Kirton y J. Keeling, Superradiant and lasing states in driven-dissipative Dicke models, *New Journal of Physics* **20**, 015009 (2018).

- [17] A. Le Boité, Theoretical Methods for Ultrastrong Light–Matter Interactions, *Advanced Quantum Technologies* **3**, 1900140 (2020).
- [18] M. M. Roses y E. G. Dalla Torre, Dicke model, *PLOS ONE* **15**, 1-8 (2020).
- [19] L. Henriët, Z. Ristivojevic, P. P. Orth y K. Le Hur, Quantum dynamics of the driven and dissipative Rabi model, *Phys. Rev. A* **90**, 023820 (2014).
- [20] M.-J. Hwang, P. Rabl y M. B. Plenio, Dissipative phase transition in the open quantum Rabi model, *Phys. Rev. A* **97**, 013825 (2018).
- [21] G. Di Bello, Dynamics of open quantum systems: From the Rabi model to coupled qubits, *Nuovo Cim. C* **47**, 255 (2024).
- [22] D. Nagy, G. Kónya, G. Szirmai y P. Domokos, Dicke-Model Phase Transition in the Quantum Motion of a Bose-Einstein Condensate in an Optical Cavity, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 130401 (2010).
- [23] J. Klinder, H. Keßler, M. Wolke, L. Mathey y A. Hemmerich, Dynamical phase transition in the open Dicke model, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **112**, 3290-3295 (2015).
- [24] I. I. Rabi, On the Process of Space Quantization, *Phys. Rev.* **49**, 324-328 (1936).
- [25] E. Jaynes y F. Cummings, Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser, *Proceedings of the IEEE* **51**, 89-109 (1963).
- [26] A Wallraff, D. I. Schuster, A Blais, L Frunzio, R. S. Huang, J Majer, S Kumar, S. M. Girvin y R. J. Schoelkopf, Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics, *Nature* **431**, 162-167 (2004).
- [27] R. J. Schoelkopf y S. M. Girvin, Wiring up quantum systems, *Nature* **451**, 664-669 (2008).
- [28] M. H. Devoret y R. J. Schoelkopf, Superconducting Circuits for Quantum Information: An Outlook, *Science* **339**, 1169-1174 (2013).
- [29] F. Yoshihara, T. Fuse, S. Ashhab, K. Kakuyanagi, S. Saito y K. Semba, Superconducting qubit–oscillator circuit beyond the ultrastrong-coupling regime, *Nature Physics* **13**, 44-47 (2017).
- [30] R. H. Dicke, Coherence in Spontaneous Radiation Processes, *Phys. Rev.* **93**, 99-110 (1954).
- [31] K. Hepp y E. H. Lieb, On the superradiant phase transition for molecules in a quantized radiation field: the dicke maser model, *Annals of Physics* **76**, 360 -404 (1973).
- [32] Y. K. Wang y F. T. Hioe, Phase Transition in the Dicke Model of Superradiance, *Phys. Rev. A* **7**, 831-836 (1973).
- [33] F. T. Hioe, Phase Transitions in Some Generalized Dicke Models of Superradiance, *Phys. Rev. A* **8**, 1440-1445 (1973).
- [34] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions* (Cambridge University Press, 1999).

- [35] J. Larson y E. K. Irish, Some remarks on ‘superradiant’ phase transitions in light-matter systems, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **50**, 174002 (2017).
- [36] M. Gross y S. Haroche, Superradiance: An essay on the theory of collective spontaneous emission, *Physics Reports* **93**, 301-396 (1982).
- [37] A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin y R. J. Schoelkopf, Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation, *Phys. Rev. A* **69**, 062320 (2004).
- [38] J. Casanova, G. Romero, I. Lizuain, J. J. García-Ripoll y E. Solano, Deep Strong Coupling Regime of the Jaynes-Cummings Model, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 263603 (2010).
- [39] M. P. Baden, K. J. Arnold, A. L. Grimsmo, S. Parkins y M. D. Barrett, Realization of the Dicke Model Using Cavity-Assisted Raman Transitions, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 020408 (2014).
- [40] B. M. Garraway, The Dicke model in quantum optics: Dicke model revisited, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **369**, 1137-1155 (2011).
- [41] R. Herrera Romero, M. A. Bastarrachea-Magnani y R. Linares, Critical Phenomena in Light–Matter Systems with Collective Matter Interactions, *Entropy* **24** (2022).
- [42] R. Herrera Romero y M. A. Bastarrachea-Magnani, Phase and Amplitude Modes in the Anisotropic Dicke Model with Matter Interactions, *Entropy* **26** (2024).
- [43] D. Tolkunov y D. Solenov, Quantum phase transition in the multimode Dicke model, *Phys. Rev. B* **75**, 024402 (2007).
- [44] E. Fiorelli, M. Marcuzzi, P. Rotondo, F. Carollo e I. Lesanovsky, Signatures of Associative Memory Behavior in a Multimode Dicke Model, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 070604 (2020).
- [45] F. Carollo e I. Lesanovsky, Exactness of Mean-Field Equations for Open Dicke Models with an Application to Pattern Retrieval Dynamics, *Phys. Rev. Lett.* **126**, 230601 (2021).
- [46] P. Rotondo, E. Tesio y S. Caracciolo, Replica symmetry breaking in cold atoms and spin glasses, *Phys. Rev. B* **91**, 014415 (2015).
- [47] T. Kipf y G. S. Agarwal, Superradiance and collective gain in multimode optomechanics, *Phys. Rev. A* **90**, 053808 (2014).
- [48] T. Vojta, Phases and phase transitions in disordered quantum systems, *AIP Conference Proceedings* **1550**, 188-247 (2013).
- [49] P. Das, S. Wüster y A. Sharma, Dicke model with disordered spin-boson couplings, *Phys. Rev. A* **109**, 013715 (2024).
- [50] S. Maniscalco y F. Petruccione, Non-Markovian dynamics of a qubit, *Phys. Rev. A* **73**, 012111 (2006).

- [51] B. P. Marsh, Y. Guo, R. M. Kroeze, S. Gopalakrishnan, S. Ganguli, J. Keeling y B. L. Lev, Enhancing Associative Memory Recall and Storage Capacity Using Confocal Cavity QED, *Phys. Rev. X* **11**, 021048 (2021).
- [52] G. Andersson, B. Suri, L. Guo, T. Aref y P. Delsing, Non-exponential decay of a giant artificial atom, *Nature Physics* **15**, 1123-1127 (2019).
- [53] C. A. González-Gutiérrez, J. Román-Roche y D. Zueco, Distant emitters in ultrastrong waveguide QED: Ground-state properties and non-Markovian dynamics, *Phys. Rev. A* **104**, 053701 (2021).
- [54] Q. Y. Cai y W. Z. Jia, Coherent single-photon scattering spectra for a giant-atom waveguide-QED system beyond the dipole approximation, *Phys. Rev. A* **104**, 033710 (2021).
- [55] H. Yu, X. Zhang, Z. Wang y J. Wang, Rabi oscillation and fractional population via the bound states in the continuum in a giant-atom waveguide QED setup, *Phys. Rev. A* **111**, 053710 (2025).
- [56] C. A. González-Gutiérrez, *Non-Markovian dynamics of giant emitters beyond the Weisskopf-Wigner approximation*, 2025.
- [57] L. Guo, A. F. Kockum, F. Marquardt y G. Johansson, Oscillating bound states for a giant atom, *Phys. Rev. Res.* **2**, 043014 (2020).
- [58] B. Kannan, M. J. Ruckriegel, D. L. Campbell, A. Frisk Kockum, J. Braumüller, D. K. Kim, M. Kjaergaard, P. Krantz, A. Melville, B. M. Niedzielski, A. Vepsäläinen, R. Winik, J. L. Yoder, F. Nori, T. P. Orlando, S. Gustavsson y W. D. Oliver, Waveguide quantum electrodynamics with superconducting artificial giant atoms, *Nature* **583**, 775-779 (2020).
- [59] I Rotter y J. P. Bird, A review of progress in the physics of open quantum systems: theory and experiment, *Reports on Progress in Physics* **78**, 114001 (2015).
- [60] H.-P. Breuer y P. F., *The theory of open quantum systems* (Oxford University Press, 2003).
- [61] H. J. Carmichael, *Statistical methods in quantum optics I: master equations and Fokker-Planck equations* (Springer Science & Business Media, 2013).
- [62] A. C. Y. Li, F. Petruccione y J. Koch, Perturbative approach to Markovian open quantum systems, *Scientific Reports* **4**, 4887 (2014).
- [63] A. Chakraborty y R. Sensarma, Power-law tails and non-Markovian dynamics in open quantum systems: An exact solution from Keldysh field theory, *Phys. Rev. B* **97**, 104306 (2018).
- [64] E. G. D. Torre, S. Diehl, M. D. Lukin, S. Sachdev y P. Strack, Keldysh approach for nonequilibrium phase transitions in quantum optics: Beyond the Dicke model in optical cavities, *Phys. Rev. A* **87**, 023831 (2013).
- [65] M. V. Feigel'man, A. I. Larkin y M. A. Skvortsov, Keldysh action for disordered superconductors, *Phys. Rev. B* **61**, 12361-12388 (2000).
- [66] K. Dunnett y M. H. Szymańska, Keldysh field theory for nonequilibrium condensation in a parametrically pumped polariton system, *Phys. Rev. B* **93**, 195306 (2016).



- [67] D. Zueco y J. García-Ripoll, Ultrastrongly dissipative quantum Rabi model, *Phys. Rev. A* **99**, 013807 (2019).
- [68] G. Lyu, K. Kottmann, M. B. Plenio y M.-J. Hwang, Multicritical dissipative phase transitions in the anisotropic open quantum Rabi model, *Phys. Rev. Res.* **6**, 033075 (2024).
- [69] F. m. c. Damanet, A. J. Daley y J. Keeling, Atom-only descriptions of the driven-dissipative Dicke model, *Phys. Rev. A* **99**, 033845 (2019).
- [70] A. L. Grimsmo y A. S. Parkins, Dissipative Dicke model with nonlinear atom–photon interaction, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **46**, 224012 (2013).
- [71] P. Kirton y J. Keeling, Suppressing and Restoring the Dicke Superradiance Transition by Dephasing and Decay, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 123602 (2017).
- [72] T. D. Farokh Mivehvar Francesco Piazza y H. Ritsch, Cavity QED with quantum gases: new paradigms in many-body physics, *Advances in Physics* **70**, 1-153 (2021).
- [73] B. Zhu, J. Marino, N. Y. Yao, M. D. Lukin y E. A. Demler, Dicke time crystals in driven-dissipative quantum many-body systems, *New Journal of Physics* **21**, 073028 (2019).
- [74] K. Baumann, R. Mottl, F. Brennecke y T. Esslinger, Exploring Symmetry Breaking at the Dicke Quantum Phase Transition, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 140402 (2011).
- [75] K. Baumann, C. Guerlin, F. Brennecke y T. Esslinger, Dicke quantum phase transition with a superfluid gas in an optical cavity, *Nature* **464**, 1301-1306 (2010).
- [76] K. Debnath y A. B. Bhattacharjee, Non-equilibrium Dynamics of an Optomechanical Dicke Model, *Communications in Theoretical Physics* **64**, 39 (2015).
- [77] L. Lamata, Digital-analog quantum simulation of generalized Dicke models with superconducting circuits, *Scientific Reports* **7**, 43768 (2017).
- [78] A Mezzacapo, U Las Heras, J. S. Pedernales, L DiCarlo, E Solano y L Lamata, Digital Quantum Rabi and Dicke Models in Superconducting Circuits, *Scientific Reports* **4**, 7482 (2014).
- [79] C. F. Lo, Spectral collapse in multiqubit two-photon Rabi model, *Scientific Reports* **11**, 5409 (2021).
- [80] A. Frisk Kockum, A. Miranowicz, S. De Liberato, S. Savasta y F. Nori, Ultrastrong coupling between light and matter, *Nature Reviews Physics* **1**, 19–40 (2019).
- [81] J. F. Poyatos, J. I. Cirac y P. Zoller, Quantum Reservoir Engineering with Laser Cooled Trapped Ions, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4728-4731 (1996).
- [82] S Diehl, A Micheli, A Kantian, B Kraus, H. P. Büchler y P Zoller, Quantum states and phases in driven open quantum systems with cold atoms, *Nature Physics* **4**, 878-883 (2008).
- [83] E. K. Twyeffort Irish, Generalized Rotating-Wave Approximation for Arbitrarily Large Coupling, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 173601 (2007).
- [84] V. V. Albert, G. D. Scholes y P. Brumer, Symmetric rotating-wave approximation for the generalized single-mode spin-boson system, *Phys. Rev. A* **84**, 042110 (2011).

- [85] L. Yu, S. Zhu, Q. Liang, G. Chen y S. Jia, Analytical solutions for the Rabi model, *Phys. Rev. A* **86**, 015803 (2012).
- [86] Y.-Y. Zhang y Q.-H. Chen, Generalized rotating-wave approximation for the two-qubit quantum Rabi model, *Phys. Rev. A* **91**, 013814 (2015).
- [87] Y.-Y. Zhang, Generalized squeezing rotating-wave approximation to the isotropic and anisotropic Rabi model in the ultrastrong-coupling regime, *Phys. Rev. A* **94**, 063824 (2016).
- [88] Y.-Y. Zhang y X.-Y. Chen, Analytical solutions by squeezing to the anisotropic Rabi model in the nonperturbative deep-strong-coupling regime, *Phys. Rev. A* **96**, 063821 (2017).
- [89] C. A. González-Gutiérrez, J. Román-Roche y D. Zueco, Distant emitters in ultrastrong waveguide QED: Ground-state properties and non-Markovian dynamics, *Phys. Rev. A* **104**, 053701 (2021).
- [90] J. Peng, J. Zheng, J. Yu, P. Tang, G. A. Barrios, J. Zhong, E. Solano, F. Albarrán-Arriagada y L. Lamata, One-Photon Solutions to the Multiqubit Multimode Quantum Rabi Model for Fast  $W$ -State Generation, *Phys. Rev. Lett.* **127**, 043604 (2021).
- [91] A. Kamenev, *Field theory of non-equilibrium systems* (Cambridge University Press, 2023).
- [92] J. Rammer, *Quantum Field Theory of Non-equilibrium States* (2011).
- [93] C. Wetterich, Exact evolution equation for the effective potential, *Physics Letters B* **301**, 90-94 (1993).
- [94] D. G. Angelakis, M. F. Santos y S. Bose, Photon-blockade-induced Mott transitions and  $XY$  spin models in coupled cavity arrays, *Phys. Rev. A* **76**, 031805 (2007).
- [95] G Lindblad, On the generators of quantum dynamical semigroups, *Communications in Mathematical Physics* **48**, 119-130 (1976).
- [96] U. Weiss, *Quantum dissipative systems* (World Scientific, 2012).
- [97] R. Lundgren, A. V. Gorshkov y M. F. Maghrebi, Nature of the nonequilibrium phase transition in the non-Markovian driven Dicke model, *Phys. Rev. A* **102**, 032218 (2020).
- [98] O. Scarlatella y M. Schiró, *Dissipation-Induced Superradiance in a Non-Markovian Open Dicke Model*, 2016.

## 7. Calendario

## 8. Objetivos

El objetivo general de este proyecto es estudiar esquemas fuera de equilibrio en el modelo de Dicke abierto para explorar nuevas fases cuánticas y aplicaciones en el terreno de la información cuántica.

- Comprender el modelo de Dicke multimodo analizando las transiciones de fase superradiante, considerando el caso de 1 o 2 hasta  $N$  emisores.
- Estudiar el modelo de Dicke multimodo abierto y fuera de equilibrio utilizando el formalismo de Keldysh.
- Analizar como la competencia entre fluctuaciones cuánticas, disipación y bombeo afecta las propiedades del sistema a diferentes escalas de energía.
- Explorar aplicaciones como la posibilidad de cristales de tiempo en el modelo de Dicke multimodo en baños no markovianos, la presencia de memoria a largo plazo y el caso de interacciones entre emisores.

## 9. Metodología y/o Desarrollo del Tema

En este proyecto, se abordará el estudio de sistemas cuánticos abiertos y fuera de equilibrio. Se iniciará con el modelo de Rabi [24], empleando técnicas de diagonalización numéricas [83] y aproximaciones perturbativas, como la transformación del polarón y métodos variacionales [89], para sentar las bases conceptuales. A continuación, se avanzará hacia el modelo de Rabi multimodo [90]. Finalmente, se continuará al modelo de Dicke multimodo, permitiendo el estudio de transiciones de fase disipativas y fenómenos críticos en sistemas abiertos.

Para abordar el estudio de sistemas de interacción luz-materia en sistemas abiertos y fuera de equilibrio, se empleará la teoría de Keldysh. Esta metodología es particularmente adecuada para sistemas cuánticos con interacciones fuertes, donde coexisten dinámicas coherentes y disipativas [91, 92]. A diferencia de los métodos tradicionales basados en ecuaciones maestras, la teoría de Keldysh permite describir tanto la evolución unitaria como los efectos disipativos, facilitando el análisis de estados estacionarios no térmicos y transiciones de fase en sistemas complejos [11]. La formulación de Keldysh extiende la teoría cuántica de campos (*Quantum Field Theory* o QFT) a través de las integrales de camino en el contorno de Keldysh, para calcular funciones de correlación y respuesta en tiempo real, lo que es esencial para comprender la dinámica del sistema y su comportamiento crítico.

Además, se integrará la teoría de renormalización funcional *Functional Renormalization Group* o FRG), basada en la ecuación de Wetterich [93], para analizar la disipación a diferentes escalas de energía, especialmente en regímenes críticos o durante transiciones de fase. La FRG permitirá una descripción completa del sistema desde escalas microscópicas hasta macroscópicas, capturando efectos no perturbativos y estudiando la competencia entre coherencia y disipación [94]. Esta aproximación será fundamental para investigar fenómenos como la relajación hacia estados estacionarios y la formación de nuevas fases no convencionales.

En el estudio de sistemas cuánticos abiertos, la teoría de sistemas cuánticos disipativos proporciona un enfoque para describir la interacción entre un sistema y su entorno. Bajo la aproximación markoviana, donde se asume que la memoria del baño es despreciable, esta interacción puede

modelarse mediante ecuaciones maestras de Lindblad [60, 95], las cuales describen la evolución temporal del sistema de manera efectiva. Este enfoque es esencial para comprender la dinámica de sistemas acoplados a baños markovianos, donde la disipación ocurre de manera instantánea y sin correlaciones temporales significativas [96].

Finalmente, se explorará la aparición de memoria a largo plazo en sistemas de Dicke acoplados a baños no markovianos [44, 73, 97]. A diferencia de los baños markovianos, donde la disipación es instantánea, los baños no markovianos introducen correlaciones temporales que pueden alterar significativamente la dinámica del sistema [98]. Este enfoque permitirá estudiar cómo la memoria a largo plazo influye en la relajación del sistema y en la naturaleza de las transiciones de fase fuera de equilibrio [97].

## 10. Resultados Esperados

Se espera que esta investigación aporte avances en la comprensión del modelo de Dicke multimodo en sistemas abiertos y fuera de equilibrio, enfocándose en fenómenos clave como las transiciones de fase superradiantes, la competencia entre modos y los efectos del desorden o interacciones entre emisores. En este análisis, se caracterizará cómo la disipación y la interacción entre modos influyen en las propiedades críticas y la coherencia cuántica del sistema. Los resultados incluirán la identificación de nuevas fases fuera de equilibrio utilizando el formalismo de Keldysh, y la exploración de aplicaciones, como la formación de cristales de tiempo y la implementación de memorias cuánticas con memoria a largo plazo. Estos avances no solo ampliarán el conocimiento teórico en sistemas cuánticos abiertos, sino que también permitirá la exploración de nuevas aplicaciones en el terreno de las tecnologías cuánticas.

## 11. Cronología

De acuerdo con el plan de estudios del Posgrado en Ciencias (Física):

El cronograma de la estancia está dividido en 12 trimestres. Dentro de cada trimestre, semanalmente, se entregarán avances del proyecto así como la aclaración de dudas y corrección de errores (en el caso que se presente).

Periodo (Trimestral) 2025-2029	Actividades	Gestiones
25-P		
25-O	Solicitud de Examen Predoctoral.	Revisión bibliográfica. Exploración de los métodos propuestos.
26-I	Presentación del Examen Predoctoral.	
26-P	Trabajo de Investigación I.	Comprender el Modelo de Dicke Multimodo.
26-O	Trabajo de Investigación II.	
27-I	Trabajo de Investigación III.	Estudiar el modelo de Dicke Multimodo Abierto y Fuera del Equilibrio.
27-P	Trabajo de Investigación IV.	
27-O	Trabajo de Investigación V.	Analizar la competencia entre fluctuaciones cuánticas, disipación y bombeo en diferentes escalas de tiempo.
28-I	Trabajo de Investigación VI.	
28-P	Trabajo de Investigación VII. Escritura de la Tesis.	Explorar aplicaciones como cristales de tiempo y memorias a largo plazo.
28-O	Trabajo de Investigación VIII. Escritura de la Tesis. Solicitud de Examen de Grado.	
29-I	Trabajo de Investigación IX. Presentación de Examen de Grado.	Entrega de Tesis.

## 12. Bibliografía