



**UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
METROPOLITANA**
Unidad Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Posgrado en Ciencias (Física)

Propuesta de Investigación Doctoral

**Fenómenos fuera de equilibrio en
sistemas multimodo espín-bosón**

Propuesto por: **M. en C. Ricardo Herrera Romero**

Matrícula: **2221801209**

Para sustentar el **Examen Predoctoral**

Asesor: **Dr. Miguel Angel Bastarrachea Magnani**

Coordinador: **Dr. Orlando Guzmán López**

18 de marzo de 2025

Iztapalapa, Ciudad de México

Índice

1. Introducción	2
1.1. Modelos de interacción espín-bosón	2
2. Objetivos	5
3. Metodología	6
4. Resultados Esperados	6
5. Avances	6
6. Bibliografía	6
7. Calendario	6
8. Introducción	7
9. Objetivos	8
10. Metodología y/o Desarrollo del Tema	8
11. Resultados Esperados	9
12. Cronología	10
13. Bibliografía	11

1. Introducción

Prueba 1

En las últimas décadas, los sistemas de interacción luz-materia se han convertido en un área central en la física [1] CITAR. El desarrollo de plataformas experimentales como cavidades y circuitos en electrodinámica cuántica (*Quantum Electrodynamics* o QED) [2, 3], sistemas de átomos fríos [4], trampas ópticas [5] o semiconductores acoplados a microcavidades [6], han permitido explorar el acoplamiento controlado entre excitaciones bosónicas (fotones) y sistemas discretos de dos niveles (qubits o átomos de espín 1/2). Más allá de su interés en óptica cuántica, estas arquitecturas funcionan como simuladores cuánticos de fenómenos colectivos [7].

Este panorama experimental ha cobrado relevancia al considerar estos sistemas abiertos y fuertemente acoplados CITAR. En este nuevo paradigma, la disipación y el bombeo dejan de ser vistos simplemente como fuentes de decoherencia dando lugar a fases estacionarias no térmicas y orden emergente [Sieberer et al., 2016]. El interés se desplaza, por tanto, hacia la competencia entre la coherencia, interacción y disipación. Siendo como objeto de estudio comprender y controlar el comportamiento colectivo en regímenes de acoplamiento intenso [Forn-Díaz et al., 2019; Kirton et al., 2019].

Es en este marco conceptual donde los modelos fundamentales de interacción luz-materia, como los de Rabi y Dicke, adquieren una relevancia crucial [CITAR]. El desafío teórico actual reside en describir regímenes que escapan a las aproximaciones convencionales, en particular aquellos con múltiples qubits y modos bosónicos en entornos abiertos. La propuesta de tesis doctoral se enmarca precisamente en esta dirección, proponiendo un estudio sistemático y progresivo que, partiendo del modelo de Rabi, avance hacia el modelo de Dicke como sistema abierto con bombeo y disipación, con extensiones multiqubit y multifrecuencia bosónica.

1.1. Modelos de interacción espín-bosón

La comprensión de la interacción entre la radiación y un sistema de dos niveles tiene su origen en el modelo de Rabi, formulado para describir el acoplamiento coherente entre un solo átomo y un modo del campo electromagnético [8]. Su Hamiltoniano,

$$\hat{H}_{\text{Rabi}} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad (1.1)$$

describe la energía del campo (frecuencia ω) y del átomo (frecuencia ω_0) mediante los dos primeros términos, g es el acoplamiento entre el campo y el átomo y $(\hat{\sigma}_- \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger)$ siendo el término “rotante” describe procesos que conservan el número total de excitaciones. Por ejemplo, $\hat{\sigma}_+ \hat{a}$ corresponde a la emisión de un fotón \hat{a} mientras el átomo se excita $\hat{\sigma}_+$ y viceversa con el término $\hat{\sigma}_- \hat{a}$. El modelo de Jaynes-Cummings [9], se obtiene bajo la aproximación de onda rotante (RWA) que desprecia los términos $(\hat{\sigma}_- \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger)$. Este

término “contra-rotante” no conserva el número de excitaciones: $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger$ crea simultáneamente una excitación atómica y un fotón, mientras $\hat{\sigma}_- \hat{a}$ aniquila ambas. La RWA es válida en el régimen de acoplamiento débil ($g \ll \omega, \omega_0$). Bajo esta aproximación, el modelo de Jaynes-Cummings permite una solución exacta y estableció las bases de la cavidad QED al describir el intercambio coherente y periódico de una excitación [10-12].

Sin embargo, el progreso experimental ha permitido alcanzar regímenes de acoplamiento ultrastrong ($g/\omega \gtrsim 0.1$) y deep strong ($g/\omega \gtrsim 1$) donde la RWA deja de ser válida [Forn-Díaz et al., 2019; Yoshihara et al., 2017]. En estos regímenes, es necesario recurrir al modelo de Rabi completo, donde los términos de contra-rotación ($\hat{\sigma}_- \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger$) son cruciales y dan lugar a una física enriquecida.

La extensión natural del modelo de Rabi a sistemas con muchos emisores dio origen al modelo de Dicke [13], que describe la interacción colectiva entre un conjunto de N átomos idénticos y un único modo del campo electromagnético en una cavidad.

Esto es lo mío

El interés en este modelo radica en que predice fenómenos críticos como transiciones de fase cuánticas (*Quantum Phase Transition* o QPT), donde el sistema exhibe un cambio abrupto en las propiedades del estado base al variar los parámetros como el acoplamiento luz-materia y transiciones de fase cuántica de estados excitados (*Excited State Quantum Phase Transitions* o ESQPT) [14-18].

Cuando la interacción luz-materia alcanza un valor crítico, el sistema experimenta una transición desde un estado normal, caracterizado por la ausencia de fotones, hacia un estado superradiante. En este régimen, la emisión promedio de fotones es diferente de cero, manifestándose como una emisión coherente y colectiva, fenómeno conocido como superradiancia [19]. El modelo de Dicke ha tenido una gran recepción en el ámbito de la información cuántica [20-22], pues en los últimos años, se ha implementado experimentalmente en diversas plataformas como qubits superconductores [23, 24] y transiciones Raman asistidas por cavidades [25, 26] por mencionar algunos. El Hamiltoniano del modelo de Dicke (espín-bosón) se expresa como:

$$\hat{H}_D = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{j=1}^N \left[\frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z^j + \frac{g}{\sqrt{N}} \hat{\sigma}_x^j (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \right]. \quad (1.2)$$

Los primeros dos términos representan la energía del sistema en ausencia del acoplamiento luz-materia (espín-bosón), ω es la frecuencia de un solo modo electromagnético confinado en la cavidad óptica, $\hat{a}^\dagger(\hat{a})$ es el operador de creación (aniquilación), ω_0 es la frecuencia característica individual de los átomos, $\hat{\sigma}_z^j$ es la matriz de espín de Pauli y representa la diferencia de población entre el estado base y excitado de cada átomo individual. El tercer término incluye la interacción luz-materia donde g es el acoplamiento entre los átomos y los fotones, N es el número de partículas y $\hat{\sigma}_x^j$ es una matriz de Pauli que representa el acoplamiento entre los dos niveles.

Es posible aplicar la aproximación de onda larga [13], la cual consiste en asumir que la longitud de onda del campo electromagnético en la cavidad sea lo suficientemente grande como para que todos los átomos interactúen de la misma manera con él, comportándose

colectivamente. Esta aproximación permite introducir los operadores de pseudospín colectivos $\hat{J}_\mu = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_\mu^i$ (que siguen el álgebra SU(2)), e incorporan el comportamiento colectivo del conjunto de átomos. Bajo esta consideración, el Hamiltoniano de Dicke se expresa de la siguiente forma:

$$\hat{H}_D = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + \frac{2g}{\sqrt{N}} \hat{J}_x (\hat{a}^\dagger + \hat{a}). \quad (1.3)$$

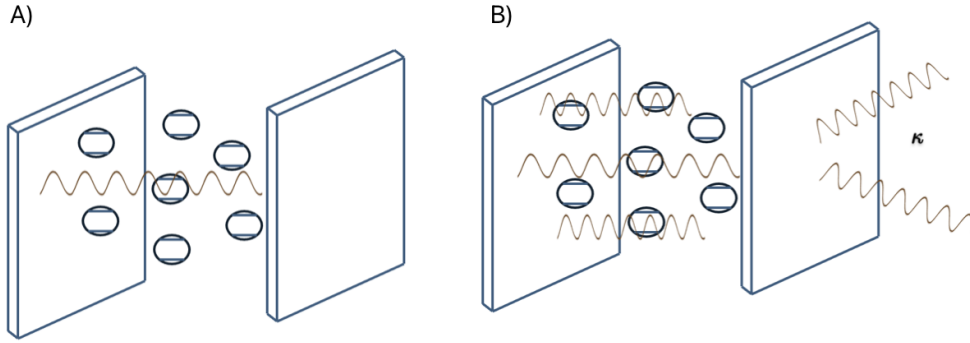


Figura 1: Ilustración del modelo de Dicke. A) Un conjunto de N átomos de dos niveles interactúa con un único modo de radiación electromagnética. B) Un conjunto de N átomos de dos niveles interactúa con múltiples modos de radiación electromagnética, incorporando además efectos de bombeo y disipación κ .

En el estudio del modelo de Dicke, la inclusión de interacciones entre los átomos (emisores) permite explorar nuevos fenómenos críticos y modificaciones en la transición superradiante. En mi trabajo de maestría, investigué un modelo de Dicke anisotrópico que incorpora interacciones colectivas entre los emisores, analizando su diagrama de fases y la aparición de QPT y ESQPT. Utilizando técnicas semiclásicas, caractericé las superficies de energía y las densidades de estados, demostrando cómo estas interacciones pueden inducir nuevas fases y modificar los puntos críticos del sistema [27]. Posteriormente, extendí este análisis, identificando modos de fase y amplitud, lo que proporciona una nueva perspectiva sobre la relación entre anisotropía y criticidad en sistemas luz-materia fuertemente acoplados [28]. El Hamiltoniano de Dicke anisotrópico con interacciones materiales es:

$$\hat{H}_I = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + \frac{\gamma}{\sqrt{N}} \left[\hat{a} \hat{J}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{J}_- + \xi (\hat{a} \hat{J}_- + \hat{a}^\dagger \hat{J}_+) \right] + \frac{1}{N} \sum_{i=x,y,z} \eta_i \hat{J}_i^2. \quad (1.4)$$

Los términos $\hat{a} \hat{J}_+$ y $\hat{a}^\dagger \hat{J}_-$ conservan el número de excitaciones, mientras que $\hat{a} \hat{J}_-$ y $\hat{a}^\dagger \hat{J}_+$ no lo hacen. El parámetro ξ , conocido como término anisotrópico, modula la no conservación del número de excitaciones. Los parámetros η_i representan la intensidad de la interacción colectiva entre los emisores.

El Modelo de Dicke se ha estudiado extensamente considerando un solo modo ω . Sin embargo, en los últimos años, ha surgido un creciente interés en explorar sistemas más complejos, como cavidades multimodo o redes de cavidades ópticas acopladas [29-31],

los cuales ofrecen una descripción más realista de la interacción luz-materia. En estos sistemas, múltiples modos del campo electromagnético interactúan con los átomos de la cavidad. El Hamiltoniano de Dicke multimodo se expresa de la siguiente forma:

$$\hat{H}_{\text{Multimodo}} = \sum_k \left(\omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_{j=1}^N \left[\frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z^j + \sum_k \frac{g_k}{\sqrt{N}} \hat{\sigma}_x^j (\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k) \right] \right). \quad (1.5)$$

Donde ω_k representa la frecuencia de cada modo electromagnético. Esta extensión no solo enriquece el modelo teórico, sino que también permite explorar nuevos fenómenos físicos. Entre ellos destacan la competencia entre modos en las transiciones de fase cuánticas [29], la formación de estructuras análogas a los vidrios de espín [32], la aparición de transiciones de fase no convencionales [33] y la manifestación de desorden en el sistema [34, 35]. Entender estos sistemas también tiene implicaciones prácticas como el diseño de memorias cuánticas [30]. En el 2021, Brendan P. Marsh, et al. [36], realizó un experimento basado en el modelo de Dicke multimodo utilizando condensados de Bose-Einstein y diferentes modos de radiación electromagnética en una cavidad óptica. Esta configuración permite almacenar múltiples patrones de memoria en la red de espines, que pueden ser recuperados mediante la dinámica de relajación del sistema. Este trabajo es relevante hacia la realización de redes neuronales cuánticas que combinen la potencia de la computación clásica con las ventajas de los efectos cuánticos.

Aquí termino

Este impulso experimental ha dirigido el interés hacia extensiones más realistas, como los sistemas multimodo y multiqubit. En el régimen multimodo, emergen fenómenos ricos como la competencia entre modos en transiciones de fase cuánticas [Tolkunov et al., 2007], la formación de fases análogas a vidrios de espín [Rotondo et al., 2015] y la aparición de transiciones de fase no convencionales [Kipf et al., 2014]. Estas propiedades no son solo de interés fundamental; tienen implicaciones prácticas directas, como demostró el experimento de Marsh et al. [Marsh et al., 2021], donde un modelo de Dicke multimodo con un condensado de Bose-Einstein en una cavidad óptica se utilizó para almacenar múltiples patrones, un paso crucial hacia el desarrollo de memorias cuánticas y redes neuronales cuánticas [Fiorelli et al., 2020].

De forma paralela, la exploración de sistemas con múltiples emisores ha llevado al estudio de configuraciones novedosas como los 'átomos gigantes', donde un solo emisor se acopla a un campo en múltiples puntos espaciales, introduciendo efectos no-Markovianos como retardos e interferencias [Kockum et al., 2018]. En conjunto, estas plataformas experimentales están verificando directamente las predicciones de los modelos extendidos de Dicke, haciendo urgente el desarrollo de marcos teóricos que integren de manera coherente la disipación, la multifrecuencia y las interacciones colectivas, objetivo central de esta tesis doctoral.

2. Objetivos

- 3. Metodología**
- 4. Resultados Esperados**
- 5. Avances**
- 6. Bibliografía**
- 7. Calendario**

8. Introducción

Por otro lado, la física de sistemas cuánticos abiertos y fuera de equilibrio ha adquirido gran relevancia en las últimas décadas debido a su capacidad para describir fenómenos en una amplia gama de sistemas, desde átomos fríos y condensados de Bose-Einstein hasta sistemas de materia condensada y óptica cuántica [37]. Mientras que en los sistemas cerrados la evolución temporal está determinada exclusivamente por un Hamiltoniano conservativo, en los sistemas abiertos, la interacción con un entorno externo introduce efectos como la disipación, ruido y fenómenos como la decoherencia y la relajación [38]. Esta conexión con el entorno modifica la dinámica del sistema, llevándolo típicamente a estados estacionarios que ya no pueden describirse como estados cuánticos puros. En lugar de ello, la descripción del sistema requiere el uso de matrices de densidad u operadores de evolución no unitarios, que capturan la dinámica fuera de equilibrio [39]. Además de la disipación, en este marco, también se puede inyectar energía al sistema. El bombeo coherente permite la interacción con el entorno de manera controlada y reversible, manteniendo la coherencia cuántica, mientras que el bombeo incoherente, asociado a procesos aleatorios o térmicos, introduce ruido y disipación sin preservar la coherencia.

El modelo de Dicke abierto y fuera de equilibrio describe la interacción luz-materia incorporando disipación (pérdida de fotones y relajación atómica) y un bombeo externo (emisión de laser). El bombeo y la disipación también da lugar a transiciones de fase de carácter dinámico [22, 40].

El modelo de Dicke abierto se ha realizado experimentalmente y, de hecho, es en este esquema que se observó por primera vez la QPT superradiante. K. Baumann et al., en el 2011 [41], realizó una implementación física del modelo de Dicke abierto, donde un condensado de Bose-Einstein (*Bose-Einstein Condensate* o BEC) se acopla a un modo de cavidad óptica con pérdidas. La cavidad, al ser abierta, permite medir en tiempo real la amplitud y fase del campo intracavidad, revelando la ruptura de simetría durante la transición superradiante. Además, la presencia de un pequeño campo que rompe la simetría, debido a la extensión finita del BEC, influye en la elección entre las dos fases superradiantes posibles. Este sistema no solo exhibió la existencia de transiciones superradiantes, sino que también permite estudiar cómo la velocidad de cruce de la transición y las fluctuaciones cuánticas compiten con los efectos disipativos, ofreciendo una visión directa de la dinámica fuera de equilibrio en sistemas cuánticos abiertos con interacción luz-materia [42].

Siguiendo esta línea, los sistemas optomecánicos han surgido como una plataforma experimental prometedora para explorar la dinámica fuera de equilibrio en el modelo de Dicke [43]. Estos sistemas combinan la interacción entre campos electromagnéticos y osciladores mecánicos, como espejos móviles en cavidades ópticas, lo que permite estudiar efectos como la presión de radiación y el acoplamiento entre modos ópticos y mecánicos. Además, tenemos el caso de los qubits superconductores, que son dispositivos cuánticos basados en circuitos superconductores que aprovechan el fenómeno de la superconductividad. Estos sistemas, se comportan como sistemas de dos niveles, donde los estados cuánticos están definidos por la ocupación de pares de Cooper (pares de electrones que fluyen sin resistencia en un superconductor) [44]. Su diseño permite tener control sobre

parámetros, como las frecuencias de transición y los acoplamientos, lo que los convierte en una plataforma ideal para estudiar modelos como los de Dicke y Rabi [45].

El Hamiltoniano de Rabi es el siguiente:

$$\hat{H}_R = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + g \hat{J}_x (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (8.1)$$

a diferencia de la Ec. 1.3, se tiene en cuenta un solo emisor. Los qubits superconductores-también han demostrado ser herramientas para investigar sistemas cuánticos abiertos [46, 47].

Recientemente, se ha explorado el modelo de Dicke multimodo en regímenes fuera de equilibrio, mostrando comportamientos análogos a los de una memoria asociativa, como la capacidad de reconocer patrones previamente almacenados [30]. Estos avances conectan naturalmente los estudios iniciales con sistemas más complejos, ampliando nuestra comprensión de la dinámica colectiva en sistemas cuánticos abiertos y fuera de equilibrio.

En este proyecto, se pretende estudiar el modelo de Dicke multimodo abierto en esquemas fuera de equilibrio, con lo que se busca profundizar en la comprensión sobre el papel de la disipación, el bombeo y la competencia entre modos sobre las transiciones y coherencias cuánticas, abriendo nuevas perspectivas teóricas y aplicadas en el campo de la óptica cuántica y la información cuántica.

9. Objetivos

El objetivo general de este proyecto es estudiar esquemas fuera de equilibrio en el modelo de Dicke abierto para explorar nuevas fases cuánticas y aplicaciones en el terreno de la información cuántica.

- Comprender el modelo de Dicke multimodo analizando las transiciones de fase superradiante, considerando el caso de 1 o 2 hasta N emisores.
- Estudiar el modelo de Dicke multimodo abierto y fuera de equilibrio utilizando el formalismo de Keldysh.
- Analizar como la competencia entre fluctuaciones cuánticas, disipación y bombeo afecta las propiedades del sistema a diferentes escalas de energía.
- Explorar aplicaciones como la posibilidad de cristales de tiempo en el modelo de Dicke multimodo en baños no markovianos, la presencia de memoria a largo plazo y el caso de interacciones entre emisores.

10. Metodología y/o Desarrollo del Tema

En este proyecto, se abordará el estudio de sistemas cuánticos abiertos y fuera de equilibrio. Se iniciará con el modelo de Rabi [8], empleando técnicas de diagonalización numéricas [48] y aproximaciones perturbativas, como la transformación del polarón y métodos

variacionales [49], para sentar las bases conceptuales. A continuación, se avanzará hacia el modelo de Rabi multimodo [50]. Finalmente, se continuará al modelo de Dicke multimodo, permitiendo el estudio de transiciones de fase disipativas y fenómenos críticos en sistemas abiertos.

Para abordar el estudio de sistemas de interacción luz-materia en sistemas abiertos y fuera de equilibrio, se empleará la teoría de Keldysh. Esta metodología es particularmente adecuada para sistemas cuánticos con interacciones fuertes, donde coexisten dinámicas coherentes y disipativas [51, 52]. A diferencia de los métodos tradicionales basados en ecuaciones maestras, la teoría de Keldysh permite describir tanto la evolución unitaria como los efectos disipativos, facilitando el análisis de estados estacionarios no térmicos y transiciones de fase en sistemas complejos [38]. La formulación de Keldysh extiende la teoría cuántica de campos (*Quantum Field Theory* o QFT) a través de las integrales de camino en el contorno de Keldysh, para calcular funciones de correlación y respuesta en tiempo real, lo que es esencial para comprender la dinámica del sistema y su comportamiento crítico.

Además, se integrará la teoría de renormalización funcional *Functional Renormalization Group* o FRG), basada en la ecuación de Wetterich [53], para analizar la disipación a diferentes escalas de energía, especialmente en regímenes críticos o durante transiciones de fase. La FRG permitirá una descripción completa del sistema desde escalas microscópicas hasta macroscópicas, capturando efectos no perturbativos y estudiando la competencia entre coherencia y disipación [54]. Esta aproximación será fundamental para investigar fenómenos como la relajación hacia estados estacionarios y la formación de nuevas fases no convencionales.

En el estudio de sistemas cuánticos abiertos, la teoría de sistemas cuánticos disipativos proporciona un enfoque para describir la interacción entre un sistema y su entorno. Bajo la aproximación markoviana, donde se asume que la memoria del baño es despreciable, esta interacción puede modelarse mediante ecuaciones maestras de Lindblad [39, 55], las cuales describen la evolución temporal del sistema de manera efectiva. Este enfoque es esencial para comprender la dinámica de sistemas acoplados a baños markovianos, donde la disipación ocurre de manera instantánea y sin correlaciones temporales significativas [56].

Finalmente, se explorará la aparición de memoria a largo plazo en sistemas de Dicke acoplados a baños no markovianos [30, 57, 58]. A diferencia de los baños markovianos, donde la disipación es instantánea, los baños no markovianos introducen correlaciones temporales que pueden alterar significativamente la dinámica del sistema [59]. Este enfoque permitirá estudiar cómo la memoria a largo plazo influye en la relajación del sistema y en la naturaleza de las transiciones de fase fuera de equilibrio [58].

11. Resultados Esperados

Se espera que esta investigación aporte avances en la comprensión del modelo de Dicke multimodo en sistemas abiertos y fuera de equilibrio, enfocándose en fenómenos clave

como las transiciones de fase superradiantes, la competencia entre modos y los efectos del desorden o interacciones entre emisores. En este análisis, se caracterizará cómo la disipación y la interacción entre modos influyen en las propiedades críticas y la coherencia cuántica del sistema. Los resultados incluirán la identificación de nuevas fases fuera de equilibrio utilizando el formalismo de Keldysh, y la exploración de aplicaciones, como la formación de cristales de tiempo y la implementación de memorias cuánticas con memoria a largo plazo. Estos avances no solo ampliarán el conocimiento teórico en sistemas cuánticos abiertos, sino que también permitirá la exploración de nuevas aplicaciones en el terreno de las tecnologías cuánticas.

12. Cronología

De acuerdo con el plan de estudios del Posgrado en Ciencias (Física):

El cronograma de la estancia está dividido en 12 trimestres. Dentro de cada trimestre, semanalmente, se entregarán avances del proyecto así como la aclaración de dudas y corrección de errores (en el caso que se presente).

Periodo (Trimestral) 2025-2029	Actividades	Gestiones
25-P		
25-O	Solicitud de Examen Predoctoral.	Revisión bibliográfica. Exploración de los métodos propuestos.
26-I	Presentación del Examen Predoctoral.	
26-P	Trabajo de Investigación I.	Comprender el Modelo de Dicke Multimodo.
26-O	Trabajo de Investigación II.	
27-I	Trabajo de Investigación III.	Estudiar el modelo de Dicke Multimodo Abierto y Fuera del Equilibrio.
27-P	Trabajo de Investigación IV.	
27-O	Trabajo de Investigación V.	Analizar la competencia entre fluctuaciones cuánticas, disipación y bombeo en diferentes escalas de tiempo.
28-I	Trabajo de Investigación VI.	
28-P	Trabajo de Investigación VII. Escritura de la Tesis.	Explorar aplicaciones como cristales de tiempo y memorias a largo plazo.
28-O	Trabajo de Investigación VIII. Escritura de la Tesis. Solicitud de Examen de Grado.	
29-I	Trabajo de Investigación IX. Presentación de Examen de Grado.	Entrega de Tesis.

13. Bibliografía

- [1] S. Haroche y J.-M. Raimond, *Exploring the quantum: atoms, cavities, and photons* (Oxford university press, 2006).
- [2] A. Blais, A. L. Grimsmo, S. M. Girvin y A. Wallraff, Circuit quantum electrodynamics, *Rev. Mod. Phys.* **93**, 025005 (2021).
- [3] A. A. Clerk, K. W. Lehnert, P Bertet, J. R. Petta e Y Nakamura, Hybrid quantum systems with circuit quantum electrodynamics, *Nature Physics* **16**, 257-267 (2020).
- [4] I. B. Mekhov y H. Ritsch, Quantum optics with ultracold quantum gases: towards the full quantum regime of the light–matter interaction, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **45**, 102001 (2012).
- [5] Y. Yang, Y. Ren, M. Chen, Y. Arita y C. Rosales-Guzmán, Optical trapping with structured light: a review, *Advanced Photonics* **3**, 034001 (2021).
- [6] C. Schneider, M. M. Glazov, T. Korn, S. Höfling y B. Urbaszek, Two-dimensional semiconductors in the regime of strong light-matter coupling, *Nature Communications* **9**, 2695 (2018).
- [7] S. F. Caballero-Benitez, G. Mazzucchi e I. B. Mekhov, Quantum simulators based on the global collective light-matter interaction, *Phys. Rev. A* **93**, 063632 (2016).
- [8] I. I. Rabi, On the Process of Space Quantization, *Phys. Rev.* **49**, 324-328 (1936).
- [9] E. Jaynes y F. Cummings, Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser, *Proceedings of the IEEE* **51**, 89-109 (1963).
- [10] A Wallraff, D. I. Schuster, A Blais, L Frunzio, R. S. Huang, J Majer, S Kumar, S. M. Girvin y R. J. Schoelkopf, Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics, *Nature* **431**, 162-167 (2004).
- [11] R. J. Schoelkopf y S. M. Girvin, Wiring up quantum systems, *Nature* **451**, 664-669 (2008).
- [12] M. H. Devoret y R. J. Schoelkopf, Superconducting Circuits for Quantum Information: An Outlook, *Science* **339**, 1169-1174 (2013).
- [13] R. H. Dicke, Coherence in Spontaneous Radiation Processes, *Phys. Rev.* **93**, 99-110 (1954).
- [14] K. Hepp y E. H. Lieb, On the superradiant phase transition for molecules in a quantized radiation field: the dicke maser model, *Annals of Physics* **76**, 360 -404 (1973).
- [15] Y. K. Wang y F. T. Hioe, Phase Transition in the Dicke Model of Superradiance, *Phys. Rev. A* **7**, 831-836 (1973).
- [16] F. T. Hioe, Phase Transitions in Some Generalized Dicke Models of Superradiance, *Phys. Rev. A* **8**, 1440-1445 (1973).
- [17] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions* (Cambridge University Press, 1999).
- [18] J. Larson y E. K. Irish, Some remarks on ‘superradiant’ phase transitions in light-matter systems, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **50**, 174002 (2017).

-
- [19] M. Gross y S. Haroche, Superradiance: An essay on the theory of collective spontaneous emission, *Physics Reports* **93**, 301-396 (1982).
 - [20] B. M. Garraway, The Dicke model in quantum optics: Dicke model revisited, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **369**, 1137-1155 (2011).
 - [21] P. Kirton, M. M. Roses, J. Keeling y E. G. Dalla Torre, Introduction to the Dicke Model: From Equilibrium to Nonequilibrium, and Vice Versa, *Advanced Quantum Technologies* **2**, 1800043 (2019).
 - [22] A. Le Boité, Theoretical Methods for Ultrastrong Light–Matter Interactions, *Advanced Quantum Technologies* **3**, 1900140 (2020).
 - [23] A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin y R. J. Schoelkopf, Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation, *Phys. Rev. A* **69**, 062320 (2004).
 - [24] J. Casanova, G. Romero, I. Lizuain, J. J. García-Ripoll y E. Solano, Deep Strong Coupling Regime of the Jaynes-Cummings Model, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 263603 (2010).
 - [25] M. P. Baden, K. J. Arnold, A. L. Grimsmo, S. Parkins y M. D. Barrett, Realization of the Dicke Model Using Cavity-Assisted Raman Transitions, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 020408 (2014).
 - [26] D. Nagy, G. Kónya, G. Szirmai y P. Domokos, Dicke-Model Phase Transition in the Quantum Motion of a Bose-Einstein Condensate in an Optical Cavity, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 130401 (2010).
 - [27] R. Herrera Romero, M. A. Bastarrachea-Magnani y R. Linares, Critical Phenomena in Light–Matter Systems with Collective Matter Interactions, *Entropy* **24** (2022).
 - [28] R. Herrera Romero y M. A. Bastarrachea-Magnani, Phase and Amplitude Modes in the Anisotropic Dicke Model with Matter Interactions, *Entropy* **26** (2024).
 - [29] D. Tolkunov y D. Solenov, Quantum phase transition in the multimode Dicke model, *Phys. Rev. B* **75**, 024402 (2007).
 - [30] E. Fiorelli, M. Marcuzzi, P. Rotondo, F. Carollo e I. Lesanovsky, Signatures of Associative Memory Behavior in a Multimode Dicke Model, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 070604 (2020).
 - [31] F. Carollo e I. Lesanovsky, Exactness of Mean-Field Equations for Open Dicke Models with an Application to Pattern Retrieval Dynamics, *Phys. Rev. Lett.* **126**, 230601 (2021).
 - [32] P. Rotondo, E. Tesio y S. Caracciolo, Replica symmetry breaking in cold atoms and spin glasses, *Phys. Rev. B* **91**, 014415 (2015).
 - [33] T. Kipf y G. S. Agarwal, Superradiance and collective gain in multimode optomechanics, *Phys. Rev. A* **90**, 053808 (2014).
 - [34] T. Vojta, Phases and phase transitions in disordered quantum systems, *AIP Conference Proceedings* **1550**, 188-247 (2013).

-
- [35] P. Das, S. Wüster y A. Sharma, Dicke model with disordered spin-boson couplings, *Phys. Rev. A* **109**, 013715 (2024).
 - [36] B. P. Marsh, Y. Guo, R. M. Kroeze, S. Gopalakrishnan, S. Ganguli, J. Keeling y B. L. Lev, Enhancing Associative Memory Recall and Storage Capacity Using Confocal Cavity QED, *Phys. Rev. X* **11**, 021048 (2021).
 - [37] I Rotter y J. P. Bird, A review of progress in the physics of open quantum systems: theory and experiment, *Reports on Progress in Physics* **78**, 114001 (2015).
 - [38] L. M. Sieberer, M Buchhold y S Diehl, Keldysh field theory for driven open quantum systems, *Reports on Progress in Physics* **79**, 096001 (2016).
 - [39] H.-P. Breuer y P. F., *The theory of open quantum systems* (Oxford University Press, 2003).
 - [40] P. Kirton y J. Keeling, Suppressing and Restoring the Dicke Superradiance Transition by Dephasing and Decay, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 123602 (2017).
 - [41] K. Baumann, R. Mottl, F. Brennecke y T. Esslinger, Exploring Symmetry Breaking at the Dicke Quantum Phase Transition, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 140402 (2011).
 - [42] K. Baumann, C. Guerlin, F. Brennecke y T. Esslinger, Dicke quantum phase transition with a superfluid gas in an optical cavity, *Nature* **464**, 1301-1306 (2010).
 - [43] K. Debnath y A. B. Bhattacharjee, Non-equilibrium Dynamics of an Optomechanical Dicke Model, *Communications in Theoretical Physics* **64**, 39 (2015).
 - [44] L. Lamata, Digital-analog quantum simulation of generalized Dicke models with superconducting circuits, *Scientific Reports* **7**, 43768 (2017).
 - [45] A Mezzacapo, U Las Heras, J. S. Pedernales, L DiCarlo, E Solano y L Lamata, Digital Quantum Rabi and Dicke Models in Superconducting Circuits, *Scientific Reports* **4**, 7482 (2014).
 - [46] M.-J. Hwang, P. Rabl y M. B. Plenio, Dissipative phase transition in the open quantum Rabi model, *Phys. Rev. A* **97**, 013825 (2018).
 - [47] C. F. Lo, Spectral collapse in multiqubit two-photon Rabi model, *Scientific Reports* **11**, 5409 (2021).
 - [48] E. K. Twyeffort Irish, Generalized Rotating-Wave Approximation for Arbitrarily Large Coupling, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 173601 (2007).
 - [49] C. A. González-Gutiérrez, J. Román-Roche y D. Zueco, Distant emitters in ultralong waveguide QED: Ground-state properties and non-Markovian dynamics, *Phys. Rev. A* **104**, 053701 (2021).
 - [50] J. Peng, J. Zheng, J. Yu, P. Tang, G. A. Barrios, J. Zhong, E. Solano, F. Albarrán-Arriagada y L. Lamata, One-Photon Solutions to the Multiqubit Multimode Quantum Rabi Model for Fast W -State Generation, *Phys. Rev. Lett.* **127**, 043604 (2021).
 - [51] A. Kamenev, *Field theory of non-equilibrium systems* (Cambridge University Press, 2023).
 - [52] J. Rammer, *Quantum Field Theory of Non-equilibrium States* (2011).

- [53] C. Wetterich, Exact evolution equation for the effective potential, *Physics Letters B* **301**, 90-94 (1993).
- [54] D. G. Angelakis, M. F. Santos y S. Bose, Photon-blockade-induced Mott transitions and XY spin models in coupled cavity arrays, *Phys. Rev. A* **76**, 031805 (2007).
- [55] G Lindblad, On the generators of quantum dynamical semigroups, *Communications in Mathematical Physics* **48**, 119-130 (1976).
- [56] U. Weiss, *Quantum dissipative systems* (World Scientific, 2012).
- [57] B. Zhu, J. Marino, N. Y. Yao, M. D. Lukin y E. A. Demler, Dicke time crystals in driven-dissipative quantum many-body systems, *New Journal of Physics* **21**, 073028 (2019).
- [58] R. Lundgren, A. V. Gorshkov y M. F. Maghrebi, Nature of the nonequilibrium phase transition in the non-Markovian driven Dicke model, *Phys. Rev. A* **102**, 032218 (2020).
- [59] O. Scarlatella y M. Schiró, *Dissipation-Induced Superradiance in a Non-Markovian Open Dicke Model*, 2016.