



---

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Posgrado en Ciencias (Física)

Propuesta de Investigación Doctoral

## **Fenómenos fuera de equilibrio en sistemas multimodo espín-bosón**

Propuesto por: **M. en C. Ricardo Herrera Romero**

Matrícula: **2221801209**

Para sustentar el **Examen Predoctoral**

Asesor: **Dr. Miguel Angel Bastarrachea Magnani**

---

Coordinador: **Dr. Orlando Guzmán López**

---

18 de marzo de 2025

Iztapalapa, Ciudad de México

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Modelos de interacción espín-bosón . . . . .	2
1.2. Sistemas abiertos y dinámica fuera del equilibrio . . . . .	4
1.3. Modelo de Rabi y Dicke abierto . . . . .	5
<b>2. Objetivos</b>	<b>6</b>
2.1. Objetivo general . . . . .	6
<b>3. Metodología</b>	<b>7</b>
3.1. Modelo de Rabi de dos qubits con interacciones materiales . . . . .	7
3.1.1. Diagonalización numérica exacta . . . . .	7
3.1.2. Aproximación adiabática . . . . .	8
3.1.3. Aproximación de la onda rotante generalizada . . . . .	8
3.2. Átomos gigantes en guías de onda de arreglo de cavidades . . . . .	9
3.2.1. Modelo básico y transformada de Fourier . . . . .	9
3.2.2. Función espectral . . . . .	9
3.2.3. Transformada de Laplace . . . . .	10
3.2.4. Extensión a átomos gigantes . . . . .	10
3.3. Conclusión . . . . .	10
<b>4. Resultados esperados</b>	<b>11</b>
<b>5. Avances</b>	<b>11</b>
5.1. Modelo de Rabi de dos qubits con interacciones materiales . . . . .	11
5.1.1. Espectro energético y validación de la GRWA . . . . .	12
5.1.2. Tratamiento variacional del estado fundamental . . . . .	12
5.1.3. Valor medio del número de fotones . . . . .	14
5.2. Reproducción analítica de dinámicas no markovianas en átomos gigantes	15
5.2.1. Caracterización de estados ligados y efectos de localización . . .	15
5.2.2. Extensión a átomos gigantes y emergencia de BICs . . . . .	15
5.3. Perspectivas inmediatas . . . . .	16
<b>6. Bibliografía</b>	<b>16</b>
<b>7. Calendario de actividades</b>	<b>20</b>

# 1. Introducción

En las últimas décadas, los sistemas de interacción spin-bosón se han convertido en un área central en la física [1]. El desarrollo de plataformas experimentales como cavidades y circuitos en electrodinámica cuántica (*Quantum Electrodynamics* o QED) [2], sistemas de átomos fríos [3], trampas ópticas [4] o semiconductores acoplados a microcavidades [5], han permitido explorar el acoplamiento controlado entre excitaciones bosónicas (fotones) y sistemas discretos de dos niveles (qubits o átomos de espín 1/2).

Los sistemas abiertos y fuertemente acoplados, donde la interacción entre spin-bosón es comparable o mayor que las frecuencias propias del sistema— han cobrado relevancia experimental en los últimos años [6]. La disipación y el bombeo pueden estabilizar coherencia colectiva, dando lugar a estados estacionarios fuera del equilibrio. [7, 8]. El interés se centra, por tanto, en la competencia entre coherencia y disipación, lo que permite comprender y controlar el comportamiento colectivo en regímenes de acoplamiento intenso [9].

Es en este marco conceptual donde modelos de spin-bosón como Rabi y Dicke adquieren relevancia, permitiendo analizar la dinámica de bombeo y disipación en estos sistemas [10-13]. La propuesta de tesis doctoral se enmarca en esta dirección, con un enfoque sistemático y progresivo: comprender cómo la coherencia cuántica puede coexistir, competir o incluso emergir a partir de la disipación en sistemas de spin-bosón fuertemente acoplados.

## 1.1. Modelos de interacción espín-bosón

El estudio de la interacción entre la radiación y sistemas de dos niveles (espín–bosón) tiene su origen en el modelo de Rabi, propuesto para describir el acoplamiento coherente entre un átomo y un modo del campo electromagnético [14]. Su Hamiltoniano,

$$\hat{H}_{\text{Rabi}} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z + g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (1.1)$$

describe la energía del campo (frecuencia  $\omega$ ) y del átomo (frecuencia  $\omega_0$ ). El parámetro  $g$  caracteriza el acoplamiento entre ambos, mientras que los términos rotantes ( $\hat{\sigma}_- \hat{a} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger$ ) representan procesos que conservan el número de excitaciones: la emisión o absorción de un fotón acompañada de la desexcitación o excitación atómica. El modelo de Jaynes–Cummings [15] se obtiene aplicando la aproximación de onda rotante (*Rotating Wave Aproximation* o RWA), que descarta los términos contrarrotantes ( $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_- \hat{a}$ ) válidos sólo en el régimen de acoplamiento débil ( $g \ll \omega, \omega_0$ ). Históricamente, esta aproximación permitió una descripción analítica del intercambio coherente de energía entre el átomo y el campo [16]. Sin embargo, los avances experimentales han permitido acceder a los regímenes ultrafuerte (ultrastrong) ( $g/\omega \gtrsim 0.1$ ) y fuerte profundo (deep strong) ( $g/\omega \gtrsim 1$ ), donde la RWA deja de ser válida [17], y esto ha exigido el modelo de Rabi completo.

Un paso natural para extender el modelo a sistemas de muchas partículas (multiqubit) consiste en analizar el caso de dos qubits acoplados colectivamente a un modo del campo, descrito por:

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\omega_{01}}{2} \hat{\sigma}_z^1 + \frac{\omega_{02}}{2} \hat{\sigma}_z^2 + \frac{g}{2} (\hat{\sigma}_x^1 + \hat{\sigma}_x^2) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}). \quad (1.2)$$

Mediante los coeficientes de Clebsch–Gordan, los estados de los dos qubits pueden representarse en la base de espín total  $|J, M\rangle$ , que se descompone en un subespacio simétrico triplete ( $J = 1$ ) y un singlete antisimétrico ( $J = 0$ ). Si las frecuencias atómicas son similares  $\omega_{01} \approx \omega_{02}$ , el sistema es invariante bajo permutación y puede describirse dentro del subespacio simétrico  $J = 1$ . En esta representación, los operadores individuales se reemplazan por operadores colectivos  $\hat{J}_\alpha = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_\alpha^1 + \hat{\sigma}_\alpha^2)$ , obteniendo el Hamiltoniano efectivo:

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + g \hat{J}_x (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) + \eta_x \hat{J}_x^2 + \eta_z \hat{J}_z^2. \quad (1.3)$$

Los términos  $\eta_z \hat{J}_z^2$  y  $\eta_x \hat{J}_x^2$  introducen interacciones efectivas entre los qubits. Estas interacciones pueden interpretarse como energías de sitio y términos de hopping en sistemas de dos pozos [18], o surgir de acoplamientos dipolares en sistemas atómicos y entre qubits superconductores [19, 20].

La generalización a un número arbitrario de átomos lleva al modelo de Dicke [21], que describe la interacción colectiva entre  $N$  átomos idénticos y un modo del campo electromagnético:

$$\hat{H}_D = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z^j + \frac{g}{\sqrt{N}} \hat{\sigma}_x^j (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \right]. \quad (1.4)$$

Bajo la aproximación de onda larga [21], todos los átomos experimentan el mismo campo, y el sistema puede describirse mediante los operadores de pseudospín colectivos  $\hat{J}_\mu = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_\mu^i$ , conduciendo a la forma:

$$\hat{H}_D = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + \frac{2g}{\sqrt{N}} \hat{J}_x (\hat{a}^\dagger + \hat{a}). \quad (1.5)$$

Este modelo predice fenómenos críticos como las transiciones de fase cuánticas (*Quantum Phase Transition* o QPT) y las transiciones de fase cuánticas de estados excitados (*Excited States Quantum phase Transition* o ESQPT) [22, 23]. Cuando el acoplamiento luz-materia supera un valor crítico, el sistema pasa de un estado normal (sin fotones) a un estado superradiante caracterizado por una emisión coherente colectiva [24]. El modelo de

Dicke ha sido implementado experimentalmente en diversas plataformas, como circuitos superconductores [25] y cavidades ópticas con transiciones Raman [26].

La inclusión de interacciones entre los átomos en el modelo de Dicke permite explorar nuevas fases y modificar los puntos críticos del sistema. En mi trabajo de maestría, estudié un modelo de Dicke anisotrópico con interacciones colectivas entre los átomos, analizando su diagrama de fases y la aparición de QPT y ESQPT [27]. Posteriormente identifiqué los modos de excitación colectiva del sistema [28]. El Hamiltoniano correspondiente es:

$$\hat{H}_I = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + \frac{\gamma}{\sqrt{N}} [\hat{a} \hat{J}_+ + \hat{a}^\dagger \hat{J}_- + \xi (\hat{a} \hat{J}_- + \hat{a}^\dagger \hat{J}_+)] + \frac{1}{N} \sum_{i=x,y,z} \eta_i \hat{J}_i^2. \quad (1.6)$$

Los términos rotantes ( $\hat{a} \hat{J}_+$ ,  $\hat{a}^\dagger \hat{J}_-$ ) y contrarrotantes ( $\hat{a} \hat{J}_-$ ,  $\hat{a}^\dagger \hat{J}_+$ ) son modulados por el parámetro anisotrópico  $\xi$ , mientras que los términos  $\eta_i$  cuantifican la interacción entre emisores.

Se han propuesto extensiones multimodo del modelo de Dicke [29], donde múltiples modos del campo electromagnético interactúan con los átomos:

$$\hat{H}_{\text{Multimodo}} = \sum_k \left( \omega_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\omega_0}{2} \hat{\sigma}_z^j + \sum_k \frac{g_k}{\sqrt{N}} \hat{\sigma}_x^j (\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k) \right] \right). \quad (1.7)$$

Estos sistemas presentan fenómenos como competencia entre modos, fases no convencionales y efectos de desorden [30], con implicaciones en el almacenamiento cuántico y redes neuronales cuánticas [31].

De manera paralela, otro modelo físico conocido como “átomos gigantes” ha emergido como una extensión natural de estos modelos. En ellos, un solo átomo se acopla a un campo en múltiples puntos espaciales, generando retardos, interferencias y efectos no markovianos [32]. Su tamaño efectivo, comparable con la longitud de onda del campo, rompe la aproximación dipolar y permite fenómenos como estados ligados dentro y fuera del continuo (*Bounds Inside Continuum* o BIC y *Bounds Outside Continuum* o BOC) [33]. Experimentalmente, estos sistemas se implementan en circuitos superconductores donde qubits tipo transmon se acoplan en múltiples puntos de una guía de onda [34]. Los átomos gigantes constituyen un puente entre los modelos multiqubit y multimodo, donde la estructura espacial y temporal del acoplamiento genera nuevas dinámicas colectivas. Su estudio abre oportunidades para comprender, por ejemplo, efectos de memoria cuántica [35] y acoplamientos no markovianos [33].

## 1.2. Sistemas abiertos y dinámica fuera del equilibrio

La física de sistemas cuánticos abiertos proporciona un marco para describir sistemas reales que interactúan con su entorno, desde átomos fríos y condensados de Bose–Einstein hasta circuitos superconductores [36]. A diferencia de los sistemas cerrados, cuya evolución

es puramente unitaria, los sistemas abiertos presentan disipación, ruido y pérdida de coherencia debido al acoplamiento con grados de libertad externos [7, 37].

En estos sistemas, el intercambio de energía con el entorno puede ser de dos tipos: el bombeo coherente, que permite transferencia controlada de energía preservando coherencia cuántica, y el bombeo incoherente, de origen térmico o aleatorio, que introduce ruido [38]. Esta dualidad permite estudiar cómo coherencia y disipación compiten o cooperan para generar dinámicas estacionarias fuera del equilibrio.

La evolución temporal se describe mediante ecuaciones maestras para el operador densidad. La ecuación de Lindblad incorpora sistemáticamente procesos de disipación y bombeo, llevando a estados estacionarios que no corresponden a estados térmicos, sino a configuraciones mantenidas por flujos continuos de energía [6]. Complementariamente, el formalismo de Keldysh ofrece una formulación de campo fuera del equilibrio que une coherencia y disipación en un marco de acción efectiva en sistemas fuertemente interactuantes [7, 39].

Estas herramientas teóricas han sido cruciales para describir la competencia entre coherencia y pérdida en plataformas experimentales como cavidades ópticas [40], circuitos superconductores [41] y condensados de polariton [42].

### 1.3. Modelo de Rabi y Dicke abierto

Los modelos de Rabi y Dicke permiten estudiar sistemas abiertos con disipación [43, 44]. Por ejemplo, en el modelo de Rabi abierto emerge una transición de fase disipativa de segundo orden, donde la competencia entre acoplamiento ultra-fuerte y disipación conduce a un estado estacionario con incremento significativo de excitaciones [10].

El modelo de Dicke abierto incorpora explícitamente disipación (pérdida de fotones y relajación atómica) y bombeo externo, dando lugar a transiciones de fase dinámicas [19, 20] como oscilaciones coherentes sostenidas [45] y cristales de tiempo [46].

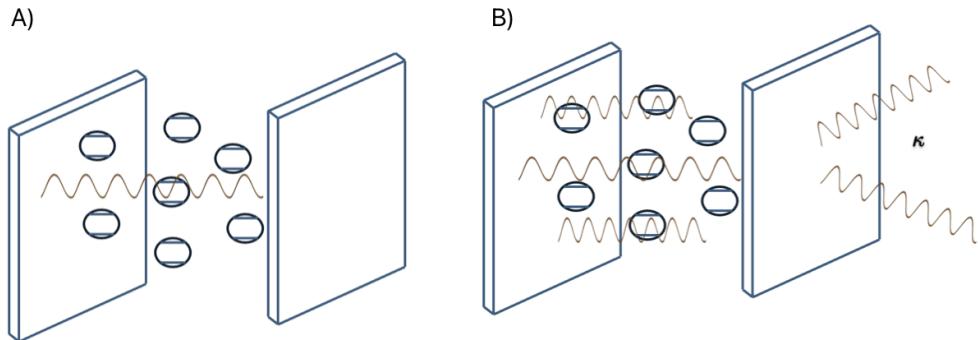


Figura 1: Ilustración del modelo de Dicke. A)  $N$  átomos de dos niveles interactúan con un único modo electromagnético. B)  $N$  átomos interactúan con múltiples modos, incorporando bombeo y disipación  $\kappa$ .

La primera observación experimental de la transición superradiante fue realizada por Baumann et al. [47] acoplando un condensado de Bose–Einstein (BEC) a una cavidad óptica abierta. Este experimento reveló la ruptura espontánea de simetría durante la transición, mostrando cómo las fluctuaciones cuánticas y efectos disipativos compiten en regímenes fuera del equilibrio. Experimentos posteriores con BEC en cavidades ópticas demostraron que la transición superradiante puede mantenerse en régimen no térmico [13], mientras que en circuitos QED se observaron dinámicas colectivas estacionarias inducidas por disipación [48]. Estos resultados establecieron la disipación como elemento activo para generar y estabilizar orden cuántico colectivo.

Recientemente, el modelo de Dicke multimodo en regímenes fuera de equilibrio ha mostrado comportamientos análogos a memorias asociativas, con capacidad de reconocer patrones almacenados [35]. Estas configuraciones consolidan el *reservoir engineering* como técnica para diseñar entornos que protegen o inducen coherencia, estabilizando estados coherentes y entrelazados [49].

## 2. Objetivos

### 2.1. Objetivo general

El objetivo central de esta investigación doctoral es establecer un marco teórico para comprender la dinámica colectiva en sistemas cuánticos abiertos con interacción luz–materia en regímenes de acoplamiento ultrafuerte, multimodo y multiqubit. Buscamos describir cómo la competencia entre coherencia, disipación y bombeo externo genera nuevas fenómenos fuera del equilibrio.

Este objetivo se aborda progresivamente, comenzando con el modelo de Rabi de dos qubits, pasando por átomos gigantes hasta el modelo de Dicke abierto y multimodo.

- Calcular el espectro energético del modelo de Rabi con uno y dos qubits con interacciones materiales, mediante diagonalización exacta y aproximaciones analíticas (adiabática y GRWA), evaluando cómo los parámetros  $\eta_x$  y  $\eta_z$  modifican los niveles y las correlaciones luz–materia.
- Caracterizar la dinámica no markoviana en configuraciones de átomos gigantes acoplados a guías de onda, determinando los retardos temporales y la formación de estados ligados fotónicos mediante la transformada de Laplace.
- Formular el modelo de Rabi abierto dentro del marco de la ecuación maestra de Lindblad, identificando regímenes estacionarios y condiciones para la aparición de transiciones disipativas.
- Extender los análisis anteriores al modelo de Dicke multiqubit, investigando cómo las interacciones entre emisores alteran la transición superradiante fuera y dentro del equilibrio.
- Desarrollar el formalismo de Keldysh para el modelo de Dicke multimodo, analizando la competencia entre múltiples modos bosónicos, el bombeo incoherente y la

dissipación.

- Integrar el enfoque de renormalización funcional (FRG) para explorar la escala energética de la dissipación y la emergencia de fases cuánticas fuera del equilibrio.

### 3. Metodología

En esta sección se presentan las herramientas teóricas para abordar los primeros objetivos de esta propuesta doctoral. El planteamiento se estructura en dos partes: el estudio del modelo de Rabi extendido a dos qubits con interacciones materiales, como primer acercamiento a sistemas multiqubit; y el análisis de átomos gigantes en guías de onda estructuradas, que permiten explorar fenómenos multimodales bosónicos y efectos no markovianos.

#### 3.1. Modelo de Rabi de dos qubits con interacciones materiales

Se analiza cómo la incorporación de un segundo qubit y la presencia de interacciones materiales modifican el espectro energético. Con este propósito, se implementan tres aproximaciones que nos permiten realizar futuras extensiones hacia sistemas con un mayor número de qubits.

##### 3.1.1. Diagonalización numérica exacta

Como referencia, empleamos la diagonalización numérica exacta del Hamiltoniano (1.3), que proporciona resultados numéricamente exactos para validar nuestras aproximaciones analíticas.

La elección del subespacio simétrico ( $j = 1$ ) constituye una simplificación física. Se justifica por la invariancia del Hamiltoniano bajo permutación de qubits idénticos ( $\omega_{01} \approx \omega_{02}$ ), que confina la dinámica al sector triplete donde los operadores colectivos  $\hat{J}_\alpha = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_\alpha^1 + \hat{\sigma}_\alpha^2)$  capturan completamente el comportamiento del sistema. Físicamente, esto significa que los qubits son indistinguibles y se comportan como una entidad colectiva. El singlete antisimétrico ( $j = 0$ ) permanece desacoplado tanto del campo como de las interacciones materiales, haciendo que no participen en la dinámica principal.

En la base producto  $|\Psi\rangle = |n\rangle \otimes |j, m\rangle$  con  $j = 1$  y  $m = -1, 0, 1$ , los elementos de matriz adquieren la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}
 \langle n', m' | \hat{H} | n, m \rangle = & \omega n \delta_{n', n} + (\omega_0 + \eta_z m) m \delta_{m', m} + \frac{g}{2} \left( \sqrt{n+1} \delta_{n', n+1} + \sqrt{n} \delta_{n', n-1} \right) \\
 & \times \left( \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \delta_{m', m+1} + \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \delta_{m', m-1} \right) \\
 & + \frac{\eta_x}{4} \left( \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \sqrt{j(j+1) - (m+1)(m+2)} \delta_{m', m+2} \right. \\
 & \quad \left. + 2 \left( j(j+1) - m^2 \right) \delta_{m', m} \right. \\
 & \quad \left. + \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \sqrt{j(j+1) - (m-1)(m-2)} \delta_{m', m-2} \right) \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

### 3.1.2. Aproximación adiabática

Como primera aproximación analítica, consideramos el límite adiabático ( $\omega_0 \rightarrow 0$ ), donde el oscilador se ajusta instantáneamente a la configuración de los qubits [50]. Esta aproximación corresponde físicamente al régimen donde la frecuencia del oscilador domina sobre el desacople de los qubits.

La transformación  $\hat{U} = \exp [\beta(\hat{a}^\dagger - \hat{a})]$  genera estados de Fock desplazados que describen el reacomodo del campo para cada configuración de qubits. Físicamente, podemos visualizar esto como si el campo electromagnético se “adaptara” instantáneamente a la orientación de los espines, creando pozos de potencial efectivos que dependen del estado de los qubits.

Esta aproximación conserva únicamente acoplamientos entre estados con el mismo número de excitaciones, resultando en un Hamiltoniano efectivo con estructura de bloques diagonales. Si bien proporciona una imagen física intuitiva y captura correctamente el estado base, su limitación principal reside en ignorar completamente los efectos de tunelado cuántico ( $\omega_0 \neq 0$ ), lo que lleva a discrepancias significativas en el espectro de excitaciones.

### 3.1.3. Aproximación de la onda rotante generalizada

La Aproximación Generalizada de Onda Rotante (*Generalized Rotating Wave Approximation* o GRWA) [51-56] extiende el enfoque adiabático reintroduciendo consistentemente el tunelado cuántico mediante una transformación polarónica:

$$\hat{U} = \exp [\beta \hat{J}_x (\hat{a}^\dagger - \hat{a})], \tag{3.2}$$

con  $\beta = g/\omega$ . Físicamente, esta transformación representa un desplazamiento colectivo del campo electromagnético que incorpora de manera autoconsistente la retroalimentación entre los qubits y el oscilador.

La GRWA preserva la estructura de bloques manejable de la aproximación adiabática mientras incluye correcciones esenciales que permiten describir transiciones entre diferentes números de excitaciones. Matemáticamente, esto se logra mediante la resolución de un problema de valores propios en cada bloque del Hamiltoniano transformado, donde ahora se retienen acoplamientos que la aproximación adiabática descartaba. Esta metodología progresiva —desde la aproximación

adiabática hasta la GRWA, validadas sistemáticamente contra resultados numéricos exactos— establece las bases conceptuales y técnicas para extender nuestro análisis a sistemas multiqubit más complejos.

## 3.2. Átomos gigantes en guías de onda de arreglo de cavidades

El estudio de átomos gigantes representa la segunda paso de nuestra metodología [33], extendiendo nuestro análisis hacia sistemas donde la estructura espacial extendida del emisor introduce fenómenos no markovianos y efectos de interferencia, además ofrece una plataforma para explorar interacciones luz-materia en regímenes multimodales.

### 3.2.1. Modelo básico y transformada de Fourier

El punto de partida es un emisor de dos niveles acoplado a un arreglo unidimensional de cavidades, descrito por el Hamiltoniano:

$$H = \delta\sigma^+\sigma^- + \omega_0 \sum_n a_n^\dagger a_n + \xi \sum_n (a_{n+1}^\dagger a_n + a_n^\dagger a_{n+1}) + g_0 (\sigma^+ a_0 + \sigma^- a_0^\dagger).$$

La estrategia de solución aprovecha la invariancia translacional del sistema mediante la transformación de Fourier discreta  $a_k = N^{-1/2} \sum_n e^{ikn} a_n$ . Esta transformación diagonaliza la guía de onda, revelando la relación de dispersión  $\omega_k = 2\xi \cos k$  que describe cómo se propagan los fotones a través del arreglo. Físicamente, este cambio de perspectiva de cavidades localizadas a modos extendidos nos permite pensar en fotones saltando entre cavidades vecinas, trabajamos con modos colectivos que se propagan como ondas a lo largo de la guía. Esta representación nos permite describir procesos de emisión espontánea, donde un átomo excitado emite radiación que se propaga lejos del punto de emisión.

### 3.2.2. Función espectral

La función espectral  $J(\omega) = \frac{2g_0^2}{\sqrt{4\xi^2 - \omega^2}}$  emerge como una cantidad central que conecta la estructura de la guía de onda con la dinámica del emisor. Esta función captura cómo los diferentes modos de frecuencia  $\omega$  contribuyen al acoplamiento efectivo con el emisor.

El comportamiento de  $J(\omega)$  muestra lo siguiente: cerca del centro de la banda ( $\omega \approx 0$ ), la función es aproximadamente constante, recuperando la dinámica markoviana tradicional con decadencia exponencial [57]. Sin embargo, cerca de los bordes de banda ( $\omega \approx \pm 2\xi$ ), las singularidades de van Hove indican el colapso de la aproximación markoviana y el surgimiento de dinámica altamente no markoviana. Esto genera un ralentizamiento crítico de la velocidad de grupo de los fotones, mostrando una acumulación de densidad de estados que modifica cualitativamente la dinámica de emisión.

### 3.2.3. Transformada de Laplace

Para ir más allá de la aproximación de Weisskopf-Wigner, empleamos la transformada de Laplace, que permite descomponer analíticamente la solución temporal en contribuciones físicamente transparentes:

$$\alpha(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\omega_{\max}}^{-\omega_{\min}} \frac{dy}{2\pi} \frac{J(-y)e^{iyt}}{[y + \Delta - iG(-\epsilon + iy)][y + \Delta - iG(\epsilon + iy)]} + \sum_j r_j e^{-iy_j t}.$$

El primer término (integral sobre el corte de rama) representa la contribución de estados de scattering dentro del continuo, que eventualmente decaen a cero. El segundo término (suma sobre residuos) corresponde a estados ligados fuera del continuo (BOC) que persisten indefinidamente en el estado estacionario.

Físicamente, esta estructura explica por qué parte de la excitación inicial queda atrapada localmente alrededor del emisor, formando un estado ligado fotónico cuya función de onda decae exponencialmente con la distancia. La localización espacial de estos estados puede caracterizarse cuantitativamente mediante la longitud de localización  $\lambda_{\pm} = \cosh^{-1}(|y_{\pm}|/2\xi)$ .

### 3.2.4. Extensión a átomos gigantes

Por último consideramos la extensión a átomos gigantes [33], donde un mismo emisor se acopla al campo en  $N_c$  posiciones espacialmente separadas. El acoplamiento efectivo se modifica a:

$$\tilde{g}_k = \frac{g_0}{N_c \sqrt{N}} \frac{\sin(kdN_c/2)}{\sin(kd/2)},$$

donde  $d$  es la separación entre puntos de acoplamiento.

Esta dependencia espacial modifica fundamentalmente la función espectral efectiva  $J_{\text{eff}}(\omega) = J(\omega)\mathcal{G}(\omega)$ , que ahora presenta ceros en frecuencias específicas  $\omega_m = 2\xi \cos(\pi(2m+1)/d)$ . En estas frecuencias, emergen estados ligados dentro del continuo (BIC) —estados que, contraintuitivamente, están en el continuo pero no decaen.

El origen físico de los BIC reside en interferencia destructiva: las diferentes rutas que puede tomar un fotón emitido desde los distintos puntos de acoplamiento interfieren destructivamente, impidiendo que la radiación se escape al infinito. Estos estados confinan fotones en la región entre los puntos de acoplamiento, transformando efectivamente al átomo gigante en una cavidad óptica.

## 3.3. Conclusión

La metodología desarrollada establece un marco progresivo para los primeros problemas de esta investigación doctoral. El estudio del modelo de Rabi de dos qubits con interacciones materiales provee las herramientas para comprender efectos colectivos en sistemas multiqubit, mientras que el análisis de átomos gigantes en guías de onda estructuradas permite explorar fenómenos no markovianos y multimodales.

## 4. Resultados esperados

### a) Modelo de Rabi de dos qubits con interacciones materiales

Se espera determinar cuantitativamente cómo las interacciones  $\eta_x$  y  $\eta_z$  modifican el espectro energético, el entrelazamiento y el número medio de fotones. El contraste entre los resultados numéricos exactos y las aproximaciones GRWA permitirá evaluar su rango de validez en regímenes ultrastrong y deep-strong [58, 59].

### b) Átomos gigantes y dinámica no markoviana

Se prevé demostrar la formación de estados ligados fotónicos dentro y fuera del continuo, y caracterizar su longitud de localización en regímenes de acoplamiento fuerte y ultrafuerte. Este análisis permitirá identificar condiciones experimentales para el confinamiento de luz en configuraciones extendidas de emisores [33].

### c) Modelos abiertos fuera del equilibrio

Mediante la ecuación maestra de Lindblad se buscará identificar transiciones disipativas y regímenes estacionarios no térmicos. El formalismo de Keldysh permitirá describir de manera unificada los procesos coherentes y disipativos en tiempo real [60].

### d) Extensión multimodo y renormalización funcional

La incorporación del FRG [61] permitirá seguir la evolución del sistema desde escalas microscópicas hasta el comportamiento macroscópico emergente, revelando la influencia de la disipación en la aparición de nuevas fases cuánticas fuera del equilibrio [62].

Los resultados aportarán una comprensión integral de los fenómenos fuera del equilibrio en sistemas multimodo espín–bosón, ofreciendo perspectivas aplicadas en el control de la coherencia y el diseño de arquitecturas cuánticas híbridas.

## 5. Avances

### 5.1. Modelo de Rabi de dos qubits con interacciones materiales

Mostramos algunos resultados del espectro de energías del modelo de Rabi de dos qubits con interacciones materiales utilizando la aproximación adiabática y la GRWA.

### 5.1.1. Espectro energético y validación de la GRWA

La validación sistemática de nuestras aproximaciones mediante diagonalización numérica exacta ( $n_{\max} = 30$ ) revela que la Aproximación Generalizada de Onda Rotante (GRWA) aproxima el espectro del sistema. Como muestra la Figura 2, la GRWA captura no solo la estructura general de niveles sino también detalles como curvaturas y cruces de niveles que emergen en el régimen de acoplamiento fuerte ( $g/\omega \gtrsim 0.5$ ).

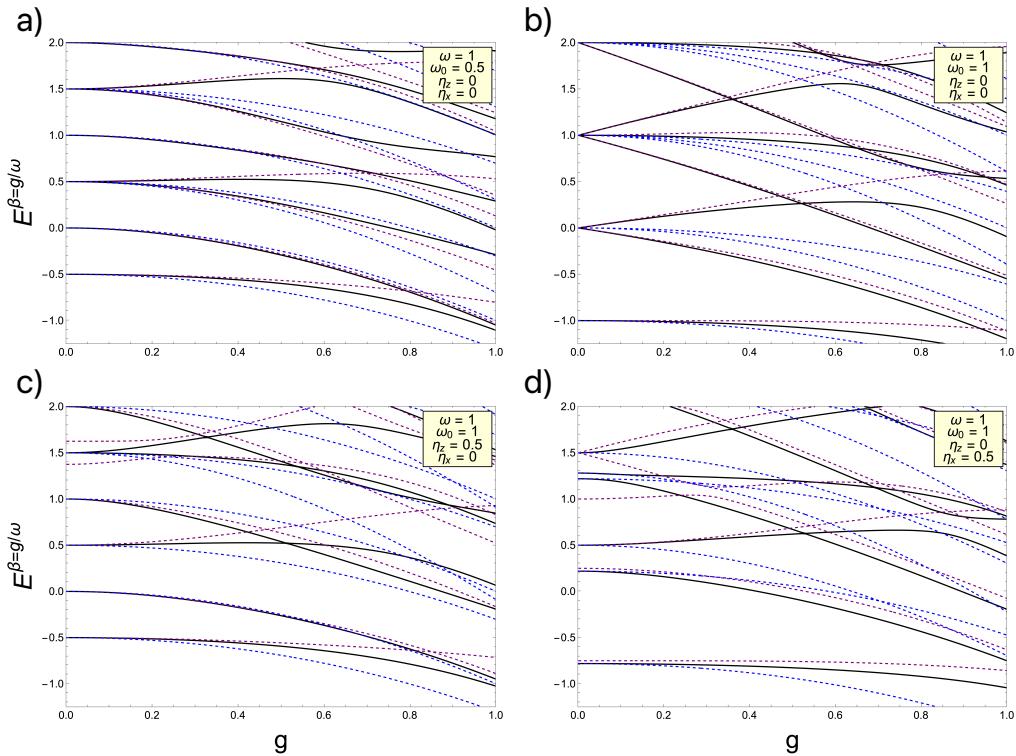


Figura 2: Espectro energético del modelo de Rabi de dos qubits. Las líneas negras sólidas representan la diagonalización numérica exacta. (a) Caso no resonante  $\omega_0 = \omega/2$ ; (b) Caso resonante  $\omega = \omega_0$ ; (c) Resonante con  $\eta_z = 0.5$ ; (d) Resonante con  $\eta_x = 0.5$ . La GRWA (línea púrpura discontinua) muestra excelente acuerdo con los resultados exactos incluso en presencia de interacciones materiales.

La robustez de la aproximación se mantiene al incorporar interacciones materiales  $\eta_x$  y  $\eta_z$ , demostrando su versatilidad para describir sistemas donde los acoplamientos qubit-qubit modifican sustancialmente la dinámica luz-materia.

### 5.1.2. Tratamiento variacional del estado fundamental

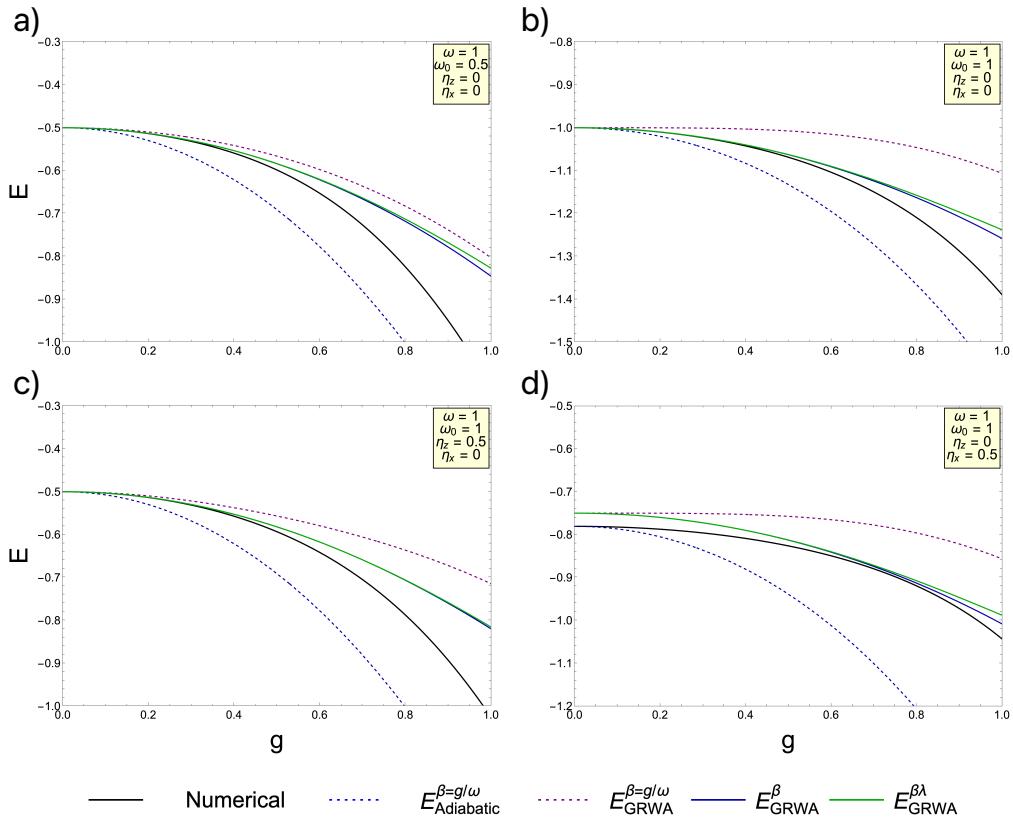
Desarrollamos un enfoque variacional para optimizar la descripción del estado base. Partiendo de la transformación polarónica  $\hat{U} = \exp [\beta \hat{J}_x (\hat{a}^\dagger - \hat{a})]$  y usando GRWA obtenemos la energía del estado fundamental:

$$E_{\text{GRWA,GS}}^{\beta} = -\omega_0 e^{-\frac{\beta^2}{2}} + \frac{1}{2} \left[ (\omega\beta - 2g)\beta + \eta_x + \frac{\eta_z}{2} (e^{-2\beta^2} + 3) \right], \quad (5.1)$$

donde el parámetro  $\beta$  se determina variacionalmente mediante:

$$\beta = \frac{g}{\omega + \omega_0 e^{-\frac{\beta^2}{2}} - \eta_z e^{-2\beta^2}}. \quad (5.2)$$

Como evidencia la Figura 3, este tratamiento variacional (línea azul sólida) mejora sustancialmente la precisión respecto a la elección convencional  $\beta = g/\omega$  (línea púrpura discontinua).



**Figura 3:** Energía del estado fundamental. El tratamiento variacional con  $\beta$  (azul sólido) y  $\beta + \lambda$  (verde sólido) muestra mejora sistemática sobre aproximaciones convencionales en todos los regímenes de acoplamiento.

Para capturar correlaciones cuánticas adicionales, implementamos una transformación de squeezing  $\hat{V} = \exp \left[ \lambda \left( \hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2} \right) \right]$  que conduce a la expresión:

$$E_{\text{GRWA,GS}}^{\beta,\lambda} = \omega \sinh^2(2\lambda) - \omega_0 e^{-\frac{\beta^2}{2} e^{-4\lambda}} + \frac{1}{2} \left[ (\omega\beta - 2g)\beta + \eta_x + \frac{\eta_z}{2} (e^{-2\beta^2 e^{-4\lambda}} + 3) \right]. \quad (5.3)$$

La optimización simultánea de ambos parámetros ( $\partial E/\partial\beta = 0$ ,  $\partial E/\partial\lambda = 0$ ) proporciona la descripción más precisa del estado base. En el límite de acoplamiento débil, los parámetros admiten formas analíticas compactas:

$$\beta_0 \simeq \frac{g}{\omega + \omega_0 - \eta_z}, \quad \lambda_0 \simeq \frac{\omega_0 - \eta_z}{2\omega} \left( \frac{g}{\omega + \omega_0 - \eta_z} \right)^2, \quad (5.4)$$

revelando cómo las interacciones materiales modulan la compresión del campo.

### 5.1.3. Valor medio del número de fotones

El cálculo del número medio de fotones  $\langle n \rangle = \langle a^\dagger a \rangle$  cuantifica el dressing del vacío inducido por el acoplamiento fuerte. Como muestra la Figura 4, la GRWA aproxima el crecimiento de  $\langle n \rangle$  con  $g$ , capturando tanto la tendencia cualitativa como las modificaciones introducidas por las interacciones materiales.

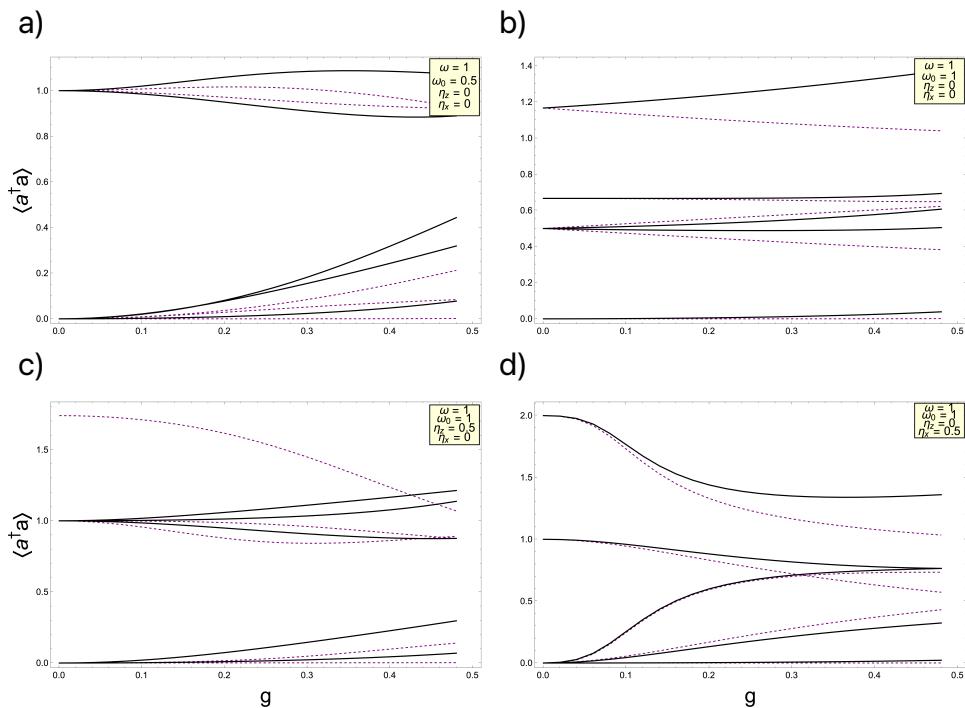


Figura 4: Número medio de fotones en el estado fundamental. La GRWA captura el dressing fotónico inducido por el acoplamiento fuerte y la influencia diferenciada de las interacciones materiales.

Observamos que  $\eta_z$  acopla directamente con  $\hat{J}_z$  y modifica significativamente el desplazamiento del oscilador,  $\eta_x$  (asociado a procesos spin-flip) influye principalmente en la estructura del entrelazamiento y el espectro de excitaciones, sin afectar prominentemente el desplazamiento medio del campo. Esta distinción física emerge naturalmente de nuestro tratamiento variacional y constituye una pista valiosa para el diseño de sistemas cuánticos con acoplamientos controlados.

## 5.2. Reproducción analítica de dinámicas no markovianas en átomos gigantes

He realizado una revisión y reproducción analítica de los métodos desarrollados en el artículo “Non-Markovian dynamics of giant emitters beyond the Weisskopf-Wigner approximation” [33], lo que me ha permitido dominar herramientas teóricas para el estudio de sistemas cuánticos abiertos con estructura espacial extendida.

He implementado sistemáticamente el formalismo exacto basado en la transformada de Laplace para resolver la dinámica de emisores cuánticos acoplados a guías de onda estructuradas. Logré reproducir la solución exacta para la amplitud de probabilidad del estado excitado:

$$\alpha(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\omega_{\max}}^{-\omega_{\min}} \frac{dy}{2\pi} \frac{J(-y)e^{iyt}}{[y + \Delta - iG(-\epsilon + iy)][y + \Delta - iG(\epsilon + iy)]} + \sum_{j=\pm} r_j e^{-iy_j t}.$$

Esta descomposición revela físicamente la coexistencia de dos tipos de estados: estados de scattering dentro del continuo que eventualmente decaen, y estados ligados fuera del continuo (BOC) que persisten indefinidamente. La validación de este formalismo me ha permitido comprender en profundidad cómo las singularidades de van Hove en la función espectral  $J(\omega) = \frac{2g_0^2}{\sqrt{4\xi^2 - \omega^2}}$  modifican cualitativamente la dinámica de emisión espontánea.

### 5.2.1. Caracterización de estados ligados y efectos de localización

He reproducido como es la formación de estados ligados fotónicos localizados exponencialmente alrededor del emisor, con longitud de localización  $\lambda_{\pm} = \cosh^{-1}(|y_{\pm}|/2\xi)$ . Estos estados emergen cuando la frecuencia del emisor se sitúa cerca de los bordes de la banda fotónica, donde la aproximación markoviana deja de ser válida.

La reproducción del perfil espacial del campo radiante en el estado estacionario:

$$\langle a_n^\dagger a_n \rangle_{\pm} = \frac{g_0^2 r_{\pm}^2}{y_{\pm}^2 - 4\xi^2} e^{-2\kappa_{\pm}|n|},$$

confirma cómo la excitación queda atrapada en la vecindad del emisor, un fenómeno fundamental para el confinamiento cuántico de luz.

### 5.2.2. Extensión a átomos gigantes y emergencia de BICs

He extendido exitosamente el formalismo al caso de átomos gigantes, donde el emisor se acopla en múltiples puntos espacialmente separados. Para el caso mínimo de  $N_c = 2$  puntos de acoplamiento, reproduce la modificación del acoplamiento efectivo:

$$\tilde{g}_k = \frac{g_0}{N_c \sqrt{N}} \frac{\sin(kdN_c/2)}{\sin(kd/2)},$$

que conduce a la función espectral efectiva  $J_{\text{eff}}(\omega) = J(\omega)\mathcal{G}(\omega)$ . Verifiqué la emergencia de estados ligados dentro del continuo (BIC) en frecuencias específicas  $\omega_m = 2\xi \cos(\pi(2m+1)/d)$ , donde la interferencia destructiva suprime completamente la emisión al continuo.

El dominio de estas herramientas me permite abordar el estudio de fenómenos colectivos en sistemas espín-bosón multimodo con acoplamiento fuerte. La comprensión de efectos no markovianos, estados ligados e interferencia en átomos gigantes constituye la base para extender estos conceptos a sistemas multiqubit y configuraciones de Dicke multimodo.

### 5.3. Perspectivas inmediatas

Los resultados obtenidos hasta el momento validan las aproximaciones analíticas y el manejo de las herramientas teóricas requeridas. Las siguientes etapas contemplan la extensión del análisis a configuraciones multiqubit y multimodo en sistemas abiertos.

## 6. Bibliografía

- [1] S. Haroche y J.-M. Raimond, *Exploring the quantum: atoms, cavities, and photons* (Oxford university press, 2006).
- [2] A. A. Clerk, K. W. Lehnert, P. Bertet, J. R. Petta e Y Nakamura, Hybrid quantum systems with circuit quantum electrodynamics, *Nature Physics* **16**, 257-267 (2020).
- [3] I. B. Mekhov y H. Ritsch, Quantum optics with ultracold quantum gases: towards the full quantum regime of the light–matter interaction, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **45**, 102001 (2012).
- [4] Y. Yang, Y. Ren, M. Chen, Y. Arita y C. Rosales-Guzmán, Optical trapping with structured light: a review, *Advanced Photonics* **3**, 034001 (2021).
- [5] C. Schneider, M. M. Glazov, T. Korn, S. Höfling y B. Urbaszek, Two-dimensional semiconductors in the regime of strong light-matter coupling, *Nature Communications* **9**, 2695 (2018).
- [6] R. Fazio, J. Keeling, L. Mazza y M. Schirò, Many-body open quantum systems, *SciPost Phys. Lect. Notes*, 99 (2025).
- [7] L. M. Sieberer, M. Buchhold y S. Diehl, Keldysh field theory for driven open quantum systems, *Reports on Progress in Physics* **79**, 096001 (2016).
- [8] C.-M. Halati, A. Sheikhan, H. Ritsch y C. Kollath, Numerically Exact Treatment of Many-Body Self-Organization in a Cavity, *Phys. Rev. Lett.* **125**, 093604 (2020).
- [9] P. Kirton y J. Keeling, Superradiant and lasing states in driven-dissipative Dicke models, *New Journal of Physics* **20**, 015009 (2018).
- [10] M.-J. Hwang, P. Rabl y M. B. Plenio, Dissipative phase transition in the open quantum Rabi model, *Phys. Rev. A* **97**, 013825 (2018).
- [11] G. Di Bello, Dynamics of open quantum systems: From the Rabi model to coupled qubits, *Nuovo Cim. C* **47**, 255 (2024).

- [12] D. Nagy, G. Kónya, G. Szirmai y P. Domokos, Dicke-Model Phase Transition in the Quantum Motion of a Bose-Einstein Condensate in an Optical Cavity, Phys. Rev. Lett. **104**, 130401 (2010).
- [13] J. Klinder, H. Keßler, M. Wolke, L. Mathey y A. Hemmerich, Dynamical phase transition in the open Dicke model, Proceedings of the National Academy of Sciences **112**, 3290-3295 (2015).
- [14] I. I. Rabi, On the Process of Space Quantization, Phys. Rev. **49**, 324-328 (1936).
- [15] E. Jaynes y F. Cummings, Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser, Proceedings of the IEEE **51**, 89-109 (1963).
- [16] A Wallraff, D. I. Schuster, A Blais, L Frunzio, R. S. Huang, J Majer, S Kumar, S. M. Girvin y R. J. Schoelkopf, Strong coupling of a single photon to a superconducting qubit using circuit quantum electrodynamics, Nature **431**, 162-167 (2004).
- [17] P. Forn-Díaz, L. Lamata, E. Rico, J. Kono y E. Solano, Ultrastrong coupling regimes of light-matter interaction, Rev. Mod. Phys. **91**, 025005 (2019).
- [18] B. M. Garraway, The Dicke model in quantum optics: Dicke model revisited, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **369**, 1137-1155 (2011).
- [19] A. Le Boité, Theoretical Methods for Ultrastrong Light–Matter Interactions, Advanced Quantum Technologies **3**, 1900140 (2020).
- [20] P. Kirton y J. Keeling, Suppressing and Restoring the Dicke Superradiance Transition by Dephasing and Decay, Phys. Rev. Lett. **118**, 123602 (2017).
- [21] R. H. Dicke, Coherence in Spontaneous Radiation Processes, Phys. Rev. **93**, 99-110 (1954).
- [22] K. Hepp y E. H. Lieb, On the superradiant phase transition for molecules in a quantized radiation field: the dicke maser model, Annals of Physics **76**, 360 -404 (1973).
- [23] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions* (Cambridge University Press, 1999).
- [24] M. Gross y S. Haroche, Superradiance: An essay on the theory of collective spontaneous emission, Physics Reports **93**, 301-396 (1982).
- [25] A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin y R. J. Schoelkopf, Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation, Phys. Rev. A **69**, 062320 (2004).
- [26] M. P. Baden, K. J. Arnold, A. L. Grimsmo, S. Parkins y M. D. Barrett, Realization of the Dicke Model Using Cavity-Assisted Raman Transitions, Phys. Rev. Lett. **113**, 020408 (2014).
- [27] R. Herrera Romero, M. A. Bastarrachea-Magnani y R. Linares, Critical Phenomena in Light–Matter Systems with Collective Matter Interactions, Entropy **24** (2022).
- [28] R. Herrera Romero y M. A. Bastarrachea-Magnani, Phase and Amplitude Modes in the Anisotropic Dicke Model with Matter Interactions, Entropy **26** (2024).

- [29] D. Tolkunov y D. Solenov, Quantum phase transition in the multimode Dicke model, Phys. Rev. B **75**, 024402 (2007).
- [30] P. Rotondo, E. Tesio y S. Caracciolo, Replica symmetry breaking in cold atoms and spin glasses, Phys. Rev. B **91**, 014415 (2015).
- [31] B. P. Marsh, Y. Guo, R. M. Kroeze, S. Gopalakrishnan, S. Ganguli, J. Keeling y B. L. Lev, Enhancing Associative Memory Recall and Storage Capacity Using Confocal Cavity QED, Phys. Rev. X **11**, 021048 (2021).
- [32] C. A. González-Gutiérrez, J. Román-Roche y D. Zueco, Distant emitters in ultrastrong waveguide QED: Ground-state properties and non-Markovian dynamics, Phys. Rev. A **104**, 053701 (2021).
- [33] C. A. González-Gutiérrez, Non-Markovian dynamics of giant emitters beyond the Weisskopf-Wigner approximation, (2025).
- [34] B. Kannan, M. J. Ruckriegel, D. L. Campbell, A. Frisk Kockum, J. Braumüller, D. K. Kim, M. Kjaergaard, P. Krantz, A. Melville, B. M. Niedzielski, A. Vepsäläinen, R. Winik, J. L. Yoder, F. Nori, T. P. Orlando, S. Gustavsson y W. D. Oliver, Waveguide quantum electrodynamics with superconducting artificial giant atoms, Nature **583**, 775-779 (2020).
- [35] E. Fiorelli, M. Marcuzzi, P. Rotondo, F. Carollo e I. Lesanovsky, Signatures of Associative Memory Behavior in a Multimode Dicke Model, Phys. Rev. Lett. **125**, 070604 (2020).
- [36] I. Rotter y J. P. Bird, A review of progress in the physics of open quantum systems: theory and experiment, Reports on Progress in Physics **78**, 114001 (2015).
- [37] H.-P. Breuer y P. F., *The theory of open quantum systems* (Oxford University Press, 2003).
- [38] H. J. Carmichael, *Statistical methods in quantum optics 1: master equations and Fokker-Planck equations* (Springer Science & Business Media, 2013).
- [39] A. Chakraborty y R. Sensarma, Power-law tails and non-Markovian dynamics in open quantum systems: An exact solution from Keldysh field theory, Phys. Rev. B **97**, 104306 (2018).
- [40] E. G. D. Torre, S. Diehl, M. D. Lukin, S. Sachdev y P. Strack, Keldysh approach for nonequilibrium phase transitions in quantum optics: Beyond the Dicke model in optical cavities, Phys. Rev. A **87**, 023831 (2013).
- [41] M. V. Feigel'man, A. I. Larkin y M. A. Skvortsov, Keldysh action for disordered superconductors, Phys. Rev. B **61**, 12361-12388 (2000).
- [42] K. Dunnett y M. H. Szymańska, Keldysh field theory for nonequilibrium condensation in a parametrically pumped polariton system, Phys. Rev. B **93**, 195306 (2016).
- [43] G. Lyu, K. Kottmann, M. B. Plenio y M.-J. Hwang, Multicritical dissipative phase transitions in the anisotropic open quantum Rabi model, Phys. Rev. Res. **6**, 033075 (2024).
- [44] F. m. c. Damanet, A. J. Daley y J. Keeling, Atom-only descriptions of the driven-dissipative Dicke model, Phys. Rev. A **99**, 033845 (2019).

- [45] T. D. Farokh Mivehvar Francesco Piazza y H. Ritsch, Cavity QED with quantum gases: new paradigms in many-body physics, *Advances in Physics* **70**, 1-153 (2021).
- [46] B. Zhu, J. Marino, N. Y. Yao, M. D. Lukin y E. A. Demler, Dicke time crystals in driven-dissipative quantum many-body systems, *New Journal of Physics* **21**, 073028 (2019).
- [47] K. Baumann, R. Mottl, F. Brennecke y T. Esslinger, Exploring Symmetry Breaking at the Dicke Quantum Phase Transition, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 140402 (2011).
- [48] A. Blais, A. L. Grimsom, S. M. Girvin y A. Wallraff, Circuit quantum electrodynamics, *Rev. Mod. Phys.* **93**, 025005 (2021).
- [49] J. F. Poyatos, J. I. Cirac y P. Zoller, Quantum Reservoir Engineering with Laser Cooled Trapped Ions, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4728-4731 (1996).
- [50] E. K. Twyeffort Irish, J. Gea-Banacloche, I. Martin y K. C. Schwab, Dynamics of a two-level system strongly coupled to a high-frequency quantum oscillator, *Phys. Rev. B* **72**, 195410 (2005).
- [51] E. K. Twyeffort Irish, Generalized Rotating-Wave Approximation for Arbitrarily Large Coupling, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 173601 (2007).
- [52] V. V. Albert, G. D. Scholes y P. Brumer, Symmetric rotating-wave approximation for the generalized single-mode spin-boson system, *Phys. Rev. A* **84**, 042110 (2011).
- [53] L. Yu, S. Zhu, Q. Liang, G. Chen y S. Jia, Analytical solutions for the Rabi model, *Phys. Rev. A* **86**, 015803 (2012).
- [54] Y.-Y. Zhang y Q.-H. Chen, Generalized rotating-wave approximation for the two-qubit quantum Rabi model, *Phys. Rev. A* **91**, 013814 (2015).
- [55] Y.-Y. Zhang, Generalized squeezing rotating-wave approximation to the isotropic and anisotropic Rabi model in the ultrastrong-coupling regime, *Phys. Rev. A* **94**, 063824 (2016).
- [56] Y.-Y. Zhang y X.-Y. Chen, Analytical solutions by squeezing to the anisotropic Rabi model in the nonperturbative deep-strong-coupling regime, *Phys. Rev. A* **96**, 063821 (2017).
- [57] P. R. Berman y G. W. Ford, “Chapter 5 - Spontaneous Decay, Unitarity, and the Weisskopf-Wigner Approximation”, en *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, vol. 59, ed. por E. Arimondo, P. Berman y C. Lin, *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics* (Academic Press, 2010), págs. 175-221.
- [58] S. A. Chilingaryan y B. M. Rodríguez-Lara, The quantum Rabi model for two qubits, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **46**, 335301 (2013).
- [59] B.-B. Mao, L. Li, Y. Wang, W.-L. You, W. Wu, M. Liu y H.-G. Luo, Variational generalized rotating-wave approximation in the two-qubit quantum Rabi model, *Phys. Rev. A* **99**, 033834 (2019).
- [60] A. Kamenev, *Field theory of non-equilibrium systems* (Cambridge University Press, 2023).
- [61] C. Wetterich, Exact evolution equation for the effective potential, *Physics Letters B* **301**, 90-94 (1993).

- [62] D. G. Angelakis, M. F. Santos y S. Bose, Photon-blockade-induced Mott transitions and  $XY$  spin models in coupled cavity arrays, Phys. Rev. A **76**, 031805 (2007).

## 7. Calendario de actividades

Actividades /Trimestre	25-P	25-0	26-1	26-P	26-0	27-1	27-P	27-0	28-1	28-P	28-0	29-1
Revisión bibliográfica												
Cursar UEAs de Investigación												
Escritura de la tesis												
Escritura de un artículo de Investigación												
Disertación												
Analizar el modelo de Rabi de dos qubits con interacciones materiales. Estudiar técnicas para el espectro de energías												
Analizar modelos de átomos gigantes. Estudiar efectos no markovianos, retardos y correlaciones temporales												
Analizar el modelo de Rabi abierto. Estudiar disipación y bombeo y ecuación maestra de Linblald												
Analizar el modelo de Dicke multiqubit. Estudiar propiedades críticas del sistema												
Analizar el modelo de Dicke multimodo abierto. Estudiar el formalismo de Keldysh.												