# 1. Generalidades

## 1.1 O que é uma Série Temporal?

Uma Série Temporal é o conjunto de valores de uma variável Y recolhidos a intervalos de tempo constantes, organizados em n períodos principais e m subperíodos por cada período principal.

Sendo assim, existem 2 variáveis envolvidas:

- a variável em estudo, Y, cujos registos ao longo do tempo existem

- a variável tempo, t, que avança 1 unidade por cada subperíodo.

Exemplo – O registo mensais das vendas de certo produto ao longo de 5 anos constitui uma série temporal. A variável tempo avança 1 unidade em cada mês.

## 1.2 Componentes de uma série temporal

O comportamento de uma variável ao longo do tempo pode ser considerado como resultado da combinação de quatro componentes ou movimentos:

- a componente de **tendência**, T, que, como o próprio nome indica, representa a tendência da variável para globalmente aumentar, diminuir ou manter-se constante no tempo, de forma linear ou outra.

- a componente de **sazonalidade**, S, que compreende as alterações periódicas verificadas ao longo de cada período, por diferenciação dos respetivos subperíodos.

- a componente de **ciclicidade**, C, mais complexa de analisar, uma vez que corresponde a grandes ciclos de variação, como económicos, ambientais, etc. Não será estudada no âmbito deste disciplina.

- a componente **aleatória**, E, ou seja, a componente não explicada.

# 2. Decomposição de Séries Temporais

## 2.1 Modelo aditivo

De acordo com um modelo aditivo, o valor real de uma variável Y observado resulta da soma dos valores dos quatro movimentos descritos:

$$Y = T + S + C + E$$

O modelo aditivo é adequado em situações nas quais as oscilações periódicas dos valores atribuídas à sazonalidade apresentam amplitudes constantes ou aproximadamente constantes, independentemente da grandeza dos valores reais. Quando a amplitude destas oscilações seja proporcional (ou aproximadamente proporcional) à grandeza dos valores reais da variável em estudo, então será mais adequado o modelo multiplicativo.

## 2.2 Modelo multiplicativo

De acordo com um modelo aditivo, o valor real de uma variável Y observado resulta da seguinte combinação dos valores dos quatro movimentos descritos:

$$Y = T \,.\, S \,.\, C + E$$

O modelo multiplicativo é o mais adequado quando a amplitude destas oscilações é proporcional (ou aproximadamente proporcional) à grandeza dos valores reais da variável em estudo.

## 2.3 Cálculo da tendência

Há vários métodos para calcular a componente de tendência. Nesta disciplina aplicaremos o método da linha de regressão, linear ou outra, à totalidade dos resultados em função do tempo. Para este cálculo, a variável tempo é considerada inteira, atribuindo-se ao primeiro subperíodo do primeiro período o valor 1 e assim sucessivamente. Por exemplo, no caso do ajuste linear, obtém-se que:

$$T_{ij} = m\, t_{ij} + b$$

A escolha do melhor ajuste deve ter em conta que a sua linha característica acompanhe a nuvem de pontos, mas não as oscilações de sazonalidade.

Este cálculo não depende do tipo de modelo de decomposição a aplicar.

## 2.4 Cálculo dos Coeficientes de Sazonalidade, modelo aditivo

Uma vez conhecida a componente de tendência e considerando o método aditivo, a sazonalidade é inicialmente calculada do seguinte modo:

$$S_{ij} = y_{ij} - T_{ij}$$

na qual i é o período principal, de valor 1,2 … até n, o número total de períodos principais em análise, e j representa o subperíodo, através de valores inteiros desde 1 até ao número de subperíodos por período, m.

Posteriormente, calcula-se apenas um coeficiente de sazonalidade para cada subperíodo, considerando a média aritmética de todos os subperíodos semelhantes:

$$S_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{ij}$$

O significado do coeficiente de sazonalidade assim calculado é o número de unidades que em média o respetico subperíodo apresenta acima/abaixo do valor de tendência calculado para o mesmo. Por exemplo, se certo coeficiente de sazonalidade é igual a -3,4, atribui-se ao respetivo subperíodo em média menos 3,4 unidades do que a tendência correspondente.

A soma de todos os coeficientes de todos os subperíodos deverá ser sempre nula. Quando tal não aconteça, o resíduo é distribuído em partes iguais pelos vários coeficientes.

## 2.5 Cálculo dos Coeficientes de Sazonalidade, modelo multiplicativo

Quando aplicado o método multiplicativo, a sazonalidade é inicialmente calculada do seguinte modo:

$$S_{ij} = y_{ij} / T_{ij}$$

na qual novamente i é o período principal, de valor 1,2 … até n, o número total de períodos principais em análise, e j representa o subperíodo, através de valores inteiros desde 1 até ao número de subperíodos por período, m.

Posteriormente, calcula-se apenas um coeficiente de sazonalidade para cada subperíodo, considerando a média aritmética de todos os subperíodos semelhantes:

$$S_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{ij}$$

O significado do coeficiente de sazonalidade assim calculado é a proporção que em média o respetivo subperíodo apresenta acima/abaixo do valor de tendência calculado para o mesmo. Por exemplo, se certo coeficiente de sazonalidade é igual a 1,23, atribui-se ao respetivo subperíodo em média mais 23% sobre a tendência correspondente. Já, se outro coeficiente de sazonalidade for igual a 0,94, atribui-se ao respetivo subperíodo em média menos 6% sobre a tendência calculada.

A soma de todos os coeficientes de todos os subperíodos deverá sempre igualar o número de subperídos em cada período principal. Por exemplo, se a série estiver registada mensalmente, essa soma deverá ser igual a 12. Quando tal não aconteça, o resíduo é distribuído em partes iguais pelos vários coeficientes.

## 3. Previsões e estimativas

### 3.1 Modelo aditivo

A previsão para qualquer subperíodo passado ou futuro resulta da adição da componente de tendência prevista, segundo o modelo linear, com o respetivo coeficiente de sazonalidade. Ou seja, se o subperíodo ij corresponde globalmente a um tempo $t_{ij}$, vem:

$$\hat{T}_{ij} = m\, t_{ij} + b$$

$$\hat{S}_{ij} = S_j$$

$$\hat{y}_{ij} = \hat{T}_{ij} + \hat{S}_{ij}$$

### 3.2 Modelo multiplicativo

A previsão para qualquer subperíodo passado ou futuro resulta do produto da componente de tendência prevista, segundo o modelo linear, pelo o respetivo coeficiente de sazonalidade. Ou seja, se o subperíodo ij corresponde globalmente a um tempo $t_{ij}$, vem:

$$\hat{T}_{ij} = m\, t_{ij} + b$$

$$\hat{S}_{ij} = S_j$$

$$\hat{y}_{ij} = \hat{T}_{ij} \,.\, \hat{S}_{ij}$$

## 4. Qualidade do modelo

A qualidade do modelo pode ser quantificada pelo coeficiente de determinação, adequadamente calculado.

A variância total explicada pelo modelo é quantificada pelo coeficiente de determinação total, $R^2_{Total}$ calculado com base nos m x n valores de Y conhecidos, por comparação com os correspondentes valores estimados:

$$R^2_{Total} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\hat{y}_{ij} - \bar{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2}$$

Sendo $\hat{y}_i$ o valor estimado para a variável Y, como explicado na secção 3.

A variância explicada pela tendência, $R^2_T$, é calculada do seguinte modo:

$$R^2_T = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(T_{ij} - \bar{y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(y_{ij} - \bar{y}\right)^2}$$

Sempre que a tendência seja linear, o coeficiente de determinação pode ser obtido pelo quadrado do valor do coeficiente linear amostral de Pearson, **r**.

$$R^2_T = r^2$$

A variância explicada pela sazonalidade, $R^2_S$ corresponde à diferença entre as duas anteriores:

$$R^2_S = R^2_{Total} - R^2_T$$

A variância não explicada, $R^2_E$ corresponde à diferença entre 1 (100%) e a variância total explicada:

$$R^2_E = 1 - R^2_T$$

- FIM do Capítulo –