SISTEMAS BIOLÓGICOS 2023

Trabajo práctico 5

1. **Sistema SIRS**

   Sea un sistema de susceptibles-infectados-recuperados con pérdida de la inmunidad. Escriba las ecuaciones de la dinámica de campo medio suponiendo que el contagio ocurre a tasa β, que la duración media de la infección es τ_I y que la de pérdida de inmunidad es τ_R. Demuestre que el punto es:
$$s^* = \frac{1}{\beta \tau_I}, \qquad \frac{i^*}{\tau_I} = \frac{r^*}{\tau_R}.$$
   Demuestre que las oscilaciones son siempre amortiguadas para cualquier valor de los parámetros.

2. **Glucólisis**

   La glucólisis es un proceso metabólico fundamental de los seres vivos, mediante el cual obtienen energía descomponiendo azúcar.[1] Un modelo matemático de una de las reacciones involucradas es el siguiente:
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x + ay + x^2 y \equiv f(x, y), \\ \dot{y}(t) &= \frac{1}{2} - ay - x^2 y \equiv g(x, y), \end{aligned}$$
   donde $x(t)$ es la concentración de ADP, $y(t)$ es la de la glucosa-6-fosfato y $a \geq 0$ es un parámetro de la cinética química.

   a) Muestre que hay un único equilibrio (encuéntrelo).
   b) Para $a = 1/2$, grafique las nulclinas en el espacio de fases e identifique las regiones donde $f > 0$, $f < 0$, $g > 0$ y $g < 0$. En cada una de estas regiones, indique cualitativamente la dirección del flujo.
   c) Analice la estabilidad lineal del equilibrio.
   d) Considerando a como un parámetro de control, muestre que existe una bifurcación. Dibuje cualitativamente el flujo en la proximidad del punto fijo para $a < a_c$ y $a > a_c$ (a_c es el valor del parámetro de control donde se produce la bifurcación).

[1] El metabolismos de los hidratos de carbono fue desentrañado en buena medida por Luis Federico Leloir, médico y bioquímico argentino, premio Nobel en 1970 e inventor de la salsa golf.

e) Bonus: sabiendo que hay sólo un equilibrio y que las concentraciones no divergen al infinito, explique si existen ciclos de concentración (soluciones periódicas) para algún valor del parámetro a.

3. **Osciladores acoplados**

   Resuelva numéricamente el sistema de osciladores de fase acoplados:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{k}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i),$$

   para $N \approx 5$ osciladores. Grafique la fase y la frecuencia de todos ellos en función del tiempo (bueno, la fase no hace falta), y verifique que, para cada conjunto de frecuencias naturales ω_i, un acoplamiento k suficientemente fuerte produce la sincronización de frecuencias. Verifique, cambiando las frecuencias naturales, que la frecuencia de sincronización es el promedio de las frecuencias naturales.[2]

[2] Bellamente implementado en Mathematica por B. Altunkaynak, *Synchronization of Coupled Phase Oscillators*, http://demonstrations.wolfram.com/SynchronizationOfCoupledPhaseOscillators.