

# Modelação de Sistemas Físicos

## 1ª aula Prática

Sumário:

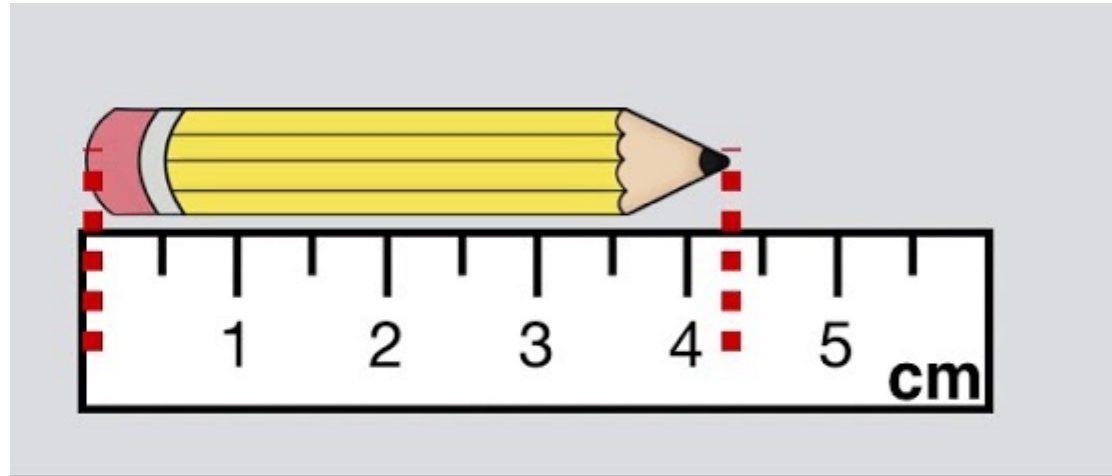
Resolução de problemas sobre o cap. 1

Bibliografia:

Serway, cap. 1

Sorensen, cap. 3

## Observação e medição



### Registo de uma quantidade usando só uma medição:

O valor da medição de uma quantidade (como também a representação digital de um número real) está sempre afetado de uma incerteza,

À quantidade que se mede, na figura o comprimento do lápis,  $c$ , associamos ao valor que melhor se estima,  $\bar{c}$ , um outro valor,  $\Delta c$ , chamado erro ou indeterminação, Tal que se tem a certeza que o comprimento está entre  $\bar{c} - \Delta c$  e  $\bar{c} + \Delta c$

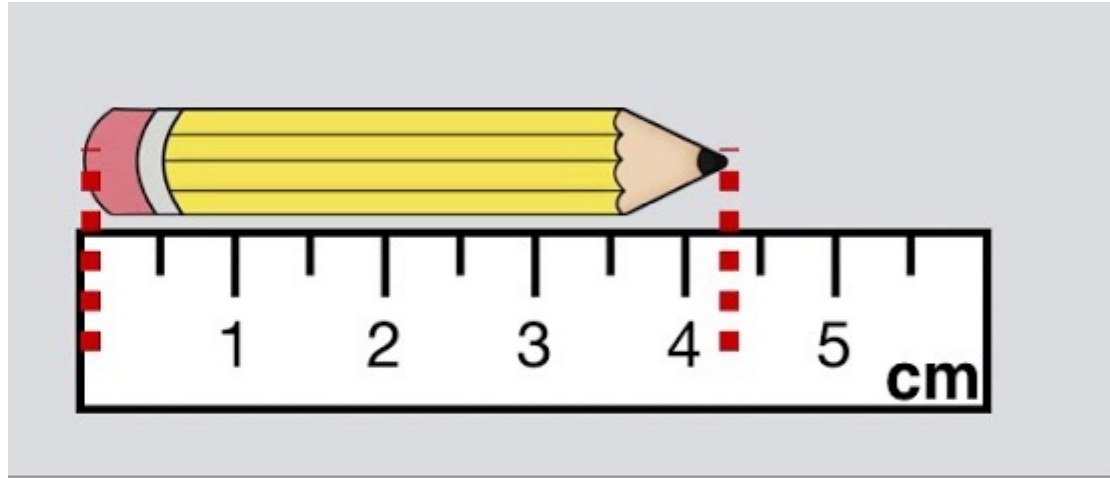
Pela figura tem-se a certeza que  
E pode-se considerar

$$4,0 \text{ cm} < c < 4,5 \text{ cm}$$
$$\bar{c} = 4,25 \text{ cm} \text{ e } \Delta c = 0,25 \text{ cm}$$

O comprimento do lápis indica-se

$$c = 4,3 \pm 0,3 \text{ cm}$$

## Observação e medição

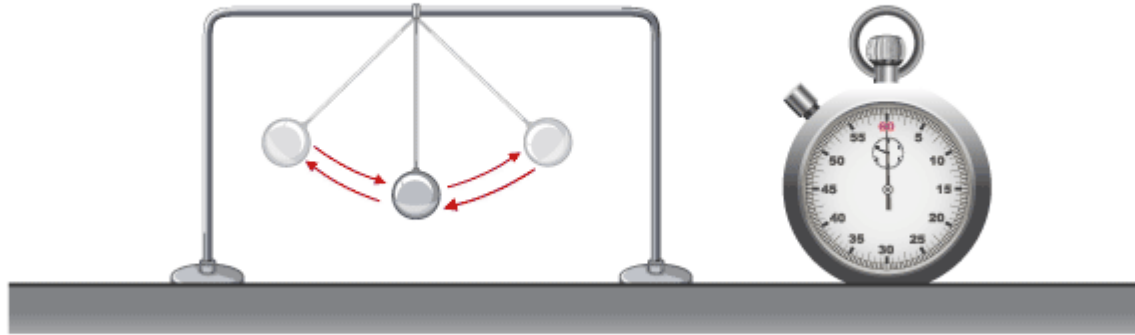


Este erro é considerado um exemplo de um erro de leitura ou instrumental.

**Instrumentos de escala contínua:** O erro é metade da menor divisão da escala

**Instrumentos de escala digital:** O erro é uma divisão da escala.

## Observação e medição



### Registo de uma quantidade usando 10 ou mais medições:

Cada vez que se mede o tempo de uma oscilação completa (período,  $T$ ) obtêm-se um valor diferente.

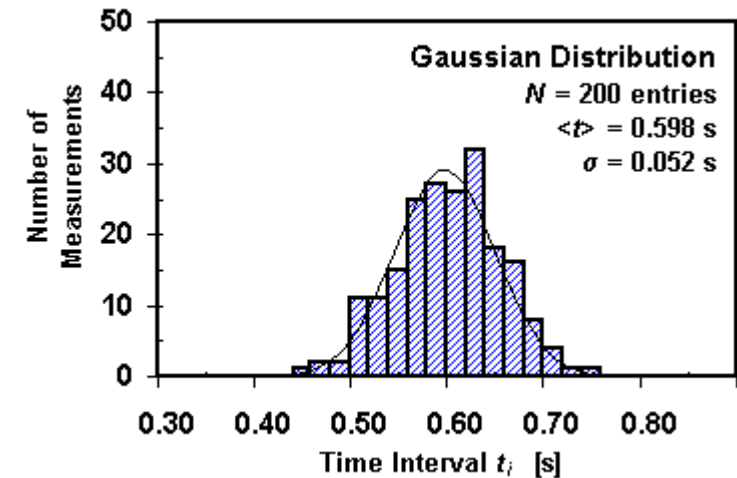
A melhor estimativa do período é o valor médio  $\bar{T} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i$

O desvio padrão indica a variação em cada medição:  $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (T_i - \bar{T})^2}$

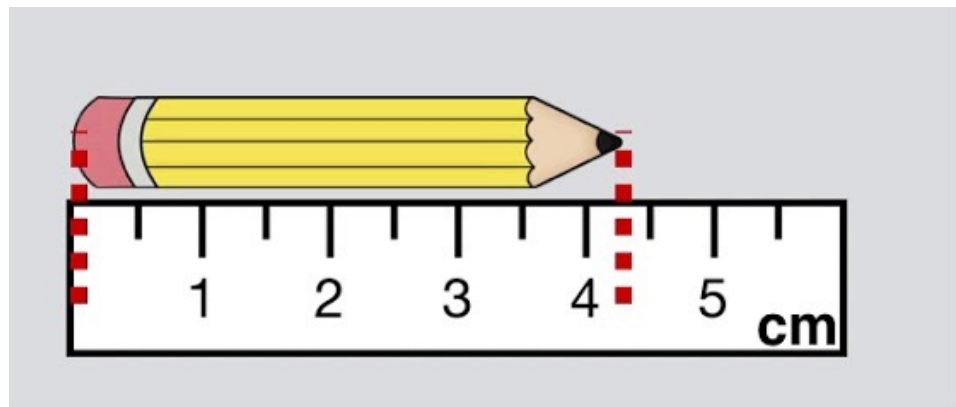
O erro na media diminua com o número de medições:  $S = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$

### Este é um erro de observação

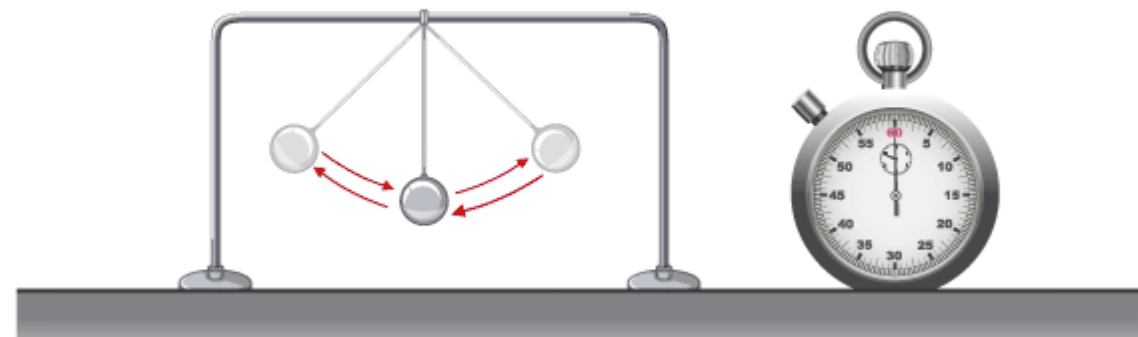
Então o valor do período indica-se por  $T = \bar{T} \pm s$



# Observação e medição



**Erro de leitura**

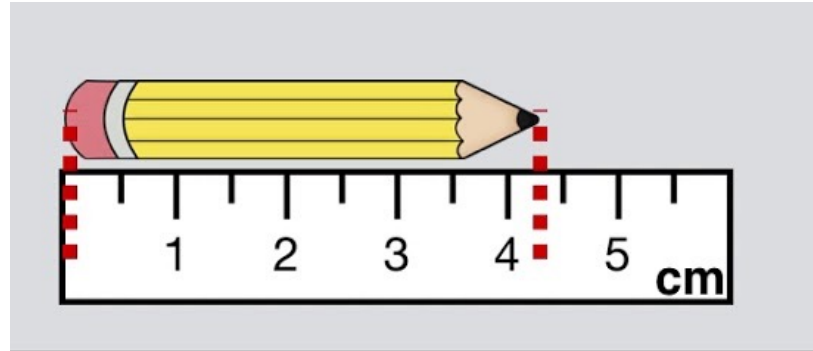


**Erro de observação**

**Os erros de leitura e os erros de observação são independentes.**

**Como erro a associar ao valor, toma-se como erro o maior destes dois erros.**

# Observação e medição



## Precisão e Exatidão:

**Precisão** mede o grau de variação da medição obtido na experiência.

$$\text{erro relativo} = \left| \frac{\Delta c}{\bar{c}} \right|$$

A precisão é tanto maior quanto o erro relativo for menor.

Num jogo de dardos, se acertares muito longe do centro mas acertares sempre no mesmo sítio, tens uma precisão alta, e uma exatidão baixa.

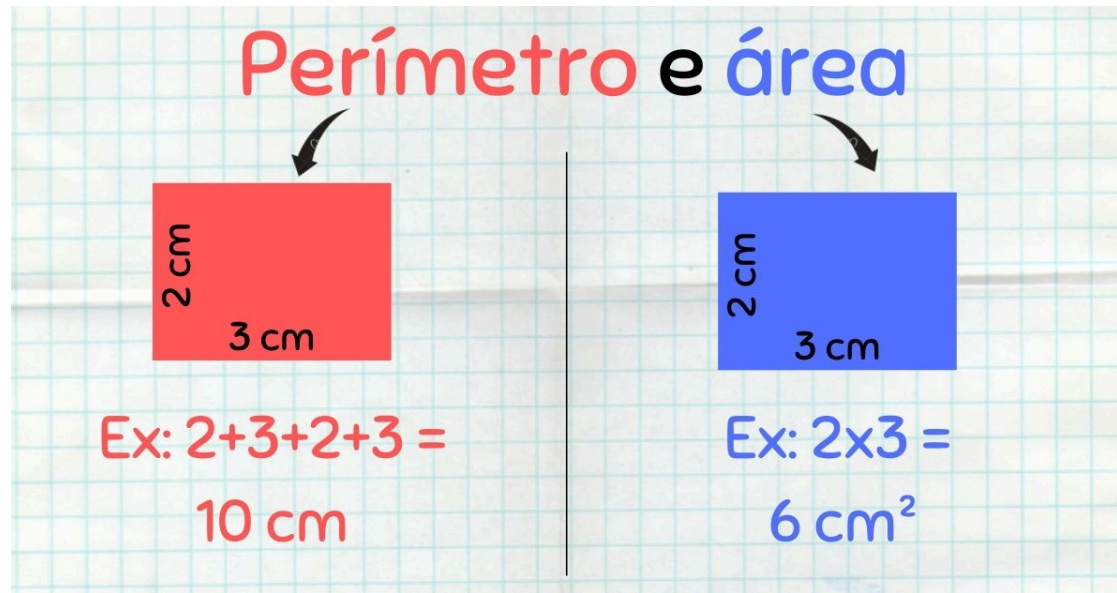
Enquanto que se acertares sempre em sítios diferentes, mas perto do centro, tens uma alta exatidão e uma baixa precisão

**Exatidão** mede a proximidade do valor medido e do valor correto.

Quanto menor for a diferença entre estes últimos dois valores maior é a exatidão.

**Precisão e Exatidão são dois conceitos diferentes.**

## Observação e medição



**Como se determina o erro de quantidades que não se medem, mas que são funções de quantidades medidas?**  
Exemplo: O perímetro e a área de um retângulo?

## Observação e medição

**Como se determina o erro de quantidades que não se medem, mas que são funções de quantidades medidas?**

Adição de duas parcelas: largura,  $L$ , e profundidade,  $P$ ,

$$S = L + P$$

Em que  $L = 3,0 \pm 0,1$  cm

2,9 - 3,1

$P = 2,0 \pm 0,1$  cm

1,9 - 2,1

$S = 5,0$  cm mas  $\Delta S$ ?

O valor mínimo de  $S = 5,0 - (\Delta L + \Delta P)$

$$2,9 + 1,9 = 4,8$$

O valor máximo de  $S = 5,0 + (\Delta L + \Delta P)$

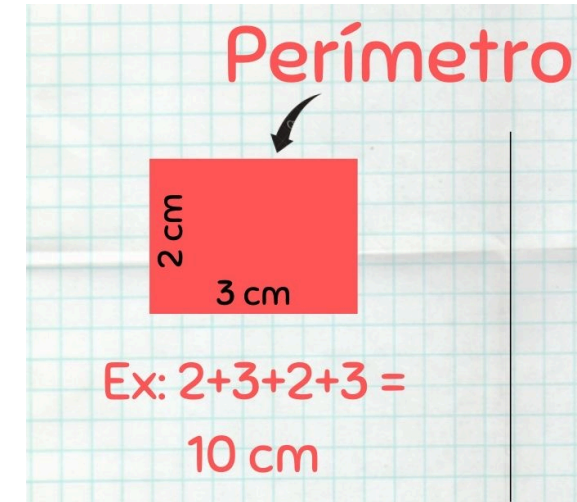
$$3,1 + 2,1 = 5,2$$

} 5,0  $\pm$  0,2 cm

$$\Delta S = \Delta L + \Delta P$$

O mesmo de a subtração de duas parcelas,  $D = L - P$

$$\Delta D = \Delta L + \Delta P$$





# Observação e medição

**Como se determina o erro de quantidades que não se medem**, mas que são funções de quantidades medidas?

E o produto de 2 quantidades? Exemplo, a área do retângulo?

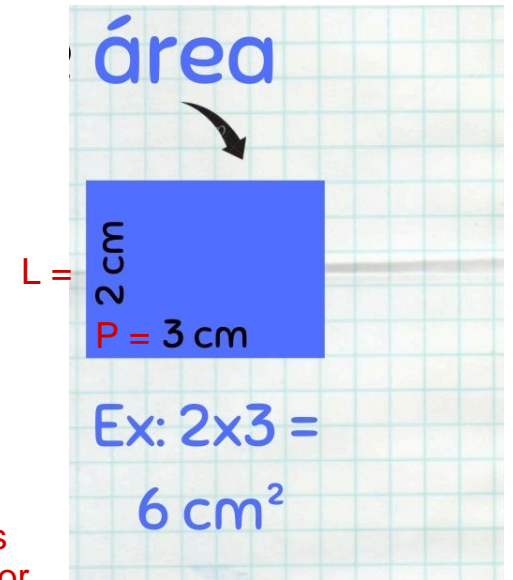
$$A = L \times P$$

$$\frac{\Delta A}{A} = \left| \frac{\Delta L}{L} \right| + \left| \frac{\Delta P}{P} \right| \quad 0,1/3,0 + 0,1/2,0 = 0,5/6$$

Fez se a multiplicação das bases para terem o mesmo denominador

Igual expressão para a divisão de duas quantidades.

$$\text{Geral: } F = F(x, y, \dots) \quad \Delta F = \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \Delta y + \dots$$



## Observação e medição

Derivada Total ( $\frac{d}{dx}$ ) da função  $f(x) = 4x^2$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} = 8x$$

Estamos a fazer em ordem x, por isso fazemos a derivada do x

Derivada Parcial ( $\frac{\partial}{\partial x}$ ) da função  $g(x, y) = 4x^2y$

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x, y) = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \delta x, y) - g(x, y)}{\delta x} = 8xy$$

Estamos a fazer em ordem x, pelo que se faz a derivada no x e considera-se o y uma constante que não se altera

na derivada parcial é como se as outras variáveis (neste caso y) fossem constantes (não variam na definição de derivada parcial)

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 4x^2$$

Estamos a fazer em ordem y, pelo que se faz a derivada no y e considera-se o x uma constante que não se altera

# Observação e medição

## Problema cap 1

3. Encontre as derivadas parciais das funções

$$h(x, y) = 8x + 10x^2y + y^2$$

e

$$p(x, y, z) = -4xy + 10x^2yz + y^2 + yz$$

- |   |              |   |
|---|--------------|---|
| a) $\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}$ | $8 + 20xy$   | Desaparecem as constantes que não têm o x que se está a derivar |
| b) $\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}$ | $10x^2 + 2y$ | Desaparecem as constantes que não têm o y que se está a derivar |
| c) $\frac{\partial p(x,y)}{\partial x}$ | $-4y + 20yz$ | Desaparecem as constantes que não têm o x que se está a derivar |

# Observação e medição

## Problema cap 1

1. Foram medidos dois comprimentos:

$$P = 25 \pm 1 \text{ cm}$$

$$Q = 10 \pm 1 \text{ cm}$$

a) Calcule a soma das duas quantidades

$$S = P + Q$$

$$9+24\_11+26 = 33\_37 = 35+-2\text{cm}$$

b) Calcule a diferença das duas quantidades

$$D = P - Q$$

$$24-9\_26-11 = 15\_15 = 15 +-2\text{cm}$$

c) Calcule o produto das duas quantidades

$$M = P Q$$

$$1/25 + 1/10 = 2/50+5/50 = 7/50$$

# Observação e medição

## Problema cap 1

2. Foram medidos dois comprimentos:

$$P = 15.2 \pm 0.1 \text{ cm}$$

$$Q = 14.9 \pm 0.3 \text{ cm}$$

a) Calcule a soma das duas quantidades

$$S = P + Q$$

$$15,1+14,6\_15,3+15,2 = 29,7\_30,5 = 30,1+-0,4\text{cm}$$

b) Calcule a diferença das duas quantidades

$$D = P - Q$$

$$15,1-14,6\_15,3-15,2 = 0,5\_0,1 = 0,3+-0,4\text{cm}$$

c) Calcule o erro relativo da diferença  $D$

$$\text{delta}D/D = 0,4/0,3 = 1,3$$

# Observação e medição

## Algarismos Significativos de uma quantidade

São os algarismos que se conhecem com certeza (100%) mais o 1º algarismo que é afetado pelo erro

Ex: Comprimento

a)  $4,10 \pm 0,02 \text{ m}$  possui 3 algarismos significativos ( o erro afeta as centésimas)

b)  $4,100 \pm 0,02 \text{ m}$  possui 3 algarismos significativos ( o erro afeta as centésimas)

c)  $4,100 \pm 0,2 \text{ m}$  possui 2 algarismos significativos ( o erro afeta as décimas)

Permite escrever os valores de um modo mais simples: Escrever só os algarismos significativos

a)  $4,10 \text{ m}$  possui 3 algarismos significativos

b)  $4,10 \text{ m}$  possui 3 algarismos significativos *Forma correta do exemplo acima*

c)  $4,1 \text{ m}$  possui 2 algarismos significativos *Forma correta do exemplo acima*

Em Física  $4,10 \text{ m} \neq 4,1 \text{ m}$  *A quantidade de zeros que se coloca dá informações sobre qual o comprimento do erro, sendo por isso necessário colocar o número certo de algarismos significativos.*

Serway, 1.6; Sorensen, 3.3

# Observação e medição

## Operações

**Produto e divisão:** O resultado da operação deve apresentar o número de algarismos significativos igual ao menor dos fatores **Neste caso é o 0,1 do raio**

ex: Círculo de raio  $r = 6,0 \pm 0,1 \text{ cm}$   
de área  $A = \pi \times (6,0 \text{ cm})^2 = 113,097 \dots \text{ cm}^2$   
apresenta-se com 2 algarismos significativos  
 $A = \pi \times (6,0 \text{ cm})^2 = 1.1 \times 10^2 \text{ cm}^2$

**Adição e subtração:** O resultado da operação deve apresentar o número de casas decimais igual ao menor número de casa decimais das parcelas.

ex:  $23,2 + 5,174 = 28,4$   
 $3,4 + 10 = 13$   
 $1,0001 + 0,0003 = 1,0004$   
 $1,002 - 0,998 = 0,004$

Cálculos intermédios fazem-se com os todos os algarismos (na máquina de calcular ou computador)

**E apenas quando se chega ao resultado final é que se coloca o número de algarismos significativos corretos**

# Observação e medição

## Problema cap 1

2. Foram medidos dois comprimentos:

$$P = 15.2 \pm 0.1 \text{ cm}$$

$$Q = 14.9 \pm 0.3 \text{ cm}$$

a) Calcule a soma das duas quantidades

$$S = P + Q$$

b) Calcule a diferença das duas quantidades

$$D = P - Q$$

c) Calcule o erro relativo da diferença  $D$



# Observação e medição

## Problema cap 1

4. Um carro americano segue à velocidade de 85,0 milhas/hora. Passa por uma estrada com o limite de velocidade 50 km/h. Está o carro a exceder o limite de velocidade?

Note: 1 milha = 1609 m

Novos dados:  
 $v = 75.0$  milhas/h  
limite de  $v = 120$  km/h

$v = 75,0 \cdot 1609 / 1000 = 120,675 = 121$  km/h  
logo está a exceder o limite de velocidade

Transformação da velocidade para m/s  
 $v = (120,675 \cdot 1000) / 3600 = 33,5$  m/s

a velocidade tem 3 algarismos significativos por isso o resultado final da velocidade convertido tem de ter 3 algarismos significativos, ou seja,  $v = 121$  km/h

# Observação e medição

## Problema cap 1

4. Um carro americano segue à velocidade de 85,0 mil has/hora. Passa por uma estrada com o limite de velocidade 50 km/h. Está o carro a exceder o limite de velocidade? Expresse a velocidade do carro em m/s?

Note: 1 milha = 1609 m

Resolução:

$$85.0 \frac{\text{milhas}}{\text{hora}} = \frac{85.0 \times 1609 \text{ m}}{\text{hora}} = \frac{136765 \text{ m}}{\text{hora}} = 137 \times 10^3 \text{ m} = 137 \text{ km}$$

$$85.0 \frac{\text{milhas}}{\text{hora}} = \frac{85.0 \times 1609 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 38.0 \text{ m/s}$$

### Problema cap 1.5 Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

Quando se tem um conjunto  $x, y$  de  $N$  medições, o método dos mínimos quadráticos oferece o ajuste linear que apresenta a menor diferença entre os valores medidos e os estimados por uma reta  $y = m x + b$ . Se se considerar que os erros que afetam os valores de  $y$  são iguais, as expressões que o método fornece são:

$$m = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}$$

$$r^2 = \frac{\left(N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i\right)^2}{\left[N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2\right] \left[N \sum_{i=1}^N y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N y_i\right)^2\right]}$$

$$\Delta m = |m| \sqrt{\frac{1}{r^2} - 1} \quad \Delta b = \Delta m \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}}$$

O coeficiente de determinação  $r^2$  é tal que quando  $\sim 1$  indica um ótimo ajuste, enquanto que  $\sim 0$  indica que o modelo não é linear.

**Escreva um programa em python que calcule as quantidades anteriores.**

**Problema cap 1.5 Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos**

Escreva um programa em python que calcule as quantidades anteriores. Como teste ao programa escrito, compare os seus resultados com os de um problema conhecido, indicado na tabela abaixo,

L (cm)	X (cm)
222.0	2.3
207.5	2.2
194.0	2.0
171.5	1.8
153.0	1.6
133.0	1.4
113.0	1.2
92.0	1.0

Com os valores

$$\sum_{i=1}^N x_i y_i = 2322.4; \quad \sum_{i=1}^N x_i = 1286.0; \quad \sum_{i=1}^N y_i = 13.5;$$
$$\sum_{i=1}^N x_i^2 = 221719.5; \quad \sum_{i=1}^N y_i^2 = 24.33;$$
$$m = 0.01015505; \quad \Delta m = 0.000162973$$
$$b = 0.05507544; \quad \Delta b = 0.02713077$$
$$r^2 = 0.99845714$$

## Problema cap 1.5 Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

- a) Comece por representar os dados experimentais num gráfico.
- b) Calcular as somas das expressões acima.
- c) De seguida calcule o declive, a ordenada na origem e o coeficiente de determinação ou de correlação  $r^2$ .
- d) faça um gráfico com os pontos experimentais e a reta cujos parâmetros  $m$  e  $b$  calculou anteriormente.
- e) Encontre o valor de  $X$ , quando  $L = 165.0$  cm. Use a reta determinada pela regressão linear.
- f) Afaste da reta encontrada um dos valores medidos de  $y$ . Compare o coeficiente de determinação com o valor anterior. Faça um gráfico com os novos pontos experimentais e a nova reta.

Nota: os valores da tabela acima são as medições realizadas numa experiência de difração por uma dupla fenda de um feixe de luz, em que  $L$  é a distância da dupla fenda ao alvo e  $X$  a distância entre máximos luminosos consecutivos da figura de difração.