Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

8ª aula Prática

Sumário:
Realização e resolução de problemas sobre:
- Energia e movimento

Bibliografia:

Problemas cap 5 Bola de Ténis

3. Uma bola de ténis é batida junto ao solo (posição inicial $y = 0$)com a velocidade 100 km/h, a fazer um ângulo de 10º com a horizontal e no sentido positivo dum eixo horizontal OX, sendo OY eixo vertical.

a) Calcule a energia mecânica em qualquer instante, no caso de não considerar a resistência do ar.

b) Considerando a resistência do ar, calcule a energia mecânica nos três instantes
$t_0 = 0$, $t_1 = 0.4$ s e $t_2 = 0.8$ s.

c) Considerando a resistência do ar, calcule o trabalho realizado pela força de resistência do ar até às posições nos três instantes
$t_0 = 0$, $t_1 = 0.4$ s e $t_2 = 0.8$ s.

Use a aproximação trapezoidal para calcular os integrais. A velocidade terminal da bola de ténis é 100 km/h. AS massa da bola é 57 g.

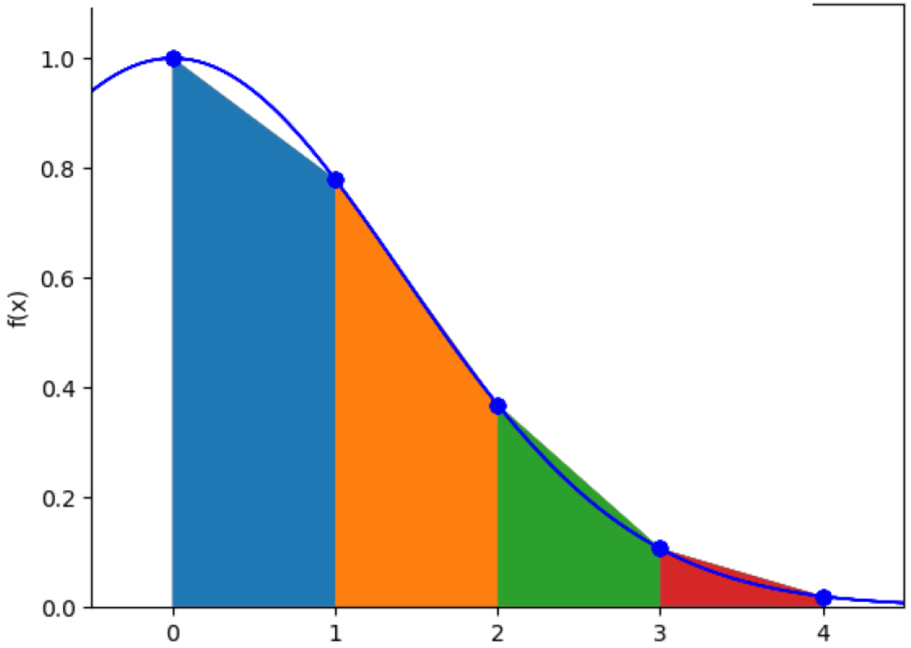
Problemas cap 5 Integração numérica

Quando temos uma função $f(x)$ expressa só em pontos x_i, de **índices** $\boldsymbol{i} =$ $\boldsymbol{0, 1, 2, 3, \ldots, n}$, igualmente espaçados por δx, num total de $\boldsymbol{n+1}$ **elementos,** o integral desta função de pontos discretos, entre dois pontos a e b

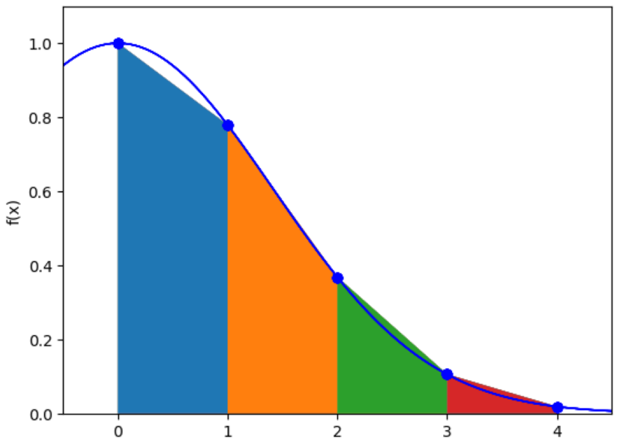
$$I = \int_a^b f(x)\, dx,$$

onde $n = (b-a)/\delta x$ e $x_i = a + i\,\delta x$, obtêm-se facilmente por integração numérica.

A interpretação geométrica do integral é a área limitada pela função entre os dois pontos extremos a e b. Na figura abaixo $a = 0$ e $b = 4$.



Problemas cap 5 Integração numérica



Essa áreas pode ser considerada como uma soma de n fatias de espessura $x_{i+1} - x_i = \delta x$, em que estamos a considerar todas as espessuras iguais.

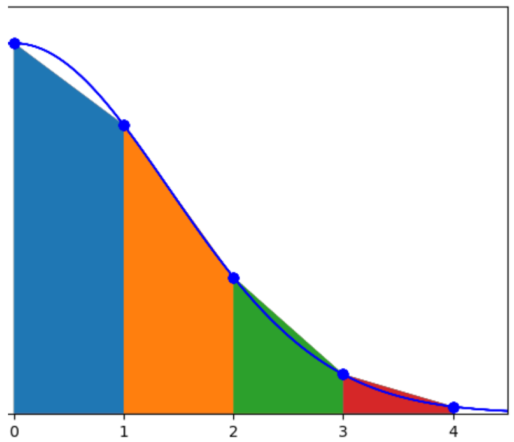
Essa área pode ser considerada como uma soma de n fatias de espessura $x_{i+1} - x_i = \delta x$, em que estamos a considerar todas as espessuras iguais. Assim $\delta x = (b-a)/n$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Aproximação retangular: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx f(x_i)\,\delta x$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\delta x = \delta x \times \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Aproximação trapezoidal: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \approx \frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}\, \delta x$



$$I = \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}\ \delta x =$$

$$= \delta x \times \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$$

Em python podemos obter o integral da função $f(x)$ pela aproximação trapezoidal:

Integral = dx * ((f[0]+f[n])*0.5+np.sum(f[1:n]))

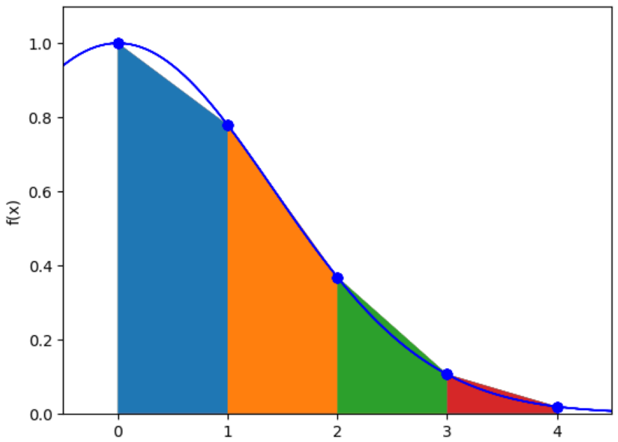
Note que temos $\boldsymbol{n+1}$ elementos da função.

Em termos da dimensão do vetor a integrar, ou seja de $\boldsymbol{n+1 = n_{dim}}$

a integração trapezoidal é calculada por

integral = dx * ((f[0]+f[n_{dim}-1])*0.5+np.sum(f[1: $n_{dim} - 1$]))

Essa áreas pode ser considerada como uma soma de n fatias de espessura $x_{i+1} - x_i = \delta x$, em que estamos a considerar todas as espessuras iguais.



Essa área pode ser considerada como uma soma de n fatias de espessura $x_{i+1} - x_i = \delta x$, em que estamos a considerar todas as espessuras iguais. Assim $\delta x = (b-a)/n$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Aproximação trapezoidal: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}\,\delta x$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}\,\delta x =$$

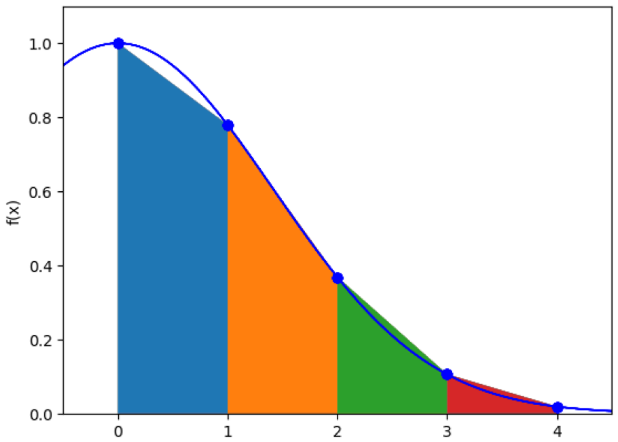
$$= \delta x \times \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$$

Em python podemos obter o integral da função $f(x)$ pela aproximação trapezoidal:

```
integral=dx*((f[0]+f[n])*0.5+np.sum(f[1:n]))
```

Problemas cap 5 Integração numérica

Erro de truncatura (local) da aproximação trapezoidal:



$$erro = \left| \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \right)_{exato} - \left(\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\, \delta x \right)_{ap.\ trap} \right|$$

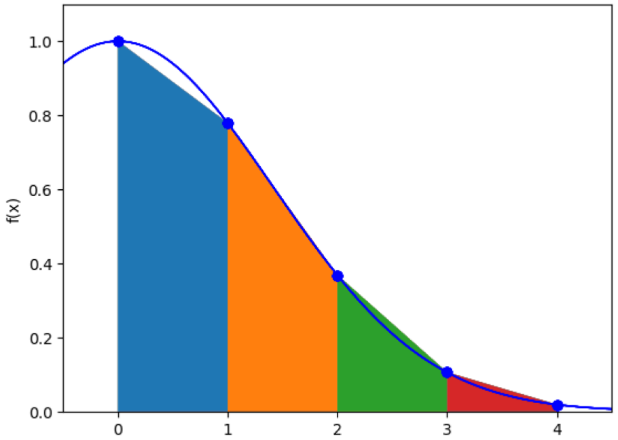
A função $f(x)$ pela série de Taylor à volta de x_i

$$f(x) = f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} (x - x_i) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{t=t} (x - x_i)^2 + \sigma((x - x_i)^3)$$

Subst. em

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} (x - x_i) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} (x - x_i)^2 + \sigma((x - x_i)^3) \right] dx$$

Problemas cap 5 Integração numérica



$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} (x - x_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} (x - x_i)^2 + \mathcal{O}\left((x - x_i)^3\right) \right] dx$$

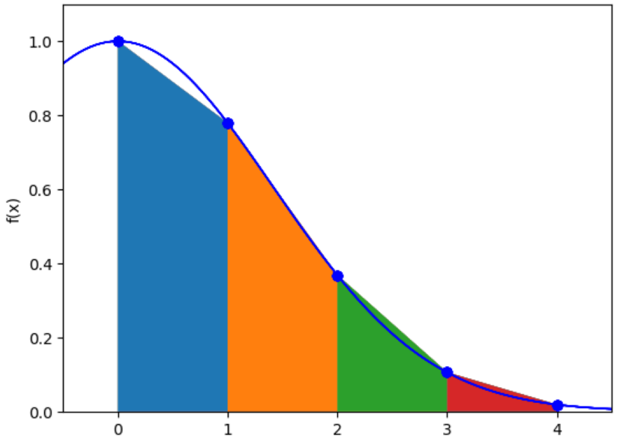
$$= f(x_i)\,(x_{i+1} - x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} + \mathcal{O}\left((x_{i+1} - x_i)^3\right)$$

$$= f(x_i)\,\delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \mathcal{O}(\delta x^3)$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} (x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} (x_{i+1} - x_i)^2 + \mathcal{O}((x_{i+1} - x_i)^3)$$

$$\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} = f(x_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \delta x + \frac{1}{4}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \delta x^2 + \mathcal{O}(\delta x^3)$$

Problemas cap 5 Integração numérica



Subst. no erro que se pretende calcular

$$erro = \left| \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \right)_{exato} - \left(\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\ \delta x \right)_{ap.\,trap} \right|$$

$$= \left| f(x_i)\,\delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \mathcal{O}(\delta x^3) - \left(\left(f(x_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \delta x + \frac{1}{4}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \delta x^2 + \mathcal{O}(\delta x^3) \right) \delta x \right) \right| = \mathcal{O}(\delta x^3)$$

O erro local de truncatura de um integral de uma fatia é da $\mathcal{O}(\delta x^3)$.

Problemas cap 4   Movimento oscilatório harmónico simples

6. Uma mola exerce uma força $F_x = -k\,x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

a) Mostre que a lei do $x(t) = A\cos(\,\omega\,t + \phi)$, com $\omega = \sqrt{k/m}$, é solução da equação dinâmica de Newton do sistema mola-corpo. Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola?

b) Calcule numericamente a lei da velocidade e compare com o resultado analítico. Qual o método numérico que escolhe? Considere nula a velocidade inicial e a posição inicial 4 m.

c) Calcule numericamente a lei do movimento nas condições da alínea anterior e compare com o resultado analítico.

Cap. 5:

d) Faça o gráfico da energia total usando o método de Euler e o de Euler-Cromer