Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

13ª aula Prática

Sumário:
Realização e resolução de problemas sobre:
- Cap. 7 Oscilações e Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

Bibliografia:

5. Implemente o método de Runge-Kutta de 4ª ordem para calcular a velocidade com que um volante de badmington atinge 2 s depois de ser largado. A velocidade terminal do volante é de 6.80 m/s, e a aceleração é

$$a_y(t) = g - \frac{g}{v_T^2}\left|v_y\right|v_y \;.$$

Compare o valor obtido com o valor exato, de acordo com a lei $v_y(t) = \; v_T \tanh(\frac{g\,t}{v_T})$.

O método de Runge-Kutta de 4ª ordem determina a velocidade num instante posterior usando a seguinte aproximação:

$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + \frac{1}{6}[c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4] \times \delta t$$

em que

$$c_1 = a_x\big(t, v_x(t)\big)$$
$$c_2 = a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_1\frac{\delta t}{2}\right)$$
$$c_3 = a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_2\frac{\delta t}{2}\right)$$
$$c_4 = a_x(t + \delta t, v_x(t) + c_3\delta t)$$

a partir da equação diferencial $\begin{cases} \dfrac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t, v_x) \\ v_x(t=0) = v_{x0} \end{cases}$

Integração Numérica de uma equação diferencial de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t, v_x) \\ v_x(t=0) = v_{x0} \end{cases}$$

Método de Euler

$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + a_x\left(t, v_x(t)\right) \times \delta t$$

ou,

$$c_1 = a_x\big(t, v_x(t)\big)$$
$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + c_1 \times \delta t$$

Erro global $\mathcal{O}(\delta t)$

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

$$c_1 = a_x\big(t, v_x(t)\big)$$
$$c_2 = a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_1 \frac{\delta t}{2}\right)$$
$$c_3 = a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_2 \frac{\delta t}{2}\right)$$
$$c_4 = a_x(t + \delta t, v_x(t) + c_3 \delta t)$$
$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + \frac{1}{6}[c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4] \times \delta t$$

Erro global $\boldsymbol{\mathcal{O}(\delta t^4)}$ no e-elarning: function rk4

Integração Numérica de uma equação diferencial de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t, v_x) \\ v_x(t=0) = v_{x0} \end{cases}$$

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

$$c_1 = a_x\big(t, v_x(t)\big)$$
$$c_2 = a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_1\frac{\delta t}{2}\right)$$
$$c_3 = a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_2\frac{\delta t}{2}\right)$$
$$c_4 = a_x(t + \delta t, v_x(t) + c_3\delta t)$$
$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + \frac{1}{6}[c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4] \times \delta t$$

no e-elarning: function rk4

```
def rk4(t,vx,acelera,dt):
    """
    Integração numérica de equação diferencial de 2ª ordem respeitante
    acelera=dvx/dt=Força(t,x,vx)/massa      com vx=dx/dt
    (acelera é uma função)
    input:  t = instante de tempo
            vx(t) = velocidade
            dt = passo temporal
    output: vx(t+dt)
    """
    ax1=acelera(t,vx)
    c1v=ax1*dt
    ax2=acelera(t+dt/2.,vx+c1v/2.)
    c2v=ax2*dt                                  # predicto:  vx(t+dt) * dt
    ax3=acelera(t+dt/2.,vx+c2v/2.)
    c3v=ax3*dt
    ax4=acelera(t+dt,vx+c3v)
    c4v=ax4*dt
    vxp=vx+(c1v+2.*c2v+2.*c3v+c4v)/6.
    return vxp
```

Integração Numérica de uma equação diferencial de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dv_x}{dt} = a_x(t, x, v_x) \\ v_x(t=0) = v_{x0} \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$$

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

$$c_1 = a_x\big(t, x(t), v_x(t)\big)$$
$$c_{1x} = v_x(t)$$
$$c_2 = a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, x(t) + c_{1x}\frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_1\frac{\delta t}{2}\right)$$
$$c_{2x} = v_x(t) + c_{1x}\frac{\delta t}{2}$$
$$c_3 = a_x\left(t + \frac{\delta t}{2}, x(t) + c_{2x}\frac{\delta t}{2}, v_x(t) + c_2\frac{\delta t}{2}\right)$$
$$c_{3x} = v_x(t) + c_{2x}\frac{\delta t}{2}$$
$$c_4 = a_x(t + \delta t, x(t) + c_{3x}\delta t, v_x(t) + c_3\delta t)$$
$$c_{4x} = v_x(t) + c_{3x}\delta t$$
$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + \frac{1}{6}[c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4] \times \delta t$$
$$x(t+\delta t) = x(t) + \frac{1}{6}[c_{1x} + 2c_{2x} + 2c_{3x} + c_{4x}] \times \delta t$$

no e-elarning: function rk4

```
def rk4(t,x,vx,acelera,dt):
    """
    Integração numérica de equação diferencial de 2ª ordem respeitante ao movir
    acelera=dvx/dt=Força(t,x,vx)/massa      com vx=dx/dt
   (acelera é uma função)
    input:  t = instante de tempo
            x(t) = posição
            vx(t) = velocidade
            dt = passo temporal
    output: x(t+dt),vx(t+dt)
    """
    ax1=acelera(t,x,vx)
    c1v=ax1*dt
    c1x=vx*dt
    ax2=acelera(t+dt/2.,x+c1x/2.,vx+c1v/2.)
    c2v=ax2*dt
    c2x=(vx+c1v/2.)*dt                          # predicto:  vx(t+dt) * dt
    ax3=acelera(t+dt/2.,x+c2x/2.,vx+c2v/2.)
    c3v=ax3*dt
    c3x=(vx+c2v/2.)*dt
    ax4=acelera(t+dt,x+c3x,vx+c3v)
    c4v=ax4*dt
    c4x=(vx+c3v)*dt
    xp=x+(c1x+2.*c2x+2.*c3x+c4x)/6.
    vxp=vx+(c1v+2.*c2v+2.*c3v+c4v)/6.
    return xp,vxp
```

4. Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador quártico forçado. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador quártico tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2}k\ \ x^2(1 + \ \alpha\ \ x^2)$$

e exerce no corpo a força

$$F_x = -k\ x\ (1 + 2\alpha x^2).$$

O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0 \cos\left(\omega_f t\right)$.

Considere $k = 1$ N/m, $b = 0.05$ kg/s, $\alpha = \ 0.002$ N/m^2, $F_0 = 7.5$ N e $\omega_f = 1.0$ rad/s.

a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 3 m.

Tem confiança no seu resultado?

b) Calcule a amplitude do movimento e o seu período no regime estacionário, usando os resultados numéricos.

c) Calcule os coeficientes de Fourier da oscilação no regime estacionário.