

Modelação de Sistemas Físicos

6ª aula Prática

Sumário:

Realização e resolução de problemas sobre:

- Movimento a 2 D e 3D

Bibliografia:

Problemas cap 4

1. Uma bola de futebol é chutada com velocidade de 100 km/h, a fazer um ângulo de 10° com o campo (horizontal).

a) Desenvolva um programa que obtenha a lei do movimento e a lei da velocidade em função do tempo, usando o método de Euler. Considere inicialmente só a força de gravidade.

Tem confiança que o seu programa está correto?

b) Atualize o seu programa de modo a considerar a força de resistência do ar. A força de resistência do ar ao movimento da bola é:

$$\begin{cases} F_x^{(res)} = -m D |\vec{v}| v_x \\ F_y^{(res)} = -m D |\vec{v}| v_y \end{cases}$$

em que $D = g/v_T^2$, e a velocidade terminal é $v_T = 100$ km/h.

Faça o gráfico da altura em função da distância percorrida na horizontal.

c) Nas condições da alínea b), determine qual a altura máxima atingida pela bola e em que instante. Tem confiança no seu resultado?

d) Nas condições da alínea b), qual o alcance (distância entre a posição onde foi chutada e o ponto onde alcançou no campo) da trajetória da bola e quanto tempo demorou? Tem confiança no seu resultado?

Projétil sem resistência do ar (Resultados pelo método analítico – resultados exatos-)

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \quad \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x} t \\ y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

- A condição de altura máxima é (quando $y(t)$ é máximo)

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} = 0 &\Leftrightarrow v_y = 0 \\ \Rightarrow t_m = \frac{v_{0y}}{g} &\text{ e } y_m = y_0 + \frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2}{g} \end{aligned}$$

- A condição de alcance é quando a bola bater no solo $y = 0$

$$\begin{aligned} y_0 = 0, x_0 = 0 &\quad \text{duas soluções } t = 0 \text{ e } t = \frac{2 v_{0y}}{g} \\ \text{a solução correta é} &\quad t_{\text{solo}} = \frac{2 v_{0y}}{g} \Rightarrow x_{\text{solo}} = \frac{2 v_{0x} v_{0y}}{g} \end{aligned}$$

Solução analítica para velocidade inicial de 100 km/h, a fazer um ângulo de 10° com o horizontal:

$$t_m, y_m, t_{\text{solo}}, x_{\text{solo}} = 0.492 \text{ s}, 1.187 \text{ m}, 0.984 \text{ s}, 26.929 \text{ m}$$

Problemas cap 4

1. Uma bola de futebol é chutada com velocidade de 100 km/h, a fazer um ângulo de 10° com o campo (horizontal).
 - a) Desenvolva um programa que obtenha a lei do movimento e a lei da velocidade em função do tempo, usando o método de Euler. Considere inicialmente só a força de gravidade.

Tem confiança que o seu programa está correto?

Solução:

a) Se os resultados forem iguais (com precisão de centésimas) pelo método de Euler e pelo método analítico, terei confiança. Vamos fazer este teste para o caso em que não existe resistência do ar.

- A altura máxima é o maior valor do **array y**
- Alcance: **o valor de x** correspondente ao valor de y mais perto de zero

δt (s)	Altura máxima (m)	Alcance (m)
0.1	1.431	30.09
0.01	1.211	27.08
0.001	1.189	26.95
0.0001	1.187	26.932
0.00001	1.187	26.929

- A altura máxima é 1.187 m e o alcance é 26.93 m, o que reproduz os valores determinados pelo método exato.
- Os **valores convergem quando δt diminui**

Tenho confiança!

Problemas cap 4

1. Uma bola de futebol é chutada com velocidade de 100 km/h, a fazer um ângulo de 10° com o campo (horizontal).

b) Atualize o seu programa de modo a considerar a força de resistência do ar. A força de resistência do ar ao movimento da bola é:

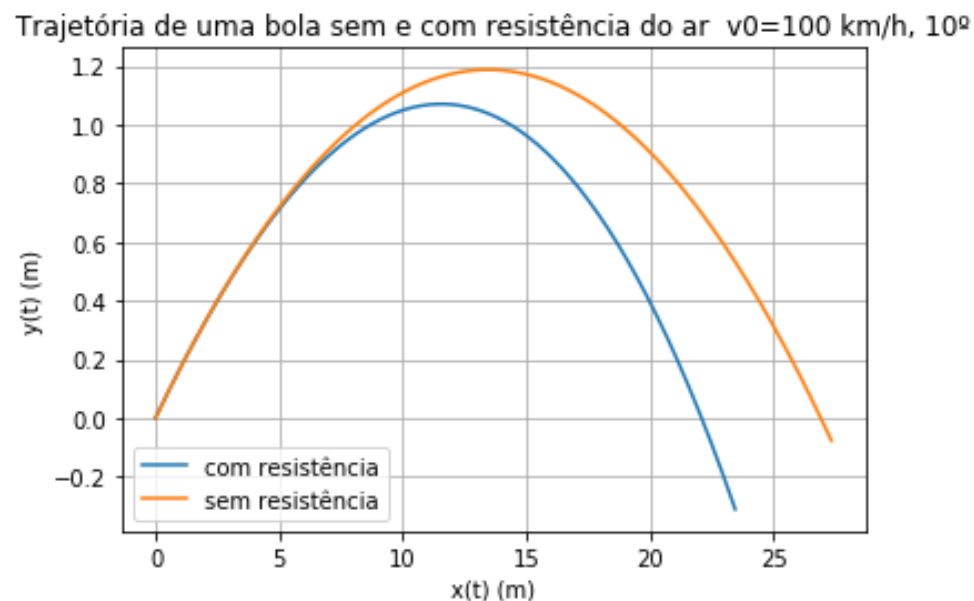
$$\begin{cases} F_x^{(res)} = -m D |\vec{v}| v_x \\ F_y^{(res)} = -m D |\vec{v}| v_y \end{cases}$$

em que $D = g/v_T^2$, e a velocidade terminal é $v_T = 100$ km/h.

Faça o gráfico da altura em função da distância percorrida na horizontal.

Solução:

b)



Problemas cap 4

1. Uma bola de futebol é chutada com velocidade de 100 km/h, a fazer um ângulo de 10° com o campo (horizontal).

b) Atualize o seu programa de modo a considerar a força de resistência do ar. A força de resistência do ar ao movimento da bola é:

$$\begin{cases} F_x^{(res)} = -m D |\vec{v}| v_x \\ F_y^{(res)} = -m D |\vec{v}| v_y \end{cases}$$

em que $D = g/v_T^2$, e a velocidade terminal é $v_T = 100$ km/h.

Faça o gráfico da altura em função da distância percorrida na horizontal.

c) Nas condições da alínea b), determine qual a altura máxima atingida pela bola e em que instante. Tem confiança no seu resultado?

d) Nas condições da alínea b), qual o alcance (distância entre a posição onde foi chutada e o ponto onde alcançou no campo) da trajetória da bola e quanto tempo demorou? Tem confiança no seu resultado?

Solução:

c), d)

δt (s)	Altura máxima (m)	Alcance (m)
0.1	1.305	23.719
0.01	1.092	22.260
0.001	1.072	22.135
0.0001	1.070	22.10
0.00001	1.070	22.10

A altura máxima é 1.070 m e o alcance é 22.10 m. As quantidades a determinar convergem com a diminuição do passo temporal, e anteriormente os resultados no caso sem resistência do ar coincidem com os valores exatos.

Problemas cap 4 Bola de futebol com rotação (terminar)

Problema:

Determinar se é golo ou não, a bola ser chutada do canto com rotação. Implementar o movimento da bola com rotação, usando o método de Euler. Modificar um programa anterior que seja semelhante e adicionar a parte do método de Euler correspondente à dimensão extra z

Dados:

$$\begin{aligned}\vec{r}_0 &= (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 23.8\text{m}) \\ \vec{v}_0 &= (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) = (25, 5, -50) \text{ m/s} \\ \vec{\omega} &= (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (0, 400 \text{ rad/s}, 0) \\ t_0 &= 0 \text{ s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Massa da bola} & \quad m = 0.45 \text{ kg} \\ \text{Raio da bola:} & \quad r = 11 \text{ cm} \\ \text{Área transversal da bola:} & \quad A = \pi r^2 \\ & \quad \rho_{ar} = 1.225 \text{ kg/m}^3\end{aligned}$$

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = (\omega_y v_z, 0, -\omega_y v_x) \text{ neste caso}$$

