Departamento de Eletrónica, Telecomunicações e Informática

Universidade de Aveiro

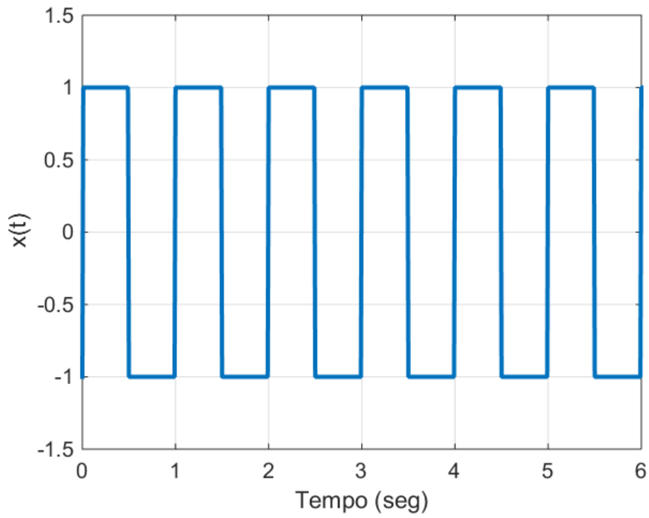
Sistemas Multimédia

2022/2023

Guião 03

I. Decomposição de Sinais em Série de Fourier

1. Determine as expressões de a_k e b_k correspondentes à representação do seguinte sinal em Série de Fourier:



Relembra-se que

$$x(t) = \sum_{k=0}^{K} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) = \sum_{k=0}^{K} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{K} b_k \sin(k\omega_0 t)$$

Para k>0

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt \quad \text{e} \quad b_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt, \quad \text{com } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Para k=0

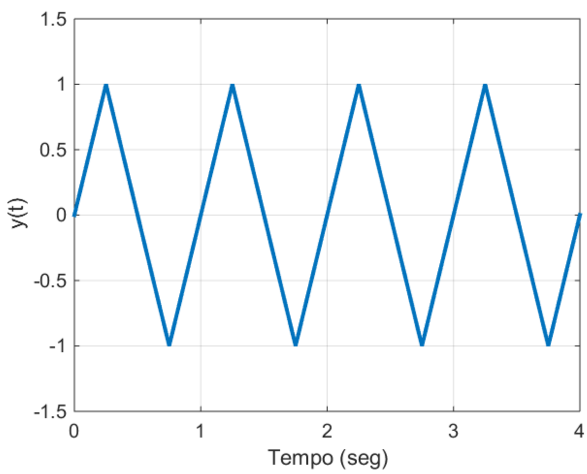
$$a_0 = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt$$

2. Desenvolva uma função em MATLAB que produza o sinal resultante da série de Fourier que é gerada a partir da seguinte informação:
   - T_a: Período de amostragem, em segundos;
   - f_0: Frequência do sinal composto, em Hz;
   - N_p: Número de períodos a considerar para o sinal resultante;
   - a_k: Vetor (Kx1) com os valores de a_k da série;
   - b_k: Vetor (Kx1) com os valores de b_k da série.

   Experimente esta função para os valores dos coeficientes da pergunta 1, e veja como progressivamente o resultado se vai aproximando do sinal representado nessa pergunta.

3. Desenvolva uma função em MATLAB que calcule os coeficientes a_k e b_k de um sinal periódico $x(n)$. Essa função deverá receber como argumentos de entrada:
   - T_a: Período de amostragem, em segundos;
   - T_0: Período do sinal, em segundos;
   - x: Vetor (Nx1) com as amostras sucessivas do sinal a decompor (deverá ser passado um número inteiro de períodos deste sinal, não devendo o último período ficar truncado);
   - K: Número de harmónicas a considerar na decomposição.

4. Teste a função desenvolvida na pergunta 3 para decompor o seguinte sinal (e, depois, reconstrua este sinal usando a função desenvolvida na pergunta 2):



1 –

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{2\pi f} = \frac{1}{f} = \frac{1}{1} = 1$$

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 x(t)\,dt = 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} 1\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} -1\,dt\right) = 2\left([t]_0^{\frac{1}{2}} + [-t]_{\frac{1}{2}}^{1}\right) = 2\left[\left(\frac{1}{2}-0\right)+\left(-1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right] = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = 2\times 0 = 0$$

$$a_k = \frac{2}{1}\int_0^1 x(t)\cos(2\pi k t)\,dt = 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi k t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} -\cos(2\pi k t)\,dt\right) = 2\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{0} -\cos(2\pi k t)\,dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi k t)\,dt\right) = 2\left(\left[\frac{-\operatorname{sen}(2\pi k t)}{2\pi k}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} + \left[\frac{\operatorname{sen}(2\pi k t)}{2\pi k}\right]_0^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{-\operatorname{sen}(0)}{2\pi k} + \frac{\operatorname{sen}(-\pi k)}{2\pi k} + \frac{\operatorname{sen}(\pi k)}{2\pi k} - \frac{\operatorname{sen}(0)}{2\pi k}\right) = 2\left(0 - \frac{\operatorname{sen}(k\pi)}{2\pi k} + \frac{\operatorname{sen}(k\pi)}{2\pi k} - 0\right) = 2\times 0 = 0 \longrightarrow \text{a função é ímpar}$$

$$\int \cos(2\pi k t)\,dt = \frac{\operatorname{sen}(2\pi k t)}{2\pi k} + c,\ c \in \mathbb{R}$$

$$b_k = \frac{2}{1}\int_0^1 x(t)\operatorname{sen}(2\pi k t)\,dt = 2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}(2\pi k t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} -\operatorname{sen}(2\pi k t)\,dt\right) = 2\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{0} -\operatorname{sen}(2\pi k t)\,dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}(2\pi k t)\,dt\right) = 2\left(\left[\frac{\cos(2\pi k t)}{2\pi k}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} + \left[\frac{-\cos(2\pi k t)}{2\pi k}\right]_0^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\cos(0)}{2\pi k} - \frac{\cos(-\pi k)}{2\pi k} - \frac{\cos(\pi k)}{2\pi k} + \frac{\cos(0)}{2\pi k}\right) = 2\left(\frac{1}{2\pi k} - \frac{\cos(\pi t)}{2\pi k} - \frac{\cos(\pi t)}{2\pi k} + \frac{1}{2\pi k}\right) = \frac{2}{\pi k} - \frac{2\cos(\pi k)}{\pi k} = \begin{cases} \frac{4}{\pi k}, & k \text{ é ímpar} \\ 0, & k \text{ é par} \end{cases},\ k \geq 1$$

$$\int \operatorname{sen}(2\pi k t)\,dt = \frac{-\cos(2\pi k t)}{2\pi k} + c,\ c \in \mathbb{R}$$