22/04/22

Vibración libre de un sistema lineal (SDOF)
- Un solo grado de libertad -

1) $\underbrace{m\ddot{x}(t)}_{\text{Fuerza inercial}} + \underbrace{c\cdot\dot{x}(t)}_{\text{amortiguamiento de tipo viscoso}} + \underbrace{K\cdot x(t)}_{\text{Fuerza elástica}} = 0$ (1.0)

2) $\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + W_n^2 x = 0$; con $W_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m}}$ ⇒ Frecuencia angular natural. (en ausencia de Fuerza)

⇒ Frecuencia de resonancia (cuando la fuerza exitadora se aproxima a la frecuencia)

Definimos:

$$\boxed{\overset{\text{zeta}}{\zeta} = \frac{c}{2\sqrt{K\cdot m}}}$$ ⇒ Razón amortiguamiento (adimensional)

$$\frac{c}{m} = \frac{2\zeta\sqrt{Km}}{m} = 2\zeta\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\right) = 2\zeta W_n$$

Así:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\zeta W_n\dot{x} + W_n^2 x = 0} \quad (2.0)$$

3) Una posible solución de (2.0):

$$x(t) = Ae^{\alpha t}$$
$$\dot{x}(t) = \alpha x(t)$$
$$\ddot{x}(t) = \alpha^2 x(t)$$

Sustituyendo:

$$[\alpha^2 + 2\zeta W_n\alpha + W_n^2]\cdot x(t) = 0$$

Ec. característica.

$$\alpha^2 + 2\zeta W_n\alpha + W_n^2 = 0 \Rightarrow$$

Resolviendo:

$$\alpha = W_n\left[-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right]$$

4) Caso 1: si $\zeta = 0$

$$\boxed{\alpha = \pm j W_n}$$

Se llama vibración libre no amortiguado.

5) Caso 2: si $0 < \zeta < 1$

$$\alpha = W_n \left[-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2} \right]$$

Se llama vibración libre "subamortiguado"

6) Caso 3:

si $\zeta = 1$

$$\boxed{\alpha = -W_n}$$

Vibración críticamente amortiguada.

7) Caso 4

si $\zeta > 1$

$$\alpha = W_n \left[-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \right]$$

vibración sobreamortiguada.

Ahora si:

Caso 1: No amortiguado
Supongamos que la solución es del tipo:

$$x(t) = B_1 e^{jW_n t} + B_2 e^{-jW_n t}$$

B_1 y B_2 son ctes de integración

$$x(t) = B_1 [\cos W_n t + j\sin W_n t] + B_2[\cos W_n t - j\sin W_n t]$$

$$= \underbrace{(B_1 + B_2)}_{C_1}\cos W_n t + \underbrace{j(B_1 - B_2)}_{C_2}\sin W_n t$$

$\therefore$ $x(t) = C_1 \cos W_n t + C_2 \sin W_n t$

$$\dot{x}(t) = -W_n C_1 \sin W_n t + W_n C_2 \cos W_n t$$

Condiciones iniciales: Son 2.

1) $x(0) = x_0$
2) $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

Usamos: $x(0) = C_1 = x_0$
Usamos: $\dot{x}(0) = W_n C_2 = \dot{x}_0 \Rightarrow C_2 = \frac{\dot{x}_0}{W_n}$

Luego:
$$x(t) = x_0 \cos W_n t + \frac{\dot{x}_0}{W_n} \sin W_n t$$

Una forma alternativa (Truco!)

$$x(t) = A \cdot \operatorname{Sen}(W_n t + \phi)$$

$$x(t) = A\left[\operatorname{Sen} W_n t \cdot \cos\phi + \cos W_n t \operatorname{Sen}\phi\right]$$

$$x(t) = A \operatorname{Sen} W_n t \cdot \cos\phi + A \cos W_n t \operatorname{Sen}\phi .$$

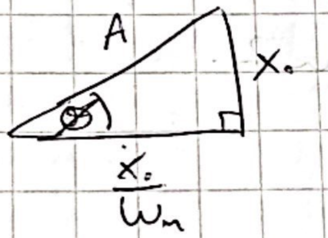
Si comparamos:

$$\begin{cases} x(t) = X_0 \cos W_n t + \dfrac{\dot{X}_0}{W_n} \operatorname{Sen} W_n t \\ x(t) = A \operatorname{Sen} W_n t \cos\phi + A \cos W_n t \cdot \operatorname{Sen}\phi \end{cases}$$

$\therefore$

$$A \operatorname{Sen}\phi = X_0 \qquad\qquad A\cos\phi = \frac{\dot{X}_0}{W_n}$$

$$\operatorname{Sen}\phi = \frac{X_0}{A} \qquad\qquad \cos\phi = A\,\frac{\dot{X}_0}{W_n}$$



Por pitagora:

Amplitud $\leftarrow A = \sqrt{X_0^2 + \dfrac{\dot{X}_0^2}{W_n^2}}$

fase $\leftarrow \phi = tg^{-1}\left(\dfrac{X_0 W_n}{\dot{X}_0}\right)$

Para un caso no amortiguado.