Instituto Superior Técnico
Mestrado em Engenharia de Informática e Computadores
Cinemática Direta e Inversa de Manipuladores Seriais

Matheus **89147**
Leonor Silva **81155**
Ricardo Pires **75513**

Lisboa - Portugal
13 de Abril de 2018

1 Resumo

A cinemática de um robô manipulador é o estudo da posição e da velocidade do seu efetuador e dos seus ligamentos. Quando nos referimos a posição, é também contemplado tanto a parte de orientação. A cinemática pode ser diferenciada em direta e a inversa. Nessa primeira é desejável a obtenção da posição e a orientação do efetuador, para uma dada posição das articulações. A cinemática inversa é o oposto da cinemática direta, ou seja, dado uma posição e a orientação do efetuador quer-se obter as posições e orientação correspondentes das articulações.

2 Cinemática Direta

A cinemática direta consiste na determinação da posição do end-effector e da sua orientação, dados os ângulos das juntas. Este método utiliza transformações matriciais sucessivas entre cada um dos referenciais até se obter a matriz de transformação homogénea que relaciona o primeiro e o último referencial do robô.

$$T_{06} = T_{01} * T_{12} * T_{23} * T_{34} * T_{45} * T_{56} * T_{67} * T_{78} \tag{1}$$

A posição do corpo n em relação ao n-1 pode ser representada por uma matriz de posição indicada com o símbolo T ou M. Através da substituição direta dos parâmetros D-H obtidos anteriormente, obtém-se a matriz de transformação homogénea para cada ligação do braço robótico, a partir da qual é possível retirar as expressões de cada um dos ângulos gerais, alfa, beta e gama obtendo-se portanto a orientação final do end-effector.

2.1 Denavit-Hartenberg

Os parâmetros de Denavit–Hartenberg ou também chamados de parâmetros DH são quatro parâmetros associados a uma convenção para fixar sistemas de referência aos elos de uma cadeia cinemática espacial, ou manipulador robótico.

2.2 Convenção de Denavit-Hartenberg

A evolução no tempo das coordenadas das juntas de um robô representa o modelo cinemático de um sistema articulado no espaço tridimensional. A notação de Denavit-Hartenberg é uma ferramenta utilizada para sistematizar a descrição cinemática de sistemas mecânicos articulados com N graus de liberdade.

No nosso caso as relação entre frames é dada pela imagem abaixo, onde o eixo de rotação é sempre em volta de x.

Tabela 1: Parâmetros Denavit-Hartenberg

α (rads)	a (mm)	d (mm)	θ (rads)
0	0	99	x1
$\pi/2$	30	0	x2 + $\pi/2$
0	120	0	x3
0	25	0	0
$\pi/2$	0	140	x4
$-\pi/2$	0	0	x5
$\pi/2$	0	0	x6
0	0	25	0

3 Cinemática Inversa

A importância da cinemática inversa é devido á necessidade de controlar os manipuladores. Este problema baseia-se em dados os ângulos no espaço das articulações converter em posição e orientação no espaço cartesiano. Existem duas abordagens a este problema: solução algébrica ou solução geométrica. No nosso trabalho optamos pela solução geométrica. Esta abordagem tem como base a decomposição do problema em segmentos menores de modo a separar o problema de obter a orientação e o de obter a posição. Ao observar a fisionomia do braço observamos que a posição é dada por $\theta 1$, $\theta 2$, $\theta 3$ e $\theta 5$, onde a quinta junta corresponde á posição antes do end-effector(chamado o pulso). Assim, basta eliminar a contribuição da quinta junta e a solução para $\theta 1$, $\theta 2$ e $\theta 3$ passa a ser um simples problema trigonométrico. Usando a equação de transformação de Denavit-Hartenberg temos que:

$$T_{06} = T_{05} * T_{56} \tag{2}$$

$$P_{06} = R_{05} * P_{56} + P_{05} \tag{3}$$

Assim, dado que sabemos a orientação do end-effector e dado que sabemos a representação do ponto 6 na frame $\P_{56}$ e que ambos os pontos têm a mesma orientação, obtemos a representação do ponto5 no world frame e, consequentemente, eliminamos a contribuição da última frame para a posição. Assim para encontrar $\theta 1$ basta considerar a distância em x e em y, e depois considerar o seu complementar. Para encontrar $\theta 2$ e $\theta 3$, o problema complica-se pois as juntas não tem um ponto de encontro, mas sim um desnível de 25 mm. Assim para evitar este problema, consideramos o desnível no fim da junta 3 em vez de entre a junta 2 e 3. A partir do momento, em que obtivemos $\theta 1$, $\theta 2$ e $\theta 3$,temos que:

$$R_{06} = R_{03} * R_{36} \tag{4}$$

e dado que,

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta 4)*\cos(\theta 5)*\cos(\theta 6)\text{-}\sin(\theta 4)*\sin(\theta 6) & -\cos(\theta 6)*\sin(\theta 4)\text{-}\cos(\theta 4)*\cos(\theta 5)*\sin(\theta 6) & \cos(\theta 4)*\sin(\theta 5) \\ \cos(\theta 6)*\sin(\theta 5) & -\sin(\theta 5)*\sin(\theta 6) & -\cos(\theta 5) \\ \cos(\theta 4)*\sin(\theta 6)+\cos(\theta 5)*\cos(\theta 6)*\sin(\theta 4) & \cos(\theta 4)*\cos(\theta 6)\text{-}\cos(\theta 5)*\sin(\theta 4)*\sin(\theta 6) & \sin(\theta 4)*\sin(\theta 5) \end{bmatrix}$$

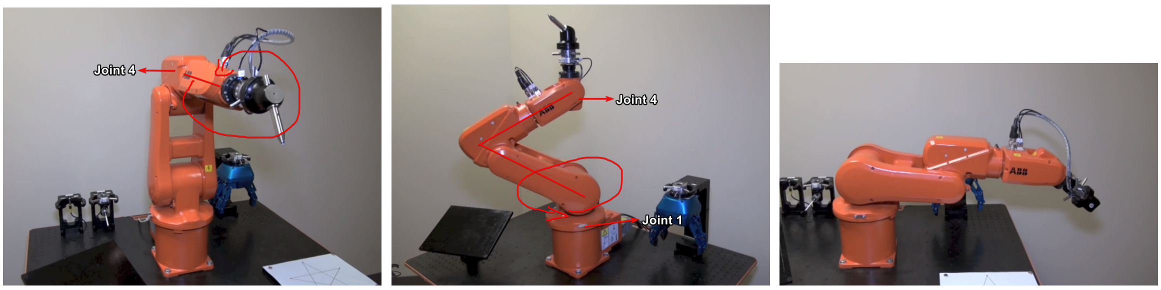
Para os restantes ângulos basta resolver um sistema de equações.
(5)

4 Singularidades

No processo de cálculo da cinemática inversa podem existir pontos nos quais existem infinitas configurações para o robô atingir esse ponto. Se não se lidar com as singularidades devidamente estas podem forçar o robô a ter de ser reiniciado e ao seu trabalho a ter de ser interrompido, pois este pode mover-se de formas imprevisíveis.

No caso do robô de laboratório este apresenta bastantes semelhanças ao PUMA 560, braço robótico industrial com 6 graus de liberdade. Daí se conclui que partilham as mesmas singularidades. Existem 3 tipos de singularidades neste caso.

Singularidade no pulso, que ocorre quando as juntas 4 e 6 estão alinhadas, isto faz com que a junta 4 e 6 possa ter infinitas posições. Singularidades no ombro estas ocorrem quando a junta 1 e 6 estão alinhadas isto permite que a junta 1 possa adquirir infinitos pontos. Singularidades de cotovelo, estas ocorrem quando o braço robótico se encontra totalmente extendido, ou seja, quando as juntas 2,3 e 4 estão no mesmo plano. O que acontece quando se tenta atingir posições para além do alcance do robô.



(a) Pulso (b) Ombro (c) Cotovelo

Figura 1: Singularidades

5 Instruções

O código está dividido em dois ficheiros matlab, sendo cada um deles uma função. Para correr o código, no caso da cinemática direta basta fazer:

$$[x, y, z, angz0, angy, angz1] = direct_kinematics(x1, x2, x3, x4, x5, x6) \tag{6}$$

onde (x,y,z) corresponde ao ponto obtido e (angz0,angy,angz1) corresponde á orientação. No caso da cinemática inversa basta fazer:

$$[result] = inverse_kinematics(x, y, z, angz0, angy, angz1) \tag{7}$$

onde result corresponde a uma matriz com todas os conjuntos de ângulos possíveis obtidos. No caso de um singularidade, um pop-up aparece identificando a singularidade.

6 Análise de Dados

6.1 Cinemática Direta

direct_kinematics(0, 0, 0, 0, 0, 0) = 195.000 -0.000 244.000 -0.000 1.571 3.142
direct_kinematics(pi, pi/6, 0, 0, pi, pi/2) = -57.093 0.000 282.074 -0.000 2.094 1.571
direct_kinematics(pi/2, pi/2, pi/2, pi/2, pi/2, pi/2) = 25.000 -230.000 74.000 -0.000 1.571 3.142
direct_kinematics(0, pi/2, 0, 0, pi/2, pi/2) = -140.000 -0.000 239.000 -3.142 1.571 1.571
direct_kinematics(0, pi/2, 0, 0, pi/3, 0) = -136.651 -0.000 251.500 -3.142 1.047 0.000
direct_kinematics(pi/6, pi, 0, pi, 0, pi/2) = -116.913 -67.500 -46.000 -2.618 1.571 -1.571
direct_kinematics(-pi, 0, pi/2, pi/2, 0, 0) = -5.000 -0.000 384.000 1.571 0.000 0.000
direct_kinematics(0, 0, 0, pi/2, pi/2, 0) = 170.000 -25.000 244.000 -1.571 1.571 -1.571
direct_kinematics(pi, pi, pi, pi, pi, pi) = -145.000 0.000 4.000 -0.000 1.571 0.000
direct_kinematics(pi, pi/4, pi/2, pi/4, pi/4, 0) = 192.864 12.500 268.831 0.530 1.424 0.530

6.2 Cinemática Inversa

$inverse\_kinematics(195, 0, 244, 0, 1.571, 3.142) =$

0	0	0.0018	0	0.0018	0
0	-1.5357	2.7900	3.1416	1.2543	-3.1416
3.1416	1.3170	0.7094	0	1.1152	-3.1416
3.1416	0.5700	2.0824	0	0.4892	-3.1416

$inverse\_kinematics(-57.093, 0.000, 282.074, -0.000, 2.094, 1.571) =$

3.1416	0.5236	0.0017	0	3.1394	1.5710
3.1416	-1.0122	2.7901	0	1.8869	1.5710
6.2832	1.1100	0.2948	3.1416	1.9280	1.5710
6.2832	-0.0950	2.4971	3.1416	2.9252	1.5710

$inverse\_kinematics(25, -230, 74, 0, 1.571, 3.142) = [wristsingularity]$

-1.5708	-0.9273	0.0018	-1.5708	1.5708	0.6453
-1.5708	-2.4630	2.7900	-1.5708	1.5708	1.8978
1.5708	1.7625	1.2192	1.5708	1.5708	1.7307
1.5708	1.5708	1.5726	1.5708	1.5708	1.5690

$inverse\_kinematics(-140, 0, 239, -3.142, 1.571, 1.571) = [wristsingularity]$

-3.1415	0.4615	-0.4054	3.1328	0.0563	1.5798
0.0001	1.5708	0.0019	-0.0005	1.5692	1.5710
0.0001	0.0351	2.7900	-0.0016	0.3168	1.5725

$inverse\_kinematics(-140, 0, 239, -3.142, 1.571, 0) = [wristsingularity]$

-3.1415	0.4615	-0.4054	3.1328	0.0563	0.0088
0.0001	1.5708	0.0019	-0.0005	1.5692	0
0.0001	0.0351	2.7900	-0.0016	0.3168	0.0015

$inverse_kinematics(-136.651, -0.000, 251.500, -3.142, 1.047, 0.000)$

-3.1415	0.4615	-0.4055	0.0009	0.4678	3.1405
0.0001	1.5708	0.0018	-0.0005	1.0452	0.0000
0.0001	0.0351	2.7900	-3.1396	0.2073	3.1394

$inverse\_kinematics(-5, 0, 384, -1.571, 0, 0) =$

-3.1416	0.1917	1.2192	0	0.1599	-1.5710
-3.1416	0	1.5726	1.5710	0.0018	0

$inverse\_kinematics(170, -25, 244, -1.571, 1.571, -1.571) = [wristsingularity]$

0	0	0.0019	1.5710	1.5710	-0.0021
0	-1.5357	2.7899	1.5707	1.5711	-1.2545
3.1416	1.3169	0.7096	-1.5709	1.5711	-1.1153
3.1416	0.5701	2.0822	-1.5707	1.5711	-0.4895

$inverse\_kinematics(-145, 0, 4, 0, 1.571, 0) =$

3.1416	-1.1924	-0.3516	3.1416	1.5974	-3.1416
3.1416	-3.1416	-3.1434	3.1416	3.1395	-3.1416
6.2832	2.6358	0.2606	3.1416	2.8967	0
6.2832	1.3926	2.5312	0	2.3592	-3.1416

$inverse\_kinematics(192.864, 12.500, 268.831, 0.530, 1.424, 0.530) = [elbowsingularity]$

0	-0.0591	0.2164	-1.5494	0.5239	-0.9800
0	-1.3518	2.5754	-2.5552	1.1285	0.3385
3.1416	0.9770	1.2195	0.6898	0.9041	0.1438
3.1416	0.7855	1.5724	0.7866	0.7844	0.0016

$inverse\_kinematics(0, 0, 200, 0, 0, 0) = [shouldersingularity]$

0	1.9033	-1.1343	0	0.8018	-3.1416
3.1416	1.9033	1.1343	0	0.8018	0

* Apesar de os resultados apenas apresentarem 3 casas decimais, para o cálculo da cinemática inversa foram utilizados os resultados totais apresentados pelo matlab para se conseguir obter a máxima precisão.

** Quando uma singularidade é encontrada o programa lança uma mensagem referindo o tipo de singularidade.