Actividad 8

Ricardo Ruiz Hernández

12 de abril, 2018

1 Modelo de Van der Pol

Este modelo es con amortiguamiento no lineal y que además es no conservativo, se puede describir por la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{1}$$

siendo x la posición, t función del tiempo y μ un parámetro escalar para el amortiguamiento

1.1 Historia

Van der Pol fue un ingeniero eléctrico y físico alemán, quien propuso este oscilador que lleva su nombre. Esta propuesta de modelo se origina al momento en que encuentra oscilaciones estables, mismas que actualmente son conocidas como ciclos límite de los circuitos eléctricos. Así pues, Van der Pol junto a Van der Mark, publicaron en la revista Nature en 1927 (septiembre), la conclusión de que, en ciertas frecuencias de conducción se escuchaba un ruido irregular, mismo que más adelante se sabría que se trataba de un caos determinista.

1.2 Forma bidimensional

Mediante la transformación de Liénard ($y = x - x^3/3 - \dot{x}/\mu$) se puede expresar en dos ecuaciones de primer orden:

$$\dot{x} = \mu(x - \frac{1}{3}x^3 - y) \tag{2}$$

$$\dot{y} = \frac{1}{\mu}x \tag{3}$$

Nombrando $y = \dot{x}$ queda:

$$\dot{x} = y \tag{4}$$

$$\dot{y} = \mu(1-x^2)y - x \tag{5}$$

1.3 Resultados del oscilador no forzado

Existen dos características que podemos destacar de este oscilador cuando el no hay forzamiento.

- Cuando μ=0, no hay amortiguamiento, por lo que la ecuación queda de la siguiente manera:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \tag{6}$$

  A partir de esto, se puede decir que se convierte en un oscilador armónico simple.

- El otro caso se da cuando $\mu_>0$, aquí, el sistema entra en lo que se conoce como ciclo límite; esto quiere decir que fuera del origen, el sistema tiene amortiguamiento, mientras que cerca del mismo, el sistema se vuelve inestable.

1.4 Hamiltoniano para el oscilador de Van der Pol

Podemos escribir la ecuación de Van der Pol haciendo uso de un Hamiltoniano que no dependa del tiempo, lo que aumenta a un sistema dinámico autónomo de cuatro dimensiones, con ello obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \tag{7}$$

$$\ddot{y} + \mu(1 - x^2)\dot{y} + y = 0 \tag{8}$$

El Hamiltoniano se obtiene de la siguiente manera:

$$H(x, y, p_x, p_y) = p_x p_y + xy - \mu(1 - x^2)yp_y \tag{9}$$

Siendo p_x y p_y los momentos.

1.5 Oscilador de Van del Pol Forzado

Este oscilador agrega a la ecuación la función A(ωt), siendo A la amplitud y ω la velocidad angular, quedando la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + Asin(\omega t) = 0$$

2 Exploración de las soluciones del modelo en el espacio fase

Se crearon gráficas de posición contra tiempo, la fase y el mencionado ciclo límite.
Los códigos son presentados a continuación: