Cero de funciones y Sistemas de ecuaciones no lineales
Cálculo Numérico (2514) Lectura 3

Prof. Gilberto Noguera

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica

Resumen El documento contiene los elementos mínimos y necesarios para discutir y profundizar, en clases, los temas: (1) Raices de una función real por los métodos: bisección, Newton, secante y punto fijo. (2) Sistemas de ecuaciones no lineales métodos: de Newton y cuasi-Newton.

1. Conceptos básicos

- $\mathbb{R}$: conjunto de números reales.
- $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a$ y $x \leq b\}$.
- $C(D)$: conjunto de funciones $f : D \to \mathbb{R}$ continuas en un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$.
- $C^1(D)$: conjunto de funciones $f : D \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciables en un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$.
- $C^2(D)$: conjunto de funciones $f : D \to \mathbb{R}$ dos veces continuamente diferenciables en un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$.
- $C^n(D)$: conjunto de funciones $f : D \to \mathbb{R}$ n veces continuamente diferenciables en un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$.

Definición 1 *Sea $\widetilde{x} \in \mathbb{R}$ una aproximación al valor de $x \in \mathbb{R}$. El* **error absoluto**, *denotado por e_a, se define como*

$$e_a = |x - \widetilde{x}|.$$

El **error relativo**, *denotado por e_r, se define como*

$$e_r = \frac{|x - \widetilde{x}|}{|x|}.$$

Ejemplo 1 *Sean $x_1 = 1{,}31$ y $x_2 = 0{,}12$. Si $\widetilde{x}_1 = 1{,}30$ y $\widetilde{x}_2 = 0{,}11$, entonces*

$$e_a(x_1) = e_a(x_2) = 0{,}01,$$

$$e_r(x_1) = \frac{0{,}01}{1{,}31} = 0{,}007634 \quad y \quad e_r(x_2) = \frac{0{,}01}{0{,}12} = 0{,}083333$$

Observación 1 *En la práctica*

- *no se conocen los errores, por lo tanto se asignan cotas, $EA(x) < \delta_x$ y $ER(x) < \varepsilon_x$.*
- *si el proceso termina en n pasos entonces,*

$$EA(x) = |x_{n-1} - x_n| \text{ y } ER(x) = \frac{|x_{n-1} - x_n|}{x_n}, \text{ si } x_n \neq 0.$$

Ejemplo 2 *Sean* $x_{1,n} = 1{,}51$ *y* $x_{2,n} = 0{,}11$. *Si* $x_{1,(n-1)} = 1{,}50$ *y* $x_{2,(n-1)} = 0{,}10$, *entonces*

$$EA(x_1) = EA(x_2) = 0{,}01,$$
$$ER(x_1) = \frac{0{,}01}{1{,}51} = 0{,}006623$$
$$ER(x_2) = \frac{0{,}01}{0{,}11} = 0{,}090909$$

Definición 2 *Sea* $x^\star \in \mathbb{R}$ *una aproximación al valor de* $x \in \mathbb{R}$, *si* d *es el mayor entero para el cual:*

1.
$$EA(x) \leq \frac{1}{2} \times 10^{-d}.$$
se dice que la aproximación se ha realizado con d *decimales exactos.*

2.
$$ER(x) \leq 5 \times 10^{-d}.$$
se dice que la aproximación se ha realizado con d *dígitos significativos.*

Ejemplo 3 *Sean* $x_1 = 1{,}51$ *y* $x_2 = 0{,}11$. *Si* $x_1^\star = 1{,}50$ *y* $x_2^\star = 0{,}10$, *entonces*

$$EA(x_1) = EA(x_2) = 0{,}01 = 0{,}1 \times 10^{-1} < 0{,}5 \times 10^{-d},$$

en ambos casos la aproximación se realiza con un decimal exacto.

$$ER(x_1) = \frac{0{,}01}{1{,}51} = 0{,}006623 = 0{,}6623 \times 10^{-2} < 5 \times 10^{-d}$$

aproximación con dos dígitos significativos.

$$ER(x_2) = \frac{0{,}01}{0{,}11} = 0{,}090909 = 0{,}90909 \times 10^{-1} < 5 \times 10^{-d}$$

aproximación con un dígito significativo.

Definición 3 (Cero de orden p) *Sea* f *una función a valores reales. Se dice que* $x^\star$ *es un cero de orden* p *de* f *si:*
$$f(x^\star) = f'(x^\star) = \cdots = f^{(p-1)}(x^\star) = 0$$
y
$$f^{(p)}(x^\star) \neq 0.$$
En el caso $p = 1$, *se dice que* $x^\star$ *es un cero simple de* f.

Sea $\{x_k\}$ una sucesión que converge a $x^\star$, las siguientes definiciones nos proveen de un método para referirnos a la forma como estas convergen.

Definición 4 (Convergencia q-lineal) *Se dice que la sucesión* $\{x_k\}$ *converge* q*-linealmente a* $x^\star$, *si existe una constante positiva* $c < 1$ *y un entero positivo* K *tales que*

$$|x_{k+1} - x^\star| \leq c\,|x_k - x^\star|, \quad \text{para } k \geq K.$$

Definición 5 (Convergencia q-superlineal) *Se dice que la sucesión $\{x_k\}$ converge q-superlinealmente a $x^\star$, si existe una sucesión de números positivos $\{\varepsilon_k\}$ que tiende a 0 y un entero positivo K tales que*

$$|x_{k+1} - x^\star| \leq \varepsilon_k \, |x_k - x^\star|, \quad \text{para } k \geq K.$$

Definición 6 (Convergencia q-cuadrática) *Se dice que la sucesión $\{x_k\}$ converge q-cuadráticamente a $x^\star$, si existe una constante positiva c y un entero positivo K tales que*

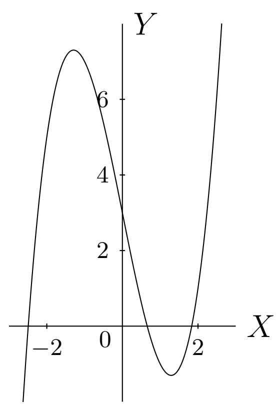
$$|x_{k+1} - x^\star| \leq c \, |x_k - x^\star|^2, \quad \text{para } k \geq K.$$

Definición 7 (Convergencia de orden p) *Sea $p > 0$. Se dice que la sucesión x_k posee convergencia de orden p a $x^\star$ si existe una constante positiva c y un entero positivo K tales que*

$$|x_{k+1} - x^\star| \leq c \, |x_k - x^\star|^p, \quad \text{para } k \geq K.$$

Teorema 1 (Teorema del Valor Intermedio) *Sea $f \in C[a,b]$. Entonces, para cualquier $y \in f([a,b])$ existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = y$.*

Teorema 2 (Bolzano) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, tal que $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe $s \in (a,b)$ tal que $f(s) = 0$.*



Consideraremos el problema de encontrar $x^\star \in [a,b]$ tal que $f(x^\star) = 0$, donde $f \in C[a,b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$.

1.1. Método de bisección

El método de Bisección genera las sucesiones $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ y $\{c_k\}$ dadas por

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}, \quad \text{para } k \geq 0,$$

$$a_k = \begin{cases} c_{k-1}, & \text{si } f(a_{k-1})f(c_{k-1}) > 0; \\ a_{k-1}, & \text{si } f(a_{k-1})f(c_{k-1}) < 0; \end{cases}$$

$$b_k = \begin{cases} b_{k-1}, & \text{si } f(a_{k-1})f(c_{k-1}) > 0; \\ c_{k-1}, & \text{si } f(a_{k-1})f(c_{k-1}) < 0; \end{cases}$$

para $k \geq 1$, donde $a_0 = a$ y $b_0 = b$.

La siguiente figura sirva para ilustrar de manera simple la concepción del método

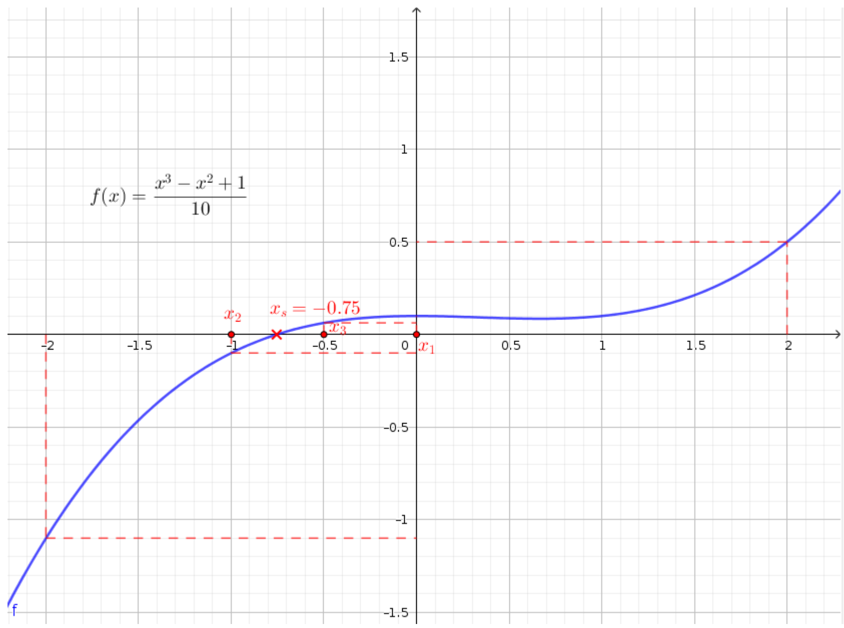


Figura 1. Ejemplo gráfico de bisección

Algoritmo 1 Método de bisección

Entrada: $f \in C[a,b]$ y $a < b$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$
Salida: $x^\star$

$a_0 = a$;
$b_0 = b$;
$c_0 = (a_0 + b_0)/2$;
$k = 0$;
mientras $|f(c_k)| > 0$ **hacer**
  si $f(a_k) \cdot f(c_k) < 0$ **entonces**
    $b_{k+1} = c_k$;
  si no
    $a_{k+1} = c_k$;
  fin si
  $c_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2$;
  $k = k + 1$;
fin mientras
$x^\star = c_{k+1}$

Teorema 3 *Sean $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ y $\{c_k\}$ las sucesiones generadas por el Método de Bisección. Entonces,*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} c_k = x^\star,$$

donde $x^\star \in (a,b)$ es un cero de $f(x)$. Además,

$$|c_k - x^\star| \leq \frac{1}{2^{k+1}}(b-a), \quad \text{para } k \geq 0.$$

Donde a_k, b_k corresponde a los extremos de los subintervalos generados en el proceso y c_k a los puntos medios de cada sub intervalos. El método de bisección converge q-linealmente.

1.2. Método de Newton

En este caso se obtiene una sucesión de aproximaciones partiendo de un valor inicial x_0, que debe ser dado o elegido convenientemente. Una vez conocida una aproximación, digamos x_k, la siguiente,

x_{k+1} se obtiene hallando un punto de corte de la correspondiente recta tangente a la curva en el punto $(x_k, f(x_k))$ con el eje de las abscisas. El método de Newton genera una sucesión de puntos obtenidos por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

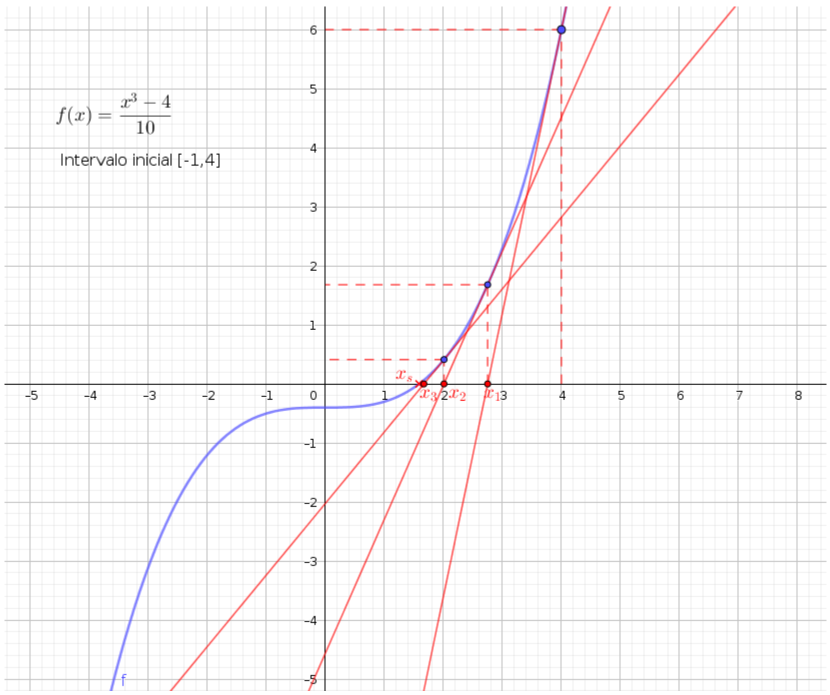


Figura 2. Ejemplo gráfico de Newton

Algoritmo 2 Método de Newton

Entrada: $f \in C^1[a,b]$, $a < b$, $x_0 \in [a,b]$, y $f'(x)$.
Salida: $x^\star$

$k = 0$;
mientras $|f(x_k)| > 0$ **hacer**
    $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$;
    $k = k + 1$;
fin mientras
$x^\star = x_{k+1}$

Teorema 4 *Sean $f \in C^2(\mathbb{R})$ y $x^\star$ un cero simple de f. Existen $\delta > 0$ y una constante positiva c tal que si $|x_0 - x^\star| < \delta$, entonces la sucesión $\{x_k\}$ generada por el método de Newton converge a $x^\star$, además satisface, para $k \geq 0$:*

$$|x_k - x^\star| < \delta$$

y

$$|x_{k+1} - x^\star| \leq c\,|x_k - x^\star|^2.$$

Observación 2

- *Requiere una buena aproximación inicial. De lo contrario diverge.*
- *El método tiene convergencia q-cuadrática.*
- $f'(x_k) \neq 0$, *pero toma valores muy pequeños el método diverge.*

1.3. Método de la secante

Este método constituye una alternativa al de Newton cuando el obtener la derivada asociada se convierte en un proceso engorroso, en estos casos lo mejor es aproximar la derivada dando entrada al método de secante cuyos iterados se obtienen a partir de

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}\, f(x_k)$$

Algoritmo 3 Método de la secante

Entrada: $f \in C^1[a,b]$, $a < b$, y $x_0, x_1 \in [a,b]$.
Salida: $x^\star$

```
k = 1;
mientras |f(x_k)| > 0 hacer
    x_{k+1} = x_k - (x_k - x_{k-1}) / (f(x_k) - f(x_{k-1})) f(x_k);
    k = k + 1;
fin mientras
x* = x_{k+1}
```

$k = 1$;
mientras $|f(x_k)| > 0$ **hacer**
  $x_{k+1} = x_k - \dfrac{(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}\, f(x_k)$;
  $k = k + 1$;
fin mientras
$x^\star = x_{k+1}$

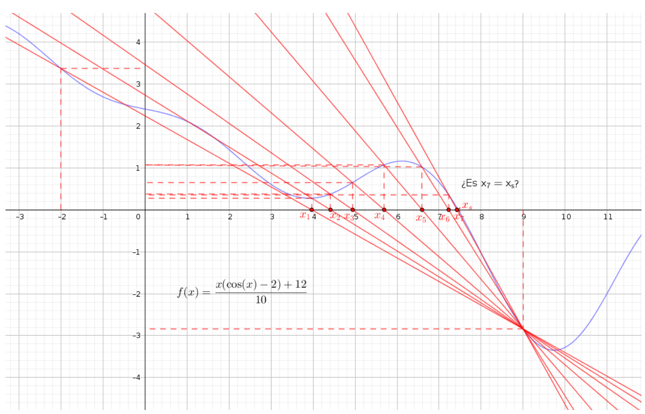


Figura 3. Ejemplo gráfico de la secante

Teorema 5 *Sean $f \in C^2(\mathbb{R})$ y $x^\star$ un cero simple de f. Entonces la sucesión $\{x_k\}$ generada por el método de la Secante converge a $x^\star$ y satisface, para $k \geq 0$:*

$$|x_{k+1} - x^\star| \leq A\,|x_k - x^\star|^{(1+\sqrt{5})/2},$$

donde

$$A = \left(\frac{|f''(x^\star)|}{2|f'(x^\star)|}\right)^{0{,}62}.$$

Observación 3

- *El método tiene una convergencia de orden* $p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- *Se tienen que dar dos valores iniciales, no importa si los valores dados no encierran la raíz.*

1.4. Método de punto fijo

Consideraremos el problema de encontrar $x \in [a, b]$ tal que

$$g(x) = x,$$

donde $g \in C[a, b]$. Un punto $s \in [a, b]$ que satisface la ecuación anterior se denomina ***punto fijo*** de g.

Proposición 1 *Sea $g \in C[a, b]$ tal que $a \leq g(x) \leq b$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces, g tiene al menos un punto fijo en $[a, b]$.*

Definición 8 *Sea $g(x)$ una función a valores reales. Se dice que g es una **función contractiva** si existe $0 < \lambda < 1$ tal que*

$$|g(x) - g(y)| \leq \lambda\, |x - y|,$$

para todo x e y en el dominio de g.

Proposición 2 *Sea $g \in C[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$. Supongamos también que g es una función contractiva en $[a, b]$. Entonces, g tiene un único punto fijo $s \in [a, b]$ y la sucesión $\{x_k\}$ definida por*

$$x_{k+1} = g(x_k), \qquad \text{para } k \geq 0,$$

con $x_0 \in [a, b]$ dado, converge al punto fijo s.

Teorema 6 *Supongamos que $g \in C^1[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$. Supongamos también que, $\lambda = \max_{x\in[a,b]} |g'(x)| < 1$. Entonces:*

I.- *g tiene un único punto fijo en $[a, b]$.*

II.- *Para $x_0 \in [a, b]$, la sucesión $\{x_k\}$ definida como*

$$x_{k+1} = g(x_k) \qquad \text{para } k \geq 0,$$

converge al único punto fijo de g en $[a, b]$.

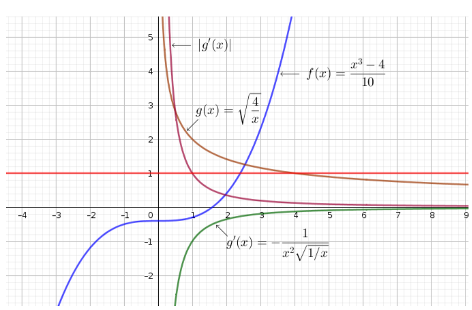


Figura 4. Diferentes propuestas de funciones punto fijo, $g(x)$

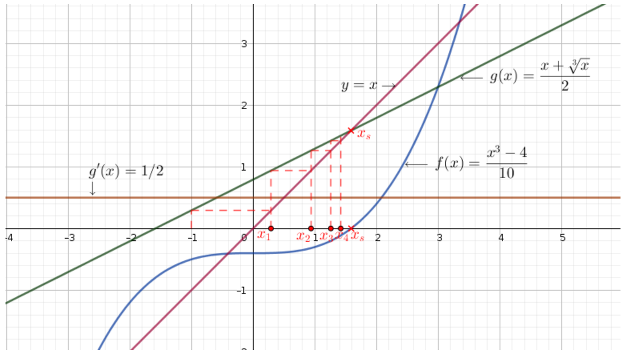


Figura 5. Función de punto fijo más apropiada

Algoritmo 4 Método punto fijo

Entrada: $g \in C[a,b]$, $a < b$, y $x_0 \in [a,b]$.

$x^\star$

$k = 1$;

mientras $|x_{k+1} - x_k| > 0$ **hacer**

  $x_{k+1} = g(x_k)$;

  $k = k + 1$;

fin mientras

$x^\star = x_{k+1}$

Observación 4 *La dificultad del método proviene de la determinación apropiada de la función $g(x)$.*

Ejemplo 4 *Encontremos la raíz de la ecuación*

$$f(x) = x^3 - 3 = 0 \tag{1}$$

utilizando la iteración de punto fijo.

Solución:

Se pueden definir muchas funciones de punto fijo. A continuación definimos tres.

- *Sumando x en ambos lados de la ecuación (1) se obtiene $x = x^3 + x - 3$, luego una función de punto fijo es*

$$g_1(x) = x^3 + x - 3$$

  y la iteración de punto fijo es

$$x_{k+1} = x_k^3 + x_k - 3, \quad \textit{para } k \geq 0.$$

- *Tenemos que*

$$x \cdot x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{x}$$
$$x = \sqrt{\frac{3}{x}},$$

  luego otra función de punto fijo es

$$g_2(x) = \sqrt{\frac{3}{x}}$$

  y la iteración de punto fijo es $x_{k+1} = \sqrt{\frac{3}{x_k}}$, para $k \geq 0$.

- *Tenemos que*

$$
\begin{aligned}
2x^3 - x^3 &= 3 \\
x \cdot 2x^2 &= 3 + x^3 \\
x &= \frac{3 + x^3}{2x^2},
\end{aligned}
$$

luego la última función de punto fijo es

$$g_3(x) = \frac{3 + x^3}{2x^2}$$

y la iteración de punto fijo es

$$x_{k+1} = \frac{3 + x_k^3}{2x_k^2}, \quad \text{para } k \geq 0.$$

¿Satisfacen las funciones g_1, g_2 y g_3 las hipótesis de punto fijo en el intervalo $[1, 2]$?

Teorema 7 *Sea $x^\star$ una raíz de $x = g(x)$, con la función $g(x)$ $p \geq 2$ veces continuamente diferenciable en un entorno de $x_\star$. Además supongamos que*

$$g^{(j)}(x^\star) = 0 \;\; \forall j < p$$

Si se elige x_0 suficientemente cerca de $x^\star$ el método de punto fijo converge a $x^\star$ con un orden de al menos p.

2. Sistemas de ecuaciones no lineales

Consideraremos el problema de encontrar $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$F(x) = 0, \tag{2}$$

donde $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable tal que

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^T,$$

donde $f_i : O \to \mathbb{R}$. La Ecuación (2) se denomina **sistema de ecuaciones no lineales**.

Definición 9 *La matriz Jacobiana $F'(x)$ de $F(x)$ se define como*

$$F'(x)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x).$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo 5 *Hallar la matriz Jacobiana de*

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 10x_1^2 + \cos(x_2) - 12 \\ x_1^4 + 6x_2 - 2 \end{pmatrix}$$

Solución. *La función $F(x_1, x_2)$ se puede expresar como*

$$F(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))^T,$$

donde $f_1(x_1, x_2) = 10x_1^2 + \cos(x_2) - 12$ y $f_2(x_1, x_2) = x_1^4 + 6x_2 - 2$. Además,

$$\nabla f_1 = (20x_1, \, -\sin(x_2))^T, \qquad \nabla f_2 = (4x_1^3, \, 6)^T.$$

Luego,

$$F'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \nabla f_1^T \\ \nabla f_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20x_1 & -\sin(x_2) \\ 4x_1^3 & 6 \end{pmatrix}$$

2.1. Método de Newton

Dado un iterado $x_c \in \mathbb{R}^n$, el **método de Newton** genera un nuevo iterado $x_+ \in \mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

$$x_+ = x_c - F'(x_c)^{-1}F(x_c). \tag{3}$$

El método de Newton se obtiene como una linealización del sistema no lineal (2). En efecto, supongamos que $x^* \in \mathbb{R}^n$ es solución del sistema (2).

Ahora, el desarrollo de Taylor de F alrededor de x_c

$$F(x) = F(_c) + F'(_c)(x - x_c) + E(x_c),$$

es decir,

$$F(x) \approx F(x_c) + F'(x_c)(x - x_c). \tag{4}$$

Tomando $x = x^*$ en la Ecuación (4) obtenemos:

$$0 \approx F(x_c) + F'(x_c)(x^* - x_c)$$

de donde se deduce

$$x^* \approx x_c - F'(x_c)^{-1}F(x_c).$$

Algoritmo 5 Método de Newton para sistema de ecuaciones no lineales

Entrada: $x_0 \in \mathbb{R}^n$
Salida: $x^\star$

1: **para** $k = 0, 1, 2, \ldots$ **hacer**
2:     Resolver el sistema lineal $F'(x_k)s_k = -F(x_k)$;
3:     $x_{k+1} = x_k + s_k$;
4: **fin para**
5: $x^\star = x_{k+1}$

2.2. Métodos Cuasi-Newton

En general los métodos **Cuasi-Newton** tienen la forma:

$$x_{k+1} = x_k - H_k^{-1}F(x_k), \quad \text{para } k \geq 0$$

donde H_k es una matriz $n \times n$ tal que

$$H_k \approx F'(x_k).$$

Después del cálculo de x_{k+1}, la matriz H_{k+1} se obtiene utilizando la matriz H_k.

La ventaja de estos métodos es que la resolución del sistema de ecuaciones lineales

$$H_k s_k = -F(x_k)$$

resulta ser a menudo más apropiada que la resolución del sistema

$$F'(x_k)s_k = -F(x_k)$$

Newton modificado El método de Newton modificado se define como

$$x_{k+1} = x_k - F'(x_0)^{-1}F(x_k), \quad \text{para } k \geq 0.$$

Newton con diferencia finita El método de Newton con diferencia finita se define como

$$x_{k+1} = x_k - H_k^{-1}F(x_k), \quad \text{para } k \geq 0$$

donde $H_k \approx F'(x_k)$ tal que su j-ésima columna es

$$(H_k)_j = \frac{1}{h_k}\left[F(x_k + h_k e_j) - F(x_k)\right]$$

con $h_k > 0$ pequeño y e_j es el vector cuya única componente distinta de cero e igual a uno es la j-ésima.

Método de Jacobi para sistemas no lineales Sea $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^T$, donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$.

El método de **Jacobi** para resolver el sistema

$$F(x) \equiv \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

consiste en crear **iteraciones de punto fijo**

$$x_i = g_i(x), \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

tales que permitan resolver cada una de las ecuaciones no lineales

$$f_i(x) = 0, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

Ejemplo 6 *Hallar una fórmula iterativa de Jacobi para resolver el sistema de ecuaciones no lineales*

$$\begin{cases} \ln(y - x + 2 - \pi) + y^2 = \pi^2 \\ xy + \operatorname{sen} y = \pi \end{cases}$$

el cual tiene una solución de la forma $(1, \pi)^T$.

Solución.

Despejando y en la primera ecuación y x en la segunda ecuación tenemos que

$$y = g_1(x, y) \equiv \sqrt{\pi^2 - \ln(y - x + 2 - \pi)}$$

$$x = g_2(x, y) \equiv \frac{\pi - \operatorname{sen} y}{y}$$

Luego, una fórmula iterativa de Jacobi es

$$y_{k+1} = \sqrt{\pi^2 - \ln(y_k - x_k + 2 - \pi)}$$

$$x_{k+1} = \frac{\pi - \operatorname{sen} y_k}{y_k}$$