

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Cálculo Numérico (2514) Lectura 6

Prof. Gilberto Noguera

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica

Resumen El documento contiene los elementos mínimos y necesarios para discutir y profundizar, en clases, el tema Ecuaciones diferenciales Ordinarias. Valores de frontera.

1. Problema de Valor Inicial

Consideremos la ecuación diferencial con condición inicial

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

donde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, y x es una función real desconocida. Supongamos que $x(t)$ es diferenciable en una vecindad de t_0 . El problema (1) se denomina **problema de valor inicial**.

El siguiente teorema muestra las condiciones que se deben satisfacer para que el problema de valor inicial (1) pasea al menos una solución.

Teorema 1 Si f es continua en un rectángulo R centrado en (t_0, x_0) ,

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |t - t_0| \leq \alpha, \quad |x - x_0| \leq \beta\}, \quad (2)$$

entonces el problema de valor inicial (1) tiene una solución $x(t)$ para todo t tal que

$$|t - t_0| \leq \min(\alpha, \beta/M),$$

donde $M > 0$ es tal que $|f(t, x)| \leq M$ para todo $(t, x) \in R$.

Ejemplo 1 El problema de valor inicial

$$x' = \sqrt{|x|}, \quad x(0) = 0, \quad (3)$$

tiene solución única para todo $t \in \mathbb{R}$.

Se tiene que $f(t, x) = \sqrt{|x|}$. Luego, f es continua en todo $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. Por el Teorema 1, el problema de valor inicial (3) tiene una solución $x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observación 1 Algunos problemas de valor inicial pueden tener más de una solución.

El siguiente teorema presenta las condiciones que se deben satisfacer para que el problema de valor inicial (1) tenga solución única.

Teorema 2 Si f y $\partial f / \partial x$ son continuas en el rectángulo R definido por (2), entonces el problema de valor inicial (1) tiene una solución única en el intervalo

$$(t_0 - \min(\alpha, \beta/M), t_0 + \min(\alpha, \beta/M)),$$

donde $M > 0$ es tal que $|f(t, x)| \leq M$ para todo $(t, x) \in R$.

El siguiente teorema presenta otras condiciones para que el problema de valor inicial (1) tenga una solución única.

Teorema 3 Supongamos que f es continua en la franja $a \leq t \leq b$, $-\infty < x < \infty$. Supongamos también que f satisface la condición de Lipschitz en la segunda variable, es decir, existe una constante $L > 0$ tal que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L |x_1 - x_2|,$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Entonces, el problema de valor inicial (1) tiene una solución única en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 2 El problema de valor inicial

$$x' = 2t e^{-x}, \quad x(0) = 0, \quad (4)$$

tiene una solución única para todo $t \in \mathbb{R}$.

Tenemos que $f(t, x) = 2t e^{-x}$. Es claro que f es continua en todo $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. Además,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = -2t e^{-x}$$

también es continua en todo $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. Así, por el Teorema 2 podemos asegurar que el problema de valor inicial (4) tiene solución única para todo $t \in \mathbb{R}$.

Pasemos a demostrar este mismo hecho, pero ahora utilizando el Teorema 3.

Probemos que $f(t, x)$ satisface la condición de Lipschitz en la segunda variable.

Sean $a < b$, $\beta > 0$ y $x_1, x_2 \in (-\beta, \beta)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_1 \leq x_2$. Así,

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| = 2t |e^{-x_1} - e^{-x_2}|.$$

Por el Teorema del Valor Medio existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$e^{-x_1} - e^{-x_2} = -e^{-c}(x_1 - x_2) \leq e^{-\beta}(x_2 - x_1).$$

Luego,

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq 2te^{-\beta}|x_1 - x_2| \leq L |x_1 - x_2|,$$

para todo $a \leq t \leq b$, y $x_1, x_2 \in (-\beta, \beta)$, donde

$$L = 2be^{-\beta} > 0.$$

En otras palabras, $f(t, x)$ satisface la condición de Lipschitz en la segunda variable para todo $x \in (-\beta, \beta)$. Como a , b y β se escogieron en forma arbitraria, entonces por el Teorema 3 el problema de valor inicial (4) tiene solución única para todo $t \in \mathbb{R}$.

2. Métodos Basados en Expansiones de Taylor

Sean $t_0, t_1, \dots, t_m \in [a, b]$. Estamos interesados en obtener aproximaciones de los valores que toma $x(t)$ en los puntos t_i , donde $x(t)$ es la solución del problema de valor inicial (1).

Denotemos con x_i al valor aproximado que se obtuvo para $x(t_i)$, es decir,

$$x_i \approx x(t_i), \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m.$$

Supongamos que $x(t)$ es $(n+1)$ veces diferenciable. Consideremos el desarrollo de Taylor de $x(t+h)$ alrededor de $t-h$, para $h > 0$,

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2!}x''(t) + \cdots + \frac{h^n}{n!}x^{(n)}(t) + E_n, \quad (5)$$

donde

$$E_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} x^{(n+1)}(t + \delta h), \quad 0 < \delta < 1.$$

De esta forma,

$$x(t+h) \approx \sum_{j=1}^n \frac{h^{j-1}}{j!} x^{(j)}(t),$$

donde

$$\begin{aligned} x'(t) &= f, \\ x''(t) &= f_t + f_x x' = f_t + f_x f, \\ x'''(t) &= f_{tt} + 2f_{tx}x' + f_x x'' + f_{xx}(x')^2 \\ &= f_{tt} + 2f_{tx}x' + f_{xx}(f)^2 + f_x(f_t + f_x f), \\ x^{(4)}(t) &= f_{ttt} + 3f_{ttx}x' + 3f_{txx}(x')^2 + 3f_{tx}x'' + f_x x''' \\ &\quad + 3f_{xx}x'x'' + f_{xxx}(x')^2 \\ &= (f_{ttt} + 3f_{ttx}f + 3f_{txx}f^2 + f_{xxx}f^3) + f_x(f_{tt} + 2f_{tx}f + f_{xx}f^2) \\ &\quad + 3(f_t + f_x f)(f_{tx} + f_{xx}f) + f_x^2(f_t + f_x f), \end{aligned}$$

y, en general,

$$x^{(n)}(t) = D^{(n-1)}f(t, x(t)),$$

donde D es el operador de derivación

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial t} + f \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Por ejemplo, el método de Taylor de orden 4 es

$$x(t+h) \approx x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2!}x''(t) + \frac{h^3}{3!}x'''(t) + \frac{h^4}{4!}x^{(4)}(t)$$

con término de error

$$\begin{aligned} E_4 &= \frac{h^5}{5!} x^{(5)}(t + \delta h) \\ &\approx \frac{h^5}{5!} \left[\frac{x^{(4)}(t+h) - x^{(4)}(t)}{h} \right] \\ &= \frac{h^4}{120} [x^{(4)}(t+h) - x^{(4)}(t)]. \end{aligned}$$

Si se desea resolver el problema de valor inicial (1) comenzando en $x(t_0) = x_0$ y continuando con pasos $h > 0$ hasta t_m , colocamos

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

y el método de Taylor de orden 4 adquiere la forma

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i) + \frac{h^2}{2}x''(t_i) + \frac{h^3}{3!}x'''(t_i) + \frac{h^4}{4!}x^{(4)}(t_i),$$

para $i = 0, 1, \dots, m$.

Esta ecuación se denomina **ecuación en diferencias**.

Errores Al resolver numéricamente un problema de valor inicial aparecen varios errores:

I) **Error de truncamiento local**

Este tipo de error aparece cuando la serie de Taylor (5) se le elimina el término de error, obteniéndose una suma parcial.

Si el método de Taylor incluye términos hasta h^n , entonces el error de truncamiento local es la suma de todos los términos que no se han incluido.

El término de error de (5) se puede expresar como

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}x^{(n+1)}(\xi),$$

para algún ξ cercano a t_0 . Así, decimos que el error de truncamiento local es $O(h^{n+1})$.

II) **Error de truncamiento global**

La acumulación de todos los errores de truncamiento local genera el error de truncamiento global.

Si los errores de truncamiento local son del orden $O(h^{n+1})$, entonces el error de truncamiento global es de orden $O(h^n)$.

III) **Error de redondeo**

Se produce debido a la precisión de la máquina y depende de la longitud de la palabra de la computadora.

Definición 1 (Orden de un método) Decimos que un método para resolver numéricamente el problema de valor inicial (1) es de **orden** n , si el error de truncamiento global es de orden $O(h^n)$.

Observación 2 El método de Taylor cuyo término de error es

$$E_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}x^{(n+1)}(\xi)$$

es de orden n .

2.1. Método de Euler

El método de Euler es el método de Taylor de orden 1, cuya ecuación en diferencias es

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i), \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

con término de error local $E_1 = \frac{h^2}{2}x''(\xi)$.

Ejemplo 3 Sea el problema de valor inicial

$$x' = e^{-t^2}, \quad x(0) = 0.$$

Encontrar el valor de $x(t)$ en $t = 2$, utilizando el método de Taylor de orden 4 y el método de Euler. Se conoce que $x(2) \approx 0,8820813907$.

Solución.

Tenemos que $f(t, x) = e^{-t^2}$. De esta forma, la ecuación en diferencias del método de Euler es

$$x_{i+1} = x_i + h e^{-t_i^2}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Como

$$\begin{aligned} x'(t) &= e^{-t^2}, & x''(t) &= -2te^{-t^2}, \\ x'''(t) &= 2e^{-t^2} [2t^2 - 1], & x^{(4)}(t) &= 4te^{-t^2} (3 - 2t^2), \end{aligned}$$

la ecuación en diferencias del método de Taylor de orden 4 es

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h e^{-t_i^2} - h^2 t_i e^{-t_i^2} + \frac{h^3}{3} e^{-t_i^2} (2t_i^2 - 1) \\ &\quad + \frac{h^4}{6} t_i e^{-t_i^2} (3 - 2t_i^2), \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

2.2. Métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Taylor tienen la desventaja de que requieren las fórmulas para f_t , f_{tt} , etc. Los métodos de Runge-Kutta evaden esta dificultad. Sin embargo, imitan a los métodos de Taylor. Mostremos este hecho con el método de Runge-Kutta de segundo orden.

Método de Runge-Kutta de segundo orden Consideremos la expansión de Taylor de $x(t+h)$ alrededor de $(t-h)$,

$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + \frac{h^2}{2!} x''(t) + O(h^3)$$

Como $x'(t) = f$, $x''(t) = f_t + f_x f$, tenemos

$$\begin{aligned} x(t+h) &= x(t) + hf + \frac{1}{2} h^2 (f_t + f_x f) + O(h^3) \\ &= x(t) + \frac{1}{2} h f + \frac{1}{2} h (f + hf_t + hf_x f) + O(h^3). \end{aligned}$$

Ahora, utilizando los primeros términos de la serie de Taylor de dos variables de f , $f(t+h, x+hf) = f + hf_t + hf_x f + O(h^2)$, obtenemos

$$x(t+h) = x(t) + \frac{h}{2} f + \frac{h}{2} f(t+h, x+hf) + O(h^3)$$

De esta forma,

$$x(t+h) \approx x(t) + \frac{h}{2} f(t, x(t)) + \frac{h}{2} f(t+h, x(t) + hf(t, x(t))).$$

Este método se conoce como **método de Heun**, cuya ecuación en diferencias es

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{2} (k_1 + k_2),$$

$$k_1 = h f(t_i, x_i),$$

$$k_2 = h f(t_i + h, x_i + k_1),$$

para $i = 0, 1, \dots, m - 1$.

Otro método de Runge-Kutta de segundo orden es

$$x_{i+1} = x_i + k_2,$$

$$k_1 = h f(t_i, x_i),$$

$$k_2 = h f(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_1),$$

para $i = 0, 1, \dots, m - 1$.

Este método se denomina **método de Euler modificado**.

Método de Runge-Kutta de cuarto orden La ecuación en diferencias del método de Runge-Kutta de cuarto orden es

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = h f(t_i, x_i),$$

$$k_2 = h f(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_1),$$

$$k_3 = h f(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_2),$$

$$k_4 = h f(t_i + h, x_i + k_3),$$

para $i = 0, 1, \dots, m - 1$.

Ejemplo 4 Sea el problema de valor inicial

$$x' = t e^x - t^2, \quad x(0) = 0,$$

con solución exacta $x(t) = -\ln(0,5 + 0,5 e^{-t^2})$.

En la siguiente tabla se muestra la aproximación de $x(2)$ hallada por distintos métodos.

Aproximaciones de $x(2)$, con $h = 1/m$

Método	$m = 10$	$m = 100$	$m = 1000$
<i>Euler</i>	0.624464946670797	0.670172820871109	0.674516978857219
<i>Euler Modificado</i>	0.677534495774509	0.675027093548888	0.674997555722006
<i>Runge-Kutta 4</i>	0.675006001301624	0.674997253647557	0.674997252642238

Valor exacto: $x(2) = 0,674997252642136$.

Sistemas de ecuaciones diferenciales

Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x, y) \\ y' = g(t, x, y) \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (6)$$

Una solución del sistema (6) es un par de funciones derivables $x(t)$ y $y(t)$.

Pasemos a encontrar una solución numérica del sistema (6) en un intervalo dado $a \leq t \leq b$. Utilizando, por ejemplo, el método de Runge-Kutta de cuarto orden se pueden encontrar los valores x_i y y_i que denotan los valores aproximados de $x(t_i)$ y $y(t_i)$, respectivamente.

Las ecuaciones en diferencias del método de Runge-Kutta de cuarto orden para el sistema (6) es

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(\ell_1 + 2\ell_2 + 2\ell_3 + \ell_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_i, x_i, y_i), & \ell_1 &= hg(t_i, x_i, y_i), \\ k_2 &= hf(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{k_1}{2}, y_i + \frac{\ell_1}{2}), & \ell_2 &= hg(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{k_1}{2}, y_i + \frac{\ell_1}{2}), \\ k_3 &= hf(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{k_2}{2}, y_i + \frac{\ell_2}{2}), & \ell_3 &= hg(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{k_2}{2}, y_i + \frac{\ell_2}{2}), \\ k_4 &= hf(t_i + h, x_i + k_3, y_i + \ell_3), & \ell_4 &= hg(t_i + h, x_i + k_3, y_i + \ell_3), \end{aligned}$$

para $i = 0, 1, \dots, m-1$, donde

$$t_i = a + ih, \quad 0 \leq i \leq n+1,$$

y $h = (b-a)/(n+1)$.

Observación 3 Cualquier sistema de ecuaciones lineales se puede expresar en forma vectorial, esto es

$$X' = F(t, X).$$

Ecuación diferencial de orden superior

Una ecuación diferencial de orden superior es de la forma

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Convenimos que todas las derivadas son con respecto a t de manera que $y^{(i)} = d^i y / dt^i$. Luego se introducen nuevas variables

$$x_1 = y \quad x_2 = y' \quad \dots \quad x_n = y^{(n-1)}.$$

para obtener el siguiente sistema

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ x'_3 = x_4 \\ \vdots \\ x'_n = f(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{cases}$$

Ejemplo 5 Considere el siguiente problema de valor inicial

$$\cos(t)y''' + \sin(ty) + \cos(t^2 + y'') + (y')^3 = \log(t) \text{ con } y(2) = 7, y'(2) = 3, y''(2) = 4.$$

se convierte en el sistema

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ x'_3 = [\log(t) - x_2^2 - \cos(t^2 + x_3) - \sin(tx_1)] / \cos(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales en $t = 2$, $X = (7, 3, 4)^T$.