# Sistema de ecuaciones lineales

## Cálculo Numérico (2514) Lectura 1

Prof. Gilberto Noguera

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica

**Resumen** El documento contiene los elementos mínimos y necesarios para discutir y profundizar, en clases, los temas: (1) Sistema de Ecuaciones Lineales (2) Métodos numéricos para resolver (SEL) sistemas de ecuaciones lineales, métodos directos; eliminación Gaussiana, factorización $PALU$ y factorización de Choleski, y métodos iterativos; Jacobi, Gauss-Seidel y SOR.

## 1. Elementos de álgebra lineal

Comenzamos con la definición de matriz, pues un vector se puede considerar como un caso especial de matriz, tomando en cuenta, claro esta, sus respectivas particularidades operacionales.

**Definición 1 (Matriz)** *Una matriz real $A$ de orden $n \times m$ es un arreglo rectangular cuyos elementos $a_{ij}$ son números reales. Se denotará con $R^{n\times m}$ al conjunto de todas las matrices reales de orden $n \times m$.*

Como ejemplo tenemos,

**Ejemplo 1**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -0{,}5 \\ 0 & 7 & -1 \\ 3{,}1416 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*Así,* $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$

En algunas oportunidades y según el contexto se puede necesitar escribir $A_{4\times 3}$, y en otras si se trata de una sucesión $A_0, A_1, \cdots, A_n, \cdots$ de matrices se suele escribir $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ donde cada $A_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

**Definición 2 (Igualdad de matrices)** *Dos matrices $A$ y $B$ son iguales si son del mismo espacio, digamos $n \times m$, y también se cumple que $a_{ij} = b_{ij}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.*

**Ejemplo 2**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

*y*

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$A = B$, *ya que,* $a_{11} = b_{11} = 0$, $a_{12} = b_{12} = 3$, $a_{21} = b_{21} = -2$ *y* $a_{22} = b_{22} = 1/4$.

Nos referimos a las matrices en $\mathbb{R}^{n\times n}$ como matrices cuadradas del orden $n$ o simplemente de orden $n$ . Las matrices $A$ y $B$ del ejemplo 2 son matrices de orden dos.

**Definición 3 (Adición de matrices)** *Sean $A, B \in R^{n\times m}$. La suma de $A$ y $B$, denotada por $A+B$, es una matriz $C \in R^{n\times m}$ cuyos elementos están dados por*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

*para $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.*

**Ejemplo 3** *Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0{,}5 \\ -1 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ entonces si definimos $C \in R^{2\times 3}$ como $C = A + B$, tenemos*

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1{,}5 \\ 0 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

En el contexto de las matrices definimos como $0$ a la matriz nula, esto es una matriz cuyos elementos son todos nulos. Por otra parte se debe tomar en cuenta que la matriz $-A$ es aquella con todos los elementos de la matriz $A$ cambiados de signo, dicho de otra manera la opuesta aditiva de $A$ se obtiene al multiplicar $A$ por el escalar $(-1)$.

**Proposición 1** *Sean $A, B, C \in R^{n\times m}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

*Se satisfacen las siguientes propiedades de adición y multiplicación escalar:*

*a)* $A + B = B + A$
*b)* $(A + B) + C = A + (B + C)$
*c)* $A + 0 = 0 + A = A$
*d)* $A + (-A) = (-A) + A = 0$
*e)* $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
*f)* $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
*g)* $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
*h)* $1 \cdot A = A$

**Definición 4 (Producto de matrices)** *Sean $A \in R^{n\times m}$ y $B \in R^{m\times p}$. EL producto matricial de $A$ por $B$, denotado $AB$, es una matriz $C \in R^{n\times p}$, cuyos elementos $c_{ij}$ están dados por*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}, \quad \text{para } i = 1, \ldots, n \text{ y } j = 1, \ldots, p.$$

**Ejemplo 4**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C = AB = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

**Definición 5 (Matriz diagonal)** *Una matriz diagonal de orden $n$ es una matriz $D = (d_{ij})$ con la propiedad de que $d_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$. La matriz identidad de orden $n$ es una matriz diagonal denotada por $I_n = (\delta_{ij})$ tal que $\delta_{ii} = 1$.*

**Ejemplo 5** *Una matriz diagonal por excelencia es la matriz identidad*

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Dada la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

*la diagonal asociada a la matriz $A$ digamos $B = diag(A)$, esta dada por*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**Definición 6 (Matriz no singular)** *Se dice que una matriz $A \in R^{n\times n}$ es **no singular** o **invertible**, si existe una matriz $B \in R^{n\times n}$ tal que*

$$AB = BA = I_n.$$

*La matriz $B$ es única y se denomina **inversa** de $A$. Denotaremos a la inversa de $A$ como $A^{-1}$.*

*Una matriz que no tiene inversa se llama **singular** o **no invertible**.*

**Ejemplo 6** *La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 7 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ es no singular pues $B = \begin{bmatrix} -1/39 & -2/39 & 11/39 \\ 4/39 & 8/39 & -5/39 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$ es la inversa de $A$, es decir $B = A^{-1}$, en efecto*

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 7 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/39 & -2/39 & 11/39 \\ 4/39 & 8/39 & -5/39 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Definición 7 (Matriz triangular)** *Se dice que una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $n$ es **triangular superior** cuando sus elementos verifican $a_{ij} = 0$ siempre que $i > j$.*

*Se dice que una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $n$ es **triangular inferior** cuando sus elementos verifican $a_{ij} = 0$ siempre que $i < j$.*

**Ejemplo 7** *Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 7 & -1 \\ 4 & 1 & 0{,}5 \end{bmatrix}$ podemos obtener la matriz triangular superior asociada $E = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$ y la matriz triangular inferior $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 4 & 1 & 0{,}5 \end{bmatrix}$*

**Definición 8 (Matriz transpuesta)** *La **transpuesta** de una matriz $A = (a_{ij})$ de $n \times m$ es una matriz $A^t = (a_{ji})$ de $m \times n$, donde para cada $i$, la $i$-ésima columna de $A^t$ es igual a la $i$-ésima fila de $A$.*

**Ejemplo 8** *Si* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 8 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *entonces* $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 8 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

**Definición 9 (Matriz simétrica)** *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se dice que $A$ es una matriz es **simétrica** si $A^t = A$.*

**Ejemplo 9** *La matriz* $G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = G^t$ *por lo tanto $G$ es una matriz simértrica.*

**Definición 10 (Matriz definida positiva)** *Se dice que $A$ es **semidefinida positiva** si $x^tAx \geq 0, \quad$ para $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$. Si la desigualdad es estricta, se dice que $A$ es **definida positiva**.*

**Teorema 1** *Si $A$ es una matriz definida positiva de $n \times n$, entonces*

(I) *$A$ tiene una inversa.*
(II) *$a_{ii} > 0$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.*
(III) $\text{m'ax}_{1\leq k,j\leq n} |a_{kj}| \leq \text{m'ax}_{1\leq i\leq n} |a_{ii}|$.
(IV) *$(a_{ij})^2 < a_{ii}\, a_{jj}$ para cada $i \neq j$.*

**Ejemplo 10** *La matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ *es una matriz definida positiva. Veamos,*

1. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
2. $a_{11} = 2 > 0$, $a_{22} = 1 > 0$ *y* $a_{33} = 3 > 0$
3. $|a_{11}| > 1$, $|a_{22}| \geq 1$ *y* $|a_{33}| > 1$
4. $(a_{12})^2 < 2$, $(a_{13})^2 < 6$, $(a_{21})^2 < 2$, $(a_{23})^2 < 3$, $(a_{31})^2 < 6$ *y* $(a_{32})^2 < 3$

Una forma práctica para determinar si una matriz es definida positiva consiste en calcular el determinante de cada submatriz asociada a la matriz que nos interesa saber si es definida positiva, si todos los determinantes dan positivo la matriz es definida positiva.

**Ejemplo 11** *Considere la matriz $A$ del ejemplo 10,*

$$det([a_{11}]) = 2 > 0, det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 > 0 \;\; \text{y } det(A) = 1 > 0$$

*como todos los determinantes de las submatrices son positivos la matriz $A$ es definida positiva.*

**Definición 11 (Matrices equivalentes)** *Sean $A, B \in R^{n\times m}$. Se dice que la matriz $B$ es equivalente a la $A$ si y sólo si $B$ se puede obtener efectuando un número finito de operaciones elementales sobre $A$.*

Recordemos que las operaciones elementales sobre una matriz $A \in R^{n\times m}$ son las siguientes:

1. Permutación de dos filas entre sí, o de dos columnas. $F_i \leftrightarrow F_j$ o $C_i \leftrightarrow C_j$.
2. Adición de una fila a otra, o adición de una columna a otra. $F_i \leftarrow F_i + F_j$ o $C_i \leftarrow C_i + C_j$.
3. Multiplicación de una fila o una columna por un escalar no nulo. Si $\alpha > 0$, entonces $F_i \leftarrow \alpha F_i$ o $C_i \leftarrow \alpha C_i$.

**Ejemplo 12** *Determinar el rango de la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ *mediante operaciones elementales.*

*Con las operaciones;* $C_2 \leftarrow C_2 + (-2)C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 + (-1C_1)$ *y* $C_4 \leftarrow C_4 + C_1$ *se obtiene*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

*A la matriz anterior aplicamos las siguientes operaciones;* $F_2 \leftarrow F_2 + (-1)F_1$ *y* $F_4 \leftarrow F_4 + (-2)F_1$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

*Ahora haciendo* $F_2 \leftarrow (-1)F_2$, *tenemos*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

*Operando sobre la tercera y cuarta columnas de la siguiente manera;* $C_3 \leftarrow C_3 + (-1)C2$ *y* $C_4 \leftarrow C_4 + (3)C_2$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

*Si ahora* $F_3 \leftarrow F_3 + (-1)F_2$ *y* $F_4 \leftarrow F_4 + (2)F_2$, *se tiene*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

*Con la operación* $C_4 \leftarrow C_4 + (-2)C_3$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

*Por último $F_4 \leftarrow F_4 + F_3$,*

$$\begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix}$$

*Si asignamos $B = \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \end{bmatrix}$ entonces $B \equiv A$ y como $B$ tiene tres columnas linealmente independientes, o si lo prefiere, tres filas linealmente independientes, resulta el rango de $A$ es tres, esto es $rang(A) = 3$.*

Como veremos más adelante el procedimiento aplicado en el ejemplo 12 se debe estandarizar para efectos computacionales.

**Definición 12 (Matriz diagonalmente dominante)** *Una matriz $A \in R^{n\times n}$ es diagonalmente dominante si para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ se verifica que*

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} |a_{ij}| \tag{1}$$

*Además es **estrictamente diagonal dominante** si la desigualdad en (1) es estricta para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Por otra parte se establece que $A$ es **fuertemente diagonal dominante** si se verifica la desigualdad (1) estricta para al menos un $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.*

**Ejemplo 13** $H = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -7 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ *es una matriz estrictamente diagonal dominante pues;* $|3| > |1| + |0| + |1| = 2$, $|-7| > |-1| + |2| + |-2| = 5$, $|3| > |1| + |1| + |0| = 2$ *y* $|6| > |2| + |-2| + |1| = 5$.

**Definición 13 (Valores propios)** *Los **valores propios** de una matriz $A$ son los números complejos $\lambda$ para los cuales la matriz $A - \lambda I$ no es invertible. Estos números son las raíces del **polinomio característico***

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0.$$

**Definición 14 (Radio espectral)** *El radio espectral de una matriz $A$ se define como*

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \det(A - \lambda I) = 0\}.$$

**Definición 15 (Normas vectorial y matricial)** *Una **norma vectorial** sobre $\mathbb{R}^n$ es una función $v \rightarrow \|v\|$, la cual satisface las siguientes condiciones*

**1.** $\|v\| \geq 0$, *para* $v \in \mathbb{R}^n$, *y* $\|v\| = 0$ *si y sólo si* $v = 0$.
**2.** $\|\alpha v\| = |\alpha|\,\|v\|$, *para* $v \in \mathbb{R}^n$, *para* $\alpha \in \mathbb{R}$.
**3.** $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, *para* $u, v \in \mathbb{R}^n$.

*Para $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^t \in \mathbb{R}^n$ las siguientes funciones son normas vectoriales:*

- $\|v\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |v_i|$ *(Norma 1)*

- $\|v\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)^{1/2}$ *(Norma 2 o Euclídea)*
- $\|v\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |v_i|$ *(Norma infinito)*

*Para una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una **norma matricial** es una función $A \to \|A\|$ que satisface las siguientes propiedades:*

- $\|A\| \geq 0$, *para* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *y* $\|A\| = 0$ *si y sólo si* $A = 0$.
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$, *para* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *para* $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\|A + B\| \leq \|u\| + \|v\|$, *para* $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

*Para $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ las siguientes funciones son normas matriciales:*

- $\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$
- $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$
- $\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

## 2. Métodos directos para resolover sistemas de ecuaciones lineales

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales existen diversos métodos de los cuales se consideran en esta lectura los métodos directos; eliminación Gaussiana, $PALU$ y Cholesky y los métodos iterativos: Jacobi, Gauss-Seidel y SOR.

En cualquiera de los métodos mencionados arriba, se parte del echo de que un sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2}$$

donde $a_{ij}$ y $b_i$ son números reales dados, se pueden representar en forma matricial como

$$Ax = b,$$

donde $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ es la matriz de coeficientes, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^t$ es el vector de términos independientes y $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ es el vector de incógnitas.

### 2.1. Sistemas compatibles e incompatibles

Los métodos que se estudian en el curso se aplican a sistemas compatibles determinados, los que tienen solución única, no se tratarán los sistemas compatibles indeterminados, aquellos que tienen infinitas soluciones y como es de esperar tampoco son de interés los sistemas incompatibles, aquellos que no tienen solución.

**Definición 16 (Matriz aumentada)** *Se define como matriz aumentada la matriz formada por la matriz de coeficientes o matriz del sistema ampliada con los términos independientes, en símbolos*

$$[A, b]$$

Utilizaremos criterios para establecer la compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales basados en el Teorema de Rouche Frobenius, considere m como el número de incógnitas de un sistema lineal, entonces

1. Si $rg(A) = rg([A; b]) = r$ y $r = m$ el sistema es compatible determinado y el sistema tiene solución única.
2. Si $rg(A) = rg([A; b]) = r$ y $r < m$ el sistema es compatible indeterminado, existen infinitas soluciones.
3. Si $rg(A) \neq rg([A; b])$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

## 2.2. Métodos directos

1) **Eliminación Gausiana**, este método consiste en transformar un sistema como el (2) en uno equivalente de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + & a_{1\,n-1}x_{n-1} + & a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + & a_{2\,n-1}x_{n-1} + & a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad a_{33}x_3 + \cdots + & a_{3\,n-1}x_{n-1} + & a_{3n}x_n = b_3 \\ & \vdots & \vdots \\ & a_{n-1\,n-1}x_{n-1} + & a_{n-1\,n}x_n = b_{n-1} \\ & & a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{3}$$

Podemos decir que el sistema original se debe transformar a otro que llamaremos triangular superior. De manera que si el sistema es compatible (consistente) determinado tiene solución única, la cual se puede conseguir haciendo sustituciones sucesivas hacia atrás.

Esto es,

- La última ecuación sólo contiene la incógnita $x_n$, así que despejando esta incógnita de esta ecuación obtenemos:
$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$
- Ahora ya conocemos $x_n$ así que podemos usarla en la penúltima ecuación:
$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1\,n}x_n}{a_{n-1\,n-1}}.$$
- Una vez calculados los valores $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{k+1}$, el paso general es
$$x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j}{a_{kk}} \qquad \text{para } k = n-1, n-2, \ldots, 1.$$

Para la transformación planteada se aplican las operaciones elementales entre filas de la matiz aumentada, considerando particularmente la estrategia de máximo pivote por columna.

**Definición 17 (Pivote)** *Se llama pivote $a_{kk} \neq 0$ de una matriz $A$ al elemento que se obtiene de la intersección de la fila $k$ con la columna $k$*

Como las operaciones elementales aplicadas a una matriz se pueden realizar sobre filas y/o columnas, se suele identificar a la respectiva fila o columna como la $k_$ésima fila pivote o $k_$ésima columna pivote asociada al elemento $a_{kk} \neq 0$.

**Definición 18 (Multiplicador)** *Los números $m_{rk}$ obtenidos mediante la operación aritmética $m_{rk} = a_{rk}/a_{kk}$ para $r = k+1, k+2, \cdots, n$, utilizados para efectuar las operaciones elementales se denomina multiplicador.*

Con el siguiente ejemplo se ilustra el procedimiento para reducir un sistema de ecuaciones lineales a sistema triangular superior.

**Ejemplo 14** *Dado el sistema lineal,*

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 \ = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \ = 6 \end{cases} \tag{4}$$

*La matriz del sistema es* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ *y la matriz aumentada es* $[A, b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & |2 \\ 2 & 3 & -1 & |7 \\ 1 & 2 & 1 & |6 \end{bmatrix}$ *satisfacen la condición* $rag(A) = rag([A, b])$ *y como* $m = 3$ *el sistema es compatible determinado. Ahora se aplicará el método de eliminación gaussiana considerando máximo pivote por columna,partiendo de la matriz aumentada que por comodidad redefinimos como* $A' = [A; b]$.

*Para triangular debemos anular en cada columna, hasta la penúltima, los elementos debajo de cada pivote. Pasos:*

1. *Inspeccionar la primera columna de $A'$ para determinar cuál $|a_{i1}|$ con $i = 1, 2, 3$ es mayor, en este caso $|a_{22}| = 2$ es mayor que cualquiera de los elementos $|a_{i1}|$.*
2. $F_1 \leftrightarrow F_2$, *así* $A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & |7 \\ 1 & 0 & 1 & |2 \\ 1 & 2 & 1 & |6 \end{bmatrix}$
3. *pivote 2 y multiplicadores $m_{21} = m_{31} = 1/2$.*
   *Operaciones elementales entre filas, $F_2 - m_{21}F_1 \to F_2$ y $F_3 - m_{31}F_1 \to F_3$, obteniendo*
   $$A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & | & 7 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & | & -3/2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & | & 5/2 \end{bmatrix}$$
4. *pivote $-3/2$, pues $|-3/2| > |1/2|$, y el multiplicador $m_{32} = -1/3$.*
   *Operación elemental entre fila, $F_3 - m_{32}F2 \to F_3$. Luego,*
   $$A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & | & 7 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & | & -3/2 \\ 0 & 0 & 2 & | & 2 \end{bmatrix}$$
5. *Por sustitución hacia atrás,*
   $$\begin{gathered} 2x_3 = 2 \Rightarrow x_3 = 1 \\ -\tfrac{3}{2}x_2 + \tfrac{3}{2}x_3 = -\tfrac{3}{2} \Rightarrow x_2 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \Rightarrow x_1 = 1 \end{gathered}$$

2) **Factorización PALU**. Sea $A \in R^{n\times n}$ . Buscamos matrices $L \in R^{n\times n}$ triangular inferior, $U \in R^{n\times n}$ triangular superior y $P \in R^{n\times n}$ de vectores canónicos tales que

$$PA = LU,$$

donde $L = \begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & lnn \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$ y $P$ matriz cuyos elementos son ceros y unos, utilizada para registrar las permutaciones entre filas cuando el proceso de factorización lo requiera. Si $P = I$ la factorización es $LU$.

Existen varios tipos de factorización matricial: Doólittle, Crout entre otras. Utilizamos la factorización de Doólittle en la cual, $L$, la triangular inferior tiene diagonal unitaria ($l_{ii} = 1, i = 1, 2, \cdots, n$).

**Ejemplo 15** *Considere la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 7 \\ -1 & 8 & -2 \end{bmatrix}$ *Podemos descomponer A usando máximo pivote por columna (pivoteo parcial), veamos Inicialmente tomamos* $P = I$, $U = A$ *y* $L = I$. *De manera que*

$$\overset{P}{\downarrow}\qquad\qquad\overset{A}{\downarrow}\qquad\qquad\overset{L}{\downarrow}\qquad\qquad\overset{U}{\downarrow}$$
$$\begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 7 \\ -1 & 8 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 7 \\ -1 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

*Como* $|u_{21}| \geq |u_{i1}|$ *para* $i = 1, 2, 3$, *entonces realizamos la operación* $F_1 \leftrightarrow F_2$ . *Esta operación se realiza en las matrices* $P$ *y* $U$. *En este primer paso no se altera la matriz* $L$. *Así, obtenemos la ecuación*

$$\begin{bmatrix} 0&1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 7 \\ -1 & 8 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

*Los multiplicadores para anular los elementos debajo del pivote actual* $u_{11}$ , *son* $m_{21} = 1/2$ *y* $m_{31} = -1/2$. *Realizando las operaciones que corresponden, tenemos*

$$\begin{bmatrix} 0&1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 7 \\ -1 & 8 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 1/2&1&0 \\ -1/2&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 0 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & 25/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

*Como* $|u_{32}| > |u_{22}|$ *se realiza la operación* $F_2 \leftrightarrow F_3$ *en* $P$ *y en* $U$, *en* $L$ *se intercambian los elementos de las respectivas filas (multiplicadores) debajo de la diagonal. Así,*

$$\begin{bmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&0 \\ 1&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 7 \\ -1 & 8 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ -1/2&1&0 \\ 1/2&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 0 & 25/2 & 3/2 \\ 0 & -5/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

*Ahora* $m_{32} = -1/5$, *por lo tanto*

$$\begin{bmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&0 \\ 1&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 7 \\ -1 & 8 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&0 \\ -1/2&1&0 \\ 1/2&-1/5&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 0 & 25/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 8/10 \end{bmatrix}$$

Dado el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, se observa que si se realiza la descomposición $PALU$, entonces

$$PAx = Pb \Rightarrow L(Ux) = Pb.$$

Como se conoce $L$ y $w = Pb$ podemos resolver, por sustitución hacia adelante, el sistema triangular

$$Ly = w,$$

una vez obtenido el vector $y$ , se resuelve, por sustitución hacia atrás, el sistema triangular $Ux = y$.
**Ejercicio:** Resolver aplicando factorización P ALU el siguiente sistema,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = 4 \\ 2x_1 + 9x_2 + 7x_3 & = 2 \\ -x_1 + 8x_2 - 2x_3 & = -12 \end{cases}$$

**Solución:** $x = (2, -1, 1)^t$.

3) **Factorización de Cholesky**

**Teorema 2** *Si A es una matriz real, simétrica y definida positiva, entonces tiene una factorización única*

$$A = \widetilde{L}\widetilde{L}^t$$

*en donde $\widetilde{L}$ es una matriz triangular inferior con diagonal positiva.*

Una forma práctica de hallar la descomposición de Cholesky es partir de la descomposición $LU$ de la matriz $A$, así

$$\widetilde{L} = LD_u^{1/2}$$

donde $D_u$ es la matriz diagonal que se obtiene con los elementos de la diagonal principal de la matriz $U$.

**Ejemplo 16** $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 9 \end{bmatrix} = \overset{\overset{L}{\downarrow}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}} \overset{\overset{U}{\downarrow}}{\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$

*luego,*

$$\widetilde{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Teorema 3** *Si $A \in R^{n\times n}$ , es una matriz que admite una descomposición $PALU$, entonces se define al determinante de $A$,*

$$det(A) = (-1)^{\#p} \prod_{k=1}^{n} u_{kk}$$

*donde $\#p$ representa el número de permutaciones realizadas en el proceso de factorización. La inversa de la matriz $A \in R^{n\times n}$ se define como*

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1}P.$$

**Ejercicio:** Usar el Teorema 6 para hallar: $det(A)$ y $A^{-1}$ de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 7 \\ -1 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

**Teorema 4** *Si $A \in R^{n\times n}$, es una matriz que admite una descomposición de Cholesky, entonces se define al determinante de $A$,*

$$det(A) = \left( \prod_{i=1}^{n} l_{ii} \right)^2 .$$

*La inversa de la matriz $A \in R^{n\times n}$ se define como $A^{-1} = \left(\widetilde{L}^t\right)^{-1} \widetilde{L}^{-1}$.*

**Ejercicios:**
a) Usar el Teorema 7 para hallar: $det(A)$ y $A^{-1}$ de

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

b) Escribir el algoritmo para la descomposición de Cholesky. c) ¿ Qué estrategia se debe usar para resolver $Ax = b$ si $A = \widetilde{L}\widetilde{L}^t$ ?

## 2.3. Métodos iterativos

Mostraremos los métodos iterativos básicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

- Un método iterativo para resolver un sistema lineal $Ax = b$, toma $x_0 \in \mathbb{R}^n$ como aproximación inicial y genera una sucesión de vectores $\{x_k\}$ que converge a $x_\star$ , siendo $x_\star$ la solución del sistema.
- Los métodos que trabajaremos se basan en el proceso de punto fijo, esto es, ellos aplican una iteración de punto fijo a un sistema
$$x = Mx + v$$
que es equivalente al sistema $Ax = b$, donde $M \in R^{n\times n}$ y $v \in \mathbb{R}^n$ .
- La sucesión de vectores $\{x_k\}$ se genera como
$$x_{k+1} = Mx_k + v, k = 0, 1, \cdots$$

Los métodos iterativos que ocuparemos son:

- **Jacobi**
- **Gauss-Seidel**
- **SOR** (Successive Over Relaxation)

Para la definición de cada uno de estos métodos, es necesario considerar la descomposición

$$A = D - A_L - A_U.$$

donde $D$, $A_L$ y $A_U$ son de la forma:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ A_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n(n-1)} & 0 \end{bmatrix}, \ A_U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{(n-1)n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Ejemplo 17**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ A_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \ A_U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Definición 19 (Método de Jacobi)** *El método de Jacobi está definido como*

$$x_{k+1} = D^{-1}(A_L + A_U)x_k + D^{-1}b, k = 0, 1, \cdots$$

**Definición 20 (Método de Gauss-Seidel)** *El método de Gauss-Seidel está definido como*

$$x_{k+1} = (D - A_L)^{-1} A_U x_k + (D - A_L)^{-1} b, k = 0, 1, \cdots$$

**Definición 21 (Método SOR)** *El método SOR está definido como*

$$x_{k+1} = (D - wA_L)^{-1}[wA_U + (1 - w)D]x_k + (D - wA_L)^{-1} wb,$$

*para* $k = 0, 1, \cdots$, *donde* $w > 0$.

**Teorema 5** *Sean* $A \in R^{n \times n}$ *y* $b \in \mathbb{R}^n$ *. Supongamos que* $x_\star$ *es la única solución del sistema* $Ax = b$. *Sean* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *un iterado inicial y* $\{x_k\}$ *la sucesión generada por* $x_{k+1} = Mx_k + v,\ k = 0, 1, \cdots$ *Entonces, la sucesión* $\{x_k\}$ *converge a* $x_\star$ *si y sólo si el radio espectral de* $M$ *es menor que 1.*

Por el Teorema 5 se infiere que la condición necesaria y suficiente para que los métodos: Jacobi, Gauss- Seidel y SOR converjan es que, respectivamente:

- $\rho\left(D^{-1}(A_L + A_U)\right) < 1$ (Jacobi)
- $\rho\left((D - A_L)^{-1} A_U\right) < 1$ (Gauss-Seidel)
- $\rho\left((D - wA_L)^{-1}[wA_U + (1 - w)D]\right) < 1$ (SOR)

**Teorema 6** *Si* $A \in R^{n \times n}$ *es estrictamente diagonal dominante, entonces la sucesión* $\{x_k\}$ *generada por el método de Jacobi converge a la solución de* $Ax = b$, *para cualquier iterado inicial.*

**Teorema 7** *Si* $A \in R^{n \times n}$ *es estrictamente diagonal dominante, entonces la sucesión* $\{x_k\}$ *generada por el método de Gauss-Seidel converge a la solución de* $Ax = b$, *para cualquier iterado inicial.*

**Teorema 8** *Si* $A \in R^{n \times n}$ *es simétrica con elementos de la diagonal positivos, entonces para* $0 < w < 2$, *el método* $SOR$ *converge a la solución de* $Ax = b$ *para cualquier iterado inicial si, y sólo si* $A$ *es definida positiva.*