# Interpolación y Ajuste a curvas

## Cálculo Numérico (2514) Lectura 2

Prof. Gilberto Noguera

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica

**Resumen** El documento contiene los elementos mínimos y necesarios para discutir y profundizar, en clases, los temas: (1) Interpolación Numérica; métodos de los coeficientes indeterminados, polinomio de Lagrage y polinomio de Newton para ajustar una tabla de datos a una curva. (2) Aproximar por mínimos cuadrados a polinomios, expresiones exponenciales, logaritmos y otros. Interpolación trigonométrica.

## 1. Interpolación

La interpolación requiere de cálculos de valores de una función $y(x)$ definida para argumentos entre $x_0, x_1, \cdots, x_n$ en los cuales se conocen los valores $y_0, y_1, \cdots, y_n$. Estos datos conocidos se registran en lo que conocemos como una tabla de datos, algunas veces nos referimos a esta tabla como una data. Los métodos utilizados consisten en aproximar la data a una función $\hat{y}(x)$, comenzaremos con $\hat{y}(x) = P(x)$ donde $P(x)$ es un polinomio llamado el interpolante. El polinomio interpolane debe verificar los datos conocidos de la función.

### 1.1. Existencia y unicidad de un polinomio interpolante

Dadas una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y una red de $(n + 1)$ puntos distintos $x_k$ de $[a, b]$, aproximamos $f$ por un polinomio $P$ tal que

$$P(x_k) = f(x_k) \quad \text{para} \quad k = 0, \ldots, n. \tag{1}$$

Si $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ la ecuación (1) se escribe

$$\left\{\begin{array}{c} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{array}\right. \tag{2}$$

Las ecuaciones (2) se pueden expresar en forma matricial

$$X\,a = Y,$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \vdots & x_n^n \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

Si rango de $A = n + 1 =$ al rango de $[AY]$ el sistema (2) tiene solución única, es decir, existe un único polinomio a lo sumo de grado $n$ verificando (1). Llamaremos a este polinomio, el polinomio interpolante o de interpolación de $f$ sobre la red $\{x_k\}$ y lo denotamos $P_n$ donde el subindice $n$ indica el grado del polinomio.

**Observación 1**
- *La matriz $X$ se llama* matriz de Vandermonde.
- *Si se resuelve el sistema (2), se dice que se obtiene un* ***polinomio interpolante por el método de coeficientes indeterminados****.*
- *Resolver el sistema de ecuaciones planteados, generalmente, resulta un problema mal condicionado. Por eso se requieren de otros métodos para hallar el polinomio interpolante.*

**Teorema 1** *Si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son números reales distintos, entonces para valores arbitrarios $y_0, y_1, \ldots, y_n$, existe un único polinomio $P_n(x)$ de grado a lo sumo $n$ tal que*

$$P_n(x_k) = y_k \quad \text{para } k = 0, 1, \ldots, n.$$

**Ejemplo 1** *Consideremos la siguiente tabla de datos.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
| $y_i$ | $2$ | $1$ | $4$ |

El polinomio $P_2(x)$ tiene la forma: $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.
Aplicando el método de los coeficientes indeterminados tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

cuya solución es $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$. De esta forma, el polinomio interpolante es

$$P_2(x) = 1 + x + 2x^2.$$

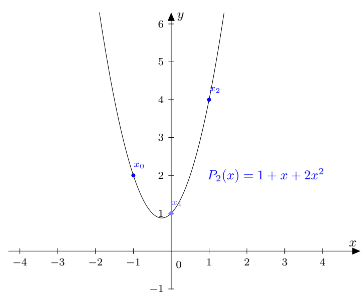


**Figura 1.** Polinomio interpolante

## 1.2. Polinomio de Lagrage

El polinomio interpolante $P_n(x)$ de Lagrange, es expresardo en la forma:

$$p_n(x) = y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_1(x) + \cdots + y_n \ell_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \ell_k(x), \tag{3}$$

donde

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad \text{para } i = 0, 1, \ldots, n$$

son llamados *Lagrangianos*.

Para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, $\ell_i(x)$ es un polinomio de grado $n$ y satisface

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad \text{para } i = 0, 1, \ldots, n.$$

**Ejemplo 2** *Consideremos la siguiente tabla de datos.*

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & 1 & 2 & 5 \end{array}$$

*El polinomio $P_2(x)$ en la forma de Lagrange que interpola los valores de la tabla es:*

$$P_2(x) = \ell_0(x) + 2\ell_1(x) + 5\ell_2(x),$$

*donde*

$$\ell_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = (1/2)(x-1)(x-2),$$
$$\ell_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x(x-2)$$

*y*

$$\ell_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = (1/2)x(x-1).$$

*Así, el polinomio de Lagrange es $P_2(x) = (1/2)(x-1)(x-2) + 2(-x(x-2)) + 5(1/2)x(x-1)$, que expandido es $P_2(x) = x^2 + 1$.*

## 1.3. Polinomio interpolante de Newton

El polinomio $P_n(x)$ que interpola los puntos $(x_i, f(x_i))$ para $i = 0, 1, \ldots, n$, en la forma de Newton es

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).$$

Donde los coeficientes $c_i$, corresponden a las diferencias divididas de orden $i$ para $i = 0, \ldots, n$. Asumiendo que,

$$\prod_{j=0}^{-1} (x - x_j) = 1$$

**Definición 1** *La expresión*

$$f[x_i] = f(x_i), \quad \textit{para } i = 0, 1, \ldots, n$$

*se denomina* diferencias dividas 1e $f$ de orden $0$*. Y la ecuación*

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+j}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i} \tag{4}$$

*se denomina* diferencia dividida de $f$ de orden $j$*.*

Con un conjunto de puntos $(x_i, f(x_i))$ se puede construir la tabla de diferencias divididas. A continuación se muestra un ejemplo de una tabla de diferencias divididas.

| $x_i$ | Dif. 0 | Dif. 1 | Dif. 2 | Dif. 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f[x_0]$ | $f[x_0, x_1]$ | $f[x_0, x_1, x_2]$ | $f[x_0, x_1, x_2, x_3]$ |
| $x_1$ | $f[x_1]$ | $f[x_1, x_2]$ | $f[x_1, x_2, x_3]$ | |
| $x_2$ | $f[x_2]$ | $f[x_2, x_3]$ | | |
| $x_3$ | $f[x_3]$ | | | |

**Ejemplo 3** *Dados los siguientes datos,*

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y_i$ | 1 | 2 | 5 |

*La tabla de diferencias dividas para este conjunto de datos es:*

| $x_i$ | *Dif. 0* | *Dif. 1* | *Dif. 2* |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | |
| 2 | 5 | | |

*De la tabla obtenemos los coeficientes $c_i$ para formar el polinomio interpolante de Newton,*

$$
\begin{aligned}
c_0 &= f[x_0] = 1, \\
c_1 &= f[x_0, x_1] = 1, \\
c_2 &= f[x_0, x_1, x_2] = 1.
\end{aligned}
$$

*Por lo tanto, $P_2(x) = 1 + (x - 0) + (x - 0)(x - 1)1 + x + x(x - 1)$, que expandido es $P_2(x) = 1 + x^2$.*

**Teorema 2** *Sea $f \in C^{n+1}[a, b]$, y sea $P_n(x)$ el polinomio de grado menor o igual $n$ que interpola a la función $f$ en $n+1$ puntos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en el intervalo $[a, b]$. Para cada $x$ en $[a, b]$ corresponde un punto $\beta_x \in (a, b)$ tal que*

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\beta_x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i). \tag{5}$$

Este Teorema se refiere al error cometido al aproximar por polinomios interpolantes, es claro que si se conoce la expresión analítica de la función el error puede estimarse sin mayores problemas, pero si la única información que se tiene es la data, ¿qué estrategia propone para estimar este error?

## 2. Ajuste por Mínimos Cuadrados

Dada la siguiente tabla de datos

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_n$ |

Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real (aproximante) que depende de $x \in \mathbb{R}$ y de los parámetros $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$.
Se define $g : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ como

$$g(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - y_i)^2, \tag{6}$$

donde $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_m)^t \in \mathbb{R}^{m+1}$ es el vector de parámetros.

Para hallar los valores de los parámetros de tal manera que $f(x)$ ajuste con mínimo error a la tabla de datos, se debe resolver el problema de minimización

$$\min_{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^{m+1}} g(\mathbf{a}). \tag{7}$$

Una solución del problema (7) se puede encontrar resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\nabla g(\mathbf{a}) = 0, \tag{8}$$

donde $\nabla g(\mathbf{a})$ es el vector gradiente de la función $g$.

Si $\widehat{\mathbf{a}} = (\widehat{a}_0, \widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_m)^t \in \mathbb{R}^{m+1}$ es una solución del sistema (8), el error cometido al ajustar tabla de datos con la función $f$ cuya expresión considera los parámetros $\widehat{a}_0, \widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_m$, está dado por,

$$E = \sqrt{2g(\widehat{\mathbf{a}})}.$$

Supongamos que la función que debe ajustar los datos es un polinomio de grado $m$, es decir,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots , a_m x^m.$$

Así, la función $g$ dada en (6) adquiere la forma

$$g(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_m x_i^m - y_i)^2,$$

además, el vector gradiente de $g$ es

$$\nabla g(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}(a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_m x_i^m - y_i) \\ \sum_{i=1}^{n}(a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_m x_i^m - y_i)x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}(a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_m x_i^m - y_i)x_i^m \end{pmatrix}$$

Ahora, igualando a cero el vector gradiente de $g$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^m \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i \end{pmatrix}$$

denominado **Ecuaciones Normales**. Las incógnitas de este sistema son los parámetros $a_0, a_1, \ldots, a_m$.

Supongamos que la función que debe ajustar los datos es una recta, es decir,

$$f(x) = a_0 + a_1 x.$$

Como $f(x)$ es un polinomio de grado $1$, los valores de los parámetros $a_0, a_1$ que minimizan el error del ajuste de los datos, se obtienen resolviendo las siguientes ecuaciones normales:

$$\begin{pmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \end{pmatrix} \tag{9}$$

**Ejemplo 4** *Considere la tabla del ejemplo 1, se tiene,*

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

*Resolviendo para $a_0$ y $a_1$ se obtiene $\widehat{y}(x) = 2{,}3333 + 1{,}0000x$*

**Ejemplo 5** *Con la misma data del ejemplo anterior, al aproximar por mínimo cuadrados al polinomio de grado 2 se debe resolver el siguiente sistema,*

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

*Resultando; $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$ de donde $\widehat{y}(x) = 1 + x + 2x^2$.*

**Observación 2**

- *El ajuste a un polinomio de primer grado recibe el nombre de regresión lineal.*
- *El ajuste a un polinomio de grado superior a uno se conoce como regresión polinómica.*

Por otra parte, estas ecuaciones normales se utilizan para ajustar los modelos $y = ae^{bx}$ e $y = ax^b$ luego de un proceso de linealización de la data.

## 2.1. Algunos métodos de linealización

**Método de linealización**

1) Realizar un cambio adecuado de variable de manera que las nuevas variables queden relacionadas linealmente.

$$\begin{array}{cc} exponencial & potencial \\ y = ae^{bx} & y = ax^b \\ \downarrow & \downarrow \\ \ln(y) = \ln(a) + bx & \ln(y) = \ln(a) + b\ln(x) \\ \downarrow & \downarrow \\ Interpolacion Y = A + BX & Y = A + BX \end{array}$$

2) Modificar la data

$$\text{exponencial: } \boxed{x_i|y_i} \rightarrow \boxed{x_i|\ln(y_i)}$$

$$\text{potencial: } \boxed{x_i|y_i} \rightarrow \boxed{\ln(x_i)|\ln(y_i)}$$

3) Aplicar las ecuaciones normales (9) a la data modificada según el caso.
4) Obtener los parámetros reales del modelo, $b = B$ y $a = \exp(A)$.

**Ejemplo 6** *Dada la data*

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0,3333 | 0,2000 | 0,0909 | 0,0476 |

(10)

*ajustar al modelo $y = 1/(ax^2 + bx + c)$. Para aplicar mínimos cuadrados se debe rescribir el modelo de la siguiente forma $Y = AX^2 + BX + C$ donde $Y = 1/y$ y $X = X$. La data original se transforma a*

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 3,0003 | 5,0000 | 11,0911 | 21,0084 |

(11)

*A la data referenciada como (11) se le aplica mínimos cuadrados, obteniendo $C = 2{,}9870$, $B = 0{,}0733$ y $A = 1{,}9794$, así $\hat{y}(x) = \frac{1}{1{,}9794x^2+0{,}0733x+2{,}9870}$.*

## 3. Interpolación trigonométrica

Surge para aproximar fenómenos periódicos, para los cuales el espacio de polinomios $\Pi_n$ no es el apropiado. En este caso es más conveniente las funciones trigonométricas. Suponiendo por conveniencia que la función a interpolar es de período $2L$, esto es $f(x + 2L) = f(x)$.

**Teorema 3 (Teorema de Fourier)** *Si $f(x) \in C[-L, L]$ es una función periódica con período $2L$, entonces*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x/L) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x/L) \text{ (serie de Fourier)}$$

*donde los coeficientes de Fourier $a_n$ y $b_n$ son*

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos(n\pi x/L),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

*y*

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}(n\pi x/L),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

**Teorema 4 (Condiciones de Dirichlet)** *Supongamos que*

*(I) $f(x)$ es definida y tiene un valor único con excepción posiblemente de un número finito de puntos $(-L, L)$*
*(II) $f(x)$ es periódica de período $2L$*
*(III) $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas por intervalos en $(-L, L)$*

*Entonces la serie de Fourier con condiciones (II) o (III) converge a*

*(a) $f(x)$ si $x$ es un punto de continuidad*
*(b) $f(x) = \dfrac{\lim_{\varepsilon\to 0} f(x+\varepsilon) + \lim_{\varepsilon\to 0} f(x-\varepsilon)}{2}$, para $\varepsilon > 0$ si $x$ es un punto de discontinuidad.*

Las condiciones impuestas a $f(x)$ en el Teorema anterior son suficientes pero no necesarias, es decir, si las condiciones se satisfacen la convergencia se garantiza. Sin embargo si no se satisfacen las series pueden o no converger.

**Definición 2 (Polinomio trigonométrico)** *Una serie finita de la forma*

$$Pt_M(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{M} (a_i \cos(ix) + b_i \operatorname{sen}(ix))$$

*se conoce como polinomio trigonométrico de grado $M$.*

Si una función $f(x)$ se puede discretizar o se tiene una data $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{N}$, con $N+1$ puntos de manera que

$$x_i = -L + \frac{2iL}{N}, \quad \text{para } i = 0, 1, \cdots, N$$

donde los $x_i$ están igualmente espaciados, los $y_i = f(x_i)$ y se satisface la condición $2M < N$, entonces existe un polinomio trigonométrico que minimiza

$$\sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - Pt(x_i))^2$$

En tales circunstancias los coeficientes $a_i$ y $b_i$ vienen dados por

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \cos(kx_i), \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \cdots, M$$

y

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \operatorname{sen}(kx_i), \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \cdots, M$$

Estas últimas ecuaciones se pueden considerar sin perdida de consistencia como una aproximación numérica de las integrales asociadas a los coeficientes de Fourier.

Cualquier algoritmo que se construya para hacer una interpolación trigonométrica consiste en determinar los coeficientes $a_k$ y $b_k$. Podemos resumir estableciendo que se requiere como entradas;

- $X$ vector de abscisas, con igual espacio entre ellas.
- $Y$ vector de ordenadas.
- $M$ grado del polinomio trigonométrico a determinar

y las salidas mínimas esperadas, son

- $A$ vector de coeficientes asociados a $\cos$.
- $B$ vector de coeficientes asociados a $\operatorname{sen}$.

**Ejemplo 7** *Considere la función $f : [-1, 1]$ definida como $f(x) = 2x$, esta función no es periódica pero la podemos redefinir y discretizar de la siguiente manera:*

*Establecemos la cantidad de subdivisiones para el intervalo considerado, supongamos, $N = 5$, entonces definimos como longitud de paso a $h =$ (Longitud del intervalo)$/(N)$ que en este caso es $h = 2/5 = 0{,}4$. De manera que $[-1, 1] \to [-1; -0{,}6; -0{,}2; 0{,}2; 0{,}6; 1]$, esto es hacer discreto el* *dominio donde esta definida de la función con $N+1$ valores de abscisas. Para determinar el polinomio trigonométrico se requiere, por decirlo de alguna manera, la periodización del intervalo discretizado.*

*En consecuencia las abscisas estarán dadas por, $x_i = -\pi + \frac{2i\pi}{5}$ para $i = 0{,}1, \cdots, 5$ y evaluando $f(x_i)$ se tiene la siguiente data*

| $X$ | $-\pi$ | $-3\pi/5$ | $-\pi/5$ | $\pi/5$ | $3\pi/5$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ | $-2\pi$ | $-6\pi/5$ | $-2\pi/5$ | $2\pi/5$ | $6\pi/5$ | $2\pi$ |

Esta transformación implica una extensión periódica de $f(x)$ tal como se muestra a continuación,

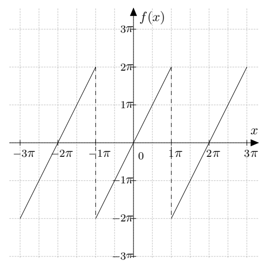


**Figura 2.** Extensión periódica

Se observa que con el proceso descrito se obtiene una función periódica con discontinuidades numerables de salto finito, por lo tanto podemos estudiar el comportamiento de la función evaluando en la discontinuidad, es así que por las condiciones de Dirichlet

$$f(\pi) = \frac{\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(\pi + \varepsilon) + \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f(\pi - \varepsilon)}{2} = 0$$

este resultado nos indica que la función es impar, por otra parte el grado del polinomio trigonométrico debe satisfacer la condición $2M + 1 \leq N$, criterio establecido para determinar $M$, así

$$Pt(x) = \frac{2}{5} \sum_{i=1}^{6} f(x_i) \operatorname{sen}(kx_i), \quad \text{para } k = 0, 1, 2$$

luego se hacer los cálculos requeridos se tiene $Pt(x) = 3{,}4592251 \sin(x) - 0{,}8166123 \sin(2x)$, se deja al lector verificar que, $b_0 = 0$, $b_1 = 3{,}4592251$ y $b_2 = -0{,}8166123$

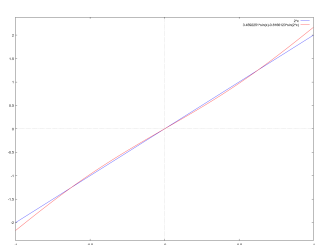

**Figura 3.** Polinomio trigonométrico