TECNOLOGIA SETÚBAL
ESCOLA SUPERIOR POLITÉCNICO SETÚBAL

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
ESTATÍSTICA PARA A SAÚDE
1.º Semestre - 2023/2024
1.º Teste (Modelo)

Data: novembro de 2023 Duração: 2 horas

- Parte do teste foi resolvido recorrendo ao software R: ver script_1teste_modelo.R.

Resolução

1. Os dados referem-se ao peso das bagagens individuais numa amostra de dimensão $n = 90$.

   (a) Variável em estudo: peso da bagagem, em kg
   Classificação da variável em estudo: Variável Quantitativa Contínua

   (b) número de bagagens com peso inferior a 15 kg $= 5 + 5 + A = 10 + A$
   a proporção de bagagens com peso inferior a 15 kg $= \frac{10+A}{90}$
   logo
   $$\frac{10 + A}{90} = 0.20 \Leftrightarrow A = 8$$
   Como a amostra tem dimensão $n = 90$, tem-se
   $$5 + 5 + A + 30 + B + 10 = 90 \underset{A=8}{\Leftrightarrow} 5 + 5 + 8 + 30 + B + 10 = 90 \Leftrightarrow B = 32$$

   (c) $A = B = 20$.
   Tabela de frequências:

i	Peso da bagagem (em kg) Classe - c_i	Freq. Absoluta n_i	Freq. Relativa f_i	Freq. Abs. Acumulada N_i	Freq. Rel. Acumulada F_i
1	$[0, 5[$	5	$\frac{5}{90} = 0.056$	5	0.056
2	$[5, 10[$	5	$\frac{5}{90} = 0.056$	$5 + 5 = 10$	$0.056 + 0.056 = 0.112$
3	$[10, 15[$	20	$\frac{20}{90} = 0.222$	$10 + 20 = 30$	$0.112 + 0.222 = 0.334$
4	$[15, 20[$	30	$\frac{30}{90} = 0.333$	$30 + 30 = 60$	$0.334 + 0.333 = 0.667$
5	$[20, 25[$	20	$\frac{20}{90} = 0.222$	$60 + 20 = 80$	$0.667 + 0.222 = 0.889$
6	$[25, 30]$	10	$\frac{10}{90} = 0.111$	$80 + 10 = 90$	$0.889 + 0.111 = 1$
		$n = 90$	1		

2. (a) População: todos os passageiros do Titanic
   Dimensão da População: Não se sabe, estima-se que eram 2224 pessoas a bordo, entre passageiros e tripulação

   Amostra: os passageiros no ficheiro titanic0.txt

   Dimensão da Amostra: $n = 712$ passageiros

   Unidade estatística: passageiros

Variável estatística: Survived
Dados estatísticos: Não, Sim
Classificação: Qualitativa nominal

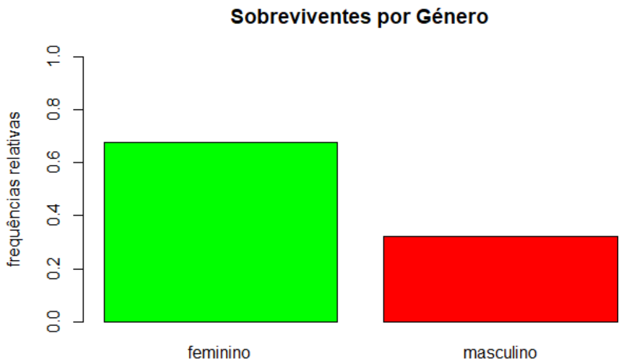
Variável estatística: Pclass
Dados estatísticos: 1ª classe, 2ª classe, 3ª classe
Classificação: Qualitativa ordinal

Variável estatística: Sex
Dados estatísticos: feminino, masculino
Classificação: Qualitativa nominal

Variável estatística: Age
Dados estatísticos: qualquer número maior que zero
Classificação: Quantitativa contínua

Variável estatística: Fare
Dados estatísticos: qualquer número maior que zero
Classificação: Quantitativa contínua

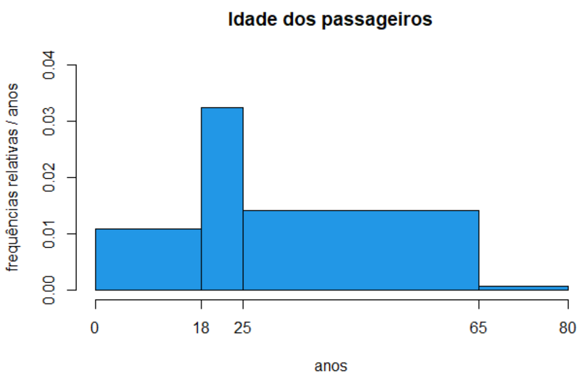
(b) O género feminino foi o que sobreviveu mais, 67.71% dos sobreviventes era do género feminino.
Representação gráfica: gráfico de barras (o gráfico podia estar só no script)



(c) Tabela de frequências:

i	Classificação passageiros x_i	Idade (em anos) Classe - c_i	Freq. Absoluta n_i	Freq. Relativa f_i	Freq. Abs. Acumulada N_i	Freq. Rel. Acumulada F_i
1	crianças	$]0, 18]$	139	0.195	139	0.195
2	jovens	$]18, 25]$	162	0.228	301	0.423
3	adultos	$]25, 65]$	403	0.566	704	0.989
4	idosos	$]65, 80]$	8	0.011	712	1
			$n = 712$	1		

Representação gráfica: histograma (o gráfico podia estar só no script)



(d) Medidas de localização central e dispersão:

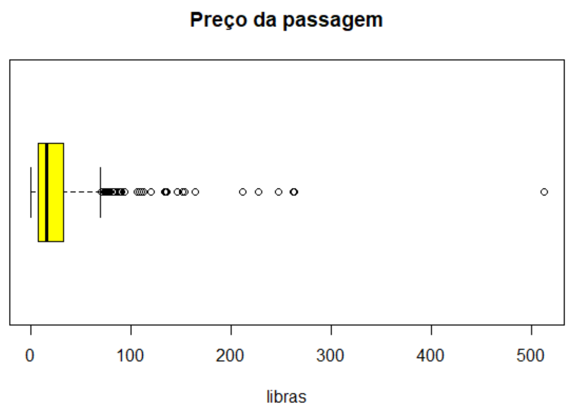
Medidas de localização central

- moda = 13 libras
- média = 34.567 libras
- mediana = 15.645 libras

Medidas de dispersão

- amplitude total = 512.329 libras
- amplitude interquartil = 24.95 libras
- variância = 2802.5 libras^2
- desvio padrão = 52.939 libras
- coeficiente de variação = 153.147%

Diagrama de extremos e quartis (com a indicação de "outliers" a partir dos moderados) (o gráfico podia estar só no script)



Só há dados considerados "outliers" no extremo superior dos dados. Há 95 dados considerados "outliers", 49 são considerados "outliers" moderados e 46 são considerados "ouliers" severos.

3. Seja $X-$ número de cafés vendidos diariamente nesse bar, uma variável aleatória discreta.

(a) Como, em média, são vendidos diariamente 115 cafés, então

$$E[X] = 115 \Leftrightarrow 50 \times 0.2 + 100 \times a + 150 \times b + 200 \times 0.1 = 115 \Leftrightarrow 100a + 150b = 85$$

Por outro lado, como $f(x)$ é função de probabilidade, sabe-se que

$$\sum_x f(x) = 1 \Leftrightarrow 0.2 + a + b + 0.1 = 1 \Leftrightarrow a + b = 0.7 \Leftrightarrow b = 0.7 - a$$

Voltando à primeira expressão

$$100a + 150 \times (0.7 - a) = 85 \Leftrightarrow 100a + 105 - 150a = 85 \Leftrightarrow a = 0.4$$

Desta forma,

$$b = 0.7 - 0.4 \Leftrightarrow b = 0.3$$

(b) Considerando $a = 0.3$ e $b = 0.4$ tem-se

x	50	100	150	200
$f(x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

Assim:

$$P(X > 150 | X \geq 100) = \frac{P(X > 150 \wedge X \geq 100)}{P(X \geq 100)} = \frac{P(X > 150)}{P(X \geq 100)} =$$

$$= \frac{f(200)}{f(100) + f(150) + f(200)} = \frac{0.1}{0.4 + 0.3 + 0.1} = \frac{0.1}{0.8} = 0.125$$

(c) Seja $Y-$ vendas semanais de gasolina, em milhares de litros, uma variável aleatória contínua

Pretende-se a variância do lucro semanal, ou seja, $V[2Y-1]$. Utilizando as propriedades da variância, vem que:

$$V[2Y-1] = 2^2 \times V[Y] = 4 \times \left(E\left[Y^2\right] - E^2[Y]\right)$$

Como $E[Y] = 2$, falta calcular $E\left[Y^2\right]$. Assim

$$E\left[Y^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y)\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{1} y^2 \times 0 dy + \int_{1}^{2} y^2 \times (y-1)\, dy + \int_{2}^{3} y^2 \times (3-y)\, dy + \int_{3}^{+\infty} y^2 \times 0 dy =$$

$$\underset{(*)}{=} 0 + \int_{1}^{2} \left(y^3 - y^2\right) dy + \int_{2}^{3} \left(3y^2 - y^3\right) dy + 0 = \left[\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3}\right]_1^2 + \left[\frac{3y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_2^3 =$$

$$= \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3}\right) + \left(3^3 - \frac{3^4}{4}\right) - \left(2^3 - \frac{2^4}{4}\right) = \frac{25}{6} = 4.1667$$

$(*)$ os seguintes cálculos podem estar apenas no script

Desta forma,

$$V[2Y-1] = 4 \times \left(E\left[Y^2\right] - E^2[Y]\right) = 4 \times \left(\frac{25}{6} - 2^2\right) = \frac{2}{3}$$

4. De um total de 1000 declarações de IRS, das quais se sabe que 100 apresentam erros, foram selecionadas aleatoriamente 20 declarações. Sabe-se que o número de declarações analisadas por hora tem distribuição de Poisson com variância 3.

(a) Seja X a variável aleatória discreta:

$X \rightarrow$ número de declarações analisadas com erro, em 20. $X \sim B(20, 0.1)$ pois

$n = 20$ declarações selecionadas

$p = P(\text{Sucesso}) = P(\text{declaração conter erros}) = \frac{100}{1000} = 0.1$

então

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - 0.3917 = 0.6083$$

(b) Seja Y a variável aleatória discreta:

$Y \rightarrow$ número de declarações analisadas em 1 hora. $Y \sim P(3)$ pois

$Y \sim P(\lambda)$ com $V(Y) = \lambda = 3$

então

$Y' \rightarrow$ número de declarações analisadas em 6 horas. $Y' \sim P(18)$ pois

$$\begin{array}{lcl} 1 \text{ hora} & \mapsto & \lambda = 3 \\ 6 \text{ horas} & \mapsto & \lambda = 3 \times 6 = 18 \end{array}$$

Pretende-se

$$P\left(Y' \geq \frac{1}{4} \times 20\right) = P\left(Y' \geq 5\right) = 1 - P\left(Y' < 5\right) \underset{\text{v.a. discreta}}{=} 1 - P\left(Y' \leq 4\right) = 1 - F(4) =$$

$$= 1 - 0.0001 = 0.9999$$

Conclusão: É quase certo que o fiscal consiga analisar um quarto das declarações selecionadas pois a probabilidade está próxima de 1.

(c) Seja W a variável aleatória contínua:

$W \rightarrow$ tempo que demora a preencher a declaração de IRS, em minutos.

$W \sim N\left(25.6, 1.6\right)$ pois $E[W] = \mu = 25.6$ minutos e $\sqrt{V[W]} = \sigma = 1.6$ minutos.

i. $P\left(24.256 < W < 27.472\right) \underset{\text{v.a. contínua}}{=} F\left(27.472\right) - F\left(24.256\right) = 0.8790 - 0.2005 = 0.6785$

ii. Pretende-se determinar m tal que:

$$P\left(W \leq m\right) = 0.0179 \Leftrightarrow F\left(m\right) = 0.0179 \Leftrightarrow m = 22.24 \text{ minutos}$$