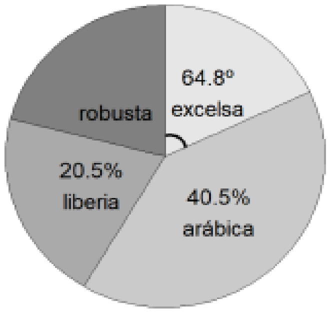
Questões:

1. Considere o seguinte gráfico circular referente ao registo da preferência em relação ao sabor do café dos 4 principais tipos de grãos de café, manifestada num inquérito feito a 1000 consumidores.



[1.5] (a) Construa a tabela de frequências só com as frequências absolutas e relativas e calcule as medidas de localização e dispersão que achar adequadas. Justifique a sua resposta.

1. Variável de interesse: X = preferência em relação ao sabor do café

   Níveis da variável de interesse: arábica, excelsa, liberia, robusta

   Amostra de dimensão $n = 1000$ consumidores

   (a) Tabela de frequências:

i	preferência em relação ao sabor do café x_i	Frequência Absoluta n_i	Frequência Relativa f_i
1	arábica	$0.405 \times 1000 = 405$	$\frac{40.5}{100} = 0.405$
2	excelsa	$0.180 \times 1000 = 180$	$\frac{64.8}{360} = 0.180$
3	liberia	$0.205 \times 1000 = 205$	$\frac{20.5}{100} = 0.205$
4	robusta	$1000 - (405 + 180 + 205) = 210$	$\frac{210}{1000} = 0.210$
		$n = 1000$	1

Como os dados são qualitativos nominais, a única medida adequada é a Moda:

$$\text{moda} = \text{arábica}$$

(pois $n_1 = 405$ é a maior frequência absoluta).

(b) No ficheiro cafe.txt, disponível no Moodle, são apresentados os dados recolhidos referentes à produção de café no ano de 2019 em alguns dos países com plantações de café. Nesse ficheiro encontram-se os seguintes campos:

- country = nome do país
- bags = número de sacos de café de 60 kg (em milhares)
- month = mês em que é feita a colheita (4 = abril, 6 = junho, 10 = outubro)
- price = preço pago aos produtores (em centimos de dolar por tonelada)

[1.0] i. Caso seja possível, identifique a População e a Amostra indicando as suas dimensões, a unidade estatística, as variáveis estatísticas e os dados estatísticos, classificando-os.

[0.5] ii. Qual o país que produziu mais em 2019? Qual o país que foi melhor pago em 2019?

ii. O Brasil foi o país que produziu mais café em 2019 (58210712 sacos de café de 60 kg).
A Bolívia foi o país que foi melhor pago em 2019 (158.2941 cêntimos de dólar por tonelada).

(b) i. População: todos os países com plantações de café em 2019

Dimensão da População: Não é indicado, no máximo serão todos os países do mundo

Amostra: os países que produziram café em 2019 e que se encontram no ficheiro cafe.txt

Dimensão da Amostra: $n = 55$ países

Unidade estatística: países

Variável estatística: bags

Dados estatísticos: 51841, 917, 81265,...

Classificação: Quantitativa discreta (*)

Variável estatística: price

Dados estatísticos: 120.52160, 24.00670,...

Classificação: Quantitativa contínua

Variável estatística: month

Dados estatísticos: 4 (abril), 6 (junho), 10 (outubro)

Classificação: Qualitativa ordinal

(*) Como "bags" está representada em milhares, pode ser classificada como Quantitativa contínua.

[1.5] iii. Construa a tabela de frequências completa relativa ao mês em que é feita a colheita e represente-a graficamente recorrendo às frequências relativas.

iii. Tabela de frequências:

i	mês da colheita x_i	Freq. Absoluta n_i	Freq. Relativa f_i	Freq. Abs. Acumulada N_i	Freq. Rel. Acumulada F_i
1	4 = abril	14	0.255	14	0.255
2	6 = junho	7	0.127	21	0.382
3	10 = outubro	34	0.618	55	1
		$n = 55$	1		

Representação gráfica: gráfico de barras ou diagrama circular

[1.0] iv. Compare, recorrendo ao diagrama de extremos e quartis, o preço pago aos produtores de acordo com o mês em que é feita a colheita. Comente os resultados.

iv. Nenhum dos meses apresenta valores considerados "outliers". O preço pago aos produtores apresenta maior dispersão quando a colheita é feita no mês de outubro (10), mas é no mês de junho (6) que a dispersão do preço é maior no que se refere aos 50% dos preços centrais (entre o 1º quartil e o 3º quartil). O preço máximo é atingido no mês de abril (4) e o mínimo no mês de junho (6), o preço mediano mais baixo ocorre no mês de outubro (10).

[1.0] v. Recorrendo às medidas de dispersão adequadas, compare quanto à dispersão os dados referentes ao número de sacos de café de 60kg e o preço pago aos produtores. Comente os resultados.

v. Como os dados têm unidades de medidas diferentes, a única medida de dispersão adequada é o coeficiente de variação:

$$CV_{\text{sacos}} = \frac{8984.848}{3000.98} \times 100\% = 299.3971\% \qquad CV_{\text{preço}} = \frac{37.1775}{83.5274} \times 100\% = 44.5094\%$$

Como $CV_{\text{sacos}} > CV_{\text{preço}}$, o número de sacos de café de 60kg apresenta maior dispersão do que o preço pago aos produtores.

[1.5] vi. Em relação ao preço pago aos produtores, construa classes recorrendo à regra de Sturges, comece as classes com o mínimo dos dados e considere classes abertas à direita e fechadas à esquerda. Com base nas classes definidas, organize os dados numa tabela de frequências e represente-a graficamente considerando as frequências absolutas.

vi. Tabela de frequências:

i	Preço pago aos produtores Classe - c_i	Freq. Absoluta n_i	Freq. Relativa f_i	Freq. Abs. Acumulada N_i	Freq. Rel. Acumulada F_i
1	$[14.19, 38.21[$	7	0.127	7	0.127
2	$[38.21, 62.22[$	7	0.127	14	0.255
3	$[62.22, 86.24[$	18	0.327	32	0.582
4	$[86.24, 110.3[$	10	0.182	42	0.764
5	$[110.3, 134.3[$	6	0.109	48	0.873
6	$[134.3, 158.3]$	7	0.127	55	1
		$n = 55$	1		

Representação gráfica: histograma

2. A variável aleatória X representa o diâmetro, em milímetros, dos parafusos produzidos numa determinada linha de montagem e tem a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 < x < 1 \\ \frac{x}{8} & , 1 \le x < 3 \\ 0 & , \text{caso contrário} \end{cases}.$$

[1.5] (a) Calcule a função de distribuição da variável aleatória X.

2. X = diâmetro, em milímetros, dos parafusos produzidos numa determinada linha de montagem

(a) Como X é uma variável aleatória contínua, a função de distribuição é $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$.

$$\text{Se } x \le 0, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} 0 dt = 0$$

$$\text{Se } 0 < x < 1, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = 0 + \int_{0}^{x} t dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Se } 1 \le x < 3, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \frac{1^2}{2} + \int_{1}^{x} \frac{t}{8} dt = \frac{1}{2} + \left[\frac{t^2}{16}\right]_1^x = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{16} - \frac{1^2}{16} = \frac{7}{16} + \frac{x^2}{16}$$

$$\text{Se } x \ge 3, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \frac{7}{16} + \frac{3^2}{16} + \int_{3}^{x} 0 dt = 1 + 0 = 0$$

logo

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ \frac{x^2}{2} & , 0 < x < 1 \\ \frac{7}{16} + \frac{x^2}{16} & , 1 \le x < 3 \\ 1 & , x \ge 3 \end{cases}.$$

[1.5] (b) Calcule $P\left(X \le \frac{5}{3} \,|\, \frac{1}{4} < X < \frac{8}{3}\right)$.

(b)

$$P\left(X \le \frac{5}{3} \,|\, \frac{1}{4} < X < \frac{8}{3}\right) = \frac{P\left(X \le \frac{5}{3} \wedge \frac{1}{4} < X < \frac{8}{3}\right)}{P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{8}{3}\right)} = \frac{P\left(\frac{1}{4} < X \le \frac{5}{3}\right)}{P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{8}{3}\right)} \underset{\text{v.a. cont.}}{=}$$

$$= \frac{F\left(\frac{5}{3}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right)}{F\left(\frac{8}{3}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{7}{16} + \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2}{16} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{2}}{\frac{7}{16} + \frac{\left(\frac{8}{3}\right)^2}{16} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{2}} = 0.6816$$

[1.0] (c) Qual o diâmetro máximo que deve constar nas especificações destes parafusos de modo a que apenas 5% dos parafusos tenha diâmetro superior ao diâmetro máximo.

(c) Pretende-se determinar k tal que:

$$P(X > k) = 0.05 \Leftrightarrow 1 - P(X \leq k) = 0.05 \Leftrightarrow P(X \leq k) = 0.95 \Leftrightarrow F(k) = 0.95$$

Como

$$F(1) = \frac{1^2}{2} = 0.5 < 0.95 \text{ então } k > 1$$

$$F(3) = 1 > 0.95 \text{ então } k < 3$$

(d) De acordo com dados históricos da produção, sabe-se que o número de parafusos defeituosos por dia de produção (8 horas) segue uma distribuição de Poisson com média de 1.2 parafusos defeituosos.

[1.0] i. Qual é a probabilidade de, em 10 dias de produção, serem encontrados 20 parafusos defeituosos?

[1.5] ii. Num dia de produção, qual a probabilidade de passarem pelo menos 6 horas entre o tempo de produção de dois parafusos defeituosos?

(d) Seja Y = número de parafusos defeituosos por dia de produção, $Y \sim P(1.2)$ pois $E(Y) = \lambda = 1.2$ parafusos defeituosos por dia de produção.

i. Seja W = número de parafusos defeituosos encontrados em 10 dias de produção,

$$W \sim P(10 \times 1.2) \Leftrightarrow W \sim P(12)$$

Pretende-se

$$P(W = 20) = f_W(20) = 0.0097$$

ii. Seja T = tempo de produção (em horas) entre dois parafusos defeituosos.

Como 1 dia produção = 8 horas, então recorrendo à relação entre a distribuição de Poisson e a distribuição Exponencial, tem-se

$$T \sim Exp\left(\frac{8}{1.2}\right)$$

Pretende-se

$$P(T \geq 6) = 1 - P(T < 6) \underset{\text{v.a. cont.}}{=} 1 - F_T(6) = 0.4066$$

3. Num estabelecimento, que vende materiais de construção, sabe-se que as vendas diárias de areia, em toneladas, têm um comportamento aleatório, traduzido por uma distribuição normal, de média 2 toneladas.

[1.5] (a) O responsável pelo estabelecimento afirma que em 95% dos dias as vendas de areia ultrapassam os 1500 quilos. Calcule o valor do desvio padrão das vendas diárias de areia que torna verdadeira esta afirmação.

3. Seja X = quantidade de areia vendida diariamente, em toneladas, $X \sim N(2, \sigma)$ pois $E[X] = \mu = 2$.

(a) Tem-se $X \sim N(2, \sigma) \Leftrightarrow Z = \frac{X-2}{\sigma} \sim N(0,1)$

1500 quilos = 1.5 toneladas

Pretende-se determinar σ sabendo

$$P(X > 1.5) = 0.95 \Leftrightarrow 1 - P(X \leq 1.5) = 0.95 \Leftrightarrow P(X \leq 1.5) = 0.05 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{1.5-2}{\sigma}\right) = 0.05 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{1.5-2}{\sigma}\right) = 0.05 \Leftrightarrow \frac{1.5-2}{\sigma} = z_{0.05} \Leftrightarrow \frac{1.5-2}{\sigma} = -1.645 \Leftrightarrow \sigma = 0.304$$

(b) Suponha que a variância das vendas diárias de areia é de 0.04 toneladas^2.

[1.5] i. Sabendo que numa manhã o estabelecimento já vendeu pelo menos uma tonelada de areia, qual a probabilidade de, nesse dia, as vendas serem superiores a 2.5 toneladas?

[1.5] ii. Determine a probabilidade de, em 20 dias úteis de um mês, haver pelo menos 5 dias com vendas que não atingem a média diária.

(b) Sabe-se que $\sigma^2 = 0.04$, então $\sigma = \sqrt{0.04} = 0.2$, logo $X \sim N(2, 0.2)$.

i.

$$P(X > 2.5 | X \geq 1) = \frac{P(X > 2.5 \wedge X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X > 2.5)}{P(X \geq 1)} = \frac{1 - P(X \leq 2.5)}{1 - P(X < 1)} \underset{\text{v.a. cont.}}{=}$$

$$= \frac{1 - F(2.5)}{1 - F(1)} = 0.0062$$

ii. Seja V = número de dias em 20, onde as vendas não atingem a média, $V \sim B(20, 0.5)$ pois

$$n = 20$$

$$p = P(\text{vendas não atingirem a média}) = P(X < 2) \underset{\text{v.a. cont.}}{=} F_X(2) = 0.5$$

Pretende-se

$$P(V \geq 5) = 1 - P(V < 5) \underset{\text{v.a. disc}}{=} 1 - P(V \leq 4) = 1 - F_V(4) = 1 - 0.0059 = 0.9941$$

[1.0] (c) Suponha que Y é uma variável aleatória que representa o número de camiões utilizados diariamente para transporte da areia e que assume os valores 0, 2 e 3 com probabilidades 0.1, 0.3 e 0.6, respectivamente. Sabendo que o custo diário (em unidades monetárias) de cada camião é dado pela variável aleatória $W = 3Y^2 - 1$, calcule qual é o custo médio diário com os camiões.

(c) Pretende-se determinar $E[W]$. Como

$$E[W] = E[3Y^2 - 1] = 3E[Y^2] - 1$$

e sabe-se que Y é dado por:

y	0	2	3
$f(y)$	0.1	0.3	0.6

vem que

$$E[Y^2] = 0^2 \times 0.1 + 2^2 \times 0.3 + 3^2 \times 0.6 = 6.6$$

logo

$$E[W] = 3 \times 6.6 - 1 = 18.8$$