Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

Redes Neurais Artificiais

Edielson Prevato Frigieri

edielson@inatel.br
Av. João de Camargo, 510
Santa Rita do Sapucai - MG
Tel: (35) 3471-9279

Julho 2014

www.inatel.br

Redes Neurais Artificiais

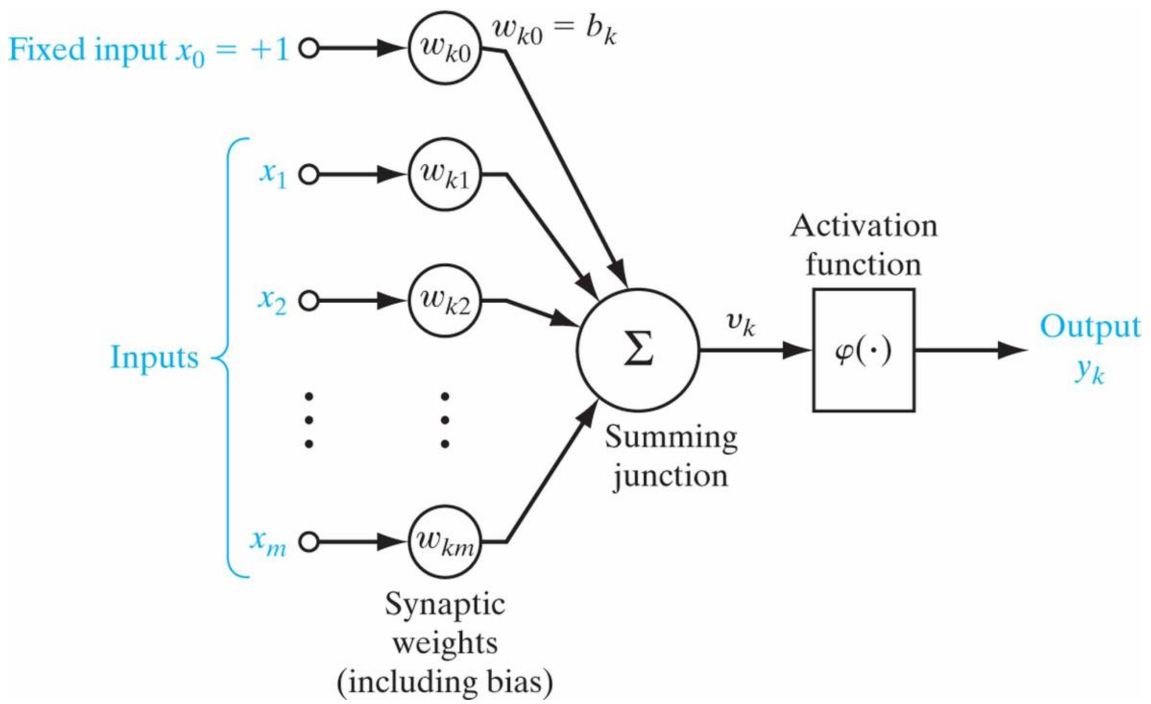
Perceptron de camada única

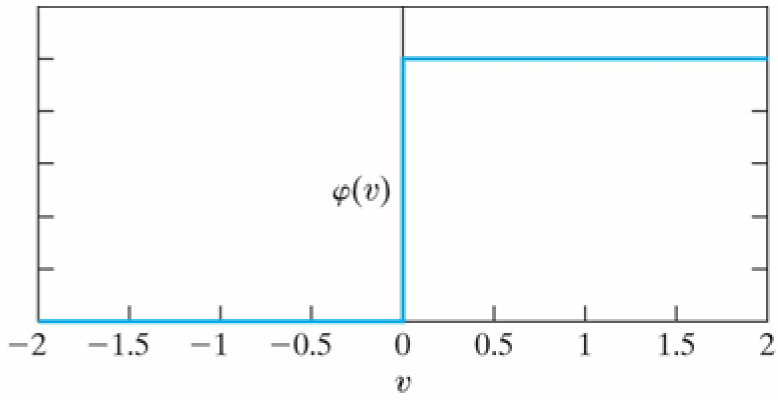
Julho 2014

Perceptrons de camada única

- Idealizado por Rosenblatt (1958), é a forma mais simples de uma rede neural artificial, pois o mesmo é constituído de um único neurônio;
- É considerado uma rede “feed-forward” (alimentação sempre adiante, sem nenhuma realimentação de saída);
- Sua construção é baseada no modelo de neurônio artificial de McCulloch, sendo que sua principal aplicação está na resolução de problemas envolvidos com a classificação de padrões.

Princípio de funcionamento

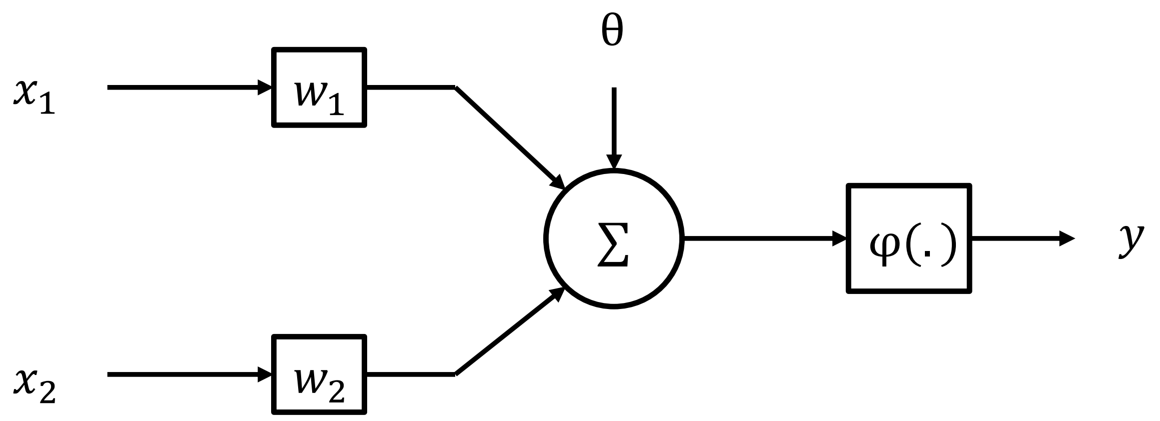




$$y = \begin{cases} +1 \quad se \quad \sum(w_i * x_i) + b_k \geq 0 \\ -1 \quad se \quad \sum(w_i * x_i) + b_k < 0 \end{cases}$$

Análise matemática do *Perceptron*

- Para analisar matematicamente o *Perceptron* será considerado um arquitetura com duas entradas;



- A saída do *Perceptron* pode ser escrita em termos matemáticos da seguinte forma:

$$y = \begin{cases} +1 \; se \; w_1 . x_1 + w_2 . x_2 + \theta \geq 0 \\ -1 \; se \; w_1 . x_1 + w_2 . x_2 + \theta < 0 \end{cases}$$

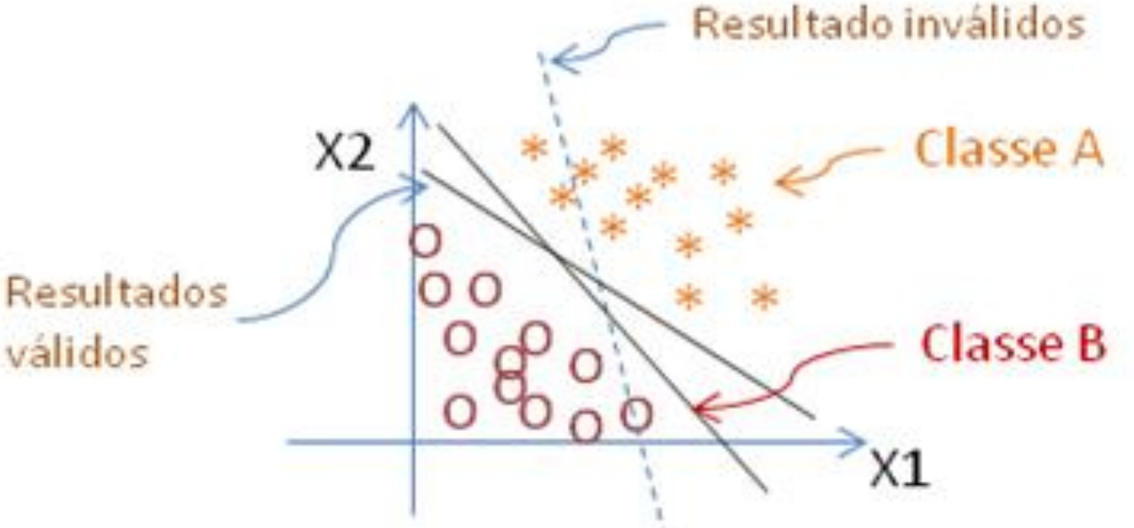
Análise matemática do Perceptron, cont.

Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

- Expressando a desigualdade através de uma equação do primeiro grau, percebe-se que a fronteira de decisão para este *Perceptron* de duas entradas é representada por uma reta;

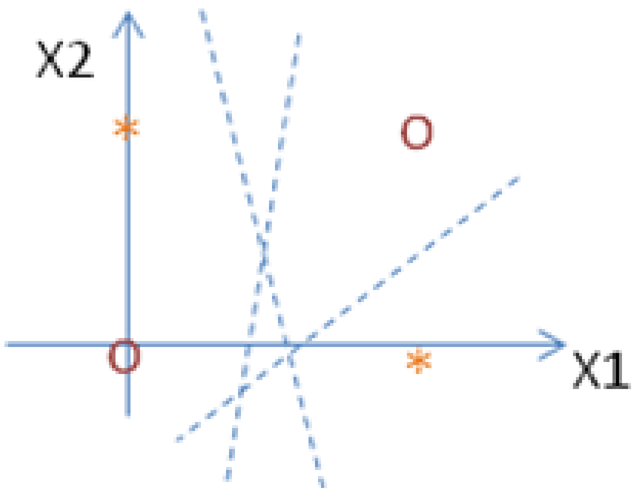
$$w_1.x_1 + w_2.x_2 + b_k = 0$$

- Para a rede *Perceptron*, as classes devem ser "linearmente separáveis"



Problema do XOR

- Para o problema do ou-exclusivo, pode-se utilizar um *Perceptron* de camada única?



X1	X2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Treinamento do *Perceptron*

- O processo de treinamento do *Perceptron* está associado ao ajuste dos pesos sinápticos e do limiar da rede com o objetivo de classificar padrões;
- Para o *Perceptron*, a regra de aprendizado utilizada é a regra de Hebb [Hebb, 1949];
- Resumidamente, se a saída reproduzida é coincidente com a saída desejada, os pesos sinápticos e limiar da rede serão então incrementados proporcionalmente aos valores de seus sinais de entrada; caso contrário, os pesos sinápticos e limiar serão decrementados; Este processo é repetido sequencialmente para todas as amostras de treinamento até que a saída do *Percetron* seja similar a saída desejada para cada amostra;

Treinamento do *Perceptron*, cont.

- Em termos matemáticos, as regras de ajuste dos pesos sinápticos e do limiar do neurônio pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{cases} w_i{}^{Atual} = w_i{}^{Anterior} + \eta.\left(d^{(k)} - y\right).x^{(k)} \\ \theta_i{}^{Atual} = \theta_i{}^{Anterior} + \eta.\left(d^{(k)} - y\right).x^{(k)} \end{cases}$$

- Em termos de implementação computacional, fica mais fácil tratar as expressões na forma vetorial:

$$w^{Atual} = w^{Anterior} + \eta.\left(d^{(k)} - y\right).x^{(k)}$$

Treinamento do *Perceptron*, cont.

- Onde:

$w = [\theta \;\; w_1 \; w_2 \dots w_n]^T$ é o vetor contendo o limiar e os pesos;

$x^{(k)} = [-1 \quad {x_1}^{(k)} \;\; {x_2}^{(k)} \; \dots \;\; {x_n}^{(k)}]^T$ é a k-ésima amostra de treinamento;

$d^{(k)}$ é o valor desejado para a k-ésima amostra de treinamento;

y é o valor de saída produzido pelo *Perceptron*;

η é uma constante que define a taxa de aprendizagem; Normalmente adota-se $0 < \eta < 1$. Quando muito grande, não converge. Se muito pequena, não chega no resultado.

Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

Algoritmo *Perceptron* - treinamento

1) Obter conjunto de amostras de treinamento $\{x^{(k)}\}$;
2) Associar a saída desejada $\{d^{(k)}\}$ para cada amostra obtida;
3) Iniciar o vetor w com valores aleatórios pequenos;
4) Especificar a taxa de aprendizagem $\{\eta\}$;
5) Iniciar o contador de número de épocas $\{época s \leftarrow 0\}$;
6) Repetir as instruções:

   6.1) $\text{erro} \leftarrow "inexiste"$;

   6.2) Para todos pares de treinamento $\{x^{(k)}, d^{(k)}\}$, faça:

      6.2.1) $v \leftarrow w^T * x^k$;

      6.2.2) $y \leftarrow$ degrau(v); (sign no Matlab)

      6.2.3) Se $y \mathrel{!=} d^{(k)}$

         6.2.3.1) então $\begin{cases} w \leftarrow w + \eta * \left(d^{(k)} - y\right) * x^{(k)} \\ erro \leftarrow "existe" \end{cases}$

   6.3) $época \leftarrow época + 1$;

Até que: $\text{erro} == "inexiste"$

Algoritmo *Perceptron* - operação

1) Obter a amostra a ser classificada $\{x\}$;
2) Utilizar o vetor w ajustado durante o treinamento;
3) Executar as seguintes instruções:

    3.1) $v \leftarrow w^T * x$;

    3.2) $y \leftarrow$ degrau(v); (sign no Matlab)

    3.3) Se $y == -1$

        3.3.1) Então: amostra $\boldsymbol{x} \in \{Classe\ A\}$

    3.4) Se $y == 1$

        3.4.1) Então: amostra $\boldsymbol{x} \in \{Classe\ B\}$

https://code.google.com/p/neural-networks-examples/

Exemplo de treinamento

- Supondo um problema a ser mapeado pelo *Perceptron* com duas entradas $\{x_1, x_2\}$;
- Para um conjunto de quatro amostras de treinamento constituídas dos seguintes valores: $\Omega^{(x)} = \{[2.0\ 3.5]; [6.8\ 5.3]; [2.0\ 2.5]; [8.1\ 4.2]\}$.
- Considerando-se ainda que os respectivos valores de saída para cada uma das amostras seja dado por $\Omega^{(d)} = \{[-1]; [1]; [-1]; [1]\}$.
- Escolhendo aleatoriamente os pesos sinápticos iniciais: $w = \{0.84; 0.68; 0.88\}$.

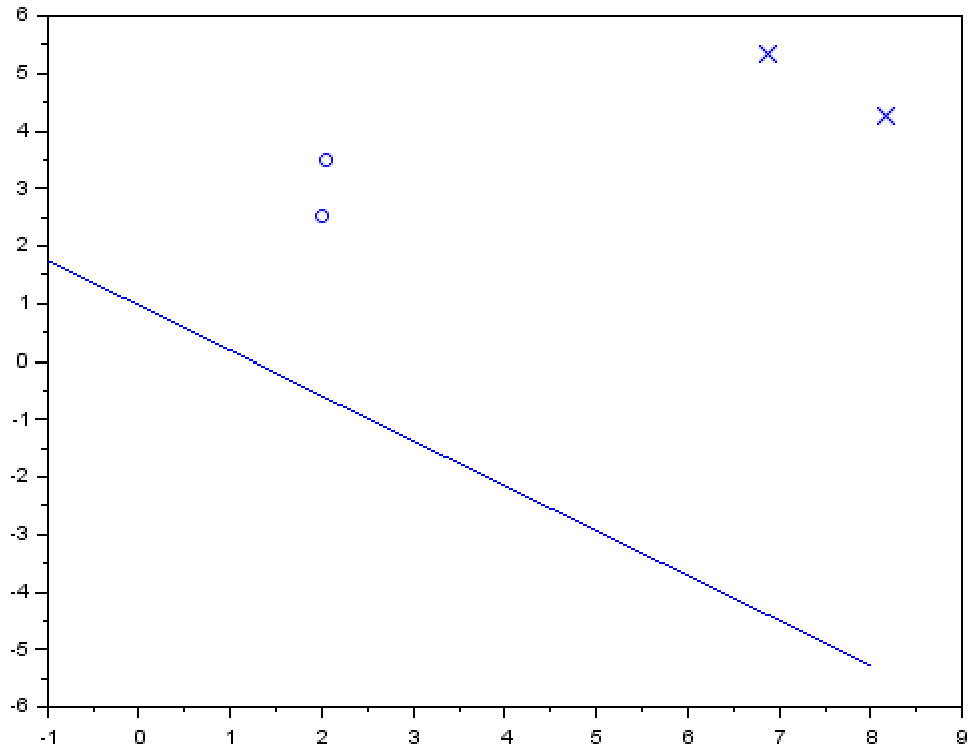
$$\Omega^{(x)} = \begin{array}{c} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x^{(1)} & x^{(2)} & x^{(3)} & x^{(4)} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2.0 & 6.8 & 2.0 & 8.1 \\ 3.5 & 5.3 & 2.5 & 4.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Omega^{(d)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d^{(1)} & d^{(2)} & d^{(3)} & d^{(4)} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Exemplo de treinamento, cont.

- Após uma época de treinamento:

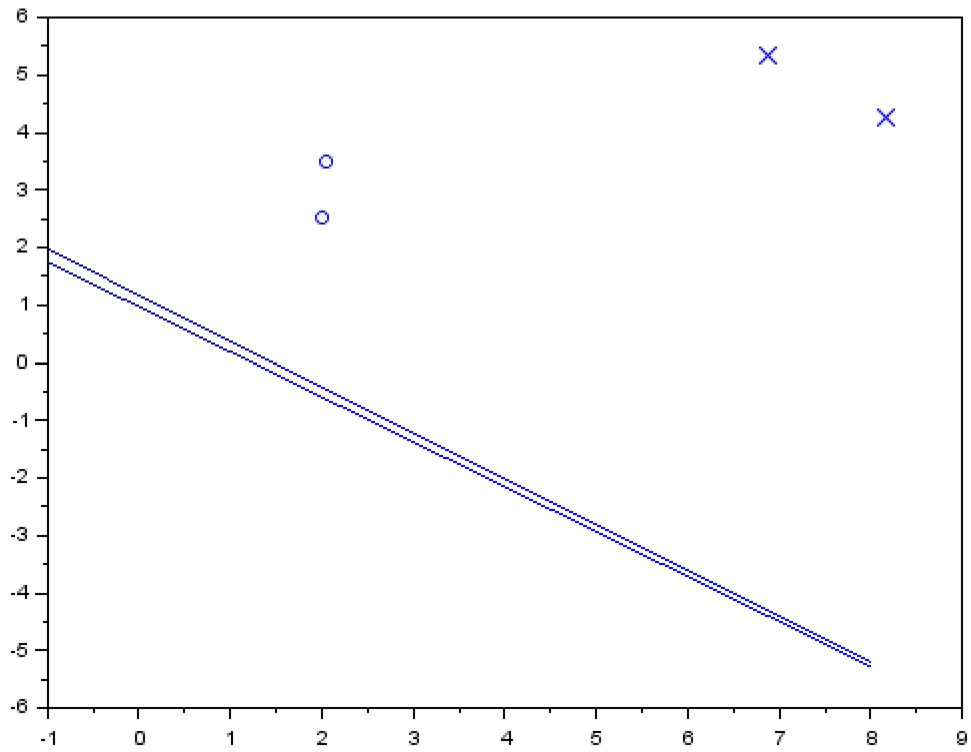
$$w = \{0.88; 0.60; 0.75\}$$



Exemplo de treinamento, cont.

- Após duas épocas de treinamento:

$$w = \{0.93; 0.52; 0.64\}$$

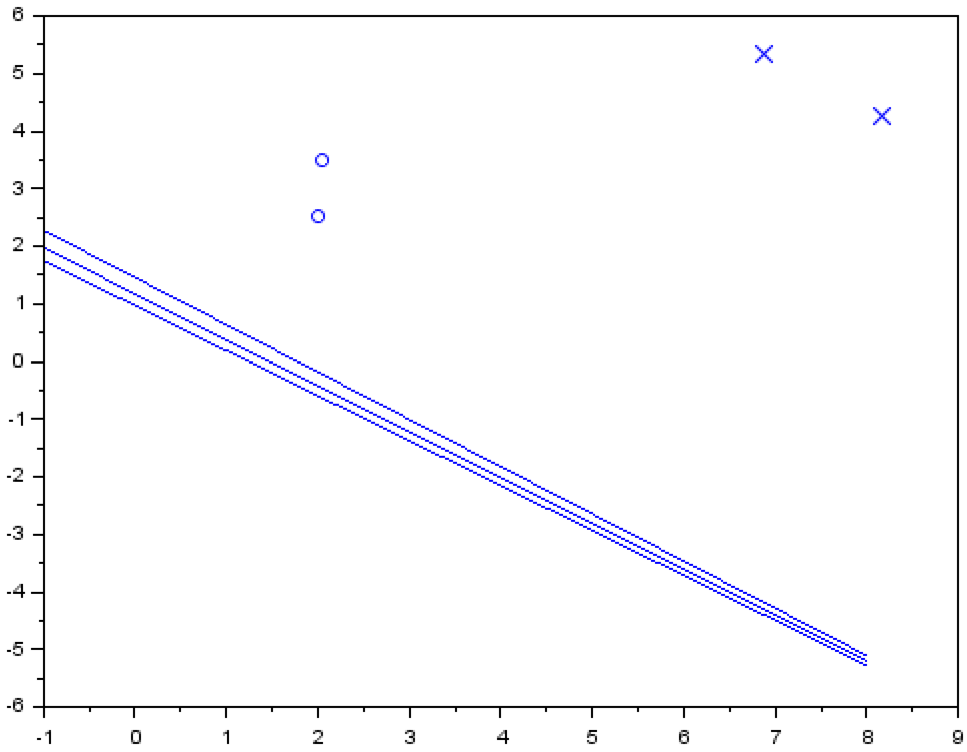


Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

Exemplo de treinamento, cont.

- Após três épocas de treinamento:

$$w = \{0.97; 0.44; 0.51\}$$

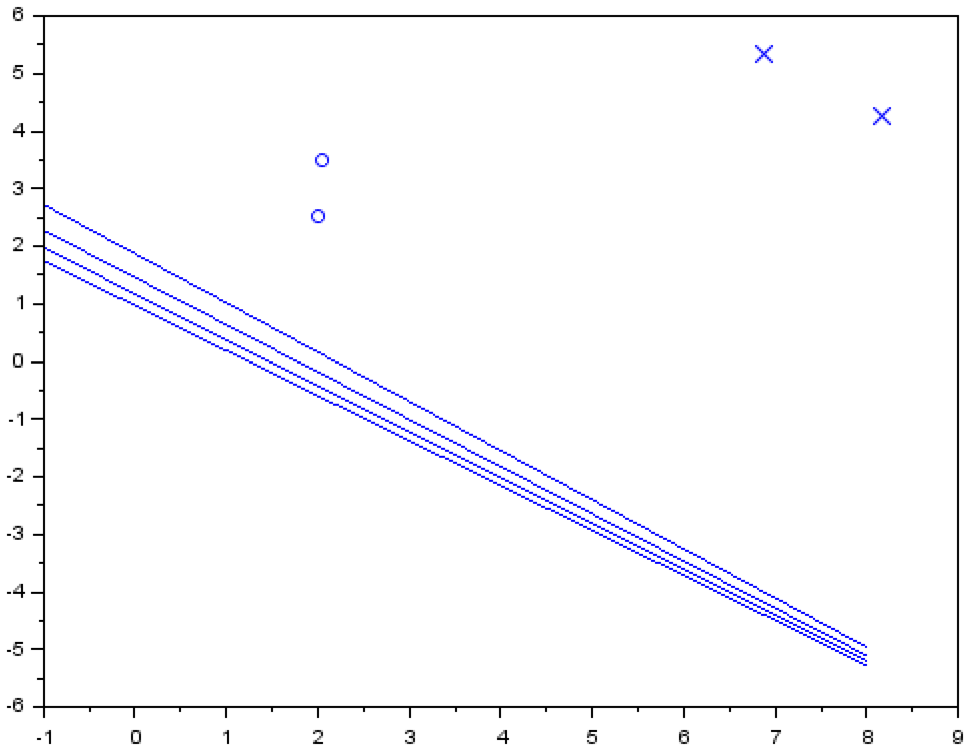


www.inatel.br

Exemplo de treinamento, cont.

- Após quatro épocas de treinamento:

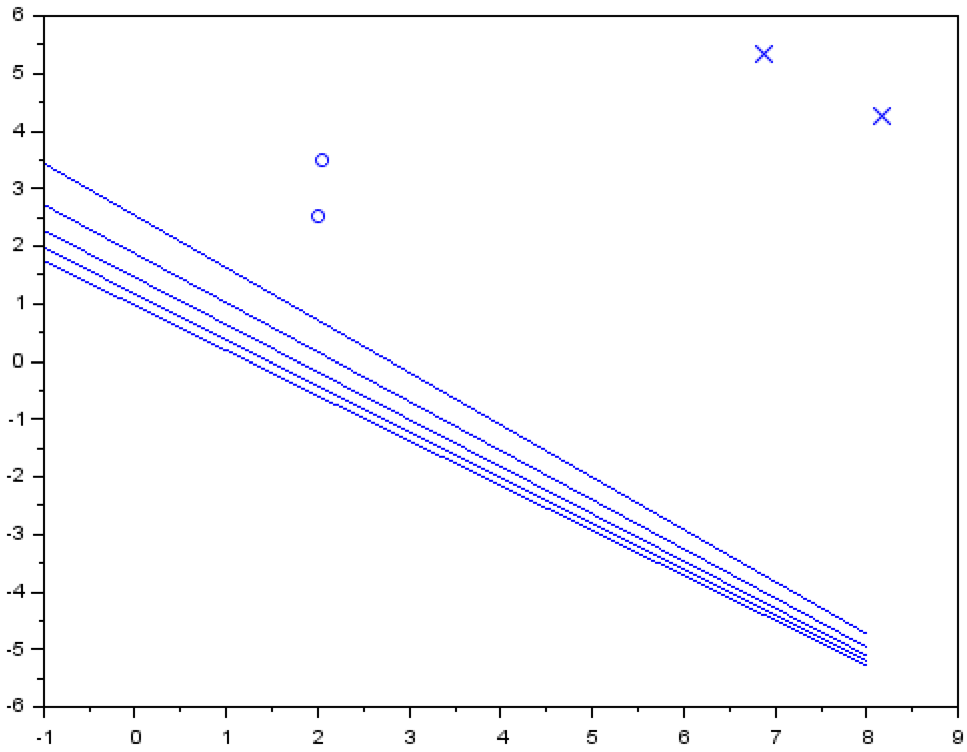
$$w = \{1.0; 0.36; 0.39\}$$



Exemplo de treinamento, cont.

- Após cinco épocas de treinamento:

$$w = \{1.04; 0.28; 0.27\}$$

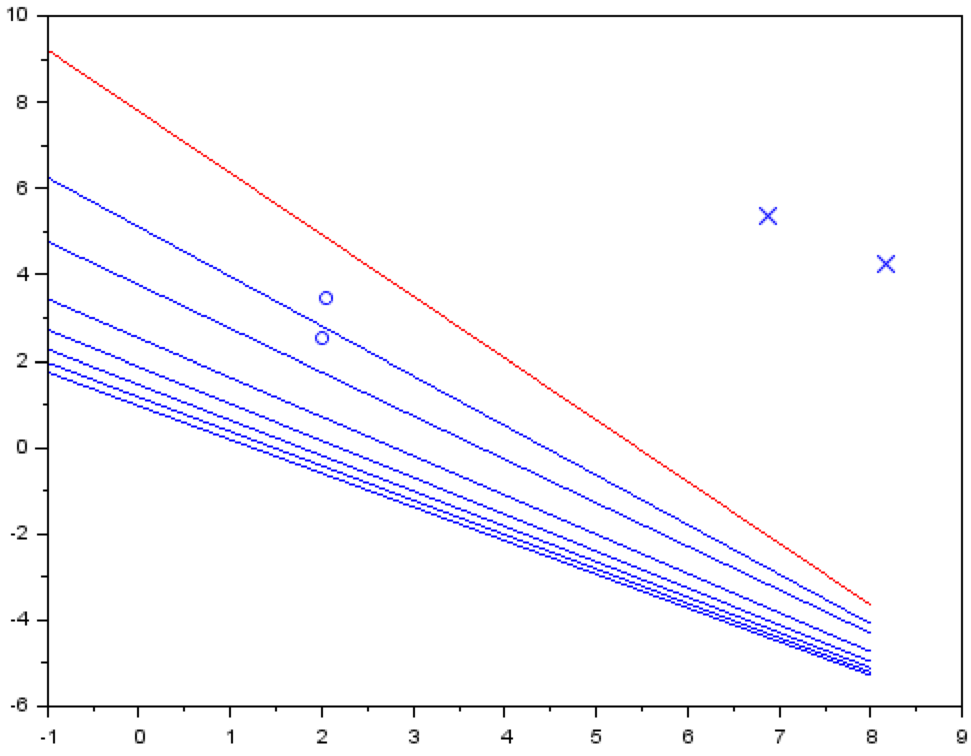


Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

Exemplo de treinamento, cont.

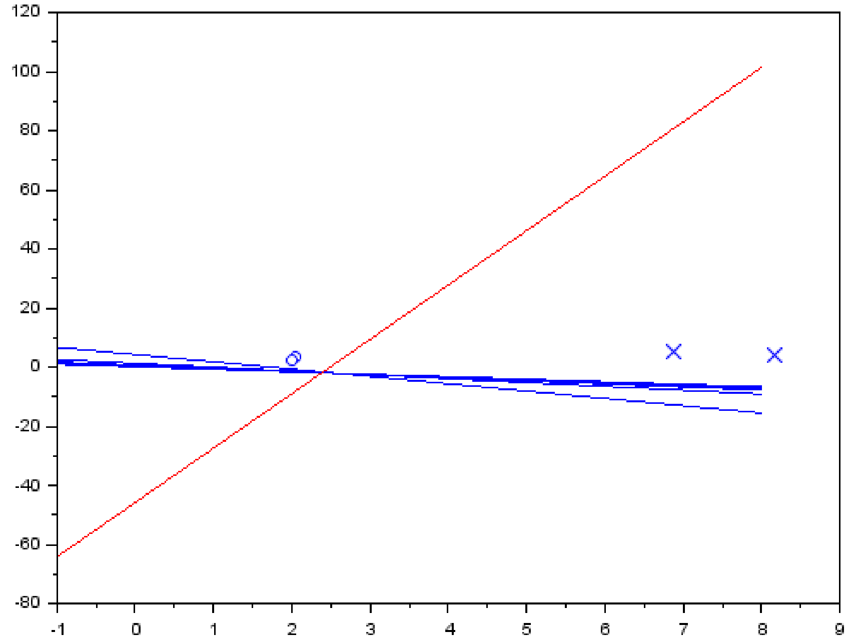
- Após oito épocas de treinamento:

$$w = \{1.09; 0.2; 0.14\}$$



Exemplo de treinamento, cont.

- Usando o mesmo problema anterior porém escolhendo outros valores, aleatoriamente, para os pesos sinápticos iniciais, encontra-se uma solução após 7 épocas de treinamento resultando nos pesos sinápticos finais $w = \{0.28; 0.11; -0.01\}$.



Aspectos práticos sobre o *Perceptron*

- Podem existir infinitas soluções para a rede dependendo dos pesos sinápticos iniciais escolhidos. Logo a solução não é ótima e o número de épocas varia;
- A rede divergirá se o problema não for linearmente separável;
- Usando a faixa de separabilidade entre as classes forem muito estreitas, o processo de treinamento pode implicar em instabilidade. Neste caso utiliza-se uma taxa de aprendizagem $\{\eta\}$ bem pequena.
- Quanto mais próxima a superfície de decisão estiver da fronteira de separabilidade, menos épocas serão necessárias para a rede convergir.
- A normalização das entradas para domínios apropriados contribui para o incremento do desempenho da rede.

Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

Redes Neurais Artificiais

Rede *Adaline* e regra Delta

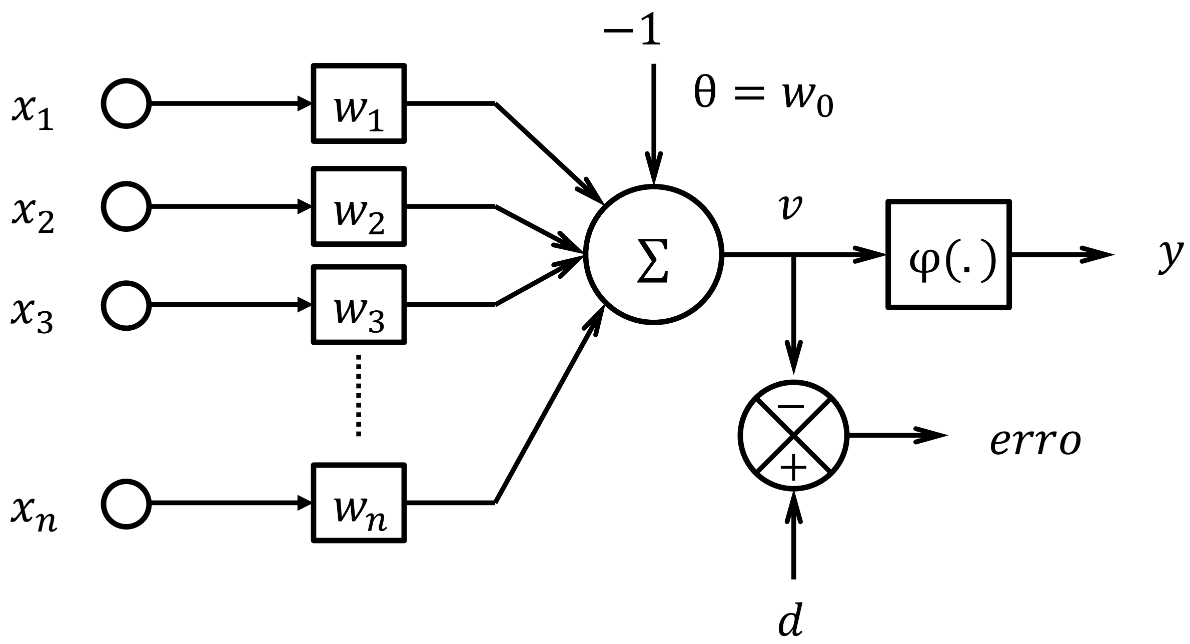
Julho 2014

Rede *Adaline*

- *Adaline* (*Adaptive Linear Neuron*) foi idealizado por Widrow e Hoff em 1960 e sua principal aplicação se destinava a sistemas de chaveamento de circuitos eletrônicos;
- Apesar de ser uma rede simples, promoveu alguns avanços importantes para o progresso da área de redes neurais:
  - Desenvolvimento do algoritmo de aprendizado regra Delta;
  - Aplicações em diversos problemas práticos envolvendo processamento de sinais analógicos;
  - Primeiras aplicações industriais de redes neurais artificiais.
- Sua grande contribuição foi a introdução da regra Delta, que hoje é utilizado para treinamento de redes *Perceptron* de camadas múltiplas.

Rede *Adaline*, cont.

- Configuração estrutural similar ao *Perceptron*, composto de apenas uma camada de neurônios com arquitetura *feedforward*.



Princípio de funcionamento

- Cada entrada $\{x_j\}$ será ponderada pelos respectivos pesos sinápticos;
- O potencial de ativação $\{v\}$ é computado através da soma das contribuições advindas das multiplicações de todos os sinais x_i por w_i, incluindo o seu limiar $\{\theta\}$.
- A saída $\{y\}$ é a aplicação da função de ativação $\varphi(\mathrm{v})$, representada tipicamente pela função degrau ou função bipolar.
- A saída $erro$é utilizada no processo de treinamento da rede;

$$v = \sum_{i=1}^{n} w_i . x_i - \theta \leftrightarrow v = \sum_{i=0}^{n} w_i . x_i$$

$$y = \varphi(v)$$

$$erro = (d - v)$$

Treinamento do *Adaline*

- O processo de ajuste dos pesos e limiar do *Adaline* é baseado na regra Delta, também conhecido como algoritmo LMS (*least mean square*) ou método do Gradiente Descendente;
- Assumindo-se p amostras de treinamento, a ideia básica está em minimizar a diferença entre a saída desejada $\{d\}$ e a resposta do combinador linear $\{v\}$, considerando todas as amostras;
- O critério utilizado é a minimização do erro quadrático médio entre v e d ajustando o vetor de pesos sinápticos $w = [\theta\ w_1 w_2 \ldots w_n]^T$ da rede;

Treinamento do *Adaline, cont.*

- O objetivo é encontrar o w^* ótimo para o qual o erro quadrático $\{E(w^*)\}$ seja mínimo para todo o conjunto de amostras;

$$E(w^*) \leq E(w), para\, \forall\, w\ \in R^{n+1}$$

- A função do erro quadrático em relação às p amostras é definida por:

$$E(w) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}(d^{(k)} - v)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}(d^{(k)} - (\sum_{i=1}^{n} w_i . {x_i}^{(k)} - \theta))^2$$

$$E(w) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}(d^{(k)} - (w^T * x^{(k)} - \theta))^2$$

- Como minimizar a função do erro $E(w)$?

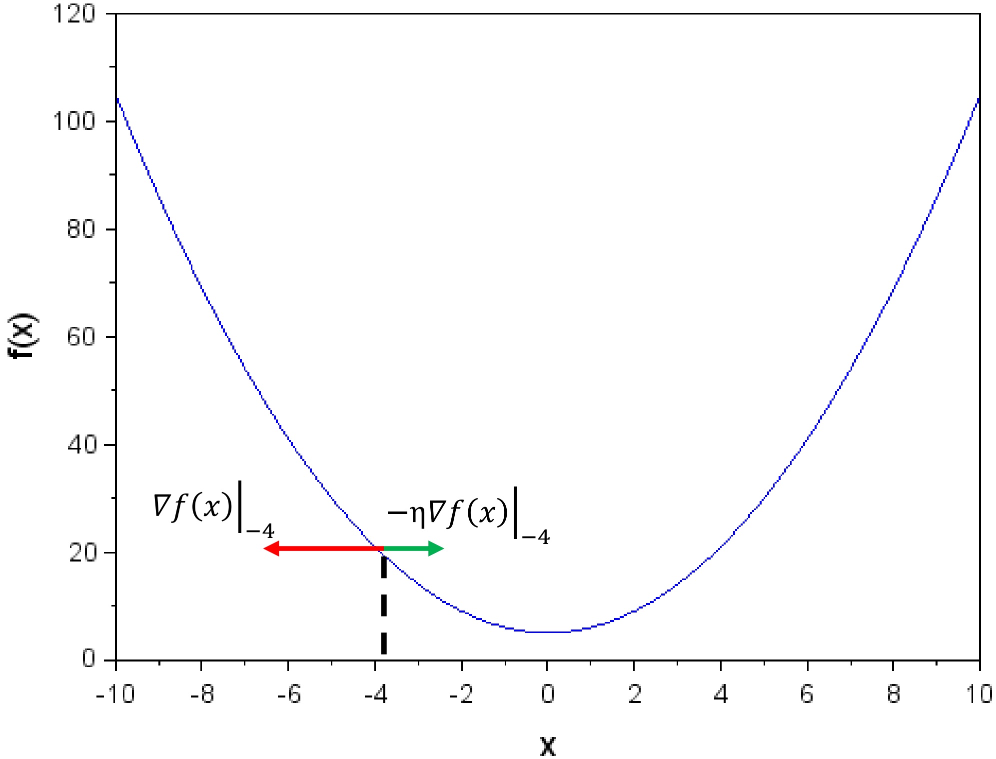
Gradiente

- Como minimizar o erro $E(w)$?

$$f(x) = x^2 + 5 \rightarrow \nabla f(x) = 2x$$

$$\begin{cases} x = -4 \rightarrow \nabla f(x) = -8 \\ x = -3 \rightarrow \nabla f(x) = -6 \\ x = -1 \rightarrow \nabla f(x) = -2 \\ x = \quad 0 \rightarrow \nabla f(x) = \quad 0 \\ x = +1 \rightarrow \nabla f(x) = +2 \\ x = +3 \rightarrow \nabla f(x) = +6 \\ x = +4 \rightarrow \nabla f(x) = +8 \end{cases}$$

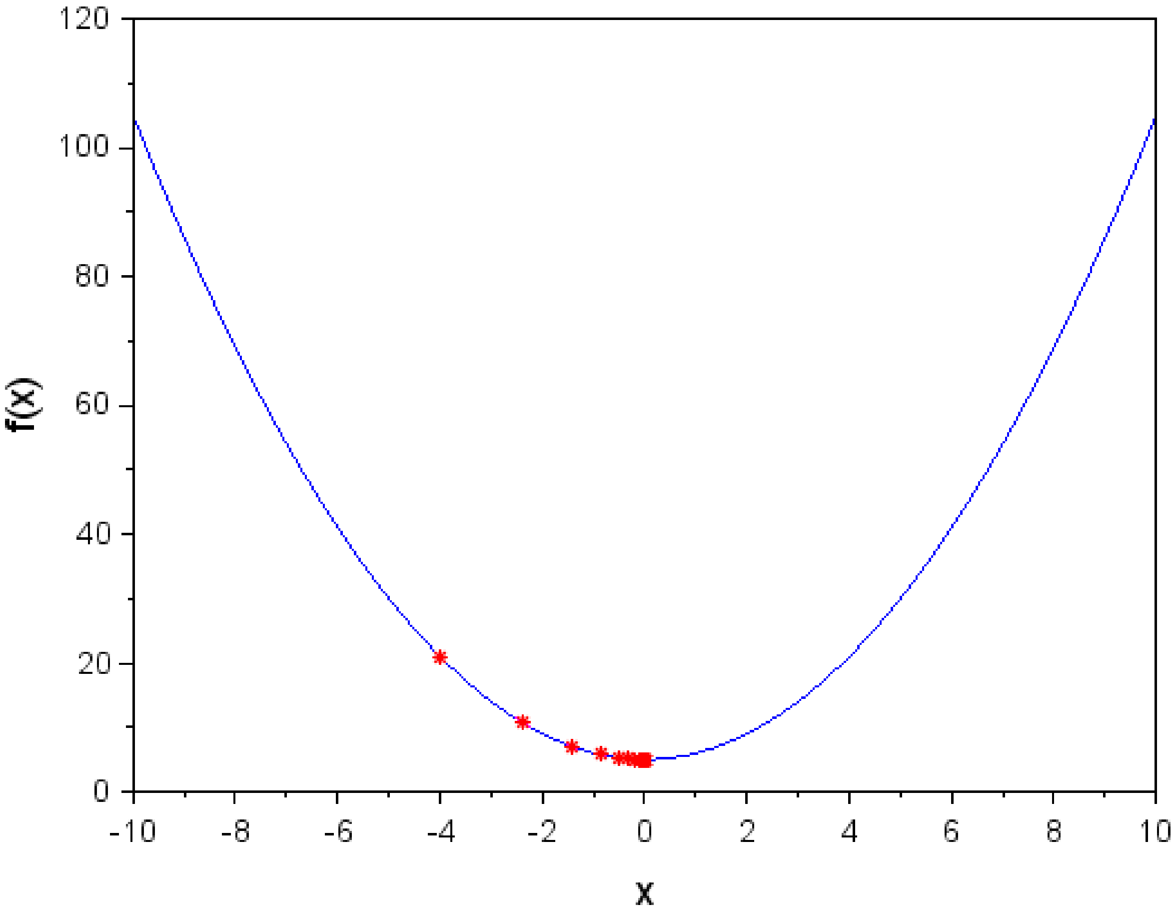
$$\nabla f(x^*) = 0 \rightarrow x^* = (0{,}0)$$



- Partindo de $x = -4$, qual o ajuste a ser feito em x para minimizar $f(x)$?

Gradiente, cont.

$$x(k+1) = x + \eta . \nabla f(x(k)) \rightarrow f(x(k+1)) < f(x(k))$$



Regra Delta

- O vetor gradiente aponta para a direção e sentido de maior crescimento da função de custo (para uma função de ativação linear);

$$\nabla E(w) = \frac{\partial E(w)}{\partial w} = \sum_{k=1}^{p} \left(d^{(k)} - \left(w^T * x^{(k)} - \theta\right)\right).(-x^{(k)})$$

$$\nabla E(w) = -\sum_{k=1}^{p} \left(d^{(k)} - v\right).(x^{(k)})$$

- O ajuste dos pesos deve considerar a mesma direção e o sentido contrário ao do vetor gradiente da função de custo $E(w)$ porque o objetivo é minimizar o erro quadrático médio.

Regra Delta, cont.

- O ajuste Δw no vetor de pesos sinápticos é dada por:

$$\Delta w = -\eta . \nabla E(w)$$

$$\Delta w = \eta . \sum_{k=1}^{p} \left(d^{(k)} - v\right) . \left(x^{(k)}\right)$$

- A partir do ajuste Δw, atualiza-se o vetor w:

$$w^{atual} = w^{anterior} + \eta . \sum_{k=1}^{p} \left(d^{(k)} - v\right) . \left(x^{(k)}\right)$$

- O ajuste também pode ser realizado após a apresentação de cada k-ésima amostra de treinamento:

$$w^{atual} = w^{anterior} + \eta . \left(d^{(k)} - v\right) . \left(x^{(k)}\right), onde\; k = 1, \dots, p$$

Regra Delta, cont.

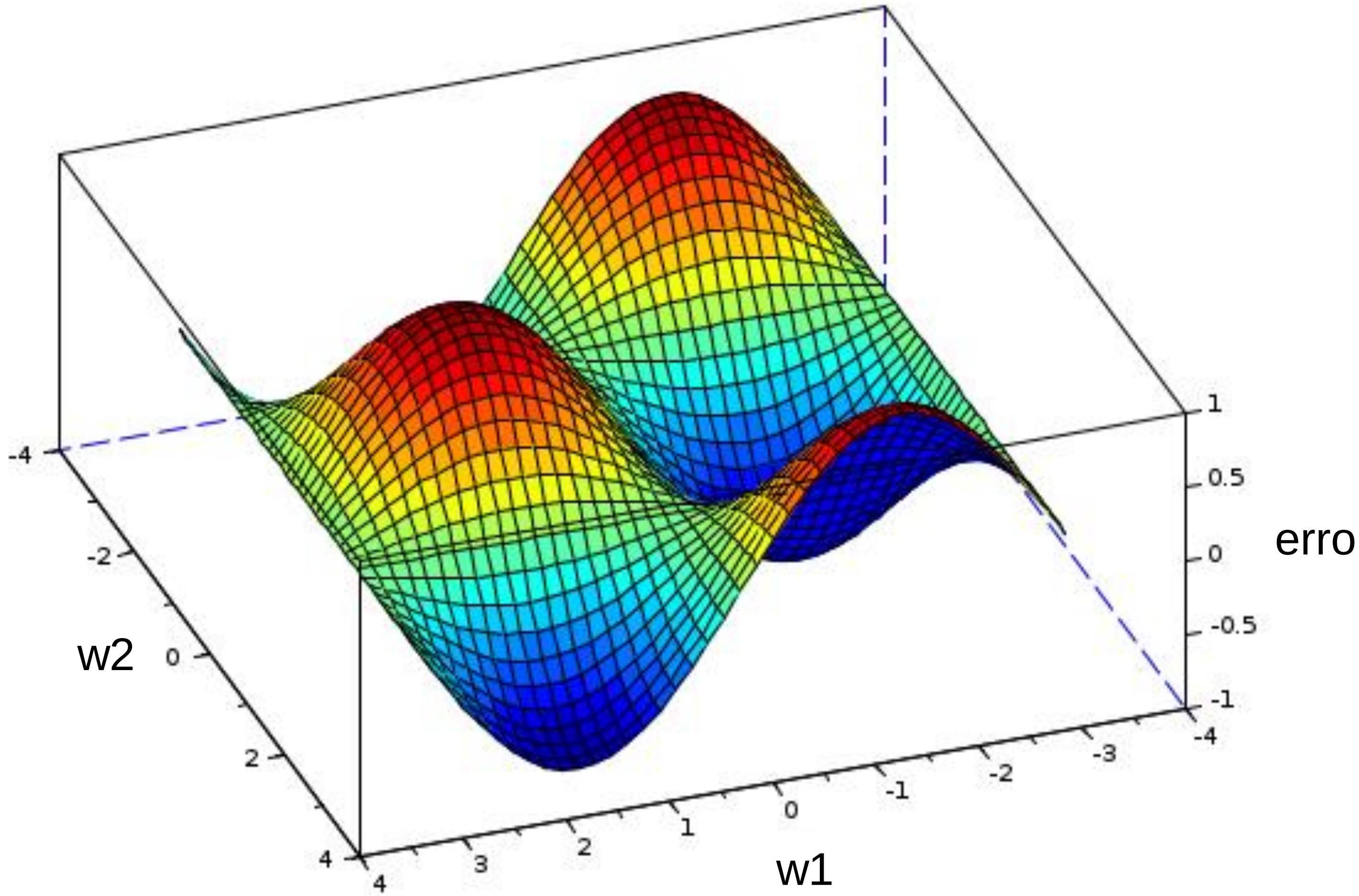
- Assim como no *Perceptron*, a taxa de aprendizagem $\{\eta\}$ exprime o quão rápido o processo de treinamento da rede estará rumando em direção ao ponto de minimização da função de erro quadrático médio;

- Normalmente adota-se valores pertencentes ao intervalo compreendido em $0 < \eta < 1$.

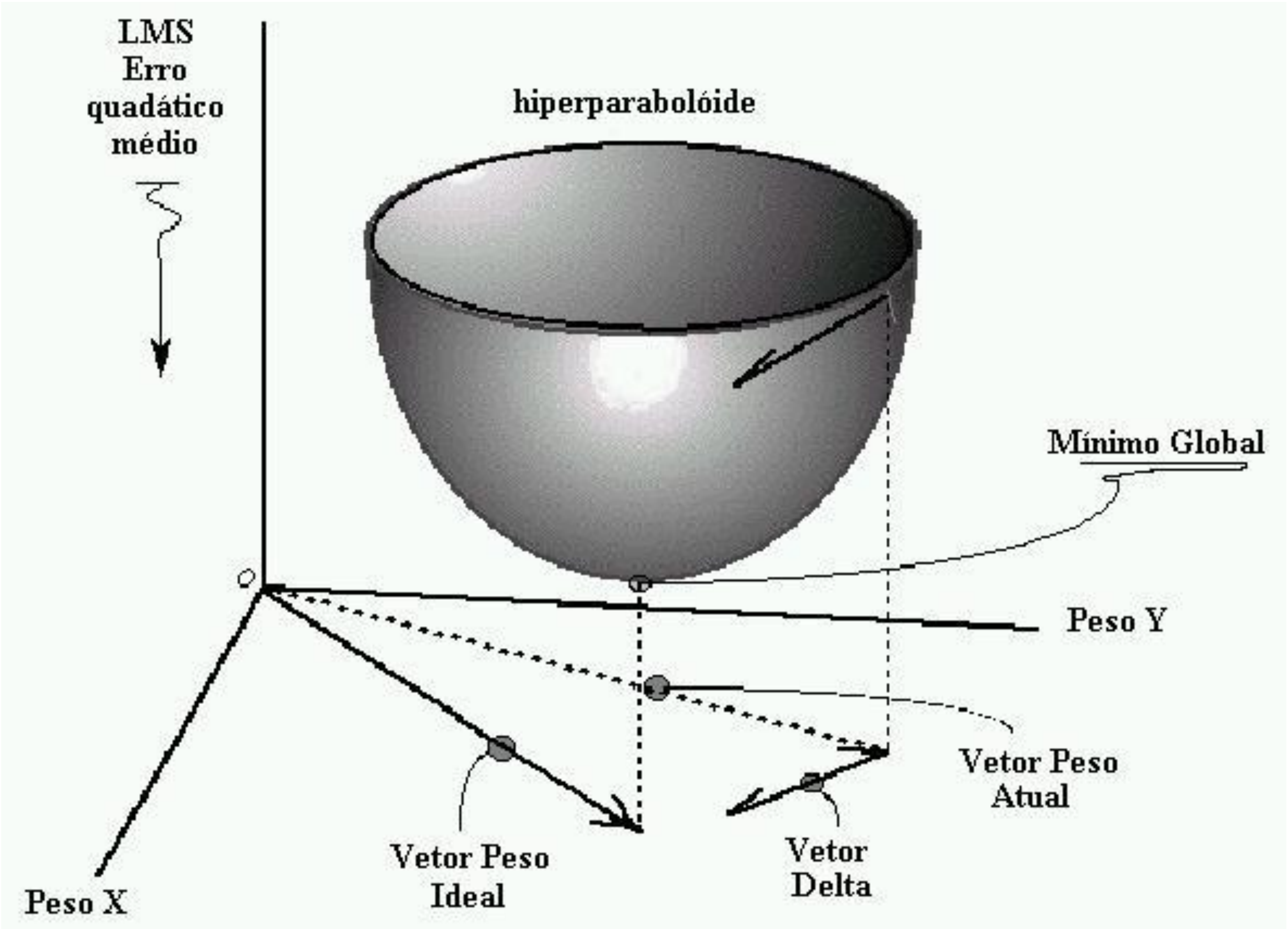
Superfícies de erro

- O conjunto dos $m+1$ pesos a serem ajustados em uma rede neural pode ser visto como um ponto em um espaço $(m+1)$-dimensional, conhecido como espaço de pesos;
- Pode-se imaginar que cada conjunto de pesos apresenta um valor associado de erro para cada amostra de entrada e também para todo o conjunto de treinamento;
- Os valores de erro para todos os conjuntos possíveis de pesos definem uma superfície no espaço de pesos – a superfície de erro;

Superfícies de erro, cont.



Superfícies de erro, cont.

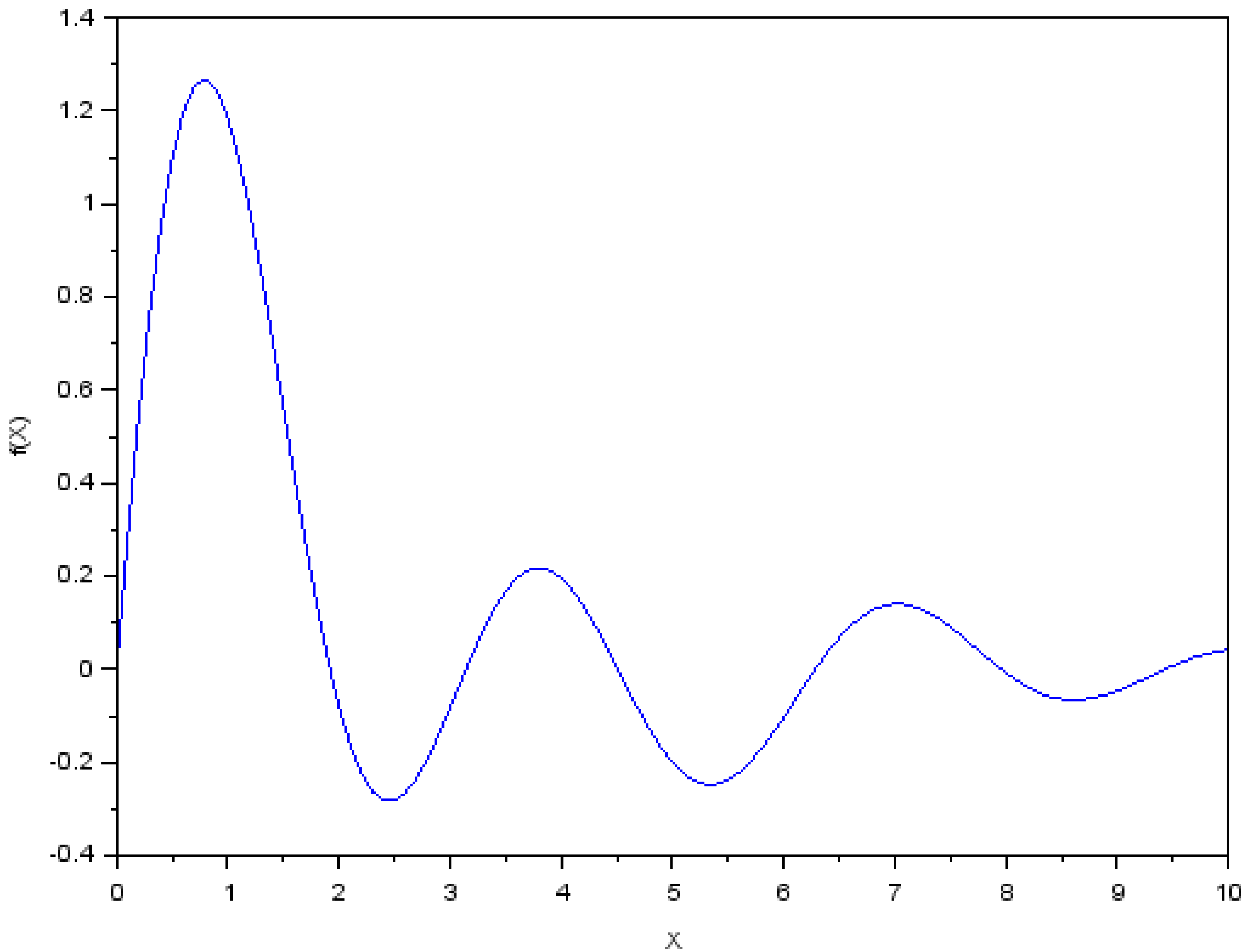


Superfícies de erro, cont.

- O algoritmo de treinamento baseado na regra Delta, que é um algoritmo supervisionado, opera com base na minimização de uma função de custo, que neste caso é baseada no erro entre as saídas obtidas na rede e as saídas desejadas.

  - ✓ A superfície de erro possui uma grande quantidade de mínimos locais;
  - ✓ Pode-se encontrar situações onde o método do gradiente não tem solução (descontinuidades);
  - ✓ Outros métodos de busca podem ser utilizados.

Superfícies de erro, cont.



Perigos?

- ✓ Variação de η

Algoritmo *Adaline* - treinamento

1) Obter conjunto de amostras de treinamento $\{x^{(k)}\}$;

2) Associar a saída desejada $\{d^{(k)}\}$ para cada amostra obtida;

3) Iniciar o vetor w com valores aleatórios pequenos;

4) Especificar a taxa de aprendizagem $\{\eta\}$ e precisão requerida $\{\varepsilon\}$;

5) Iniciar o contador de número de épocas $\{época s \leftarrow 0\}$;

6) Repetir as instruções:

6.1) $E_{qm}{}^{anterior} \leftarrow E_{qm}(w)$

6.2) Para todos pares de treinamento $\{x^{(k)}, d^{(k)}\}$, faça:

$$\begin{cases} \text{6.2.1) } v \leftarrow w^T * x^k; \\ \text{6.2.2) } w \leftarrow w + \eta * \left(d^{(k)} - v\right) * x^{(k)}; \end{cases}$$

6.3) $época \leftarrow época + 1$;

6.4) $E_{qm}{}^{atual} \leftarrow E_{qm}(w)$;

Até que: $\left| E_{qm}{}^{atual} - E_{qm}{}^{anterior} \right| \leq \varepsilon$

Algoritmo *EQM*

1) Obter a quantidade de padrões de treinamento $\{p\}$;

2) Iniciar a variável E_{qm} com valor zero $\{E_{qm} \leftarrow 0\}$;

3) Para todos pares de treinamento $\{x^{(k)}, d^{(k)}\}$, faça:

3.1) $v \leftarrow w^T * x^k$;

3.2) $E_{qm} \leftarrow E_{qm} + \left(d^{(k)} - v\right)^2$;

4) $E_{qm} \leftarrow \dfrac{E_{qm}}{p}$;

Algoritmo *Adaline* - operação

1) Obter a amostra a ser classificada $\{x\}$;

2) Utilizar o vetor w ajustado durante o treinamento;

3) Executar as seguintes instruções:

3.1) $v \leftarrow w^T * x$;

3.2) $y \leftarrow$ degrau(v); (sign no Matlab)

3.3) Se $y == -1$

3.3.1) Então: amostra $\boldsymbol{x} \in \{Classe\ A\}$

3.4) Se $y == 1$

3.4.1) Então: amostra $\boldsymbol{x} \in \{Classe\ B\}$

https://code.google.com/p/neural-networks-examples/

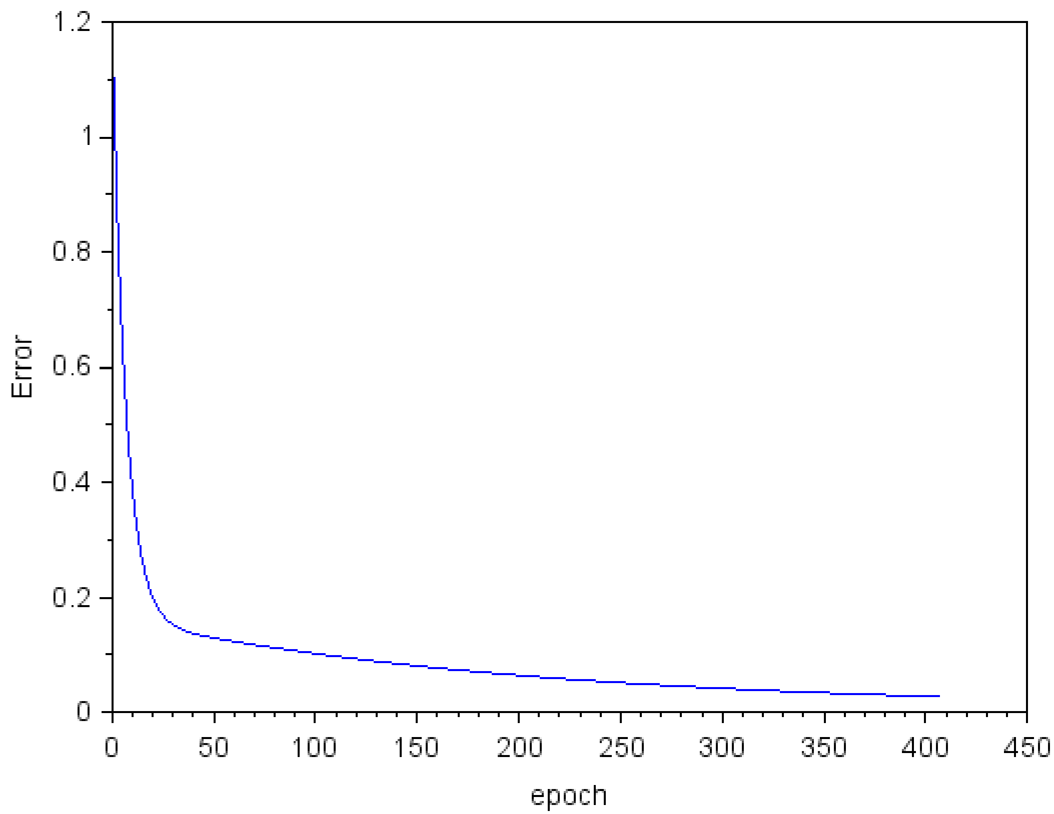
Exemplo de treinamento

- Supondo um problema a ser mapeado pelo *Adaline* com duas entradas $\{x_1, x_2\}$;
- Para um conjunto de quatro amostras de treinamento constituídas dos seguintes valores: $\Omega^{(x)} = \{[2.0\ 3.5]; [6.8\ 5.3]; [2.0\ 2.5]; [8.1\ 4.2]\}$.
- Considerando-se ainda que os respectivos valores de saída para cada uma das amostras seja dado por $\Omega^{(d)} = \{[-1]; [1]; [-1]; [1]\}$.
- Escolhendo aleatoriamente os pesos sinápticos iniciais: $w = \{0.36; 0.29; 0.57\}$.

$$\Omega^{(x)} = \begin{array}{c} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x^{(1)} & x^{(2)} & x^{(3)} & x^{(4)} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2.0 & 6.8 & 2.0 & 8.1 \\ 3.5 & 5.3 & 2.5 & 4.2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \Omega^{(d)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d^{(1)} & d^{(2)} & d^{(3)} & d^{(4)} \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

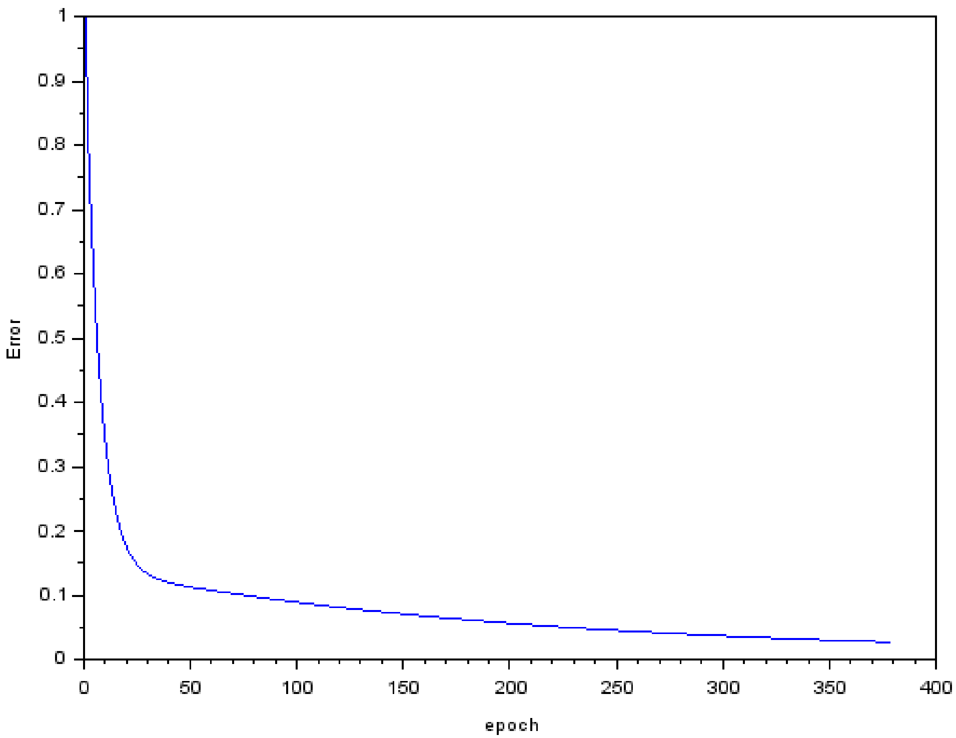
Exemplo de treinamento, cont.

- Após 407 épocas de treinamento:
  - ✓ $w = \{1.71; 0.30;\ 0.07\}$



Exemplo de treinamento, cont.

- Usando o mesmo problema anterior porém escolhendo outros valores, aleatoriamente, para os pesos sinápticos iniciais, obtém-se após 379 épocas de treinamento:
  - ✓ $w = \{1.71; 0.30; 0.07\}$



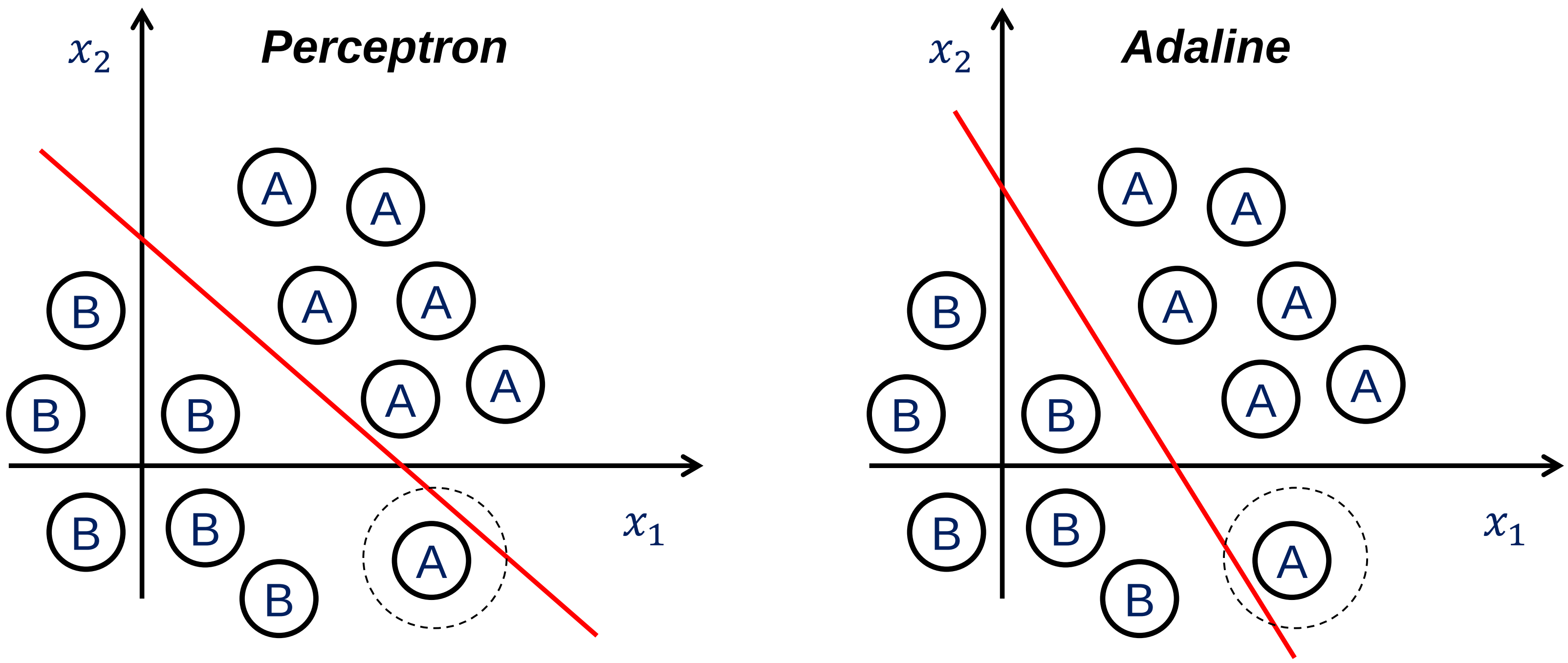
Aspectos práticos sobre o *Adaline*

- O processo de treinamento da *Adaline* tende a mover o vetor de pesos sinápticos visando diminuir o erro quadrático médio em relação a todas as amostras de treinamento;
- O processo de convergência da rede caminha o hiperplano de separação sempre em direção à fronteira de separabilidade ótima mesmo começando com vetores iniciais distintos;
- A curva do erro quadrático médio para o *Adaline* é sempre descendente, à medida que as épocas de treinamento são executadas, estabilizando-se num valor constante quando o ponto de mínimo da função de erro quadrático médio é alcançado;

Aspectos práticos sobre o *Adaline*, cont.

- No *Adaline,* o processo de treinamento busca o hiperplano de separabilidade ótimo enquanto no *Perceptron*, qualquer hiperplano dentro da faixa de separabilidade é considerado uma solução;
- O *Adaline* ajusta a inclinação do hiperplano através do método dos mínimos quadrados dos erros (*LMS – least mean square*). Por atingir o hiperplano ótimo para quaisquer valores atribuídos inicialmente a seus pesos, o *Adaline* se apresenta uma rede neural com maior imunidade a ruídos;

Aspectos práticos sobre o *Adaline*, cont.



Aspectos práticos sobre o *Adaline*

- O processo de treinamento da *Adaline* tende a mover o vetor de pesos sinápticos visando diminuir o erro quadrático médio em relação a todas as amostras de treinamento;
- O processo de convergência da rede caminha o hiperplano de separação sempre em direção à fronteira de separabilidade ótima mesmo começando com vetores iniciais distintos;
- A curva do erro quadrático médio para o *Adaline* é sempre descendente, à medida que as épocas de treinamento são executadas, estabilizando-se num valor constante quando o ponto de mínimo da função de erro quadrático médio é alcançado;

Aspectos práticos sobre o *Adaline*, cont.

- O valor da taxa de aprendizagem $\{\eta\}$ deve ser cuidadosamente especificado para evitar instabilidades em torno do ponto mínimo e também evitar um processo de convergência extremamente lento;
- O número de épocas de treinamento depende dos pesos sinápticos iniciais atribuídos $\{w\}$ assim como do valor assumido para a taxa de aprendizagem $\{\eta\}$;
- O desempenho do treinamento do *Adaline* pode ser melhorado por intermédio da normalização dos sinais de entrada frente ao domínio apresentado;

Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

Fim

Inatel
Instituto Nacional de Telecomunicações

Edielson Prevato Frigieri
edielson@inatel.br

45 ANOS Inatel

www.inatel.br