UNIVERSIDADE POLITÉCNICA DE PERNAMBUCO

CURSO DE ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

TRABALHO DE CÁLCULO NUMÉRICO

Resolução de Sistemas de Equações Lineares por Eliminação de Gauss, Fatoração LU e Cholesky

Professor: Jornandes Dias da Silva

Discentes:
Caio Cesar Leite Lima
Gabriel Nobrega Toscano
Ricardo Timoteo Wanderley

Recife, PE
15 de Maio de 2025

Contents

1 Sistema Original

Resolver o sistema de equações utilizando a técnica de Elininação de Gauss, com 4 casas decimais nos resultados:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \end{cases} ; S_x^{(0)} = (x_1^{(0)} = 0.5000\, x_2^{(0)} = 2.0000,\ x_3^{(0)} = 0.9000\, x_4^{(0)} = 1.2000)^t;$$

2 Transformação do Sistema em Matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix};$$

3 Eliminação de Gauss

3.1 Transformar em matriz triangular superior:

`Consiste em isolar as incógnitas para descobrir seus respectivos valores.`

3.1.1 Calcular multiplicadores (linha 1)

`Calcula o valor do multiplicador que é usado para zerar os elementos abaixo do pivô de cada linha.`

$$m_{21} = \frac{1}{2} = 0.5000, \quad m_{31} = \frac{3}{2} = 1.5000, \quad m_{41} = \frac{4}{2} = 2.0000;$$

3.1.2 Zerar elementos abaixo do pivô (coluna 1)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}; \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - m_{21} \cdot L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - m_{31} \cdot L_1 \end{matrix};$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.0000 & 2.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0 & -2.0000 & 1.5000 & -1.5000 \\ 0 & -1.0000 & -4.5000 & -3.5000 \\ 0 & -1.0000 & 0 & -1.0000 \end{bmatrix}, b^{(1)} = \begin{bmatrix} 7.0000 \\ -2.5000 \\ -6.5000 \\ -2.0000 \end{bmatrix};$$

3.1.3 Calcular multiplicadores (linha 2)

$$m_{32} = \frac{-1}{-2} = 0.5000, \quad m_{42} = \frac{-1}{-2} = 0.5000;$$

3.1.4 Zerar elementos abaixo do pivô (coluna 2)

$$\begin{bmatrix} 2.0000 & 2.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0 & -2.0000 & 1.5000 & -1.5000 \\ 0 & -1.0000 & -4.5000 & -3.5000 \\ 0 & -1.0000 & 0 & -1.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.0000 \\ -2.5000 \\ -6.5000 \\ -2.0000 \end{bmatrix}; \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - m_{32} \cdot L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - m_{42} \cdot L_2 \end{matrix};$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.0000 & 2.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0 & -2.0000 & 1.5000 & -1.5000 \\ 0 & 0 & -5.2500 & -2.7500 \\ 0 & 0 & -0.7500 & 0.2500 \end{bmatrix}, b^{(2)} = \begin{bmatrix} 7.0000 \\ -2.5000 \\ -5.2500 \\ -0.7500 \end{bmatrix};$$

3.1.5 Calcular multiplicadores (linha 3)

$$m_{43} = \frac{-0.7500}{-5.2500} = 0.1428;$$

3.1.6 Zerar elementos abaixo do pivô (coluna 3)

$$\begin{bmatrix} 2.0000 & 2.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0 & -2.0000 & 1.5000 & -1.5000 \\ 0 & -1.0000 & -4.5000 & -3.5000 \\ 0 & -1.0000 & 0 & -1.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.0000 \\ -2.5000 \\ -6.5000 \\ -2.0000 \end{bmatrix}; L_4 \leftarrow L_4 - m_{43} \cdot L_3 \quad ;$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2.0000 & 2.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0 & -2.0000 & 1.5000 & -1.5000 \\ 0 & 0 & -5.2500 & -2.7500 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6428 \end{bmatrix}, b^{(3)} = \begin{bmatrix} 7.0000 \\ -2.5000 \\ -5.2500 \\ 0 \end{bmatrix};$$

3.2 Fazer as interação

Consiste em isolar as incógnitas, fazendo as interações para descobrindo os valores de $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$, $x_3^{(k+1)}$ e $x_4^{(k+1)}$

3.2.1 Isolar as incógnitas

$$\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{2} \cdot [7.0000 - 2.0000x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - x_4^{(k)}] \\
x_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{2} \cdot [-2.5000 - 1.5000x_3^{(k)} + 1.5000x_4^{(k)}] \\
x_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{5.2500} \cdot [-5.2500 + 2.7500x_4^{(k)}] \\
x_4^{(k+1)} &= \frac{1}{0.6428} \cdot [0]
\end{aligned}$$

3.2.2 Primeira interação (k = 0)

$$S_x^{(0)} = (x_1^{(0)} = 0.5000\ x_2^{(0)} = 2.0000,\ x_3^{(0)} = 0.9000\ x_4^{(0)} = 1.2000)^t;$$

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{2} \cdot [7.0000 - 2.0000x_2^{(0)} - x_3^{(0)} - x_4^{(0)}] \\
x_2^{(1)} &= -\frac{1}{2} \cdot [-2.5000 - 1.5000x_3^{(0)} + 1.5000x_4^{(0)}] \\
x_3^{(1)} &= -\frac{1}{5.2500} \cdot [-5.2500 + 2.7500x_4^{(0)}] \\
x_4^{(1)} &= \frac{1}{0.6428} \cdot [0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= 0.7000 \\
x_2^{(1)} &= 0.6200 \\
x_3^{(1)} &= 0.3714 \\
x_4^{(1)} &= 0.0000
\end{aligned}$$

3.2.3 Segunda interação (k = 1)

$$S_x^{(1)} = (x_1^{(1)} = 0.7000 \ x_2^{(1)} = 0.6200, \ x_3^{(1)} = 0.3714 \ x_4^{(1)} = 0.0000)^t;$$

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= \frac{1}{2} \cdot [7.0000 - 2.0000x_2^{(1)} - x_3^{(1)} - x_4^{(1)}] \\
x_2^{(2)} &= -\frac{1}{2} \cdot [-2.5000 - 1.5000x_3^{(1)} + 1.5000x_4^{(1)}] \\
x_3^{(2)} &= -\frac{1}{5.2500} \cdot [-5.2500 + 2.7500x_4^{(1)}] \\
x_4^{(2)} &= \frac{1}{0.6428} \cdot [0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= 2.6443 \\
x_2^{(2)} &= 1.5285 \\
x_3^{(2)} &= 1.0000 \\
x_4^{(2)} &= 0.0000
\end{aligned}$$

3.2.4 Terceira interação (k = 2)

$$S_x^{(2)} = (x_1^{(2)} = 2.6443 \ x_2^{(2)} = 1.5285, \ x_3^{(2)} = 1.0000 \ x_4^{(2)} = 0.0000)^t;$$

$$\begin{aligned}
x_1^{(3)} &= \frac{1}{2} \cdot [7.0000 - 2.0000x_2^{(2)} - x_3^{(2)} - x_4^{(2)}] \\
x_2^{(3)} &= -\frac{1}{2} \cdot [-2.5000 - 1.5000x_3^{(2)} + 1.5000x_4^{(2)}] \\
x_3^{(3)} &= -\frac{1}{5.2500} \cdot [-5.2500 + 2.7500x_4^{(2)}] \\
x_4^{(3)} &= \frac{1}{0.6428} \cdot [0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1^{(3)} &= 1.4715 \\
x_2^{(3)} &= 2.0000 \\
x_3^{(3)} &= 1.0000 \\
x_4^{(3)} &= 0.0000
\end{aligned}$$

3.2.5 Quarta interação (k = 3)

$$S_x^{(3)} = (x_1^{(3)} = 1.4715\ x_2^{(3)} = 2.0000,\ x_3^{(3)} = 1.0000\ x_4^{(3)} = 0.0000)^t;$$

$$\begin{aligned}
x_1^{(4)} &= \frac{1}{2} \cdot [7.0000 - 2.0000x_2^{(3)} - x_3^{(3)} - x_4^{(3)}] \\
x_2^{(4)} &= -\frac{1}{2} \cdot [-2.5000 - 1.5000x_3^{(3)} + 1.5000x_4^{(3)}] \\
x_3^{(4)} &= -\frac{1}{5.2500} \cdot [-5.2500 + 2.7500x_4^{(3)}] \\
x_4^{(4)} &= \frac{1}{0.6428} \cdot [0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1^{(4)} &= 1.0000 \\
x_2^{(4)} &= 2.0000 \\
x_3^{(4)} &= 1.0000 \\
x_4^{(4)} &= 0.0000
\end{aligned}$$

3.2.6 Quinta interação (k = 4)

$$S_x^{(4)} = (x_1^{(4)} = 1.0000\ x_2^{(4)} = 2.0000,\ x_3^{(4)} = 1.0000\ x_4^{(4)} = 0.0000)^t;$$

$$\begin{aligned}
x_1^{(5)} &= \frac{1}{2} \cdot [7.0000 - 2.0000x_2^{(4)} - x_3^{(4)} - x_4^{(4)}] \\
x_2^{(5)} &= -\frac{1}{2} \cdot [-2.5000 - 1.5000x_3^{(4)} + 1.5000x_4^{(4)}] \\
x_3^{(5)} &= -\frac{1}{5.2500} \cdot [-5.2500 + 2.7500x_4^{(4)}] \\
x_4^{(5)} &= \frac{1}{0.6428} \cdot [0]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1^{(5)} &= 1.0000 \\
x_2^{(5)} &= 2.0000 \\
x_3^{(5)} &= 1.0000 \\
x_4^{(5)} &= 0.0000
\end{aligned}$$

4 Soluções

$$S_x^{(0)} = (x_1^{(0)} = 0.5000\ x_2^{(0)} = 2.0000,\ x_3^{(0)} = 0.9000\ x_4^{(0)} = 1.2000)^t;$$
$$S_x^{(1)} = (x_1^{(1)} = 0.7000\ x_2^{(1)} = 0.6200,\ x_3^{(1)} = 0.3714\ x_4^{(1)} = 0.0000)^t;$$
$$S_x^{(2)} = (x_1^{(2)} = 2.6443\ x_2^{(2)} = 1.5285,\ x_3^{(2)} = 1.0000\ x_4^{(2)} = 0.0000)^t;$$
$$S_x^{(3)} = (x_1^{(3)} = 1.4715\ x_2^{(3)} = 2.0000,\ x_3^{(3)} = 1.0000\ x_4^{(3)} = 0.0000)^t;$$
$$S_x^{(4)} = (x_1^{(4)} = 1.0000\ x_2^{(4)} = 2.0000,\ x_3^{(4)} = 1.0000\ x_4^{(4)} = 0.0000)^t;$$
$$S_x^{(5)} = (x_1^{(5)} = 1.0000\ x_2^{(5)} = 2.0000,\ x_3^{(5)} = 1.0000\ x_4^{(5)} = 0.0000)^t;$$

5 Código de programação em Linguagem C

6 Retorno do código

```
M2|1 = 0.5000   L2 <- L2 - 0.5000L1
M3|1 = 1.5000   L3 <- L3 - 1.5000L1
M4|1 = 2.0000   L4 <- L4 - 2.0000L1

|2.0000 2.0000 1.0000 1.0000 | 7.0000 |
|0.0000 -2.0000 1.5000 -1.5000 | -2.5000 |
|0.0000 -1.0000 -4.5000 -3.5000 | -6.5000 |
|0.0000 -1.0000 0.0000 -1.0000 | -2.0000 |

M3|2 = 0.5000   L3 <- L3 - 0.5000L2
M4|2 = 0.5000   L4 <- L4 - 0.5000L2

|2.0000 2.0000 1.0000 1.0000 | 7.0000 |
|0.0000 -2.0000 1.5000 -1.5000 | -2.5000 |
|0.0000 0.0000 -5.2500 -2.7500 | -5.2500 |
|0.0000 0.0000 -0.7500 -0.2500 | -0.7500 |

M4|3 = 0.1429   L4 <- L4 - 0.1429L3

|2.0000 2.0000 1.0000 1.0000 | 7.0000 |
|0.0000 -2.0000 1.5000 -1.5000 | -2.5000 |
|0.0000 0.0000 -5.2500 -2.7500 | -5.2500 |
|0.0000 0.0000 0.0000 0.1429 | 0.0000 |



Solucao do sistema S-0: X1 = 0.5000 X2 = 2.0000 X3 = 0.9000 X4 = 1.2000
```

```
Solucao do sistema S-1: X1 = 1.0500 X2 = 1.9250 X3 = 1.0000 X4 = 0.0000

Solucao do sistema S-2: X1 = 1.0750 X2 = 2.0000 X3 = 1.0000 X4 = 0.0000

Solucao do sistema S-3: X1 = 1.0000 X2 = 2.0000 X3 = 1.0000 X4 = 0.0000

Solucao do sistema S-4: X1 = 1.0000 X2 = 2.0000 X3 = 1.0000 X4 = 0.0000

Solucao do sistema S-5: X1 = 1.0000 X2 = 2.0000 X3 = 1.0000 X4 = 0.0000
```