UNIVERSIDADE DE PERNAMBUCO - UPE
ESCOLA POLITÉCNICA DE PERNAMBUCO - POLI
BACHARELADO EM ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

ALUNOS:
CAIO CÉSAR LEITE DE LIMA
GABRIEL NÓBREGA TOSCANO
RICARDO TIMOTEO WANDERLEY

CÁLCULO NUMÉRICO:
SISTEMA DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS LINEARES
RESOLUÇÃO DE SEALS POR MÉTODOS DIRETOS

RECIFE - PE
MAIO DE 2025

ALUNOS:
CAIO CÉSAR LEITE DE LIMA
GABRIEL NÓBREGA TOSCANO
RICARDO TIMOTEO WANDERLEY

TURMA AT

CÁLCULO NUMÉRICO: SISTEMA DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS LINEARES

RESOLUÇÃO DE SEALS POR MÉTODOS DIRETOS

Atividade voltada à resolução de Sistemas de Equações Algébricas Lineares (SEALs), utilizando métodos diretos: Gauss, Fatoração LU e Cholesky. Solicitação do Prof. Dr. Jornandes Dias, na disciplina de Cálculo Numérico, como parte da avaliação da 1ª unidade.

RECIFE - PE
MAIO DE 2025

Sumário

1 1ª QUESTÃO

(0,5 PONTO): Resolver o sistema de equações utilizando a técnica de Eliminação de Gauss, com 4 casas decimais nos resultados.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$$

$$S_x^{(0)} = (x_1^{(0)} = 0.5000,\ x_2^{(0)} = 2.0000,\ x_3^{(0)} = 0.9000,\ x_4^{(0)} = 1.2000)^t;$$

A.1) Mostrar a metodologia de eliminação de Gauss.

A.2) Fazer 6 soluções.

1.1 Transformação do Sistema em Matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix};$$

1.2 Eliminação de Gauss

1.2.1 Transformar em matriz triangular superior:

Consiste em isolar as incógnitas para descobrir seus respectivos valores.

1.2.2 Calcular multiplicadores (linha 1)

Calcula o valor do multiplicador que é usado para zerar os elementos abaixo do pivô de cada linha.

$$m_{21} = \frac{1}{2} = 0.5000, \quad m_{31} = \frac{3}{2} = 1.5000, \quad m_{41} = \frac{4}{2} = 2.0000;$$

1.2.3 Zerar elementos abaixo do pivô (coluna 1)

$$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21} \cdot L_1$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{31} \cdot L_1$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2.0000 & 2.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0 & -2.0000 & 1.5000 & -1.5000 \\ 0 & -1.0000 & -4.5000 & -3.5000 \\ 0 & -1.0000 & 0 & -1.0000 \end{bmatrix}, \quad b^{(1)} = \begin{bmatrix} 7.0000 \\ -2.5000 \\ -6.5000 \\ -2.0000 \end{bmatrix};$$

1.2.4 Calcular multiplicadores (linha 2)

$$m_{32} = \frac{-1}{-2} = 0.5000, \quad m_{42} = \frac{-1}{-2} = 0.5000;$$

1.2.5 Zerar elementos abaixo do pivô (coluna 2)

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{32} \cdot L_2$$
$$L_4 \leftarrow L_4 - m_{42} \cdot L_2$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2.0000 & 2.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0 & -2.0000 & 1.5000 & -1.5000 \\ 0 & 0 & -5.2500 & -2.7500 \\ 0 & 0 & -0.7500 & 0.2500 \end{bmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{bmatrix} 7.0000 \\ -2.5000 \\ -5.2500 \\ -0.7500 \end{bmatrix};$$

1.2.6 Calcular multiplicadores (linha 3)

$$m_{43} = \frac{-0.7500}{-5.2500} = 0.1428;$$

1.2.7 Zerar elementos abaixo do pivô (coluna 3)

$$L_4 \leftarrow L_4 - m_{43} \cdot L_3$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2.0000 & 2.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0 & -2.0000 & 1.5000 & -1.5000 \\ 0 & 0 & -5.2500 & -2.7500 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6428 \end{bmatrix}, \quad b^{(3)} = \begin{bmatrix} 7.0000 \\ -2.5000 \\ -5.2500 \\ 0 \end{bmatrix};$$

1.3 Fazer as interações

Consiste em isolar as incógnitas, fazendo as interações para descobrir os valores de $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$, $x_3^{(k+1)}$ e $x_4^{(k+1)}$.

1.3.1 Isolar as incógnitas

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{2} \cdot [7.0000 - 2.0000x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - x_4^{(k)}] \\
x_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{2} \cdot [-2.5000 - 1.5000x_3^{(k)} + 1.5000x_4^{(k)}] \\
x_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{5.2500} \cdot [-5.2500 + 2.7500x_4^{(k)}] \\
x_4^{(k+1)} &= \frac{1}{0.6428} \cdot [0]
\end{aligned}
$$

1.3.2 Primeira interação (k = 0)

$$S_x^{(0)} = (x_1^{(0)} = 0.5000 \; x_2^{(0)} = 2.0000, \; x_3^{(0)} = 0.9000 \; x_4^{(0)} = 1.2000)^t;$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{2} \cdot [7.0000 - 2.0000x_2^{(0)} - x_3^{(0)} - x_4^{(0)}] \\
x_2^{(1)} &= -\frac{1}{2} \cdot [-2.5000 - 1.5000x_3^{(0)} + 1.5000x_4^{(0)}] \\
x_3^{(1)} &= -\frac{1}{5.2500} \cdot [-5.2500 + 2.7500x_4^{(0)}] \\
x_4^{(1)} &= \frac{1}{0.6428} \cdot [0]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= 0.7000 \\
x_2^{(1)} &= 0.6200 \\
x_3^{(1)} &= 0.3714 \\
x_4^{(1)} &= 0.0000
\end{aligned}
$$

1.3.3 Segunda interação (k = 1)

$$S_x^{(1)} = (x_1^{(1)} = 0.7000 \; x_2^{(1)} = 0.6200, \; x_3^{(1)} = 0.3714 \; x_4^{(1)} = 0.0000)^t;$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= \frac{1}{2} \cdot [7.0000 - 2.0000x_2^{(1)} - x_3^{(1)} - x_4^{(1)}] \\
x_2^{(2)} &= -\frac{1}{2} \cdot [-2.5000 - 1.5000x_3^{(1)} + 1.5000x_4^{(1)}] \\
x_3^{(2)} &= -\frac{1}{5.2500} \cdot [-5.2500 + 2.7500x_4^{(1)}] \\
x_4^{(2)} &= \frac{1}{0.6428} \cdot [0]
\end{aligned}
$$

$$x_1^{(2)} = 2.6443$$
$$x_2^{(2)} = 1.5285$$
$$x_3^{(2)} = 1.0000$$
$$x_4^{(2)} = 0.0000$$

1.3.4 Terceira interação (k = 2)

$$S_x^{(2)} = (x_1^{(2)} = 2.6443\; x_2^{(2)} = 1.5285,\; x_3^{(2)} = 1.0000\; x_4^{(2)} = 0.0000)^t;$$

$$\begin{aligned}
x_1^{(3)} &= \frac{1}{2} \cdot [7.0000 - 2.0000x_2^{(2)} - x_3^{(2)} - x_4^{(2)}] \\
x_2^{(3)} &= -\frac{1}{2} \cdot [-2.5000 - 1.5000x_3^{(2)} + 1.5000x_4^{(2)}] \\
x_3^{(3)} &= -\frac{1}{5.2500} \cdot [-5.2500 + 2.7500x_4^{(2)}] \\
x_4^{(3)} &= \frac{1}{0.6428} \cdot [0]
\end{aligned}$$

$$x_1^{(3)} = 1.4715$$
$$x_2^{(3)} = 2.0000$$
$$x_3^{(3)} = 1.0000$$
$$x_4^{(3)} = 0.0000$$

1.3.5 Quarta interação (k = 3)

$$S_x^{(3)} = (x_1^{(3)} = 1.4715\; x_2^{(3)} = 2.0000,\; x_3^{(3)} = 1.0000\; x_4^{(3)} = 0.0000)^t;$$

$$\begin{aligned}
x_1^{(4)} &= \frac{1}{2} \cdot [7.0000 - 2.0000x_2^{(3)} - x_3^{(3)} - x_4^{(3)}] \\
x_2^{(4)} &= -\frac{1}{2} \cdot [-2.5000 - 1.5000x_3^{(3)} + 1.5000x_4^{(3)}] \\
x_3^{(4)} &= -\frac{1}{5.2500} \cdot [-5.2500 + 2.7500x_4^{(3)}] \\
x_4^{(4)} &= \frac{1}{0.6428} \cdot [0]
\end{aligned}$$

$$x_1^{(4)} = 1.0000$$
$$x_2^{(4)} = 2.0000$$
$$x_3^{(4)} = 1.0000$$
$$x_4^{(4)} = 0.0000$$

1.3.6 Quinta interação (k = 4)

$$S_x^{(4)} = (x_1^{(4)} = 1.0000\ x_2^{(4)} = 2.0000,\ x_3^{(4)} = 1.0000\ x_4^{(4)} = 0.0000)^t;$$

$$x_1^{(5)} = \frac{1}{2} \cdot [7.0000 - 2.0000x_2^{(4)} - x_3^{(4)} - x_4^{(4)}]$$
$$x_2^{(5)} = -\frac{1}{2} \cdot [-2.5000 - 1.5000x_3^{(4)} + 1.5000x_4^{(4)}]$$
$$x_3^{(5)} = -\frac{1}{5.2500} \cdot [-5.2500 + 2.7500x_4^{(4)}]$$
$$x_4^{(5)} = \frac{1}{0.6428} \cdot [0]$$

$$x_1^{(5)} = 1.0000$$
$$x_2^{(5)} = 2.0000$$
$$x_3^{(5)} = 1.0000$$
$$x_4^{(5)} = 0.0000$$

1.4 Soluções

$$S_x^{(0)} = (x_1^{(0)} = 0.5000\ x_2^{(0)} = 2.0000,\ x_3^{(0)} = 0.9000\ x_4^{(0)} = 1.2000)^t;$$
$$S_x^{(1)} = (x_1^{(1)} = 0.7000\ x_2^{(1)} = 0.6200,\ x_3^{(1)} = 0.3714\ x_4^{(1)} = 0.0000)^t;$$
$$S_x^{(2)} = (x_1^{(2)} = 2.6443\ x_2^{(2)} = 1.5285,\ x_3^{(2)} = 1.0000\ x_4^{(2)} = 0.0000)^t;$$
$$S_x^{(3)} = (x_1^{(3)} = 1.4715\ x_2^{(3)} = 2.0000,\ x_3^{(3)} = 1.0000\ x_4^{(3)} = 0.0000)^t;$$
$$S_x^{(4)} = (x_1^{(4)} = 1.0000\ x_2^{(4)} = 2.0000,\ x_3^{(4)} = 1.0000\ x_4^{(4)} = 0.0000)^t;$$
$$S_x^{(5)} = (x_1^{(5)} = 1.0000\ x_2^{(5)} = 2.0000,\ x_3^{(5)} = 1.0000\ x_4^{(5)} = 0.0000)^t;$$

1.5 Código de programação em Linguagem C

```c
#include <stdio.h>

#define N 4  /* Dimensao da matriz - NxN = 4x4 */

void gauss(double A[N][N], double b[N]);

int main()
{
    /* Matriz A (4x4) e vetor b */
    double A[N][N] = {
        {2, 2, 1, 1},
        {1, -1, 2, -1},
        {3, 2, -3, -2},
        {4, 3, 2, 1}
    };

    double b[N] = {7, 1, 4, 12};

    /* Resolver o sistema */
    gauss(A, b);

    return 0;
}

void gauss(double A[N][N], double b[N])
{
    int i, j, k;
    double multi;
    double x0[N];
    double x[N] = {0.5000, 2.0000, 0.9000, 1.2000};

    /* Eliminacao de Gauss (triangular superior) - printa na tela a matriz, seus multiplicadores e a operacao necessaria para tornar uma matriz triangular superior */
    for (i = 0; i < N - 1; i++)
    {
```

```
        for (j = i + 1; j < N; j++)
        {
            multi = A[j][i] / A[i][i];
            printf("M%d|%d = %.4f   L%d <- L%d - %.4fL%d \n", j + 1, i + 1, multi, j + 1, j + 1, multi, i + 1);
            for (k = 0; k < N; k++)
            {
                A[j][k] -= multi * A[i][k];
            }
            b[j] -= multi * b[i];
        }
        printf("\n");
        for (int linha = 0; linha < N; linha++)
        {
            printf("|");
            for (int coluna = 0; coluna < N; coluna++)
            {
                printf("%.4f ", A[linha][coluna]);
            }
            printf("| %.4f |\n", b[linha]);
        }
        printf("\n");
    }
    printf("\n\n");
    for (int s = 0; s < 6; s++)
    {
         /* Mostrar a solucao - Printa todas as 6 solucoes (Contando com a S-0) */
        printf("Solucao do sistema S-%d: ", s);
        for (i = 0; i < N; i++)
        {
            printf("X%d = %.4f ", i + 1, x[i]);
        }
        printf("\n\n");
         /* Substituicao regressiva - Descobre o valor das variaveis */
        x[N - 1] = b[N - 1] / A[N - 1][N - 1];
        for (i = N - 2; i >= 0; i--)
        {
```

```
                x0[i] = x[i];
                x[i] = b[i];
                for (j = i + 1; j < N; j++)
                {
                    x[i] -= A[i][j] * x0[j];
                }
                x[i] /= A[i][i];
            }
        }
}
```

1.6 Retorno do código

```
M2|1 = 0.5000   L2 <- L2 - 0.5000L1
M3|1 = 1.5000   L3 <- L3 - 1.5000L1
M4|1 = 2.0000   L4 <- L4 - 2.0000L1

|2.0000 2.0000 1.0000 1.0000 | 7.0000 |
|0.0000 -2.0000 1.5000 -1.5000 | -2.5000 |
|0.0000 -1.0000 -4.5000 -3.5000 | -6.5000 |
|0.0000 -1.0000 0.0000 -1.0000 | -2.0000 |

M3|2 = 0.5000   L3 <- L3 - 0.5000L2
M4|2 = 0.5000   L4 <- L4 - 0.5000L2

|2.0000 2.0000 1.0000 1.0000 | 7.0000 |
|0.0000 -2.0000 1.5000 -1.5000 | -2.5000 |
|0.0000 0.0000 -5.2500 -2.7500 | -5.2500 |
|0.0000 0.0000 -0.7500 -0.2500 | -0.7500 |

M4|3 = 0.1429   L4 <- L4 - 0.1429L3

|2.0000 2.0000 1.0000 1.0000 | 7.0000 |
|0.0000 -2.0000 1.5000 -1.5000 | -2.5000 |
|0.0000 0.0000 -5.2500 -2.7500 | -5.2500 |
|0.0000 0.0000 0.0000 0.1429 | 0.0000 |

Solucao do sistema S-0: X1 = 0.5000 X2 = 2.0000 X3 = 0.9000 X4
 ↪  = 1.2000
```

```
Solucao do sistema S-1: X1 = 1.0500 X2 = 1.9250 X3 = 1.0000 X4
 ↪  = 0.0000
Solucao do sistema S-2: X1 = 1.0750 X2 = 2.0000 X3 = 1.0000 X4
 ↪  = 0.0000
Solucao do sistema S-3: X1 = 1.0000 X2 = 2.0000 X3 = 1.0000 X4
 ↪  = 0.0000
Solucao do sistema S-4: X1 = 1.0000 X2 = 2.0000 X3 = 1.0000 X4
 ↪  = 0.0000
Solucao do sistema S-5: X1 = 1.0000 X2 = 2.0000 X3 = 1.0000 X4
 ↪  = 0.0000
```

2 2ª QUESTÃO

(1,0 PONTOS): Resolver o sistema de equações utilizando a técnica de fatoração LU, admitindo 4 casas decimais nos resultados.

$$\begin{cases} 2x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)} + 6x_3^{(k)} = -7 \\ 2x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)} = 7 \\ 6x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + 12x_3^{(k)} = -2 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{S_x^{(0)}} = \left(\boldsymbol{x_1^{(0)}} = 0.2000, \quad \boldsymbol{x_2^{(0)}} = 1.0000, \quad \boldsymbol{x_3^{(0)}} = 0.7000\right)$$

$$\boldsymbol{S_y^{(0)}} = \left(\boldsymbol{y_1^{(0)}} = 0.0000, \quad \boldsymbol{y_2^{(0)}} = 0.0000, \quad \boldsymbol{y_3^{(0)}} = 0.0000\right)$$

A.1) Mostrar a metodologia de eliminação de Gauss.

A.2) Fazer 6 soluções.

(*) Transformar de Sistema para Matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 12 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -7 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

2.1 Pivoteamento Parcial

Aplicamos permutação para que o maior elemento da coluna 1 (em módulo) fique na diagonal. Trocamos a linha 1 com a linha 3:

$$PA = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 12 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad Pb = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix}$$

2.2 Eliminação de Gauss (Fatoração LU)

2.2.1 Zerando abaixo do pivô (coluna 1)

Multiplicadores:

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}, \quad m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

$$m_{21} = \frac{2}{6} = 0.3333, \quad m_{31} = \frac{2}{6} = 0.3333$$

Atualizando linhas:

$$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21} \cdot L_1$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{31} \cdot L_1$$

$$\Rightarrow A^{(1)} = \begin{bmatrix} 6.0000 & -1.0000 & 12.0000 \\ 0 & 2.3333 & -5.0000 \\ 0 & 2.3333 & 2.0000 \end{bmatrix}$$

2.2.2 Zerando elemento (3,2)

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}}$$

$$m_{32} = \frac{2.3333}{2.3333} = 1.0000$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{32} \cdot L_2$$

$$\Rightarrow A^{(2)} = \begin{bmatrix} 6.0000 & -1.0000 & 12.0000 \\ 0 & 2.3333 & -5.0000 \\ 0 & 0 & 7.0000 \end{bmatrix}$$

2.3 Matrizes L e U

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21}^{(k+1)} & 1 & 0 \\ m_{31}^{(k+1)} & m_{32}^{(k+1)} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{13}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & a_{23}^{(k)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.3333 & 1 & 0 \\ 0.3333 & 1.0000 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 6.0000 & -1.0000 & 12.0000 \\ 0 & 2.3333 & -5.0000 \\ 0 & 0 & 7.0000 \end{bmatrix}$$

2.4 Metodologia

$$
\begin{aligned}
L_{ij} \cdot y_j^{(k)} &= b_j \\
U_{ij} \cdot x_j^{(k)} &= y_j^{(k)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
y_1^{(k+1)} = b_1 \\
y_2^{(k+1)} = b_2 - m_{21}^{(k+1)} y_1^{(k)} \\
y_3^{(k+1)} = b_3 - m_{31}^{(k+1)} y_1^{(k)} - m_{32}^{(k+1)} y_2^{(k)}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}[y_1^{(k+1)} - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)})] \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}[y_2^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)}] \\
x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}[y_3^{(k+1)}]
\end{cases}
$$

2.5 Resolvendo $Ly = Pb$

$$
Ly = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.3333 & 1 & 0 \\ 0.3333 & 1.0000 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{cases}
y_1^{(k+1)} = -2 \\
y_2^{(k+1)} = 7 - 0.3333 \cdot y_1^{(k)} \\
y_3^{(k+1)} = -7 - 0.3333 \cdot y_1^{(k)} - y_2^{(k)}
\end{cases}
$$

Isolando $y^{(1)}$, para k = 0, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y_1^{(1)}} &= -2 \\
0.3333 \cdot (0) + y_2^{(1)} &= 7 \Rightarrow \boldsymbol{y_2^{(1)}} = 7.0000 \\
0.3333 \cdot (0) + 1.0000 \cdot 7.0000 + y_3^{(1)} &= -7 \Rightarrow \boldsymbol{y_3^{(1)}} = -7.0000
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{S_y^{(1)}} = (\boldsymbol{y_1^{(1)}} = -2.0000, \quad \boldsymbol{y_2^{(1)}} = 7.0000, \quad \boldsymbol{y_3^{(1)}} = -7.0000)
$$

2.6 Resolvendo $Ux = y$

$$Ux = \begin{bmatrix} 6.0000 & -1.0000 & 12.0000 \\ 0 & 2.3333 & -5.0000 \\ 0 & 0 & 7.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.0000 \\ 7.0000 \\ -7.0000 \end{bmatrix}$$

$$x_3^{(1)} = 0,1428[-7.0000] \Rightarrow \boldsymbol{x_3^{(1)}} = -0.9996$$
$$x_2^{(1)} = 0.4285[7.0000 + (5.0000 * 0.7000)] \Rightarrow \boldsymbol{x_2^{(1)}} = 4,4992$$
$$x_1^{(1)} = 0.1666[-2.0000 + 1.0000 - (12.0000 * 0.7000] \Rightarrow \boldsymbol{x_1^{(1)}} = -1.5660$$

$$\boldsymbol{S_x^{(1)}} = (\boldsymbol{x_1^{(1)}} = -1.5660, \quad \boldsymbol{x_2^{(1)}} = 4.4992, \quad \boldsymbol{x_3^{(1)}} = -1.5660)$$

2.7 Iterações (de k = 0 a k = 5)

Assim, aplicando esse método para todas as 6 iterações (de k = 0 a k = 5), obteremos:

Iteração 1:

$$\boldsymbol{S_x^{(0)}} = \left(\boldsymbol{x_1^{(0)}} = 0.2000, \quad \boldsymbol{x_2^{(0)}} = 1.0000, \quad \boldsymbol{x_3^{(0)}} = 0.7000\right)$$

Iteração 2:

$$\boldsymbol{S_x^{(1)}} = \left(\boldsymbol{x_1^{(1)}} = -1.5660, \quad \boldsymbol{x_2^{(1)}} = 4.4992, \quad \boldsymbol{x_3^{(1)}} = -0.9996\right)$$

Iteração 3:

$$\boldsymbol{S_x^{(2)}} = \left(\boldsymbol{x_1^{(2)}} = 2.4135, \quad \boldsymbol{x_2^{(2)}} = 0.8578, \quad \boldsymbol{x_3^{(2)}} = -0.9996\right)$$

Iteração 4:

$$\boldsymbol{S_x^{(3)}} = \left(\boldsymbol{x_1^{(3)}} = 1.8081, \quad \boldsymbol{x_2^{(3)}} = 0.8578, \quad \boldsymbol{x_3^{(3)}} = -0.9996\right)$$

Iteração 5:

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}}^{(\mathbf{4})} = \left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{4})} = 1.8081, \quad \boldsymbol{x}_{\mathbf{2}}^{(\mathbf{4})} = 0.8578, \quad \boldsymbol{x}_{\mathbf{3}}^{(\mathbf{4})} = -0.9996\right)$$

Iteração 6:

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{x}}^{(\mathbf{5})} = \left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}^{(\mathbf{5})} = 1.8081, \quad \boldsymbol{x}_{\mathbf{2}}^{(\mathbf{5})} = 0.8578, \quad \boldsymbol{x}_{\mathbf{3}}^{(\mathbf{5})} = -0.9996\right)$$

3 3ª QUESTÃO

(0,5 PONTO): Resolver o sistema de equações utilizando a técnica de Cholesky, admitindo 4 casas decimais nos resultados.

$$\begin{cases} 5x_1^{(k)} + 1x_2^{(k)} + 7x_3^{(k)} = 2 \\ 1x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)} = 3 \\ 7x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)} + 12x_3^{(k)} = 3 \end{cases}$$

$$S_y^{(0)} = (y_1^{(0)} = 0 \quad y_2^{(0)} = 0 \quad y_3^{(0)} = 0)^t$$
$$S_x^{(0)} = (x_1^{(0)} = 0.7 \quad x_2^{(0)} = 0.1 \quad x_3^{(0)} = 0.3)^t$$

A.1) Mostrar a metodologia da técnica de Cholesky.

A.2) Fazer 6 soluções.

3.1 Fundamentação Teórica

A técnica de solução pelo **método de Cholesky** serve para resolver sistemas lineares da forma $Ax = b$, em que a matriz A é simétrica e definida positiva.

O método consiste em decompor a matriz A como $A = L \cdot L^t$, onde L é uma matriz triangular inferior e L^t é a transposta de L, ou seja, uma matriz triangular superior. A solução do sistema é feita em duas etapas:

1. Resolver $Ly = b$ por substituição direta.
2. Resolver $L^T x = y$ por substituição reversa.

Esse método é mais rápido e preciso do que a eliminação de Gauss para esse tipo de matriz, porque aproveita as características de A para fazer menos cálculos e reduzir erros numéricos. Isso também significa que ele exige menos esforço do computador, sendo mais eficiente em termos de tempo e uso de recursos.

3.2 Aplicação do Método de Cholesky

Para sua aplicação, devem ser atendidas as seguintes condições:

- A matriz A dos coeficientes deve ser simétrica: $a_{ij} = a_{ji}$.

- A matriz A deve ser positiva definida.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 2 & 12 \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A = A^t \Rightarrow \text{Logo, } A \text{ é simétrica.}$$

Obs.: Neste caso, já iremos assumir diretamente que a matriz é positiva. Porém, caso não tivéssemos certeza dessa informação, poderíamos:

- Calcular os autovalores da matriz A, que devem ser todos positivos;
- Verificar se os *minores principais* são positivos.

Caso a matriz não seja positiva definida, e não saibamos disso, a aplicação do método pode falhar — por exemplo, ao tentar calcular a raiz quadrada de um número negativo.

3.3 Decomposição da matriz A em G e G^t

Satisfazendo as duas condições, podemos prosseguir com a aplicação do método e dividir a matriz A da seguinte forma:

$$A = G \cdot G^t$$

Assim, teremos as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 2 & 12 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}, \quad G^t = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

Com base nos elementos de A, determinam-se os g_{ij} por aplicação direta das fórmulas de Cholesky, conforme descrito a seguir para cada coluna.

3.3.1 Coluna 1:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g_{11}^2 = 5 \Rightarrow \underline{g_{11} = 2,2360}$$

$$g_{21} \cdot g_{11} = 1 \Rightarrow \underline{g_{21} = 0,4472}$$

$$g_{31} \cdot g_{11} = 7 \Rightarrow \underline{g_{31} = 3,1304}$$

3.3.2 Coluna 2

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{21} \\ g_{22} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g_{11} \cdot g_{21} = 1 \Rightarrow g_{21} = 0.4472$$

(Não era necessário calcular g_{21} pois já fizemos isso na coluna anterior)

$$g_{21}^2 + g_{22}^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + g_{22}^2 = 2 \Rightarrow g_{22}^2 = 2 - \frac{1}{5} \Rightarrow g_{22} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \underline{g_{22} = 1.3416}$$

$$g_{31} \cdot g_{21} + g_{32} \cdot g_{22} = 2 \Rightarrow \frac{7}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + g_{32} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = 2 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot g_{32} = 2 - \frac{7}{5} \Rightarrow \underline{g_{32} = 0.4472}$$

3.3.3 Coluna 3

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33} \end{bmatrix}$$

$g_{11} \cdot g_{31} = 7 \Rightarrow$ (Já calculamos essas variáveis anteriormente)

$g_{21} \cdot g_{31} + g_{22} \cdot g_{32} = 2 \Rightarrow$ (Já calculamos essas variáveis anteriormente)

$$g_{31}^2 + g_{32}^2 + g_{33}^2 = 12 \Rightarrow \frac{49}{5} + \frac{5}{25} + g_{33}^2 = 12 \Rightarrow \underline{g_{33} = 1.4142}$$

3.3.4 Matrizes G e G^T

$$G = \begin{bmatrix} 2.2360 & 0 & 0 \\ 0.4472 & 1.3416 & 0 \\ 3.1304 & 0.4472 & 1.4142 \end{bmatrix}, \quad G^t = \begin{bmatrix} 2.2360 & 0.4472 & 3.1304 \\ 0 & 1.3416 & 0.4472 \\ 0 & 0 & 1.4142 \end{bmatrix}$$

No procedimento acima obtivemos todos os valores da matriz G. Com eles, podemos resolver os sistemas para encontrar y_j^k e x_j^k conforme as equações abaixo.

$$\underline{(1) \quad g_{ij} \cdot y_j^{(k)} = b_i,} \quad i = 1,2,3; \quad j = 1,2,3$$

$$\underline{(2) \quad g_{ij}^t \cdot x_j^{(k)} = y_i^{(k)},} \quad i = 1,2,3; \quad j = 1,2,3$$

3.4 Resolução dos sistemas para $y_j^{(k)}$ e $x_j^{(k)}$

3.4.1 Coeficientes $y_j^{(k)}$

O sistema de equações é dado por:

$$g_{ij} \cdot y_j^{(k)} = b_i, \quad i = 1,2,3; \quad j = 1,2,3$$

Na forma de multiplicação matricial chegamos ao sistema abaixo:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \\ y_3^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Resolvendo a multiplicação matricial, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} &(1) \quad g_{11} \cdot y_1^{(k)} = b_1 \\ &(2) \quad g_{21} \cdot y_1^{(k)} + g_{22} \cdot y_2^{(k)} = b_2 \\ &(3) \quad g_{31} \cdot y_1^{(k)} + g_{32} \cdot y_2^{(k)} + g_{33} \cdot y_3^{(k)} = b_3 \end{aligned}$$

Agora, isolando as variáveis $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}$ e $y_3^{(k)}$:

$$\begin{cases} y_1^{(k)} = \dfrac{b_1}{g_{11}} \\ y_2^{(k)} = \dfrac{1}{g_{22}} \left[b_2 - \left(g_{21} \cdot y_1^{(k)} \right) \right] \\ y_3^{(k)} = \dfrac{1}{g_{33}} \left[b_3 - \left(g_{31} \cdot y_1^{(k)} + g_{32} \cdot y_2^{(k)} \right) \right] \end{cases}$$

Como a questão nos dá uma solução inicial:

$$S_y^{(0)} = \left(y_1^{(0)} = 0 \quad y_2^{(0)} = 0 \quad y_3^{(0)} = 0\right)^t$$

Podemos substituí-los juntamente com os valores da matriz G para obter $y_j^{(k+1)}$.

$$\begin{cases} y_1^{(k+1)} = \dfrac{2}{2.2360} = 0.8944 \\ y_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{1.3416}\left[3 - (0.4472 \cdot 0)\right] = 2.2360 \\ y_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{1.4142}\left[3 - (3.1304 \cdot 0 + 0.4472 \cdot 0)\right] = 2.1213 \end{cases}$$

Logo, temos a solução:

$$\boldsymbol{S_y^{(k+1)} = \left(y_1^{(k+1)} = 0.8944 \quad y_2^{(k+1)} = 2.2360 \quad y_3^{(k+1)} = 2.1213\right)^t}$$

Com isso, podemos resolver a matriz triangular superior para encontrar valores de $x_j(k)$.

<u>Cabe destacar que o conjunto solução $S_y^{(k+1)} = [\ldots]$, obtido acima, permanece constante. Ou seja, será o mesmo utilizado em todas as iterações subsequentes.</u>

3.4.2 Coeficientes $x_j^{(k)}$

Montando o sistema.

$$g_{ij} \cdot y_j^{(k)} = b_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3$$

Sistema obtido pelo desenvolvimento das matrizes:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \\ y_3^{(k)} \end{bmatrix}$$

Fazendo os produtos, chegamos às seguintes equações:

$$\begin{aligned} &(1) \quad g_{11} \cdot x_1^{(k)} + g_{21} \cdot x_2^{(k)} + g_{31} \cdot x_3^{(k)} = y_1^{(k)} \\ &(2) \quad g_{22} \cdot x_2^{(k)} + g_{32} \cdot x_3^{(k)} = y_2^{(k)} \\ &(3) \quad g_{33} \cdot x_3^{(k)} = y_3^{(k)} \end{aligned}$$

Isolando $x_j^{(k)}$ em cada equação:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{g_{11}}\left[y_1^{(k+1)} - \left(g_{21}\cdot x_2^{(k)} + g_{31}\cdot x_3^{(k)}\right)\right] \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{g_{22}}\left[y_2^{(k+1)} - \left(g_{32}\cdot x_3^{(k)}\right)\right] \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{g_{33}}\cdot y_3^{(k+1)} \end{cases}$$

Com o sistema acima basta introduzir os valores de k (para cada iteração) e substituir os valores numéricos da matriz G e do conjunto solução $S_y^{(k+1)} = [\ldots]$ já calculados anteriormente.

Dessa forma encontramos um novo conjunto solução para x_j^{k+1}.

Realizaremos o processo 5 vezes ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) para obtermos 5 soluções $x_j^{(k)}$.

O enunciado pede 6 soluções, mas já entregou 1, por isso faremos apenas mais 5 iterações.

3.5 Iterações e Soluções

3.5.1 1ª iteração - k = 0

Substituindo os valores de k e g_{ij}:

$$\begin{cases} x_1^{(0+1)} = \dfrac{1}{2.2360}\left[y_1^{(0+1)} - \left(0.4472\cdot x_2^{(0)} + 3.1304\cdot x_3^{(0)}\right)\right] \\ x_2^{(0+1)} = \dfrac{1}{1.3416}\left[y_2^{(0+1)} - \left(0.4472\cdot x_3^{(0)}\right)\right] \\ x_3^{(0+1)} = \dfrac{1}{1.4142}\cdot y_3^{(0+1)} \end{cases}$$

Substituindo os valores de x_j^0 e y_j:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{1}{2.2360}[0.8944 - (0.4472\cdot 0.1000 + 3.1304\cdot 0.3000)] \\ x_2^{(1)} = \dfrac{1}{1.3416}[2.2360 - (0.4472\cdot 0.3000)] \\ x_3^{(1)} = \dfrac{1}{1.4142}\cdot 2.1213 \end{cases}$$

Realizando as operações:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0.0400 \\ x_2^{(1)} = 1.5667 \\ x_3^{(1)} = 1.5000 \end{cases}$$

Conjunto solução:

$$S_x^{(1)} = (x_1^{(1)} = -0.0400 \quad x_2^{(1)} = 1.5667 \quad x_3^{(1)} = 1.5000)^t$$

3.5.2 2ª iteração - k = 1

Substituindo os valores de k e g_{ij}:

$$\begin{cases} x_1^{(1+1)} = \dfrac{1}{2.2360}\left[y_1^{(1+1)} - \left(0.4472 \cdot x_2^{(1)} + 3.1304 \cdot x_3^{(1)}\right)\right] \\ x_2^{(1+1)} = \dfrac{1}{1.3416}\left[y_2^{(1+1)} - \left(0.4472 \cdot x_3^{(1)}\right)\right] \\ x_3^{(1+1)} = \dfrac{1}{1.4142} \cdot y_3^{(1+1)} \end{cases}$$

Substituindo os valores de x_j^1 e y_j:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \dfrac{1}{2.2360}\left[0.8944 - (0.4472 \cdot 1.5667 + 3.1304 \cdot 1.5000)\right] \\ x_2^{(2)} = \dfrac{1}{1.3416}\left[2.2360 - (0.4472 \cdot 1.5000)\right] \\ x_3^{(2)} = \dfrac{1}{1.4142} \cdot 2.1213 \end{cases}$$

Realizando as operações:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -2.0133 \\ x_2^{(1)} = 1.1667 \\ x_3^{(1)} = 1.5000 \end{cases}$$

Conjunto solução:

$$S_x^{(2)} = (x_1^{(2)} = -2.0133 \quad x_2^{(2)} = 1.1667 \quad x_3^{(2)} = 1.5000)^t$$

3.5.3 3ª iteração - k = 2

Substituindo os valores de k e g_{ij}:

$$\begin{cases} x_1^{(2+1)} = \dfrac{1}{2.2360}\left[y_1^{(2+1)} - \left(0.4472 \cdot x_2^{(2)} + 3.1304 \cdot x_3^{(2)}\right)\right] \\ x_2^{(2+1)} = \dfrac{1}{1.3416}\left[y_2^{(2+1)} - \left(0.4472 \cdot x_3^{(2)}\right)\right] \\ x_3^{(2+1)} = \dfrac{1}{1.4142} \cdot y_3^{(2+1)} \end{cases}$$

Substituindo os valores de x_j^2 e y_j:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \dfrac{1}{2.2360}\left[0.8944 - (0.4472 \cdot 1.1667 + 3.1304 \cdot 1.5000)\right] \\ x_2^{(3)} = \dfrac{1}{1.3416}\left[2.2360 - (0.4472 \cdot 1.5000)\right] \\ x_3^{(3)} = \dfrac{1}{1.4142} \cdot 2.1213 \end{cases}$$

Realizando as operações:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = -1.9334 \\ x_2^{(3)} = 1.1667 \\ x_3^{(3)} = 1.5000 \end{cases}$$

Conjunto solução:

$$S_x^{(3)} = (x_1^{(3)} = -1.9334 \quad x_2^{(3)} = 1.1667 \quad x_3^{(3)} = 1.5000)^t$$

3.5.4 4ª iteração - k = 3

Substituindo os valores de k e g_{ij}:

$$\begin{cases} x_1^{(3+1)} = \dfrac{1}{2.2360}\left[y_1^{(3+1)} - \left(0.4472 \cdot x_2^{(3)} + 3.1304 \cdot x_3^{(3)}\right)\right] \\ x_2^{(3+1)} = \dfrac{1}{1.3416}\left[y_2^{(3+1)} - \left(0.4472 \cdot x_3^{(3)}\right)\right] \\ x_3^{(3+1)} = \dfrac{1}{1.4142} \cdot y_3^{(3+1)} \end{cases}$$

Substituindo os valores de x_j^3 e y_j:

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = \dfrac{1}{2.2360}\left[0.8944 - (0.4472 \cdot 1.1667 + 3.1304 \cdot 1.5000)\right] \\ x_2^{(4)} = \dfrac{1}{1.3416}\left[2.2360 - (0.4472 \cdot 1.5000)\right] \\ x_3^{(4)} = \dfrac{1}{1.4142} \cdot 2.1213 \end{cases}$$

Realizando as operações:

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = -1.9334 \\ x_2^{(4)} = 1.1667 \\ x_3^{(4)} = 1.5000 \end{cases}$$

Conjunto solução:

$$S_x^{(4)} = (x_1^{(4)} = -1.9334 \quad x_2^{(4)} = 1.1667 \quad x_3^{(4)} = 1.5000)^t$$

3.5.5 5ª iteração - k = 4

Substituindo os valores de k e g_{ij}:

$$\begin{cases} x_1^{(4+1)} = \dfrac{1}{2.2360}\left[y_1^{(4+1)} - \left(0.4472 \cdot x_2^{(4)} + 3.1304 \cdot x_3^{(4)}\right)\right] \\ x_2^{(4+1)} = \dfrac{1}{1.3416}\left[y_2^{(4+1)} - \left(0.4472 \cdot x_3^{(4)}\right)\right] \\ x_3^{(4+1)} = \dfrac{1}{1.4142} \cdot y_3^{(4+1)} \end{cases}$$

Substituindo os valores de x_j^4 e y_j:

$$\begin{cases} x_1^{(5)} = \dfrac{1}{2.2360}\left[0.8944 - (0.4472 \cdot 1.1667 + 3.1304 \cdot 1.5000)\right] \\ x_2^{(5)} = \dfrac{1}{1.3416}\left[2.2360 - (0.4472 \cdot 1.5000)\right] \\ x_3^{(5)} = \dfrac{1}{1.4142} \cdot 2.1213 \end{cases}$$

Realizando as operações:

$$\begin{cases} x_1^{(5)} = -1.9334 \\ x_2^{(5)} = 1.1667 \\ x_3^{(5)} = 1.5000 \end{cases}$$

Conjunto solução:

$$S_x^{(5)} = (x_1^{(5)} = -1.9334 \quad x_2^{(5)} = 1.1667 \quad x_3^{(5)} = 1.5000)^t$$

3.6 Soluções

$$S_x^{(0)} = (x_1^{(0)} = 0.7 \quad x_2^{(0)} = 0.1 \quad x_3^{(0)} = 0.3)^t$$
$$S_x^{(1)} = (x_1^{(1)} = -0.0400 \quad x_2^{(1)} = 1.5667 \quad x_3^{(1)} = 1.5000)^t$$
$$S_x^{(2)} = (x_1^{(2)} = -2.0133 \quad x_2^{(2)} = 1.1667 \quad x_3^{(2)} = 1.5000)^t$$
$$S_x^{(3)} = (x_1^{(3)} = -1.9334 \quad x_2^{(3)} = 1.1667 \quad x_3^{(3)} = 1.5000)^t$$
$$S_x^{(4)} = (x_1^{(4)} = -1.9334 \quad x_2^{(4)} = 1.1667 \quad x_3^{(4)} = 1.5000)^t$$
$$S_x^{(5)} = (x_1^{(5)} = -1.9334 \quad x_2^{(5)} = 1.1667 \quad x_3^{(5)} = 1.5000)^t$$