Examen

38666 – Matemática Discreta y Lógica
Examen Parcial de Combinatoria y Lógica
2 de mayo de 2024

1. 15 estudiantes de la ETSE-UV se han ido al Viña Rock (no tenían parcial de MDL hoy...). Al llegar han ido a comprar camisetas y han encontrado 4 modelos diferentes.

   a) (1 punto) Si cada estudiante compra una camiseta ¿de cuántas formas diferentes pueden haber comprado las camisetas? Se entiende que importa quién ha comprado qué camiseta.

   b) (2 puntos) A la gente del puesto de camisetas les da igual quién se lleva cada modelo. Sólo les importa cuántas camisetas hay de cada tipo en el pedido. ¿Cuántos pedidos diferentes puede haber?

a) Cada compra puede ser un vector $(c_1, c_2, \dots c_{15}) = C$
$c_i \rightarrow$ camiseta de estudiante i.

$C \in M \times M \times \dots \times M = M^{15}$ con $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ conjunto de modelos.

$\mathcal{C} = \{\text{compras de camisetas}\} = M^{15}$

$\underline{|\mathcal{C}| = |M|^{15} = 4^{15}}$ (ppio del producto).

Son variaciones con rep. de 4 elem. tomadas de 15 en 15.

b) Con la estrategia de "poner bolas en cajas".
4 cajas, una por modelo, y metemos las camisetas.

$\underbrace{000000}_{m_1} | \underbrace{0000}_{m_2} | \underbrace{0000}_{m_3} | \underbrace{000}_{m_4} \rightarrow 0000001000100001000$

Equivale a palabras binarias de long 18 y 3 unos.

$\binom{18}{3} = \frac{18!}{3!\,15!}$

2. Tras comprar las camisetas, se han ido a por bebidas y han formado una cola.

   a) (1 punto) ¿De cuántas formas diferentes pueden haberse colocado en la cola?

   b) (2 puntos) Al final, se han llevado 3 camisetas del modelo A, 4 del modelo B, 2 del modelo C y 6 del modelo D. ¿De cuántas formas diferentes pueden haberse colocado en la cola, si sólo nos importa el orden en que han quedado los 4 modelos de camiseta?

a) Son permutaciones de 15 elementos.

$15!$

b) Cada posible cola es una palabra compuesta por 3 letras 'A', 4 letras 'B', 2 letras 'C' y 6 letras 'D':

ABACCDDDABDBBDD

Permutaciones con repetición:

$$|PR(3,4,2,6)| = \frac{15!}{2!\,3!\,4!\,6!}$$

3. (2 puntos) En nuestro grupo de 15 estudiantes *viñarockers* hay variedad de gustos musicales. 9 quieren ver a La Fuga. Hay 3 que quieren a ver a La Fuga y a Reincidentes. 10 pasan del concierto de Reincidentes. 13 quieren ir a ver, al menos, a La Fuga o a Sara Socas y 7 quieren ver estos dos conciertos. Dos quieren ver a Sara Socas y a Reincidentes.

a) ■ ¿Cuántos quieren ver el concierto de Sara Socas?

b) ■ ¿Cuántos quieren ver los tres conciertos?

Conjuntos:

F = { quieren ver, al menos, a La Fuga }

R = { quieren ver, al menos, a Reincidentes }

S = { quieren ver, al menos, a Sara Socas }.

$|F \cup R \cup S| = 15$; $|F| = 9$; $|R| = 15 - 10 = 5$

$|F \cup S| = 13$; $|F \cap S| = 7$; $|F \cap R| = 3$

$|S \cap R| = 2$

a) $|F \cup S| = |F| + |S| - |F \cap S| \longrightarrow 13 = 9 + |S| - 7$

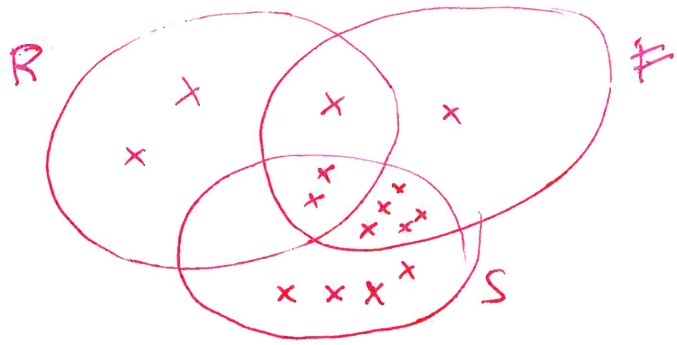
$\boxed{|S| = 11}$

b) $|F \cup S \cup R| = |F| + |R| + |S| - |F \cap R| - |F \cap S| - |R \cap S| +$

$+ |F \cap R \cap S|$

$15 = 9 + 5 + 11 - 3 - 7 - 2 + |F \cap R \cap S|$

$\boxed{|F \cap R \cap S| = 2}$.



4. En un rato de descanso, algunos de nuestros estudiantes se ponen a jugar con unos dados de rol. Cogen dados de 4 caras y empiezan a hacerse preguntas sobre qué podría pasar en diferentes tiradas de dados.

   a) (1 punto) Si tenemos dados de 4 caras con símbolos diferentes. Si lanzamos 4 dados indistinguibles entre ellos ¿cuántos resultados diferentes podemos obtener?

   b) (1 punto) ¿Y si uno de los dados se distingue de los otros tres?

   c) (1 punto) Ahora tomamos un dado de 4 caras, numeradas del 1 al 4. Si lo lanzamos 10 veces, ¿de cuántas formas diferentes puede salir una secuencia de valores creciente (que tras un valor x, sólo pueda salir un valor $y \geq x$) en la que aparezcan obligatoriamente los 4 valores? Por ejemplo, los resultados 1122233344, 1223334444 o 11112333444 serían secuencias válidas, pero no lo sería la secuencia 1122233234, porque hay un 3 seguido de un 2, o la secuencia 11113333444, porque el 2 no aparece.

a) Es igual que el 1.b)

Cada dado lo ponemos en la caja del símbolo que ha sacado

↳ 0010110 → palabra binaria con 4 '0' y 3 '1'. → $\binom{7}{4}$.

b) Para cada símbolo del dado diferente, palabra binaria de 2 '1' y 3 '0'

$4 \cdot \binom{5}{3}$

c) Al final.

4.

c) Una secuencia de este tipo puede expresarse indicando en qué posiciones se produce cambio de valor. Por ejemplo, $\{1,3,7\}$ significa que, tras las tiradas 1, 3, 7, el valor del dado cambia $\rightarrow$ Tirada $= 1,2,2,3,3,3,3,4,4,4$

Ejemplos:

$\{2,5,9\} \rightarrow (1\,1\,2\,2\,2\,3\,3\,3\,3\,4)$

$\{6,7,8\} \rightarrow (1\,1\,1\,1\,1\,1\,2\,3\,4\,4)$

Hay una biyección entre los subconjuntos de $\mathbb{N}_9$ de cardinal 3 y las tiradas crecientes.

$\Rightarrow$ cardinal es $C_9^3 = \binom{9}{3}$

⊛ Si el dominio es "Estudiantes", el predicado Estudiante/1 no es necesario. Si el dominio es más general, D={personas} entonces es necesario. Usaré Estudiante/1 por mostrar la solución más completa

5. (4 puntos) Traduce a lógica de predicados las siguientes afirmaciones. Indica en primer lugar, el dominio y el significado de cada predicado. Pon la traducción de cada frase en el hueco disponible bajo la oración.

Dominio = {Estudiantes} ⊛

festival/1 → va al festival

concierto/2 → X va al concierto de Y.

Estudiante/1 → es un/una estudiante

Rockero/1 → es rockero, le gusta el rock.

Amigo/2 → Amigo(X,Y) X es amigo de Y

a) *Andrés* y *María* son estudiantes a los que les gusta el rock

$Estudiante(Andrés) \land Estudiante(María) \land Rockero(Andrés) \land Rockero(María)$

b) Sólo los estudiantes rockeros van al festival

$\forall x,\ festival(x) \Rightarrow (Rockero(x) \land Estudiante(x))$

c) *Andrés* tiene un amigo rockero

$\exists x:\ Rockero(x) \land Amigo(x, Andres)$

d) Si vamos al festival y vas al concierto de La Fuga, yo voy al de Sara Socas

$Festival(tu) \land Festival(yo) \land Concierto(tu, La Fuga) \Rightarrow Concierto(yo, Sara Socas)$.

6. (4 puntos) Considera los siguientes predicados y su significado

R(X): X es un roquero,

M(X): X muere,

V(X): X es viejo.

a) Enuncia, usando estos predicados,

P: Rockero, si has de morir, muere joven y deja un bonito cadáver.[1]

$\forall x\ R(x) \land M(x) \Rightarrow \neg V(x)$

C: Los viejos rockeros nunca mueren.

$\forall x\ R(x) \land V(x) \Rightarrow \neg M(x)$

b) Demuestra, usando sólo reglas de inferencia, $P \vdash C$. Haz la demostración en la siguiente página.

[1]Lo del *bonito cadáver* es una licencia poética. Puedes ignorarlo.

Demostración de $P \vdash C$:

1	$\forall x\ R(x) \wedge M(x) \Rightarrow \neg V(x)$	$\vdash \forall x\ R(x) \wedge V(x) \Rightarrow \neg M(x)$
2	$R(a) \wedge M(a) \Rightarrow \neg V(a)$	E.G. en P
3	$[R(a) \wedge V(a)]$	
4	$[M(a)]$	
5	$R(a)$	E.C. de 3
6	$M(a)$	Por 4.
7	$R(a) \wedge M(a)$	I C en 5 y 6
8	$R(a) \wedge M(a) \Rightarrow \neg V(a)$	por 2.
9	$\neg V(a)$	E I en 7, 8
10	$V(a)$	E.C. de 3
11	$V(a) \wedge \neg V(a)$	I.C. en 9, 10.
12	$\neg M(a)$	I.N. en 4 $\rightarrow$ 11
13	$R(a) \wedge V(a) \Rightarrow \neg M(a)$	I I en 3 $\rightarrow$ 12
14	$\forall x\ R(x) \wedge V(x) \Rightarrow \neg M(x)$	I G. en 13

7. (2 puntos)

a) Define *Tautología*.

b) Comprueba, usando sólo las equivalencias de la hoja de ayuda, que la siguiente proposición es una tautología

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

no hace falta cambiarlo

$(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (\neg(\neg q) \vee \neg p)$ Def impl.

$(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee \neg p)$ doble neg.

$(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ conmut.

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ def impl.

$((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)) \wedge ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q))$ idempotencia

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ def impl.

$(p \Rightarrow q) \vee \neg(p \Rightarrow q)$ tercio excluso.

Verdadero.