

# Laboratorio 3 - 05.05.2025

Si consideri il seguente problema di trasporto 1D,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = f, \quad a < x < b, \quad 0 < t \leq T \\ u(a, t) = g(t), \quad 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{array} \right. \quad (1)$$

dove  $\Omega = (a, b)$  è il dominio spaziale,  $T$  il tempo finale,  $c > 0$  il coefficiente di trasporto — indicante una convezione da sinistra a destra,  $f : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  il termine descrivente la forzante,  $g : (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  una condizione di inflow assegnata, ed  $u_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  il profilo della soluzione al tempo  $t = 0$ .

## Esercizio 1

1. Si implementino in Matlab gli schemi Eulero in avanti (EA/C), Upwind (UW) e Eulero all'indietro/centrato (EI/C).

## Esercizio 2

Siano  $\Omega = (-3, 3)$  e  $T = 2$ . Si considerino i seguenti dati per il problema (1),

$$c = 1, \quad f \equiv 0, \quad g \equiv 0, \quad u_0(x) = \begin{cases} \cos^4(\pi x) & \text{se } -0.5 \leq x \leq 0.5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

In questo caso, la soluzione esatta, ricavata utilizzando il metodo delle caratteristiche, è data da  $u_{\text{ex}}(x, t) = u_0(x - t)$ .

1. Suddividendo l'intervallo in  $N = 60$  sottointervalli di uguale ampiezza e scegliendo il numero  $CFL$  pari a 2, risolvere il problema proposto con gli schemi EA/C, UW ed EI/C. Confrontare le soluzioni numeriche con la soluzione esatta ai vari passi temporali.
2. Ripetere il punto precedente con  $N = 60$  e il numero  $CFL$  pari a 0.5.

3. Si commentino i risultati dei due punti precedenti alla luce dei risultati di stabilità conosciuti.

## Esercizio 3

Si considerino le seguenti definizioni dell'errore:

$$e_1 = \max_k \max_n |u_n^k - u(x_n, t_k)|, \quad e_2 = \max_k \sqrt{h \sum_n (u_n^k - u(x_n, t_k))^2},$$

essendo  $u(x_n, t_k)$  la valutazione della soluzione esatta in  $(x_n, t_k)$  e  $u_n^k \approx u(x_n, t_k)$ .

1. Utilizzando il numero  $CFL$  pari a 0.5 e considerando 4 dimezzamenti successivi a partire da  $N = 300$ , si verifichi sperimentalmente l'andamento dell'errore per lo schema UW.