Laboratorio 2 - 24.04.2025

Esercizio 1

Siano $T = 3$ ed $\Omega = (-L, L) \subset \mathbb{R}$, dove $L = \pi$. Si consideri il seguente problema differenziale tempo-dipendente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,T], \\ u(-L,t) = u_a(t) & t \in (0,T], \\ u(L,t) = u_b(t) & t \in (0,T], \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

dove la forzante è

$$f(x,t) := [2\sin(3x) - 1]\, e^{-t} + \frac{x+\pi}{2\pi(1+t)^2},$$

mentre il profilo iniziale ed i dati al bordo sono, rispettivamente,

$$u_0(x) = 2 + \cos(x) + \frac{1}{4}\sin(3x), \qquad u_a(t) = 1, \qquad u_b(t) = 1 + \frac{t}{1+t},$$

Con questi dati, la soluzione di (1) è $u_{\text{ex}}(x,t) = \left[1 + \cos(x) + \frac{1}{4}\sin(3x)\right] e^{-t} + \frac{t(x+\pi)}{2\pi(1+t)} + 1$. Immaginando di non conoscere u_{ex}, vogliamo approssimare la soluzione del problema numericamente.

Si consideri una griglia di calcolo uniforme $\{x_n\}_{n=0}^{N}$ con N sottointervalli in $[-L, L]$, $h = 2L/N$, ed una discretizzazione temporale $\{t_k\}_{k=0}^{K}$ con K sottointervalli in $[0,T]$, $\Delta t = T/K$.
L'approssimazioni del problema proposto tramite i metodi di Eulero in avanti (EA), di Eulero all'indietro (EI) e di Crank-Nicolson (CN), sono basate sugli schemi iterativi sottostanti,

$$EA: \quad \mathbf{u}^{k+1} = (I - \Delta t A)\mathbf{u}^k + \Delta t \mathbf{f}^k,$$

$$EI: \quad (I + \Delta t A)\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \Delta t \mathbf{f}^{k+1},$$

$$CN: \quad \left(I + \tfrac{\Delta t}{2} A\right) \mathbf{u}^{k+1} = \left(I - \tfrac{\Delta t}{2} A\right) \mathbf{u}^k + \tfrac{\Delta t}{2}\left(\mathbf{f}^k + \mathbf{f}^{k+1}\right),$$

dove $A \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$ è data da $A = h^{-2}\,\texttt{tridiag}[-1, 2, -1]$, mentre $\mathbf{f}^k$ è il vettore che tiene conto del termine noto e delle condizioni di Dirichlet al passo temporale t_k.

1. Implementare in Matlab i metodi EA, EI e CN utilizzando opportunamente un ciclo `for`.
2. Utilizzare tali metodi per approssimare la soluzione del problema con $N = 35$ e $K = 50$. Confrontare le soluzioni approssimate con la soluzione esatta del problema. Che cosa si osserva? Ripetere il confronto utilizzando $K = 200$.
3. Si considerino le seguenti definizioni dell'errore:
$$e_1 = \max_k \max_n |u_n^k - u(x_n, t_k)|,$$
$$e_2 = \max_k \sqrt{h \sum_n (u_n^k - u(x_n, t_k))^2},$$
essendo $u(x_n, t_k)$ la valutazione della soluzione esatta in (x_n, t_k) e $u_n^k \approx u(x_n, t_k)$. Verificare le seguenti stime per gli schemi EI e CN:
$$EI: \quad e_1, e_2 \leq C_1(h^2 + \Delta t),$$
$$CN: \quad e_1, e_2 \leq C_2(h^2 + \Delta t^2).$$
A questo scopo si prendano $N = 25$ e $K = 35$ e si valutino $M = 4$ discretizzazioni, dimezzando sia h sia Δt.
4. Si verifichi sperimentalmente quale sia l'andamento degli autovalori di A in funzione di h.