

Soluzione Laboratorio 1 - 19.04.2025

Esercizio 1

- 1.1. Si riporta nel file `poisson_dirichlet_centrato.m` l'implementazione dello schema a differenze finite centrato del second'ordine per la risoluzione del problema modello con condizioni di Dirichlet.

Sia $h = L/N$ il passo della griglia. Sia $\mathbf{u} = [u_0, \dots, u_N]^\top \in \mathbb{R}^N$ il vettore rappresentante la soluzione numerica, essendo $u_i \approx u(x_i)$ l'approssimazione della soluzione esatta nel nodo x_i .

Nei nodi interni, $i = 1, \dots, N-1$, abbiamo

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = F_i, \quad (1)$$

dove $F_i = f(x_i)$. Notiamo che per $i = 1$ è possibile sfruttare l'informazione data dalla condizione di Dirichlet $u_0 = u_0$. Similmente, per $i = N-1$, sappiamo che $u_N = u_L$. In questi due casi, possiamo quindi riscrivere (1) come

$$-\frac{u_2 - 2u_1}{h^2} = F(x_1) + \frac{u_0}{h^2} \quad \text{e} \quad -\frac{u_{N-1} - 2u_{N-2}}{h^2} = F(x_{N-1}) + \frac{u_L}{h^2}, \quad (2)$$

rispettivamente.

Considerando (1) per $i = 2, \dots, N-2$, unitamente a (2), otteniamo un sistema di $N-1$ equazioni nelle $N-1$ incognite

$$\mathbf{u}_* := [u_1, \dots, u_{N-1}]^\top.$$

In notazione matriciale, tale sistema diventa $A\mathbf{u}_* = \mathbf{F}_{bc}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & & \dots & -1 & 2 & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{bc} = \begin{bmatrix} h^2 F_1 + u_0 \\ h^2 F_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2 F_{N-2} \\ h^2 F_{N-1} + u_L \end{bmatrix}.$$

La matrice A è legata alla discretizzazione dell'operatore differenziale, mentre il termine noto \mathbf{F}_{bc} rappresenta il termine di sorgente, opportunamente modificato di modo da essere inclusivo delle condizioni al bordo. Una volta risolto il sistema, la soluzione numerica sull'intero intervallo è $\mathbf{u} := [u_0, \mathbf{u}_*, u_L]^\top$.

- 1.2. In Figura 1 viene rappresentata la soluzione nel caso $N = 40$. Per i dettagli si veda il file Lab1_es1.m.

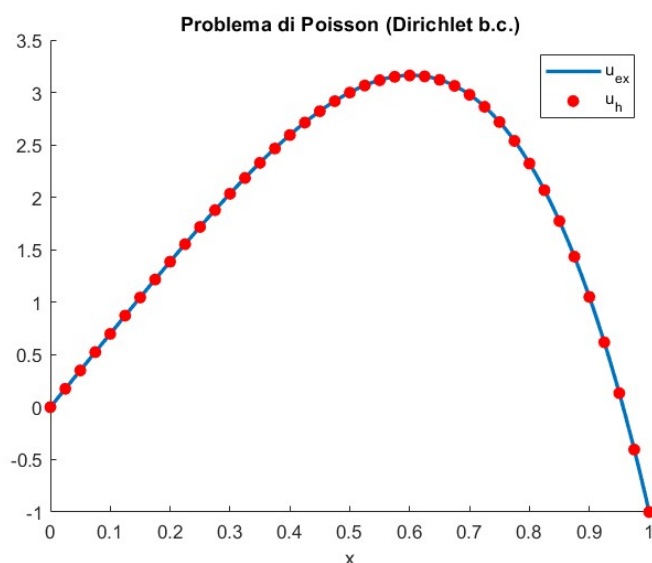


Figura 1: Confronto tra soluzione numerica e soluzione esatta per il problema di Poisson con condizioni di Dirichlet non-omogenee ($N = 40$).

- 1.3. Stimiamo gli ordini di convergenza p_{\max} e p_h (norma del massimo e norma h , rispettivamente) attraverso le formule

$$p_{\max} \approx \log_2 \frac{e_{\infty}(h)}{e_{\infty}(h/2)}, \quad p_h \approx \log_2 \frac{e_h(h)}{e_h(h/2)}.$$

Numericamente otteniamo p_{\max} , $p_h \approx 2$, coerentemente con quanto noto dalla teoria. Stiamo infatti utilizzando un metodo alle differenze finite centrate del second'ordine: unendo i risultati noti di consistenza e stabilità, ci aspettiamo un rate di convergenza del second'ordine (come effettivamente accade).

Esercizio 2

Siano x_0, \dots, x_N i nodi della discretizzazione. Come prima, sia $\mathbf{u} := [u_0, \dots, u_N]^\top$ il vettore rappresentante la soluzione del problema discreto, dove $u_i \approx u(x_i)$. In questo caso, essendo assegnata una sola condizione di Dirichlet, $u(L) = u_L$, le incognite del problema discreto sono

$$\mathbf{u}_* := [u_0, \dots, u_{N-1}]^\top \in \mathbb{R}^N,$$

corrispondenti a tutti i nodi della griglia, escluso l'ultimo, x_N .

Per i nodi interni, $i = 1, \dots, N-1$, abbiamo

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = F(x_i). \quad (3)$$

Come prima, osserviamo che se $i = N-1$ allora $u_{i+1} = u_N = u_L$ è noto, pertanto l'equazione diventa

$$-\frac{-2u_{N-1} + u_{N-2}}{h^2} = F(x_{N-1}) + \frac{u_L}{h^2}. \quad (4)$$

Abbiamo $N-1$ equazioni ed N incognite: per ottenere un problema ben posto va aggiunta un'altra equazione, che possiamo ottenere imponendo la condizione di Neumann nel nodo x_0 .

2.1. **Metodo upwind:** consideriamo una discretizzazione della condizione di Neumann basata sull'approssimazione della derivata prima decentrata del prim'ordine,

$$\frac{u_1 - u_0}{h} = \alpha_0.$$

Combinando quest'equazione con (3) e (4), otteniamo un sistema di N equazioni in N incognite, $\mathbf{A}\mathbf{u}_* = \mathbf{F}_{bc}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \dots & & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{bc} = \begin{bmatrix} h\alpha_0 \\ h^2 F_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2 F_{N-2} \\ h^2 F_{N-1} + u_L \end{bmatrix}.$$

Per l'implementazione in Matlab si veda il file `poisson_misto_upwind.m`. In Figura 2 (pannello di sinistra) vengono confrontate la soluzione esatta e la soluzione numerica ottenuta con il metodo upwind per $N = 50$.

Utilizzando $N = 50, 100, 200, 400, 800$, invece, si ottengono le seguenti stima dell'ordine di convergenza,

p_max =	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
p_h =	1.0141	1.0071	1.0036	1.0018

essendo p_{\max} l'ordine stimato con la norma del massimo e p_h quello stimato con la norma h . Tali risultati sono in perfetto accordo con la teoria: l'approssimazione del primo ordine della condizione di Neumann deteriora l'ordine di convergenza di tutto lo schema. Per ulteriori dettagli si veda lo script `Lab1_es2_1.m`.

2.2. Differenze centrate con nodo fantasma: al fine di non deteriorare l'ordine di convergenza garantito nei nodi interni, lo schema alternativo proposto dall'esercizio prevede la discretizzazione della condizione di Neumann attraverso il seguente schema centrato del secondo ordine,

$$\frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = \alpha_0.$$

Tuttavia, tale approssimazione introduce un nodo ulteriore e quindi un'incognita in più nello schema (*nodo fantasma*). Pertanto, occorre introdurre un'equazione ulteriore: questa si può ottenere imponendo l'equazione differenziale $-u'' = f$ anche nel nodo di Neumann x_0 , cioè considerando anche il caso $i = 0$ nell'equazione (3). Abbiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} -u_{-1} + u_1 = 2h\alpha_0, \\ -u_1 + 2u_0 - u_{-1} = h^2 F_0, \\ -u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1} = h^2 F_i, & i = 1, \dots, N-2 \\ 2u_{N-1} - u_{N-2} = h^2 F_{N-1} + u_L, \end{cases}$$

che si può riscrivere, eliminando il nodo fantasma, come

$$\begin{cases} u_1 - u_0 = \frac{1}{2}h^2 F_0 - h\alpha_0, \\ -u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1} = h^2 F_i, & i = 1, \dots, N-2 \\ 2u_{N-1} - u_{N-2} = h^2 F_{N-1} + u_L. \end{cases}$$

Equivalentemente, in notazione matriciale, $\mathbf{A}\mathbf{u}_* = \mathbf{F}_{\text{bc}}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & & & & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & & & & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{\text{bc}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}h^2 F_0 - h\alpha_0 \\ h^2 F_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2 F_{N-2} \\ h^2 F_{N-1} + u_L \end{bmatrix}.$$

In Figura 2 (pannello di destra) vengono confrontate la soluzione esatta con quella approssimata, quest'ultima ottenuta con $N = 50$. Anche solo qualitativamente, l'approssimazione è chiaramente superiore a quella ottenuta con il metodo upwind. Inoltre, in questo caso, l'ordine di convergenza stimato è

$p_{\max} = 2.0009 \quad 2.0002 \quad 2.0001 \quad 2.0000$
 $p_h = 2.0009 \quad 2.0002 \quad 2.0001 \quad 2.0000$

nelle due norme. Abbiamo quindi recuperato l'ordine di convergenza quadratico, come previsto dalla teoria.

Per i dettagli sull'implementazione in Matlab si veda il file `Lab1_es2_2.m`.

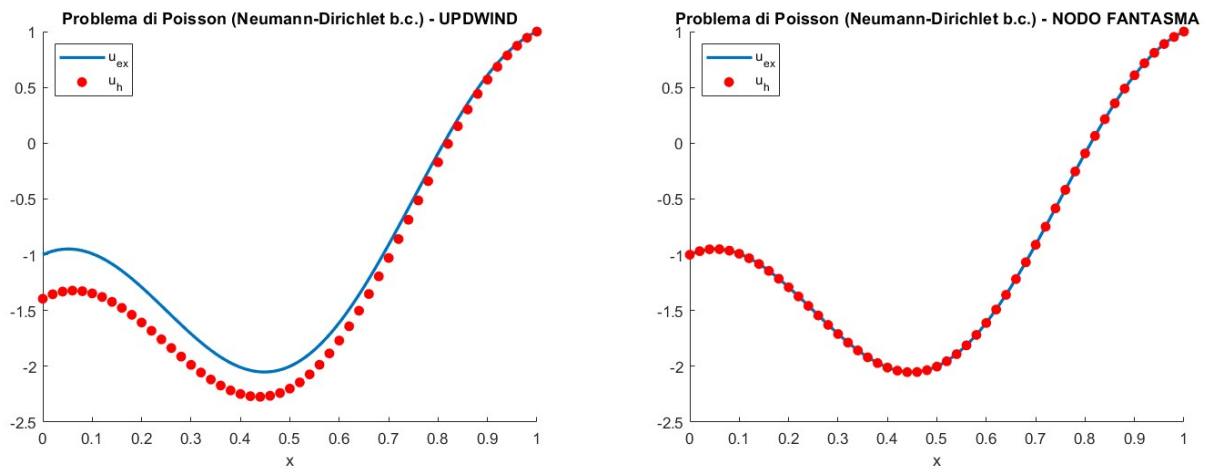


Figura 2: Confronto tra soluzione numerica ($N = 50$) e soluzione esatta per il problema di Poisson con condizioni miste Neumann-Dirichlet : metodo upwind (sinistra) e differenze centrate con nodo fantasma (destra).