

Soluzione Laboratorio 4 - 12.05.2025

Esercizio 1

Riscriviamo il problema dell'esercizio nella forma più generale (usata poi negli script Matlab):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = f, \quad a < x < b, \quad 0 < t \leq T \\ u(a, t) = g(t), \quad 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{array} \right.$$

Consideriamo una griglia spaziale uniforme $\{x_n\}_{n=0}^N$ con N sottointervalli in $[a, b]$, $h = (b-a)/N$, e una discretizzazione temporale $\{t_k\}_{k=0}^K$ con K sottointervalli in $[0, T]$, $\tau = T/K$. Sia quindi $u_n^k \approx u(x_n, t_k)$, essendo $u(x_n, t_k)$ la valutazione della soluzione esatta in (x_n, t_k) . Similmente, poniamo $f_n^k := f(x_n, t_k)$. Come l'ultima volta, infine, introduciamo la notazione

$$\lambda := c\tau/h.$$

1. Per tutti gli schemi che consideriamo di seguito abbiamo $u_n^0 = u_0(x_n)$ per $n = 0, \dots, N$, (condizione iniziale) e $u_0^{k+1} = g(t_{k+1})$ per $k = 0, \dots, K-1$, nel nodo di Dirichlet (inflow). Per semplicità, utilizziamo invece una discretizzazione di tipo upwind per la trattazione dell'ultimo nodo della griglia (outflow),

$$u_N^{k+1} = u_N^k - \lambda(u_N^k - u_{N-1}^k) + \tau f_N^k.$$

Benché del prim'ordine, quest'ultima discretizzazione non impatterà significativamente sui metodi che andremo a considerare, fintanto che la soluzione si manterra supportata in $[a, b]$. Se volessimo proseguire per tempi lunghi, occorrerebbe una trattazione opportuna, che qui non approfondiremo.

Veniamo quindi alla trattazione dei nodi interni, dove abbiamo l'effettiva distinzione tra i metodi di Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff.

1. **Lax-Friedrichs (LF).** Il metodo di LF si può ottenere a partire dal metodo EA/C (Eulero in avanti in tempo, differenze finite centrate in spazio), sostituendo il valore

nel nodo corrente, u_n^k , con una sua approssimazione, ottenuta mediando i valori dei nodi vicini. Lo schema, infatti è della forma

$$u_n^{k+1} = \frac{(u_{n+1}^k + u_{n-1}^k)}{2} - \frac{\lambda}{2}(u_{n+1}^k - u_{n-1}^k) + \tau f_n^k$$

per $k = 0, \dots, K-1$ ed $n = 1, \dots, N-1$. Nell'implementazione proposta, si veda il file `conservazione_LF.m`, lo schema di cui sopra viene implementato *as is*, cioè seguendo un approccio *matrix-free*. Questo permette di allocare meno memoria e guadagnare in efficienza. Ovviamente, tutto ciò è possibile unicamente per il fatto che lo schema, come EA/C ed Upwind, è esplicito. Vale comunque la pena sottolineare che, se espresso in notazione matriciale, il metodo LF si può scrivere come,

$$\mathbf{u}^{k+1} = (\mathbb{I} - \frac{\lambda}{2}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{D})\mathbf{u}^k + \tau\mathbf{F}^k$$

dove $\mathbf{u}^k := [u_1^k, \dots, u_{N-1}^k]^\top$ è il vettore dei nodi interni, \mathbf{F}^k è il vettore sorgente (aggiustato tenendo conto delle condizioni al bordo e dei nodi limitrofi). Qui, la matrice \mathbf{D} è la matrice di diffusione, già vista nei laboratori precedenti (con altra notazione). Da questa prospettiva, risulta evidente che il metodo LF introduca una diffusività artificiale. Oltretutto, tale artificio viene realizzato indipendentemente dal problema fisico (la matrice \mathbb{D} non è moltiplicata per nessun parametro caratteristico del problema!), a differenza dello schema Upwind (UW). Vista la presenza della diffusività artificiale, lo schema è condizionatamente stabile.

2. **Lax-Wendroff (LW).** Lo schema LW si può ottenere considerando uno sviluppo di Taylor al second'ordine per l'approssimazione dell'evoluzione temporale, ovvero

$$u_n^{k+1} \approx u_n^k + \tau \frac{\partial u_n^k}{\partial t} + \frac{1}{2}\tau^2 \frac{\partial^2 u_n^k}{\partial t^2}.$$

L'idea è poi quella di sfruttare l'equazione differenziale per "convertire" le derivate in tempo in derivate in spazio. Ricordiamo infatti che $\partial_t u = f - c\partial_x u$, e pertanto anche

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u &= \frac{\partial f}{\partial t} - c \frac{\partial \partial}{\partial t \partial x} u = \frac{\partial f}{\partial t} - c \frac{\partial \partial}{\partial x \partial t} u = \frac{\partial f}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \left(f - c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \implies \frac{\partial^2}{\partial t^2} u &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} - c \frac{\partial f}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$u_n^{k+1} \approx u_n^k - \tau c \frac{\partial u_n^k}{\partial x} + \frac{1}{2}\tau^2 c^2 \frac{\partial^2 u_n^k}{\partial x^2} + \tau f_n^k + \frac{1}{2}\tau^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t} - c \frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Discretizzando in spazio con il metodo alle differenze finite centrate si ottiene quindi lo schema

$$u_n^{k+1} = u_n^k - \frac{\lambda}{2}(u_{n+1}^k - u_{n-1}^k) + \frac{\lambda^2}{2}(u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k) + \tau f_n^k + \frac{\tau^2}{2}(\partial_t f_n^k - c \partial_x f_n^k),$$

per $k = 0, \dots, K - 1$ e $n = 1, \dots, N - 1$. Si nota quindi che lo schema LW è di fatto costituito dallo schema EA/C a cui è stata aggiunta un'opportuna correzione. Passando in notazione matriciale —con opportuni aggiustamenti ai bordi—, il tutto si può riscrivere nella forma

$$\mathbf{u}^{k+1} = \left(\mathbf{I} - \frac{\lambda}{2} \mathbf{A} + \frac{\lambda^2}{2} \mathbf{D} \right) \mathbf{u}^k + \tau \mathbf{F}^k + \frac{\tau^2}{2} \left(\partial_t \mathbf{F} \right)^k - c \partial_x \mathbf{F}^k.$$

Anche questa volte, la "correzione" rispetto ad EA/C consiste nell'introduzione di una *diffusione artificiale*, responsabile della condizionata stabilità del metodo. Contrariamente al metodo LF, tuttavia, la diffusione artificiale introdotta sfrutta la struttura del problema, con il risultato che (come si vedrà in seguito) lo schema non risente di un evidente effetto diffusivo.

Per i dettagli dell'implementazione si veda il file `conservazione_LW.m`.

2-3. I risultati del problema proposto ottenuti con i diversi schemi sono riportati in Fig. 1 ($CFL = 2$) e Fig. 2 ($CFL = 0.5$), rispettivamente. Per i dettagli si veda il file `Lab4_Es1.m`.

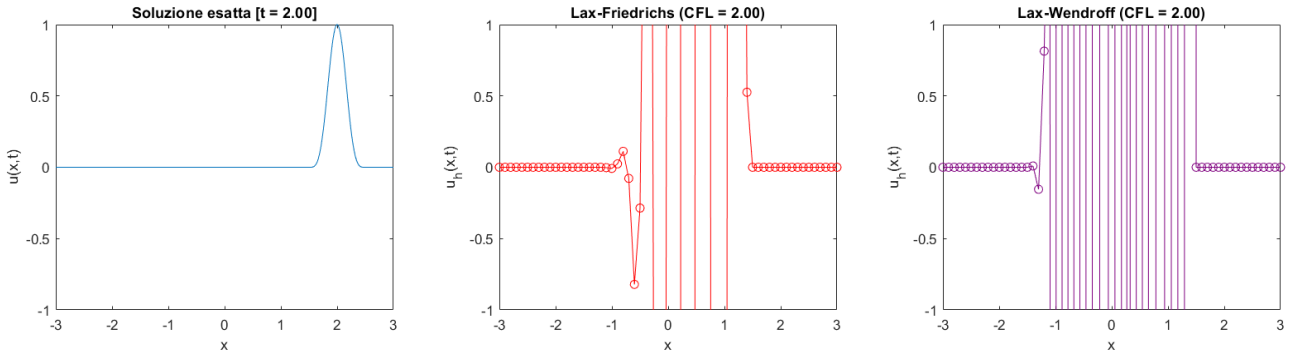


Figura 1: Soluzioni numeriche ottenute all'istante $t = 2$ scegliendo $N = 60$ e $K = 10$.

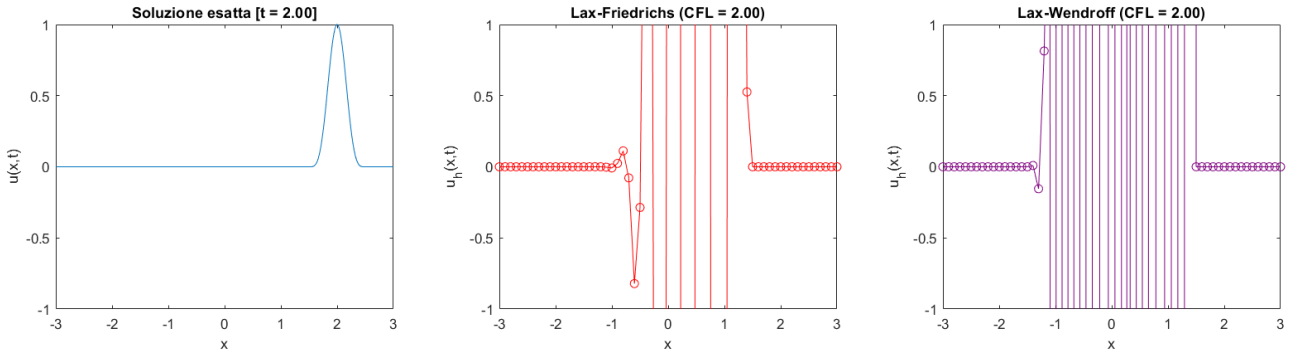


Figura 2: Soluzioni numeriche ottenute all'istante $t = 2$ scegliendo $N = 60$ e $K = 40$.

4. Il metodo di Lax-Friedrichs, come il metodo upwind, introduce della viscosità artificiale per stabilizzare la soluzione. Tuttavia, paragonato ad UW, è un metodo maggiormente sovradiffusivo. Ciò è dovuto al fatto che la derivata in spazio è stata discretizzata con differenze finite centrate al secondo ordine: di conseguenza, i picchi dell'onda sono ancora più smorzati al crescere del tempo.

La soluzione ottenuta con LW è invece pressochè esente da diffusività, mentre presenta un lieve ritardo rispetto alla soluzione esatta. La presenza delle oscillazioni spurie in ritardo di fase (che si presentano a sinistra della soluzione esatta) non è allarmante in quanto non porta ad instabilità, sempre a patto di rispettare la condizione sul CFL.

Il fenomeno appena descritto, detto di *dispersione*, consiste (semplificando un po') in uno sfasamento dei segnali variabile a seconda della loro frequenza. Nei punti di discontinuità o di forti gradienti, la coesistenza di modi di Fourier a diverse frequenze, in aggiunta alla dispersione del metodo numerico, causa il cosiddetto fenomeno di Gibbs. Nella soluzione esatta, tutti modi di Fourier si trovano esattamente in fase e quindi tendendo ad elidersi l'un l'altro portando ad una corretta rappresentazione dei punti di discontinuità. Nella soluzione numerica, a causa dello sfasamento variabile a seconda della frequenza, questa cancellazione non può più avvenire, portando alla formazione di oscillazioni spurie.

Approfondimenti

Per la precisa definizione di *dispersione*, di *dissipazione* e sul ruolo dell'ordine della derivata si veda il file *diffusion_vs_dispersion.pdf*. Per avere un'evidenza fisica di come le derivate dispari (come u_{xxx}) si comportano in presenza di discontinuità, si veda il file *KdV.m*. dove viene risolta numericamente l'equazione di Korteweg-de Vries

$$u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0$$

Questa equazione si può pensare uguale ad un'equazione di Burgers (che ha la tendenza a formare discontinuità) modificata con l'aggiunta di un termine dispersivo $\delta^2 u_{xxx}$.

5. Per ricavare le equazioni equivalenti consideriamo i seguenti sviluppi in spazio ed in tempo della soluzione esatta al terz'ordine¹,

$$u_n^{k+1} = u_n^k + \tau \frac{\partial u_n^k}{\partial t} + \frac{1}{2} \tau^2 \frac{\partial^2 u_n^k}{\partial t^2} + \frac{1}{6} \tau^3 \frac{\partial^3 u_n^k}{\partial t^3} + O(\tau^4),$$

e

$$u_{n\pm 1}^k = u_n^k \pm h \frac{\partial u_n^k}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u_n^k}{\partial x^2} \pm \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 u_n^k}{\partial x^3} + O(h^4).$$

Proseguiamo ricordando che la soluzione esatta soddisfa $\partial_t u = -\partial_x u$, essendo $c = 1$ ed $f \equiv 0$ (per semplicità, facciamo i conti direttamente nel caso richiesto). Pertanto, è facile verificare che $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u$ e $\partial_t^3 u = -\partial_x^3 u$, da cui lo sviluppo in tempo diventa

$$u_n^{k+1} = u_n^k + \tau \frac{\partial u_n^k}{\partial t} + \frac{1}{2} \tau^2 \frac{\partial^2 u_n^k}{\partial x^2} - \frac{1}{6} \tau^3 \frac{\partial^3 u_n^k}{\partial x^3} + O(\tau^4).$$

¹Perché? I metodi LF ed LW usano approssimazioni del second'ordine: se vogliamo vedere "qualcosa in più" dobbiamo arrivare almeno al terz'ordine!

Ricaviamo a questo punto le seguenti uguaglianze, utili a comprendere il comportamento dei vari termini negli schemi LF ed LW:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(u_{n+1}^k + u_{n-1}^k) &= u_n^k + \frac{1}{2}h^2\partial_x^2 u_n^k + O(h^4), \\ \frac{1}{2}\lambda(u_{n+1}^k - u_{n-1}^k) &= \lambda h\partial_x u_n^k + \frac{1}{6}\lambda h^3\partial_x^3 u_n^k + O(h^4), \\ \frac{1}{2}\lambda^2(u_{n+1}^k - 2u_n^k + u_{n-1}^k) &= \frac{1}{2}\lambda^2 h^2\partial_x^2 u_n^k + O(h^4).\end{aligned}$$

Possiamo ora sostituire le varie approssimazioni nei due schemi e ricavare le loro equazioni equivalenti al terz'ordine. Poiché gli sviluppi sono tutti nel nodo (x_n, t_k) , nel fare tale sostituzione, possiamo "eliminare" la dipendenza da n e k , scrivendo più semplicemente u per la soluzione e u_t , u_x , u_{xx} ed u_{xxx} per le sue derivate.

Sostituendo in LF otteniamo

$$u + \tau u_t + \frac{1}{2}\tau^2 u_{xx} - \frac{1}{6}\tau^3 u_{xxx} + O(\tau^4) = u + \frac{1}{2}h^2 u_{xx} - \lambda h u_x - \frac{1}{6}\lambda h^3 u_{xxx} + O(h^4),$$

Ri-arrangiando l'equazione ed eliminando i termini di ordine superiore al terzo in h e τ otteniamo l'equazione equivalente al terz'ordine

$$\tau u_t + \lambda h u_x = \frac{1}{2}(h^2 - \tau^2)u_{xx} + \frac{1}{6}(\tau^3 - \lambda h^3)u_{xxx}.$$

Ricordando che qui $\lambda = \tau/h$ e dividendo per τ ricaviamo infine

LF : $u_t + u_x = \frac{1}{2\tau}h^2(1 - \lambda^2)u_{xx} + \frac{1}{6}h^2(\lambda^2 - 1)u_{xxx}.$

Abbiamo quindi $\mu = \mu(h) = \frac{h^2}{2\tau}(1 - \lambda^2)$ e $\nu = \nu(h) = \frac{h^2}{6}(\lambda^2 - 1)$. Con i dati a disposizione, ciò implica che lo schema in questione agisce per dissipazione, con sfasature trascurabili in tempo. In regime di stabilità, la soluzione approssimata diffonde all'equilibrio. Considerando valori di CFL maggiormente vicini a 1 e discretizzazioni lasche in tempo, l'effetto dispersivo non risulta più invisibile, influenzando la velocità di propagazione dell'onda e portando la soluzione ad "anticipare" il picco in tempo.

Relativamente al caso LW, invece, abbiamo

$$u + \tau u_t + \frac{1}{2}\tau^2 u_{xx} - \frac{1}{6}\tau^3 u_{xxx} + O(\tau^4) = u - \lambda h u_x - \frac{1}{6}\lambda h^3 u_{xxx} + \frac{1}{2}\lambda^2 h^2 u_{xx} + O(h^4).$$

Troncando al terz'ordine, riarrangiando e dividendo per τ ,

$$u_t + u_x = \frac{1}{2\tau}(\lambda^2 h^2 - \tau^2)u_{xx} + \frac{1}{6}(\tau^2 - h^2)u_{xxx}.$$

Tuttavia, $\lambda^2 h^2 = \tau^2$, pertanto il termine diffusivo in u_{xx} scompare, e possiamo riscrivere la precedente come

LW : $u_t + u_x = \frac{1}{6}h^2(\lambda^2 - 1)u_{xxx}.$

Contrariamente a LF, vediamo quindi che l'effetto dissipativo della soluzione è praticamente assente, dal momento che $\mu = 0$. Ciò non implica tuttavia una totale assenza di diffusività: se avessimo sviluppato fino al quarto ordine avremmo trovato un termine non nullo in u_{xxxx} , che avrebbe contribuito al processo dissipativo (benché su una scala decisamente inferiore). Difatti, siccome il metodo è condizionatamente stabile, non può non essere anche dissipativo, sebbene lo sia dal quarto ordine e sia quindi dominante il comportamento dispersivo (dato dal termine in u_{xxx} , infatti $\nu = \nu(h) = h^2(\lambda^2 - 1)/6$).

Esercizio 2

Denotiamo con **p1** l'ordine stimato con l'errore definito da e_1 e **p2** quello stimato con l'errore definito da e_2 .

1. Facendo 4 dimezzamenti dei passi τ ed h a partire da $N = 300$ con $CFL = 0.5$ si ottiene la seguente stima dell'ordine p per lo schema di Lax-Wendroff

$$\text{p1} = \quad 1.9925 \quad 1.9993 \quad 2.0004 \quad 2.0000,$$

$$\text{p2} = \quad 1.9842 \quad 1.9975 \quad 1.9995 \quad 1.9999,$$

mentre per il metodo di Lax-Friedrichs

$$\text{p1} = \quad 0.4902 \quad 0.6485 \quad 0.7857 \quad 0.8806,$$

$$\text{p2} = \quad 0.5119 \quad 0.6657 \quad 0.7947 \quad 0.8841,$$

Tali risultati confermano che l'ordine del metodo LW è 2 (in spazio e in tempo), mentre per LF è 1. Per i dettagli si veda il file `Lab4_Es2.m`.

2. Ripetendo il punto precedente con $u(x, 0) = \tilde{u}_0(x) = \cos^2(\pi x)\mathbf{1}_{[-0.5, 0.5]}(x)$ otteniamo invece

$$\text{p1} = \quad 1.3091 \quad 1.3258 \quad 1.3258 \quad 1.3287,$$

$$\text{p2} = \quad 1.7933 \quad 1.7684 \quad 1.7410 \quad 1.7174,$$

per Lax-Wendroff, e

$$p1 = 0.6553 \quad 0.8035 \quad 0.8972 \quad 0.9476,$$

$$p2 = 0.6390 \quad 0.7716 \quad 0.8637 \quad 0.9204,$$

per Lax-Friedrics. La motivazione è da ricercarsi nella regolarità del dato iniziale (e quindi della soluzione esatta). Poiché \tilde{u}_0 non è di classe \mathcal{C}^2 in spazio (la derivata seconda è discontinua nei punti di raccordo $x_{\pm} = \pm 0.5$), la soluzione u non è derivabile con continuità due volte in spazio (e nemmeno in tempo visto che $\partial_t u = -\partial_x u!$). Di conseguenza, lo schema LW non può garantire una convergenza del second'ordine, in quanto decadono le ipotesi di regolarità su cui si fonda la teoria. Il fenomeno è più evidente rispetto ad e_1 , in quanto esso è basato su una metrica d'errore più stringente (norma infinito), che non rispetto ad e_2 (basato su una norma simil-integrale in spazio).

Viceversa, essendo un metodo globalmente del prim'ordine, LF non va incontro ad alcun deterioramento.