Soluzione Laboratorio 2 - 24.04.2025

Esercizio 1

1. Si vedano i file calore_EA.m, calore_EI.m e calore_CN.m in allegato.

2. Utilizzando i tre metodi per risolvere il problema proposto con $N = 35$ e $K = 50$ si trovano i risultati riportati in Figura 1.

   Come si evince dalle figure il metodo di EA è in questo caso instabile, mentre EI e CN sono stabili. Ciò rispecchia la proprietà che il metodo di EA sia condizionatamente stabile e che i metodi di EI e CN siano invece incondizionatamente stabili. In particolare la condizione per cui EA è stabile è del tipo $\Delta t < Ch^2$. Aumentando quindi K ci aspettiamo di trovare prima o poi un valore tale per cui anche EA è stabile.

   Riportiamo in Figura 2 le soluzioni ottenute per $K = 200$. In particolare si nota che in questo caso il metodo di EA è stabile. Per i dettagli si veda il file Lab2_Es1_2.m.

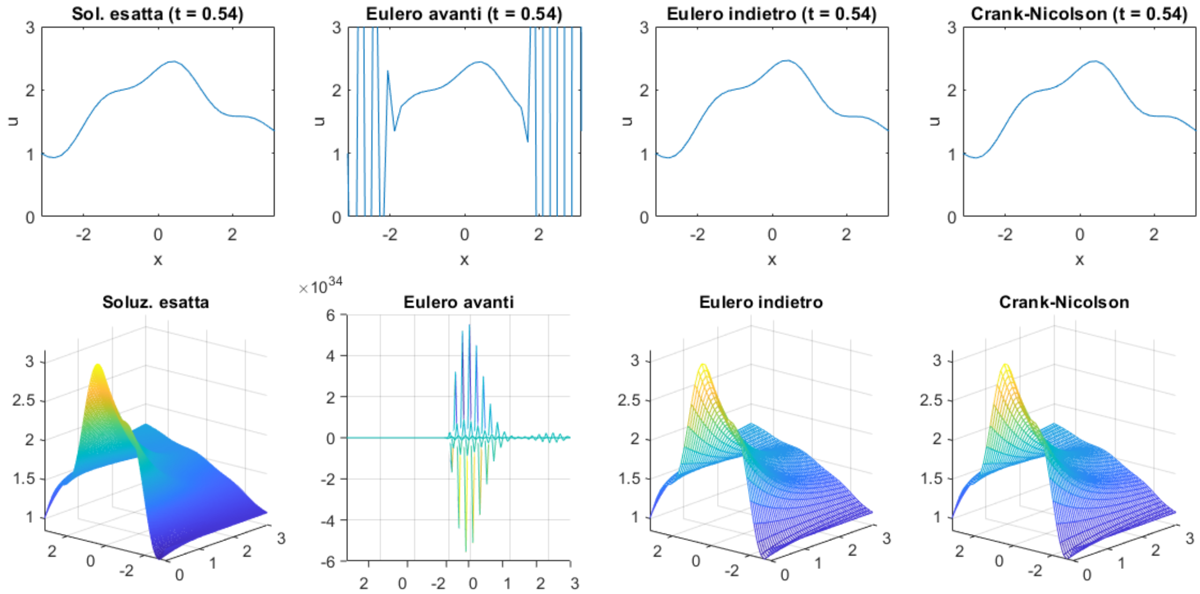

Figura 1: Soluzione esatta vs approssimazione numerica con EA, EI e CN per un istante di tempo fissato, $t = 0.54$. Valori di discretizzazione: $N = 35$, $K = 50$.

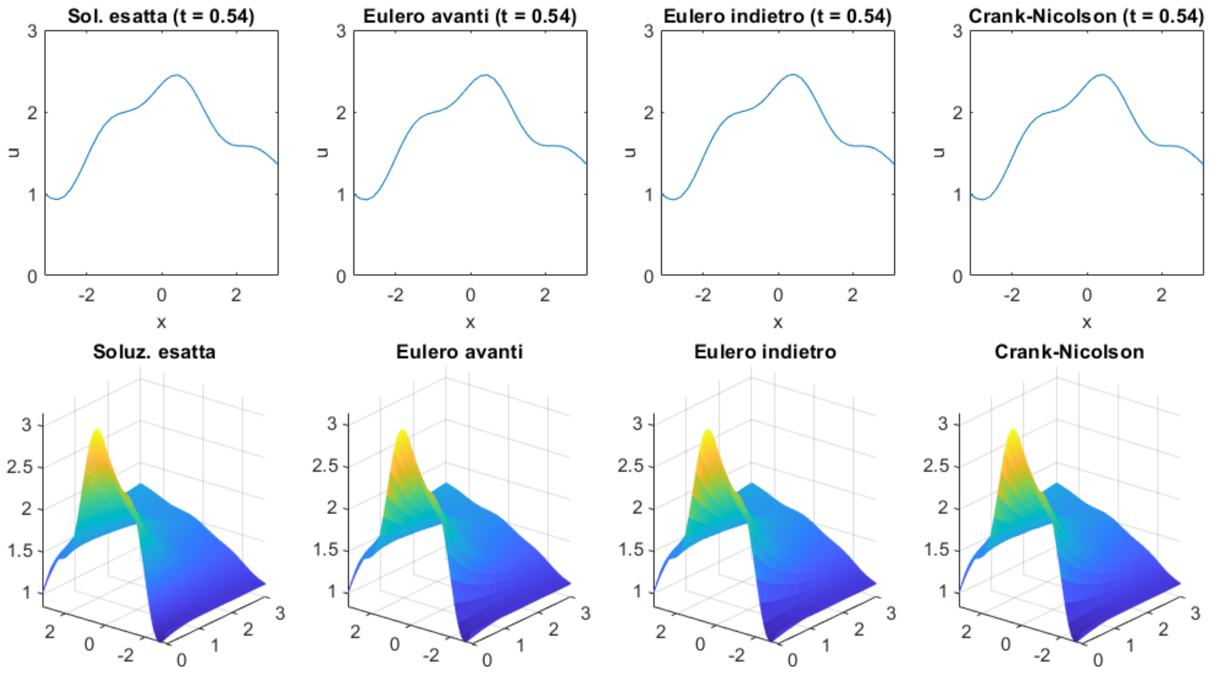

Figura 2: Soluzione esatta vs approssimazione numerica con EA, EI e CN per un istante di tempo fissato, $t = 0.54$. Valori di discretizzazione: $N = 35$, $K = 200$.

3. Denotiamo con `p1` l'ordine stimato con l'errore definito da e_1 e `p2` quello stimato con l'errore definito da e_2. Valutando $M = 4$ discretizzazioni a partire da $N = 25$ e $K = 35$ si ottiene la seguente stima dell'ordine p per Eulero implicito

```
p1  =  1.0552    1.0162    1.0046
p2  =  1.0266    1.0132    1.0065
```

   che mostrano come tale metodo sia globalmente del primo ordine.
   Per il metodo di Crank-Nicolson, si ha invece

```
p1  =  1.9585    2.0084    2.0017
p2  =  2.0372    2.0068    2.0023
```

   che mostrano come tale metodo sia globalmente del secondo ordine.

   Per i dettagli si veda il file `Lab2_Es1_3.m`.

4. Analizzando gli autovalori della matrice A al variare di h si evince che l'autovalore minimo $\lambda_{\min}(A)$ è costante, mentre l'autovalore $\lambda_{\max}(A)$ si comporta come h^{-2} (vedasi Fig. 3).

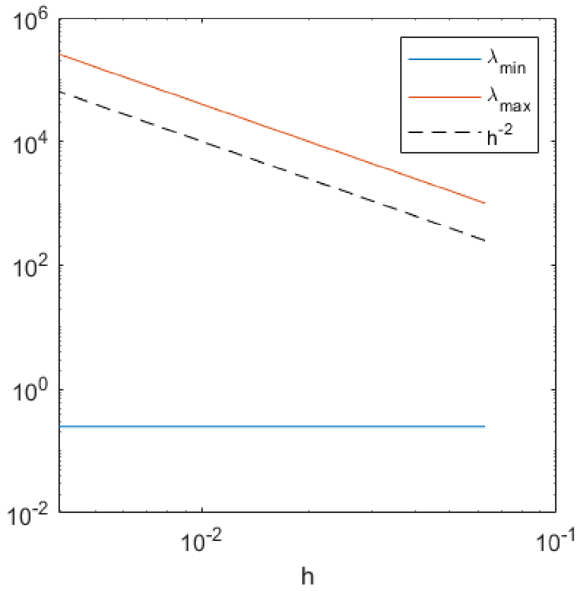

Figura 3: Andamento degli autovalori $\lambda_{\min}$ e $\lambda_{\max}$ della matrice A al variare di h.

Coerentemente con il fatto che la matrice A è simmetrica e definita positiva, si osserva inoltre che gli autovalori sono tutti strettamente positivi. Per i dettagli si veda il file Lab2_Es1_4.m.