

Soluzione Laboratorio 3 - 05.05.2025

Esercizio 1

Consideriamo una griglia spaziale uniforme $\{x_n\}_{n=0}^N$ con N sottointervalli in $[a, b]$, $h = (b-a)/N$, e una discretizzazione temporale $\{t_k\}_{k=0}^K$ con K sottointervalli in $[0, T]$, $\tau = T/K$. Sia quindi $u_n^k \approx u(x_n, t_k)$, essendo $u(x_n, t_k)$ la valutazione della soluzione esatta in (x_n, t_k) . Per comodità, da qui in avanti, introduciamo la notazione

$$\lambda := c\tau/h.$$

1. Per tutti gli schemi che consideriamo di seguito abbiamo

$$\begin{aligned} u_n^0 &= u_0(x_n) & n &= 0, \dots, N, \\ u_0^{k+1} &= g(t_{k+1}) & k &= 0, \dots, K-1, \end{aligned}$$

cioè utilizziamo le condizioni iniziali in $t_0 = 0$ e di inflow nel nodo $x_0 = a$.

- (a) **Eulero in avanti centrato (EA/C)**. Si approssima la derivata prima spaziale con uno schema centrato in combinazione con uno schema di Eulero in avanti per la discretizzazione temporale. Si ottiene il seguente schema al tempo t_k e nel nodo x_n :

$$\frac{u_n^{k+1} - u_n^k}{\tau} + c \frac{u_{n+1}^k - u_{n-1}^k}{2h} = f(x_n, t_k), \quad k = 0, \dots, K-1, n = 1, \dots, N-1.$$

Per il nodo di destra non si può applicare lo schema perché si uscirebbe dal dominio. Per questo motivo si usa la seguente estrapolazione, basata su una discretizzazione decentrata della derivata in spazio,

$$u_N^{k+1} = (1 - \lambda)u_N^k + \lambda u_{N-1}^k + \tau f(x_N, t_k). \quad (1)$$

dove $\lambda := c\tau/h$ Per i dettagli dell'implementazione si veda il file `conservazione_EAC.m`.

- (b) **Upwind (UW)**. In tal caso si approssima la derivata spaziale con una differenza finita decentrata (per tutti i nodi della griglia!), mentre l'avanzamento in tempo avviene con una differenza finita in avanti (EA). La direzione di decentramento

per l'approssimazione della derivata spaziale viene scelta coerentemente con la direzione di trasporto. In particolare, poiché assumiamo $c > 0$, l'approssimazione dell'equazione al tempo t_k e nel nodo x_n diventa:

$$\frac{u_n^{k+1} - u_n^k}{\tau} + c \frac{u_n^k - u_{n-1}^k}{h} = f(x_n, t_k), \quad k = 0, \dots, K-1, n = 1, \dots, N-1.$$

Si noti che la direzione del trasporto (in questo caso pari a $c > 0$) determina la direzione del "decentramento" della differenza finita upwind.

Per i dettagli dell'implementazione si veda il file `conservazione_UW.m`.

- (c) **Eulero all'indietro centrato.** Si approssima la derivata prima spaziale con uno schema centrato, in combinazione con uno schema di Eulero all'indietro per la discretizzazione temporale. Si ottiene il seguente schema al tempo t_k e nel nodo x_n

$$\begin{aligned} \frac{u_1^{k+1} - u_1^k}{\tau} + \frac{c}{2h} u_2^{k+1} &= f(x_1, t_{k+1}) + \frac{c}{2h} g(t_{k+1}), \\ \frac{u_n^{k+1} - u_n^k}{\tau} + c \frac{u_{n+1}^{k+1} - u_{n-1}^{k+1}}{2h} &= f(x_n, t_{k+1}), \quad n = 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Si fa notare che per l'equazione del primo nodo interno ($n = 1$) abbiamo sostituito il valore di u_0^{k+1} con le condizioni assegnate di inflow, cioè $g(t_{k+1})$.

Invece, per il nodo di destra non si può applicare lo schema perché si uscirebbe dal dominio. Per questo motivo, analogamente a quanto fatto per EA/C, si usa la seguente estrapolazione:

$$\frac{u_N^{k+1} - u_N^k}{\tau} + c \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} = f(x_N, t_{k+1}).$$

Lo schema di Eulero all'indietro centrato richiede la risoluzione di un sistema lineare ad ogni passo temporale $A\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{F}^{k+1}$, $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, dato da:

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda/2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\lambda/2 & 1 & \lambda/2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -\lambda/2 & 1 & \lambda/2 \\ 0 & \dots & & \dots & -\lambda & 1 + \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1}^{k+1} \\ u_N^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^k + \tau f(x_1, t_{k+1}) + \lambda/2 g(t_{k+1}) \\ u_2^k + \tau f(x_2, t_{k+1}) \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1}^k + \tau f(x_{N-1}, t_{k+1}) \\ u_N^k + \tau f(x_N, t_{k+1}) \end{bmatrix}$$

Per i dettagli dell'implementazione si veda il file `conservazione_EIC.m`.

Esercizio 2

1-2. I risultati del problema proposto ottenuti con i diversi schemi con $CFL = 2$ sono mostrati nelle immagini della Figura 1. Il caso $CFL = 0.5$ è riportato invece nella Figura 2. Per i dettagli si veda il file `Lab3_Es2.m`.

3. Con il metodo Eulero avanti/centrato la soluzione presenta delle oscillazioni numeriche. Infatti questo schema non è mai fortemente stabile.

Con il metodo upwind la soluzione è stabile con picchi che si smorzano al crescere del tempo. Ciò era da aspettarsi in quanto questo metodo introduce della viscosità artificiale per stabilizzare. Se non fosse rispettata la condizione CFL , tuttavia, si otterrebbero risultati instabili.

Con il metodo Eulero indietro/centrato si nota come la soluzione sia sempre stabile, anche nel caso di numero CFL maggiore di 1. Questa è una caratteristica dei metodi impliciti che, a fronte di un maggior sforzo computazionale per risolvere il problema, permettono di scegliere liberamente il passo di discretizzazione temporale.

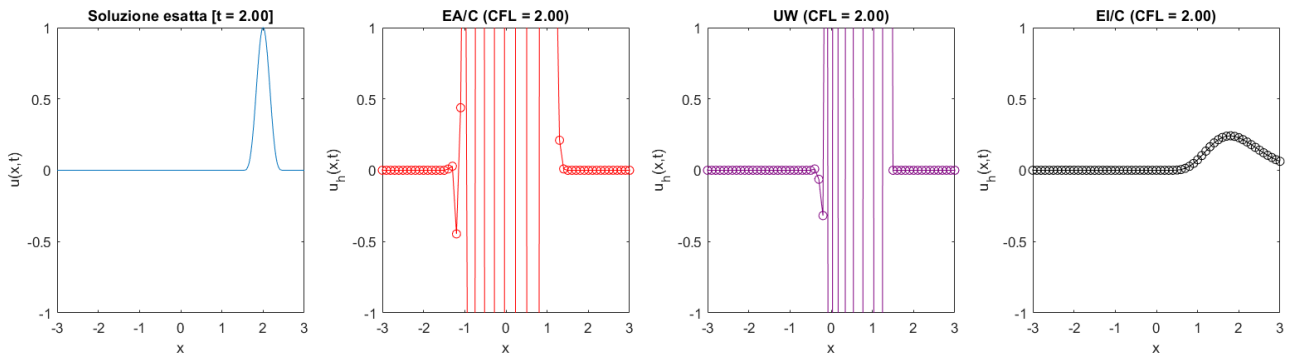


Figura 1: Soluzione esatta vs soluzioni numeriche ottenute all'istante $t = T$ con gli schemi EA/C, UW ed EI/C. Qui $N = 60$ e $K = 10$.

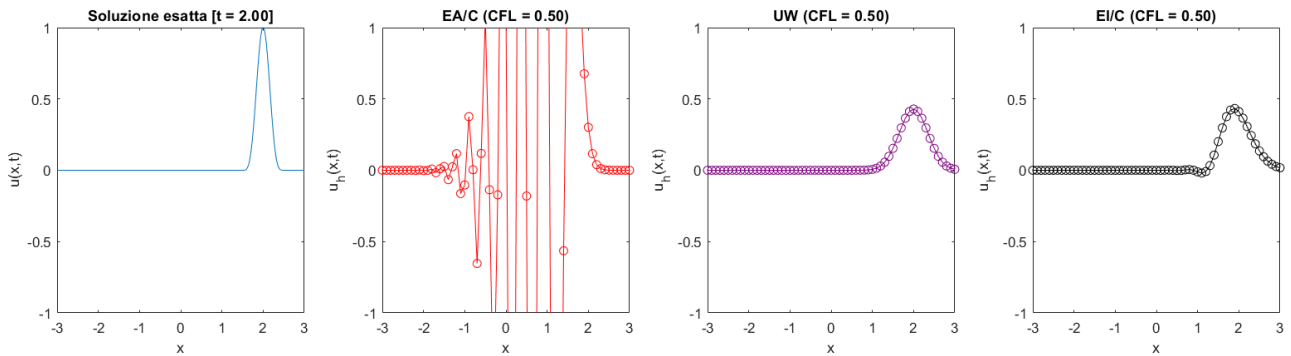


Figura 2: Soluzione esatta vs soluzioni numeriche ottenute all'istante $t = T$ con gli schemi EA/C, UW ed EI/C. Qui $N = 60$ e $K = 40$.

Esercizio 3

1. Denotiamo con $p1$ l'ordine stimato con l'errore definito da e_1 e $p2$ quello stimato con l'errore definito da e_2 . Valutando 4 dimezzamenti a partire da $N = 300$ a $CFL = 0.5$ si ottiene la seguente stima dell'ordine p per lo schema upwind

$$p1 = 0.7338 \quad 0.8468 \quad 0.9175 \quad 0.9572,$$

$$p2 = 0.7461 \quad 0.8520 \quad 0.9193 \quad 0.9577,$$

a conferma del fatto che l'ordine del metodo UW è 1.

Per i dettagli si veda il file `Lab3_Es3.m`.