Laboratorio 1 - 19.04.2025

Esercizio 1

Si consideri il seguente problema di Poisson con condizioni di Dirichlet (non omogenee):

$$\begin{cases} -u'' = f(x), & x \in (0, L)\,, \\ u(0) = u_0, \\ u(L) = u_L, \end{cases} \tag{1}$$

dove $L > 0$, f, u_0 ed u_L sono assegnati.

1.1. Partendo dal template fornito, implementare in Matlab uno script che risolva (1) utilizzando il metodo alle differenze finite centrate per l'approssimazione della derivata seconda u''. Nello specifico, se $\{x_0 < x_1 < \cdots < x_N\} \subset [0, L]$ è una griglia di punti equispaziati ottenuta suddividendo l'intervallo $[0, L]$ in N sottointervalli, si utilizza

$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} \quad \text{per } i = 1, \ldots, N-1.$$

1.2. Siano $L = 1$, $f(x) = 96x^2$, $u_0 = 0$ e $u_L = -1$. Sfruttando il codice al punto precedente, confrontare la soluzione numerica del problema, ottenuta con $N = 40$ sottointervalli, con la soluzione esatta $u_{\text{ex}}(x) = 7x - 8x^4$. A tale scopo si proceda dapprima con un confronto grafico ed, in seguito, con un confronto quantitativo, ottenuto calcolando gli errori

$$e_\infty = \max_{i=0,\ldots,N+1} |\mathrm{u}_i - u_{\text{ex}}(x_i)| \qquad \text{ed} \qquad e_h = \sqrt{h \sum_{i=1}^{N+1} |\mathrm{u}_i - u_{\text{ex}}(x_i)|^2},$$

(norma del massimo) (norma h)

dove $[\mathrm{u}_0, \ldots, \mathrm{u}_N]^\top =: \mathbf{u}$ è il vettore rappresentante la soluzione numerica.

1.3. Si ricalcolino gli errori ai punti precedenti al variare di $N = 50, 100, 200, 400, 800$. Si deduca quindi l'ordine di convergenza del metodo (nelle due norme).

Esercizio 2

Si consideri il seguente problema di Poisson con condizioni miste di Neumann-Dirichlet:

$$\begin{cases} -u'' = f(x), \quad x \in (0, L), \\ u'(0) = \alpha_0, \\ u(L) = u_L. \end{cases} \tag{2}$$

Come per il problema precedente, la soluzione di (2) può essere approssimata numericamente utilizzando il metodo alle differenze finite. Nello specifico, sia $\{x_0 < x_1 < \cdots < x_N\}$ una griglia equispaziata ottenuta suddividendo l'intervallo $[0, L]$ in N sottointervalli di eguale ampiezza. Discretizzando la derivata seconda nei nodi x_i, per $i = 1, \ldots, N-1$, con lo schema centrato presentato nell'esercizio precedente, si ottiene un sistema di $N-1$ equazioni nelle N incognite $\mathrm{u}_0, \ldots, \mathrm{u}_{N-1}$. L'equazione mancante si può ottenere considerando un'opportuna discretizzazione della condizione al contorno $u'(0) = \alpha_0$. Ad esempio:

(i) un'approssimazione upwind del prim'ordine

$$u'(x_0) \approx \frac{u(x_1) - u(x_0)}{h};$$

(ii) un'approssimazione centrata del secondo ordine (con *nodo fantasma* x_{-1})

$$u'(x_0) \approx \frac{u(x_1) - u(x_{-1})}{2h};$$

Partendo dai template forniti, si svolgano i seguenti punti.

2.1. Siano $L = 1$, $f(x) = 4\pi^2 \cos(2\pi x)$, $\alpha_0 = 2$ e $u_L = 1$. Si risolva numericamente (2) con $N = 50$ utilizzando lo schema upwind (i) per l'approssimazione della condizione di Neumann. In seguito, si studi l'ordine di convergenza del metodo facendo variare $N = 50, 100, 200, 400, 800$, monitorando l'andamento dell'errore in norma del massimo ed in norma h. A tale scopo, si consideri che la soluzione esatta del problema è

$$u_{\text{ex}}(x) = \cos(2\pi x) + 2x - 2.$$

2.2. Si ripeta il punto precedente utilizzando l'approssimazione centrata (ii) basata sull'introduzione del nodo fantasma.