Laboratorio 4 - 12.05.2025

Si consideri il seguente problema di trasporto 1D,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -3 < x < 3, \; 0 < t \le 2 \\[2ex] u(-3,t) = 0, \quad 0 < t \le 2 \\[2ex] u(x,0) = \begin{cases} \cos^4(\pi x) & \text{se } -0.5 \le x \le 0.5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \end{cases}$$

la cui soluzione esatta è $u_{\text{ex}}(x,t) = u_0(x-t)$, essendo $u_0(x) := u(x,0)$.

Esercizio 1

1. Si implementino in Matlab gli schemi Lax-Friedrichs (LF) e Lax-Wendroff (LW).

2. Suddividendo l'intervallo in $N = 60$ sottointervalli di uguale ampiezza e scegliendo il numero CFL pari a 2, risolvere il problema proposto con i suddetti schemi e confrontare le soluzioni numeriche con la soluzione esatta ai vari passi temporali.

3. Ripetere il punto precedente con $N = 60$ e il numero CFL pari a 0.5.

4. Si commentino i risultati dei due punti precedenti alla luce dei risultati di stabilità conosciuti.

5. Valutare le proprietà di dissipazione e dispersione rispetto alle equazioni equivalenti del terzo ordine associate a ognuno degli schemi numerici considerati. A tal fine, si rammenti che essendo $c = 1$ ed $f(x,t) \equiv 0$, tali equazioni sono della forma

$$u_t + u_x = \mu u_{xx} + \nu u_{xxx},$$

per opportuni μ e ν.

Esercizio 2

Si considerino le seguenti definizioni dell'errore:

$$e_1 = \max_k \max_n |u_n^k - u(x_n, t_k)|, \qquad e_2 = \max_k \sqrt{h \sum_n (u_n^k - u(x_n, t_k))^2},$$

essendo $u(x_n, t_k)$ la valutazione della soluzione esatta in (x_n, t_k) e $u_n^k \approx u(x_n, t_k)$.

1. Utilizzando il numero CFL pari a 0.5 e considerando 4 dimezzamenti successivi a partire da $N = 300$, si verifichi sperimentalmente l'andamento dell'errore per gli schemi LW e LF.

2. Modificare il profilo iniziale in $\tilde{u}_0 = \cos^2(\pi x)\mathbf{1}_{[-0.5,0.5]}(x)$, essendo $\mathbf{1}_A$ la funzione indicatrice dell'insieme A, quindi ripetere il punto precedente. Cosa succede? Perché?