Spiegazione alternativa delle regole delle quantificatori

È possibile spiegare le regole dei quantificatori della logica classica a partire dalle regole della negazione scritta con formule qualsiasi

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathtt{fr}, \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma}, \neg\mathtt{fr} \vdash \mathbf{\Delta}}\ \neg\text{−S} \qquad\qquad \frac{\mathbf{\Gamma}, \mathtt{fr} \vdash \mathbf{\Delta}}{\mathbf{\Gamma} \vdash \neg\mathtt{fr}, \mathbf{\Delta}}\ \neg\text{−D}$$

e dalle seguenti versioni ristrette delle regole di quantificazione universale ed esistenziale a destra sempre scritte con formule qualsiasi

$$\frac{\mathbf{\Gamma}\vdash\mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]}{\mathbf{\Gamma}\vdash\forall\mathbf{x}\ \mathtt{fr}}\ \forall\text{−D}\ (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\mathbf{\Gamma}, \forall\mathbf{x}\ \mathtt{fr})) \qquad\qquad \frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}], \exists\mathbf{x}\ \mathtt{fr}}{\mathbf{\Gamma} \vdash \exists\mathbf{x}\ \mathtt{fr}}\ \exists\text{−D}$$

ove con $\mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]$ si intende che la variabile $\mathbf{x}$ nella formula $\mathtt{fr}$ è sostituita con il termine $\mathbf{t}$,

per i seguenti motivi

1. la validità delle regole di quantificazione universale ed esistenziale a destra in forma ristretta è più semplice da riconoscere delle corrispondenti versioni generali e delle corrispondenti regole a sinistra;
2. grazie alla validità delle **regole di negazione e delle loro inverse** già dimostrata per proposizione arbitrarie, le *versioni ristrette delle regole di quantificazione universale ed esistenziali* sono *equivalenti a quelle generali* del calcolo;
3. usando le regole di negazione a destra e a sinistra con le **leggi logiche di De Morgan per i quantificatori** per una qualsiasi formula $\mathtt{fr}$

   $$\neg\exists\mathbf{x}\ \mathtt{fr} \quad\leftrightarrow\quad \forall\mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr} \qquad\qquad \neg\forall\mathbf{x}\ \mathtt{fr} \quad\leftrightarrow\quad \exists\mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr}$$

   e la **legge logica della doppia negazione**

   $$\mathtt{fr} \quad\leftrightarrow \neg\neg\mathtt{fr}$$

   giustificheremo le **regole di sinistra della quantificazione universale ed esistenziale** *a partire dalle regole di quantificazione universale ed esistenziale a destra.*

Andiamo ora a mostrare i singoli punti.

1. **Giustificazione della regola ristretta della quantificazione universale a dx.**

   La forma ristretta della regola di quantificazione universale a destra scritta con formule qualsiasi

   $$\frac{\mathbf{\Gamma}\vdash\mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]}{\mathbf{\Gamma}\vdash\forall\mathbf{x}\ \mathtt{fr}}\ \forall\text{−D}\ (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\mathbf{\Gamma}, \forall\mathbf{x}\ \mathtt{fr}))$$

   formalizza semplicemente la formula

   $$\forall\ \mathbf{w}\ (\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]\ ) \quad\rightarrow\quad (\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \forall\mathbf{x}\ \mathtt{fr}\ )$$

   che è una legge logica proprio perchè la *variabile* $\mathbf{w}$ *NON è libera in* $\mathbf{\Gamma}, \forall\mathbf{x}\ \mathtt{fr}$.

   Per comprendere la sua validità logica consideriamo questo esempio

   $$\frac{\mathbf{N}, \neg\mathbf{C} \vdash \mathbf{S}(\mathbf{w}) \ \rightarrow\ \mathbf{B}(\mathbf{w})}{\mathbf{N}, \neg\mathbf{C} \vdash \forall\mathbf{x}\ (\ \mathbf{S}(\mathbf{x}) \ \rightarrow\ \mathbf{B}(\mathbf{x})\ )}\ \forall\text{−D}\ (\mathbf{w} \notin \mathbf{VL}(\mathbf{N}, \neg\mathbf{C}, \forall\mathbf{x}\ (\ \mathbf{S}(\mathbf{x}) \ \rightarrow\ \mathbf{B}(\mathbf{x})\ )))$$

che formalizza

ponendo
N=È notte
B(**x**)= x brilla nel cielo
S(**x**)=x è una stella
C= Il cielo è coperto di nubi

"Dal fatto che,
qualsiasi cosa, se è notte e il cielo non è coperto di nubi allora se è una stella brilla,
segue che
se è notte e il cielo non è coperto di nubi, allora tutte le stelle brillano nel cielo."

Si noti che la regola è *sicura*, ovvero la verità sale e scende nella regola, poichè è una legge logica la formula

$$\forall\, \mathbf{w}\ (\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]\ ) \quad \leftrightarrow \quad (\mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr}\ )$$

Giustificazione della regola ristretta della quantificazione esistenziale a dx

La forma ristretta della regola di quantificazione esistenziale a destra scritta con formule qualsiasi

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]\,,\ \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}}{\mathbf{\Gamma} \vdash\ \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}}\ \exists\text{−D}$$

formalizza la formula

$$(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vee \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}\,) \qquad \rightarrow \qquad (\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}\ )$$

che è una legge logica in quanto è pure una legge logica

$$\exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}\ \vee\ \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]\ \leftrightarrow\ \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}$$

Dunque nella regola la validità logica sale e scende rendendo la regola *sicura* e difatti è una legge logica la formula

$$(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vee \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}\ ) \qquad \leftrightarrow \qquad (\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow\ \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}\ )$$

Di fatto la regola sopra è la correzione in forma sicura della seguente regola NON sicura che rappresenta il modo con cui noi introduciamo la quantificazione esistenziale come conclusione di un ragionamento:

$$\frac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]}{\mathbf{\Gamma} \vdash \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}}\ \exists\text{−D}\mathbf{v}$$

che formalizza l'enunciato

$$(\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]\ ) \qquad \rightarrow \qquad (\ \mathbf{\Gamma}^{\&} \rightarrow \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}\ )$$

che è una legge logica come mostrato dal seguente esempio

$$\frac{\mathbf{A(v)}, \mathbf{P(v)} \vdash \mathbf{S(m, v)}}{\mathbf{A(v)}, \mathbf{P(v)} \vdash \exists \mathbf{x}\ \mathbf{S(x, v)}}\ \exists\text{–D}v$$

che formalizza

ponendo
$\mathbf{A(x)}$=“x è arrivato in stazione”
$\mathbf{P(x)}$=“ le porte del treno x sono aperte”
$\mathbf{S(x, y)}$=“x sale su y.
$\mathbf{m}$=“Marco”
$\mathbf{v}$=“treno per Venezia”

“Assumendo che,
se il treno per Venezia è arrivato in stazione e le sue porte sono aperte allora Marco sale su questo treno
ne segue che
se il treno per Venezia è arrivato in stazione e le sue porte sono aperte allora qualcuno sale su questo treno.”

Chiaramente la regola non è sicura e lo si vede con questo esempio

$$\frac{\mathbf{A(v)}, \mathbf{P(v)} \vdash \exists \mathbf{x}\ \mathbf{S(x, v)}}{\mathbf{A(v)}, \mathbf{P(v)} \vdash \mathbf{S(g, v)}}\ \texttt{inv} - \exists\text{–D}v$$

che formalizza

ponendo
$\mathbf{A(x)}$=“x è arrivato in stazione”
$\mathbf{P(x)}$=“le porte del treno x sono aperte”
$\mathbf{S(x, y)}$=“x sale su y.
$\mathbf{g}$=“il giornalaio della stazione”
$\mathbf{v}$=“il treno per Venezia”

che formalizza l’argomentazione scorretta

“Assumendo che,
se il treno per Venezia è arrivato in stazione e le sue porte sono aperte allora qualcuno sale sul treno per Venezia ”
ne segue che
se il treno per Venezia è arrivato in stazione e le sue porte sono aperte allora il giornalaio sale sul treno per Venezia.”

Tale argomentazione non è corretta in quanto il giornalaio potrebbe benissimo essere al suo posto a vendere giornali!

2. Ora osserviamo che grazie alle regole di negazione e alla legge della doppia negazione possiamo ricavare le regole della quantificazione universale ed esistenziale a destra in forma generale.

Regola di quantificazione universale a destra in forma generale.

La regola di quantificazione universale a destra scritta con formule qualsiasi

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma}\vdash \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]\ ,\ \nabla}{\boldsymbol{\Gamma}\vdash \forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr}\ ,\ \nabla}\ \forall{-}\mathrm{D}\ (\mathbf{w}\notin \mathbf{VL}(\boldsymbol{\Gamma},\forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr},\nabla))$$

si ricava dalla regola

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma}\vdash \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]}{\boldsymbol{\Gamma}\vdash \forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr}}\ \forall{-}\mathrm{D}\ (\mathbf{w}\notin \mathbf{VL}(\boldsymbol{\Gamma},\forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr}))$$

procedendo in tal modo:
supponiamo per semplicità

$$\nabla\ \equiv\ \alpha,\beta$$

allora giustifichiamo il passaggio dalla premessa $\boldsymbol{\Gamma}\vdash \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}],\alpha,\beta$ alla conclusione $\boldsymbol{\Gamma}\vdash \forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr}\ ,\ \alpha,\beta$ come applicazione di una serie di regole valide (e sicure!!!) come segue (si ricordi che le inverse delle regole di negazione sono valide!)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\boldsymbol{\Gamma}\vdash \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]\ ,\ \alpha,\beta}{\boldsymbol{\Gamma}\vdash \alpha,\beta,\ \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]}\ {-}\mathrm{sc}_{\mathbf{dx}}}{\boldsymbol{\Gamma},\neg\alpha\vdash \beta,\ \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]}\ \neg{-}\mathrm{S}}{\boldsymbol{\Gamma},\neg\alpha,\neg\beta\vdash \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]}\ \neg{-}\mathrm{S}}{\boldsymbol{\Gamma},\neg\alpha,\neg\beta\vdash \forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr}}\ \forall{-}\mathrm{D}\ (\mathbf{w}\notin \mathbf{VL}(\boldsymbol{\Gamma},\neg\alpha,\neg\beta,\forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr}))}{\boldsymbol{\Gamma},\neg\alpha\vdash \beta,\ \forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr}}\ \mathrm{inv}{-}\neg{-}\mathrm{S}}{\boldsymbol{\Gamma}\vdash \alpha,\beta,\ \forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr}}\ \mathrm{inv}{-}\neg{-}\mathrm{S}}{\boldsymbol{\Gamma}\vdash \forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr}\ ,\ \alpha,\beta}\ {-}\mathrm{sc}_{\mathbf{dx}}$$

Si osservi inoltre che la condizione sulle variabili per l'applicazione della regola di quantificazione universale a destra operata sopra è soddisfatta in quanto se $\mathbf{w}$ non è libera in $\boldsymbol{\Gamma},\forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr}\ ,\ \alpha,\beta$ non lo è neppure in $\boldsymbol{\Gamma},\neg\alpha,\neg\beta,\forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr}$.

Nel caso ∇ contenga una sola formula o più di due formule si procede analogamente a quanto fatto sopra.

Regola di quantificazione esistenziale a destra in forma generale.

La regola di quantificazione esistenziale a destra scritta con formule qualsiasi

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma}\vdash \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]\ ,\ \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}\ ,\ \nabla}{\boldsymbol{\Gamma}\vdash \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}\ ,\ \nabla}\ \exists{-}\mathrm{D}$$

si ricava dalla regola

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma}\vdash \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]\ ,\ \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}}{\boldsymbol{\Gamma}\vdash \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}}\ \exists{-}\mathrm{D}$$

procedendo come segue:
supponendo per semplicità

$$\nabla\ \equiv\ \alpha,\beta$$

giustifichiamo il passaggio dalla premessa $\mathbf{\Gamma}\vdash \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}], \alpha, \beta$ alla conclusione $\mathbf{\Gamma}\vdash \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}, \alpha, \beta$ come applicazione della seguente serie di regole valide (e sicure!!)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathbf{\Gamma} \vdash \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]\ ,\ \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}, \alpha, \beta}{\mathbf{\Gamma}, \vdash \alpha, \beta,\ \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]\ ,\ \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}}\ -\mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}}{\mathbf{\Gamma}, \neg\alpha \vdash \beta,\ \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]\ ,\ \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}}\ \neg-\mathrm{S}}{\mathbf{\Gamma}, \neg\alpha, \neg\beta \vdash \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]\ ,\ \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}}\ \neg-\mathrm{S}}{\mathbf{\Gamma}, \neg\alpha, \neg\beta \vdash \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}}\ \exists-\mathrm{D}}{\mathbf{\Gamma}, \neg\alpha \vdash \beta,\ \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}}\ \mathrm{inv}-\neg-\mathrm{S}}{\mathbf{\Gamma}\vdash \alpha, \beta, \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}}\ \mathrm{inv}-\neg-\mathrm{S}}{\mathbf{\Gamma}\vdash \exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}, \alpha, \beta}\ -\mathrm{sc}_{\mathrm{dx}}$$

ricordando che le inverse delle regole di negazione sono valide!!

Nel caso ∇ contenga una sola formula o più di due formule si procede analogamente a quanto fatto sopra.

3. **Regola di quantificazione universale a sinistra.**

La regola di quantificazione universale a sinistra scritta con formule qualsiasi

$$\cfrac{\mathbf{\Gamma}, \forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr}\ ,\ \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \nabla}{\mathbf{\Gamma}, \forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr} \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S}$$

si ricava in tal modo *dalla regola di quantificazione esistenziale a destra assieme alle regole di negazione*. Utilizzando la legge logica di De Morgan dei quantificatori

$$\forall \mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr} \quad \leftrightarrow \quad \neg\exists \mathbf{x}\ \mathtt{fr}$$

si ottiene che vale

$$\forall \mathbf{x}\ \neg\neg\mathtt{fr} \quad \leftrightarrow \quad \neg\exists \mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr}$$

e infine

$$\forall \mathbf{x}\ \mathtt{fr} \quad \leftrightarrow \quad \neg\exists \mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr}$$

per la legge della doppia negazione

$$\mathtt{fr} \qquad \leftrightarrow \qquad \neg\neg\mathtt{fr}$$

Dunque la regola di quantificazione universale a sinistra si può equivalentemente riformulare in tal modo

$$\cfrac{\mathbf{\Gamma},\ \neg\exists \mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr}\ ,\ \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \nabla}{\mathbf{\Gamma},\ \neg\exists \mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr} \vdash \nabla}\ \forall-\mathrm{S}$$

e giustificare come risultato dell'applicazione di questa serie di regole valide (e sicure!)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathbf{\Gamma}, \neg\exists \mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr}\ ,\ \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \nabla}{\mathbf{\Gamma},\ \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]\ ,\ \neg\exists \mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr} \vdash \nabla}\ -\mathrm{sc}_{\mathbf{sx}}}{\mathbf{\Gamma},\ \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}] \vdash \exists \mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr}, \nabla}\ \mathrm{inv}-\neg-\mathrm{D}}{\mathbf{\Gamma} \vdash \neg\mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]\ ,\ \exists \mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr}\ ,\ \nabla}\ \neg-\mathrm{D}}{\mathbf{\Gamma} \vdash \exists \mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr}\ ,\ \nabla}\ \exists-\mathrm{D}}{\mathbf{\Gamma},\ \neg\exists \mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr} \vdash \nabla}\ \neg-\mathrm{S}$$

Regola di quantificazione esistenziale a sinistra.

La regola di quantificazione esistenziale a sinistra scritta con formule qualsiasi

$$\frac{\mathbf{\Gamma},\ \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]\vdash\nabla}{\mathbf{\Gamma},\ \exists\mathbf{x}\ \mathtt{fr}\vdash\nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (\mathbf{w}\notin\mathbf{VL}(\mathbf{\Gamma},\exists\mathbf{x}\ \mathtt{fr},\nabla))$$

si ricava in tal modo dalla *regola di quantificazione universale a destra assieme alle regole di negazione*. Utilizzando la legge logica di De Morgan dei quantificatori

$$\exists\mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr} \quad\leftrightarrow\quad \neg\forall\mathbf{x}\ \mathtt{fr}$$

si ottiene che vale

$$\exists\mathbf{x}\ \neg\neg\mathtt{fr} \quad\leftrightarrow\quad \neg\forall\mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr}$$

e infine

$$\exists\mathbf{x}\ \mathtt{fr} \quad\leftrightarrow\quad \neg\forall\mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr}$$

per la legge della doppia negazione

$$\mathtt{fr} \qquad\leftrightarrow\qquad \neg\neg\mathtt{fr}$$

Dunque la nostra regola si può equivalentemente riformulare in tal modo

$$\frac{\mathbf{\Gamma},\ \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{w}]\vdash\nabla}{\mathbf{\Gamma},\ \neg\forall\mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr}\vdash\nabla}\ \exists-\mathrm{S}\ (\mathbf{w}\notin\mathbf{VL}(\mathbf{\Gamma},\ \neg\forall\mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr},\nabla))$$

e giustificare come risultato dell'applicazione di questa serie di regole valide (e sicure!)

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathbf{\Gamma},\ \mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]\vdash\nabla}{\mathbf{\Gamma}\vdash\neg\mathtt{fr}[\mathbf{x}/\mathbf{t}]\ ,\ \nabla}\ \neg-\mathrm{D}}{\mathbf{\Gamma}\vdash\forall\mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr}\ ,\ \nabla}\ \forall-\mathrm{D}(\mathbf{w}\notin\mathbf{VL}(\mathbf{\Gamma},\forall\mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr},\nabla))}{\mathbf{\Gamma},\ \neg\forall\mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr}\vdash\nabla}\ \neg-\mathrm{S}$$

osservando che la condizione sulle variabili relativa all'applicazione della regola di quantificazione universale a destra operata sopra è soddisfatta perchè se $\mathbf{w}$ non è libera in $\mathbf{\Gamma},\neg\forall\mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr},\nabla$ non lo è neanche in $\mathbf{\Gamma},\forall\mathbf{x}\ \neg\mathtt{fr},\nabla$.