la ricorsione

introduzione alla programmazione

il principio della ricorsione

- la ricorsione è un principio molto potente
- definizione *naif:* una funzione ricorsiva è definita in termini di se stessa
- una definizione più rigorosa si lega al concetto di *induzione aritmetica*

esempio

- dato un problema P che deve operare su un input I di cardinali *n*
- ammettiamo di saper risolvere P “in modo diretto “ per *n* piccoli
- ammettiamo di saper dividere P in sottoparti tali per cui, se per ognuna troviamo una soluzione, allora siamo in grado di ottenere una soluzione globale per P

esempio

- allora

- *funzione AR(I)* // n cardinalità
  if n è sufficientemente piccolo
  risolvi P direttamente
  else
  suddividi I
  risolvi ogni sottoparte attraverso la chiamata
  AR(sottoparte(I))
  ricombina le soluzioni
  end

  chiamata ricorsiva

- **idea:** AR chiamata di volta in volta su insiemi più piccoli; alla fine si entrerà nella parte che risolvo direttamente

osservazioni

- la ricorsione è elegante
- la ricorsione non è strettamente necessaria
  esiste sempre un'implementazione iterativa, anche se essa può essere lunga e complessa
- la ricorsione può risultare computazionalmente pesante

induzione aritmetica

cfr EML

- base - definizione/soluzione diretta

- passo induttivo - assunta nota la definizione/soluzione su un numero *n*, la si dimostra/definisce su un numero più grande di *n*

induzione aritmetica a passi

- Se valgono le seguenti clausole:
  - base - la proprietà P è vera sul numero c
  - passo induttivo - per ogni n>c: se P è vera per n, allora P è vera per n+1
- allora P è vera per ogni intero k>=c

induzione aritmetica a passi - dimostrazioni

- se voglio dimostrare (tesi) che tutti gli interi k>=c hanno una proprietà P
- Allora
  - dimostro la base (in modo diretto): c ha la proprietà P
  - passo induttivo: assumo che n abbia la proprietà P e verifico che anche n+1 ce l'abbia

induzione aritmetica a passi - definizioni

- base: definisco la base
- passo: definisco la proprietà su (n+1) in base a n

esempio - il fattoriale

- definizione:
  - $n! = n*(n-1)*(n-2)\ldots 2*1$
  - $0!=1$
- base $0!=1$
- passo per ogni $n>0$, $n! =_{def} n(n-1)!$

esempio - il coefficiente binomiale

$$\binom{n}{k} =_{def} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- il fattoriale può diventare facilmente molto grande (ed eccedere le dimensioni massime del tipo di dato scelto)

- questo anche nel caso in cui il coefficiente binomiale finale sia molto piccolo eg $\binom{n}{n} = 1$

esempio - il coefficiente binomiale

- base $$\binom{n}{n} =_{def} \binom{n}{0} =_{def} 1$$

- passo induttivo $$\binom{n}{k} =_{def} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

induzione e ritorsione

- una funzione ricorsiva dipenderà da un parametro n (numero naturale)

- la definizione della funzione seguirà il principio di induzione

  - definisco la base in modo diretto

  - passo induttivo: definisco la funzione con parametro n in termini delle funzione stessa (con parametro n-1)

funzioni ricorsive - fattoriale

- ```
  int fattoriale_iterativo (int n)
  {
   if (n<0) throw ERROR;
   int aux=1;
   for (int i=1;i<=n;i++)
          aux=aux*i;
   return aux;
  }
  ```

- ```
  int fattoriale_ricorsivo (int n)
  {
    if (n<0) throw ERROR;
    if (n==0) return 1;
    else
       n*fattoriale_ricorsivo(n-1);
  }
  ```

ricorsione in coda

la ricorsione in coda è facile da "srotolare":

fr(3)=3*fr(2)=3*2*fr(1)=3*2*1*fr(0)=3*2*1*1=6

funzioni ricorsive - coefficienti binomiali

- ```
  int cbin (int n, int k)
    return(fattoriale(n)/(fattoriale(k)-fattoriale(n-k));
  ```

- ```
  int cbin_ricorsiva(int n, int k)
  {
    if(k<0 || n<k) throw ERROR;
    if(k==0 || n==k) return 1;
    return(cbin_ricorsiva(n-1,k-1)+cbin_ricorsiva(n-1,k));
  }
  ```

ricorsione e liste

- la ricorsione si applica in modo molto naturale alle liste
- <u>esempio:</u> ricerca per scansione sequenziale. Riformuliamo in modo da mettere in risalto la ricorsione
  - se la lista è vuota non contiene elem -> false
  - se elem è uguale al primo elemento della lista -> true
  - cerco ricorsivamente nei successivi (n-1) elementi

ricorsione e liste

- ```
  bool is_in(list l, T x)
  {
     if (l==NULL) return false;
     if (l->info==x) return true;
     return is_in(l->next, x);
  }
  ```

- analogamente per l’inserimento ordinato e la cancellazione su lista ordinata (per esercizio)
  ```

reverse ricorsiva di una lista

- se vogliamo ribaltare il contenuto di una lista data in input e abbiamo a disposizione una diversa lista in output l’operazione è semplice

- E’ sufficiente inserire in testa alla lista di output tutti gli elementi che incontriamo nella visita della lista di input (possiamo procedere in modo iterativo o ricorsivo, provate!)

- Se invece vogliamo riutilizzare la stessa lista di input un approccio ricorsivo è più semplice

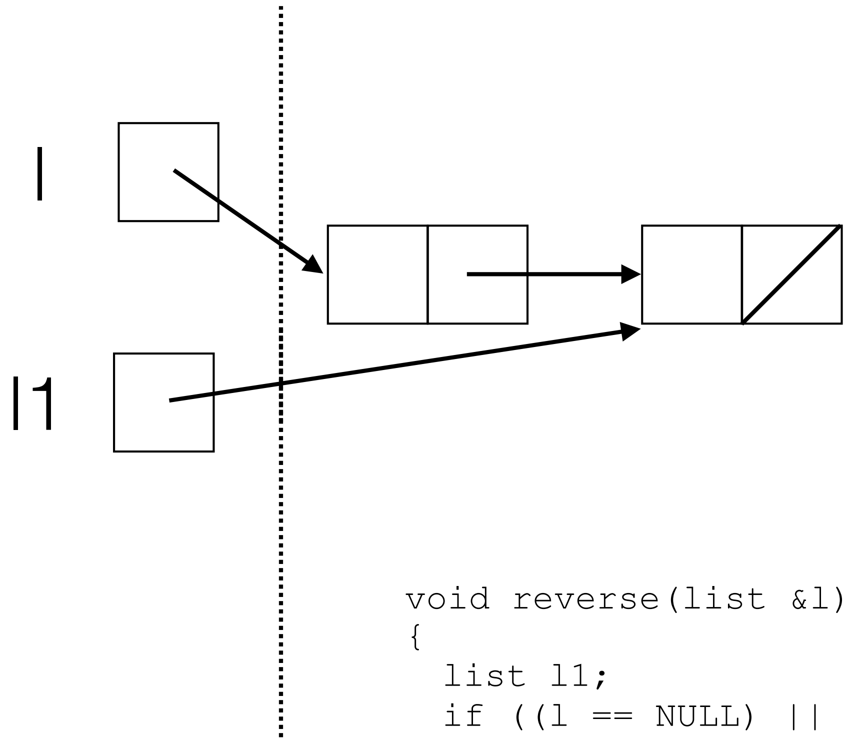
reverse ricorsiva di una lista

```
void reverse(list &l)
{
  list l1;
  if ((l == NULL) || (l->next == NULL)) return;
  l1 = l->next;
  reverse(l1); // capovolgi il resto
  l->next->next = l;
  l->next = NULL;
  l = l1;
}
```

se la lista contiene zero o un elemento resta invariata

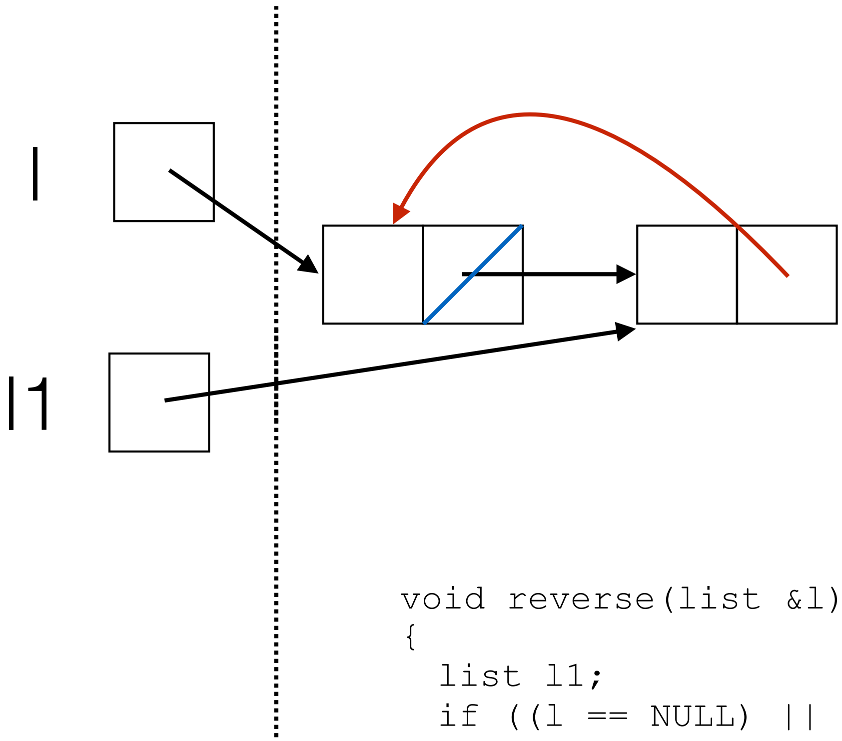
reverse ricorsiva di una lista

caso semplice: un solo passo di ricorsione (lista con 2 elementi)




```
void reverse(list &l)
{
  list l1;
  if ((l == NULL) || (l->next == NULL)) return;
  l1 = l->next;
  reverse(l1); // capovolgi il resto
  l->next->next = l;
  l->next = NULL;
  l = l1;
}
```

reverse ricorsiva di una lista

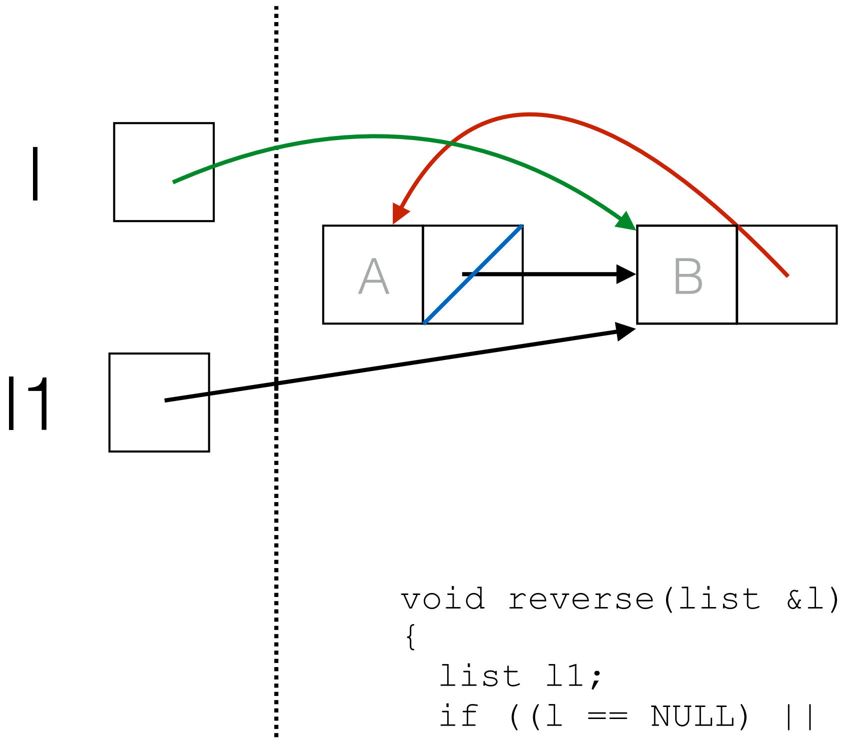


caso semplice: un solo passo di ricorsione (lista con 2 elementi)

```
void reverse(list &l)
{
  list l1;
  if ((l == NULL) || (l->next == NULL)) return;
  l1 = l->next;
  reverse(l1); // capovolgi il resto
  l->next->next = l;
  l->next = NULL;
  l = l1;
}
```

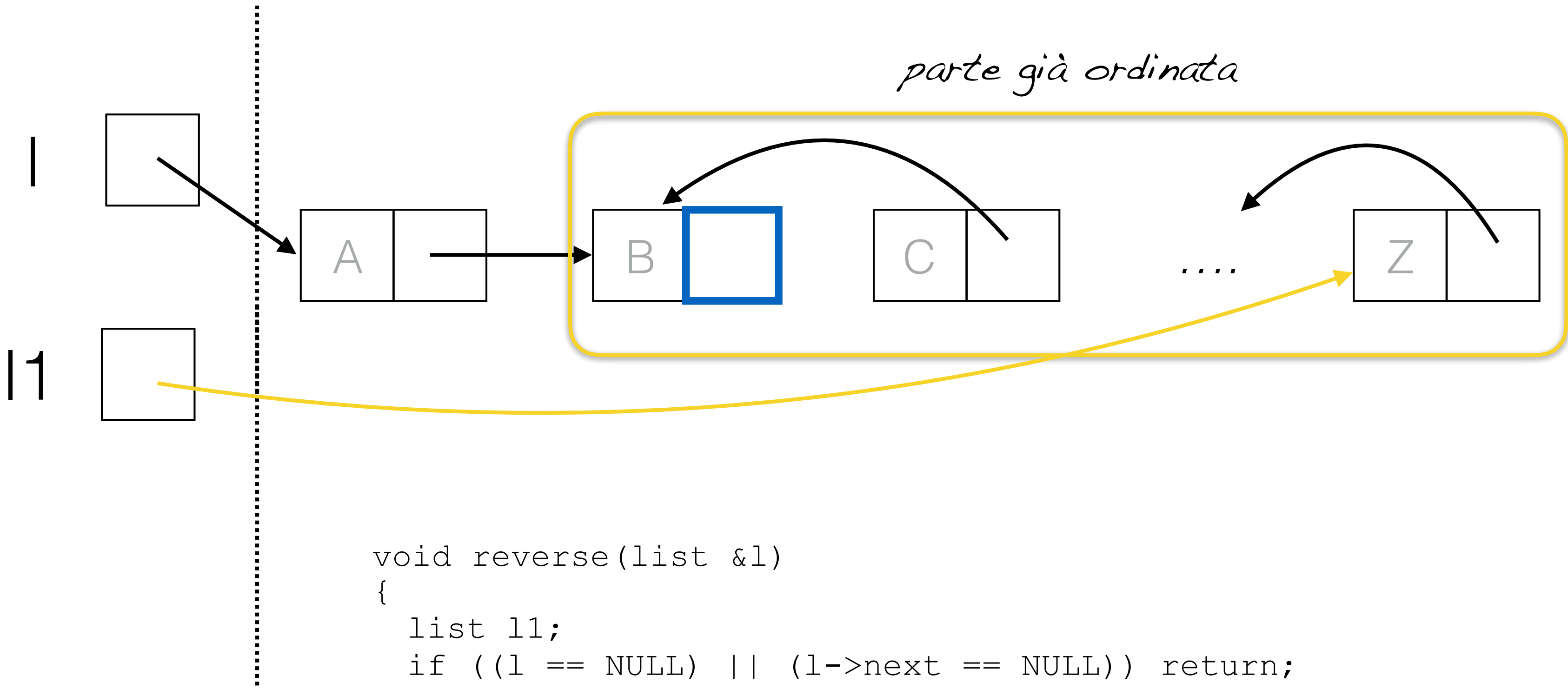
reverse ricorsiva di una lista

caso semplice: un solo passo di ricorsione (lista con 2 elementi)



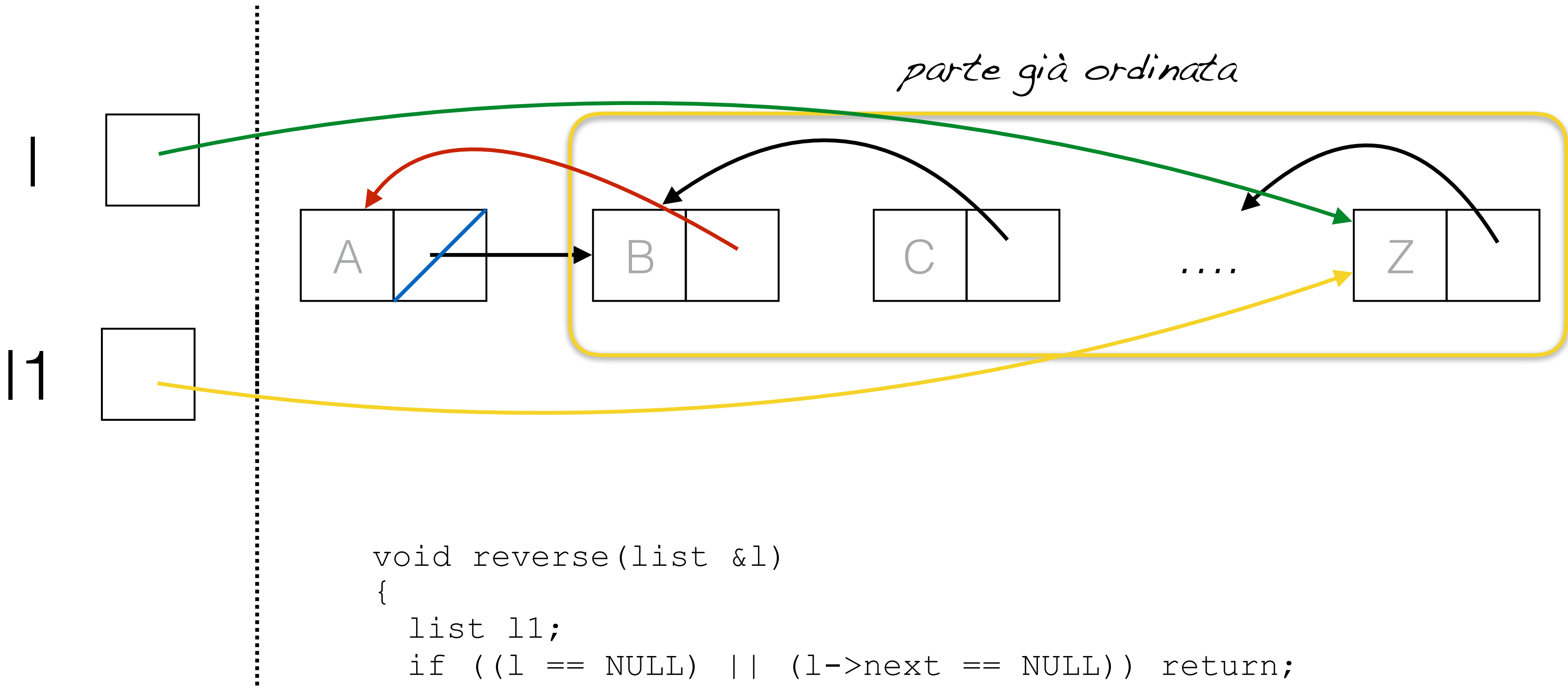

```
void reverse(list &l)
{
  list l1;
  if ((l == NULL) || (l->next == NULL)) return;
  l1 = l->next;
  reverse(l1); // capovolgi il resto
  l->next->next = l;
  l->next = NULL;
  l = l1;
}
```

reverse ricorsiva di una lista




```
void reverse(list &l)
{
  list l1;
  if ((l == NULL) || (l->next == NULL)) return;
  l1 = l->next;
  reverse(l1); // capovolgi il resto
  l->next->next = l;
  l->next = NULL;
  l = l1;
}
```

reverse ricorsiva di una lista




```
void reverse(list &l)
{
  list l1;
  if ((l == NULL) || (l->next == NULL)) return;
  l1 = l->next;
  reverse(l1); // capovolgi il resto
  l->next->next = l;
  l->next = NULL;
  l = l1;
}
```

Tecniche divide-et-impera

- In molti casi le soluzioni ricorsive derivano in modo naturale dall'applicazione del meccanismo *divide-et-impera* (in inglese, *divide and conquer*)

1. Lo abbiamo già visto. Dato il problema P su un input *I* di cardinalità *n*

2. **if** n è sufficientemente piccolo
   risolvi P direttamente
   else
   (a) suddividi I in sottoparti di cardinalità minore
   (b) risolvi P su ogni sottoparte
   (c) ricombina le soluzioni
   end

Tecnica divide-et-impera: esempi notevoli

- Ricerca binaria su sequenza ordinata
- Ordinamento: merge sort

Ricerca binaria e divide-et-impera

```
Algorithm binary_search(s, x)

if s vuota then
    x non trovato
else
    confronta x con l'elemento al centro di s, sia e
    if x uguale a e then
        x trovato
    else if x<e then
            cerca x nella parte di s che precede e
        else
            cerca x nella parte di s che segue e
        endif
endif
```

Ricerca binaria iterativa

Ripasso - Ricerca Binaria Iterativa

```
int binarySearch(const int list[], int length, int item)
{
    int first=0;
    int last=length-1;
    int mid;
    bool found=false;

    while(first<=last && !found)
    {
        mid=(first+last)/2;
        if (list[mid]==item)
            found=true;
        else
            if (list[mid]>item)
                last=mid-1;
            else first=mid+1;
    }
    if (found)
        return mid;
    else
        return -1;
}
```

variabili ausiliarie marcano gli estremi (indici) della porzione di sequenza considerata

Ricerca binaria ricorsiva

Notare l'uso della funzione ausiliaria!

```
bool ric_binaria_aux(const int array[N], int elem, int first, int last )
{
    if (first > last) return false; // non ho trovato
    int mid=(first+last)/2;
   if (elem == array[mid]) {
        return true; // trovato
    }
    else{

        if (elem < array[mid])
            return ric_binaria_aux(array, elem, first, mid-1);
        else
            return ric_binaria_aux(array, elem, mid+1,last);
    }
}

bool ric_binaria(const int array[N],   int elem)
{
    bool b=ric_binaria_aux(array,elem, 0, N-1);
    cout << b << endl;
    return b;
}
```

i parametri di una funzione ausiliaria marcano gli estremi (indici) della porzione di sequenza considerata

Merge sort:
ordinamento con divide-et-impera

- Immaginiamo di avere in input una sequenza di valori da ordinare

- dividiamo la sequenza a metà

- ordiniamo ogni metà

- infine ricombiniamo le parti ordinate (merge)

Merge sort: il passo di fusione

- immaginiamo di avere le seguenti due sequenze ordinate e di volerle fondere
  X=2, 3, 10, 20
  Y=4, 15, 25, 27

  Z = 2, 3, 4, 10, 15, 20, 25, 27

- consideriamo due variabili *posizione* una per X una per Y (indici nel caso degli array, puntatori nel caso di liste)

- confrontiamo gli elementi corrispondenti alle due posizioni, copiamo il minimo dei due nella sequenza di output

Merge sort: il passo di fusione

-

```
i = 0; j = 0; k = 0;
while ( i < p and j < q ) do
 if X[i] < Y [j] then
    Z[k] = X[i]; i + +;
 else
    Z[k] = Y [j]; j + +;
 end if
 k + +;
end while
while i < p do
   Z[k] = X[i]; i + +; k + +;
end while
while j < q do
   Z[k] = Y[j]; j + +; k + +;
end while
```

Merge sort: il passo di fusione

- osserviamo che in realtà possiamo considerare le due sequenze come porzioni diverse dello stesso array o lista

```
function merge(s, inf, med, sup)
   inf inizio prima sequenza
   med inizio seconda sequenza
   sup fine sequenza
```

PSEUDO-CODICE!
sta in piedi indipendentemente dalla scelta di come realizzare le sequenze (array, vector o liste)

Merge sort: la struttura

- la procedura da seguire sfrutta il concetto di ricorsione e si avvale di una funzione ausiliaria

```
function mergesort(sequenza s)
  inf=first(s)
  sup=last(s)
  ms(s,inf, sup)
```

due cursori delimitano
la parte di sequenza
che vogliamo ordinare

PSEUDO-CODICE! sta in piedi indipendentemente dalla scelta di come realizzare le sequenze

Merge sort: la struttura

- ```
  function ms (sequenza s, cursori inf, sup)
     if inf >=sup then
         return;
     else
         med=mezzo(inf, sup)
         ms(s,inf,med)
         ms(s,med,sup)
         merge(s,inf,med,sup)
    end if
  ```

PSEUDO-CODICE!
sta in piedi indipendentemente dalla scelta di come realizzare le sequenze
  ```