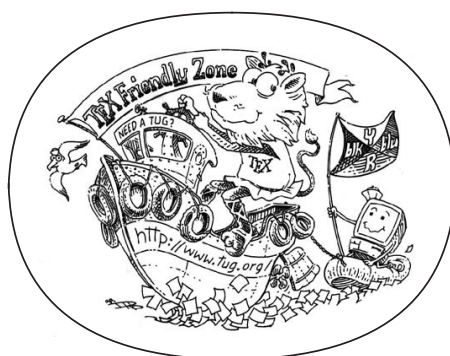


CALCULUS I

RICCARDO CEREGHINO



Elementi di Calculus
Marzo 2019 – classicthesis v4.6

INDICE

I INTRODUZIONE

1	NOTAZIONE	3
1.1	Insiemistica	3
1.2	Simboli logici	3
1.2.1	Intervalli	3
1.3	Insiemi	4
1.3.1	Relazioni tra insiemi	4
1.3.2	Operazioni tra insiemi	4
1.4	Numeri reali	4
1.5	Geometria	6
1.5.1	Circonferenza	6
1.6	Ellisse	6

II FUNZIONI

2	FUNZIONI ELEMENTARI DI VARIABILE REALE	9
2.1	Il concetto di funzione	9
2.2	Operazioni tra funzioni	9
2.2.1	Nomenclatura	9
2.3	Funzioni pari e dispari	10
2.4	Funzioni monotone	10
2.5	Traslazioni, dilatazioni e riflessioni	10
2.5.1	Osservazioni	11
2.6	Simmetrie, traslazioni, compressioni e dilatazioni di grafici.	11
2.7	Funzione composta	12
2.8	Funzione inversa e sue proprietà.	12
2.8.1	Costruire l'inverso di f	12
2.9	Polinomi	12
3	FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE	13
3.1	Potenze	13
3.1.1	Proprietà delle potenze	14
3.2	Esponenziale	14
3.2.1	Proprietà	15
3.3	Logaritmo	15
4	FUNZIONI TRIGONOMETRICHE	17
4.1	Radiani	17
4.2	Le funzioni seno e coseno	17
4.2.1	Simmetria	17
4.2.2	Monotonia	18
4.2.3	Formule trigonometriche	18
4.3	La funzione tangente	19
4.3.1	Simmetria	19

4.3.2	Monotonia	19
4.4	Funzioni trigonometriche inverse	20
4.4.1	Dominio ed immagine	20
4.4.2	Parità	20
4.4.3	Monotonia	20
4.4.4	Relazioni	21
 III FUNZIONI CONTINUE E LIMITI		
5	FUNZIONI CONTINUE	25
5.1	Funzioni continue	25
6	LIMITI	27
6.1	Punto di accumulazione	27
6.2	Limite	27
6.2.1	Limite destro e sinistro	28
6.3	Limiti agli estremi del dominio di definizione	30
6.3.1	Potenze	30
6.3.2	Esponenziali e logaritmi	31
6.3.3	Funzioni trigonometriche ed inverse	31
6.3.4	Forme indeterminate del tipo o/o	32
6.3.5	Forme indeterminate del tipo infinito/infinito o oinfinito	32

Parte I

INTRODUZIONE

NOTAZIONE

Un richiamo alla notazione che verrà utilizzata nel documento.

1.1 INSIEMISTICA

\emptyset	Insieme vuoto
\mathbb{N}	Insieme dei numeri naturali compreso lo 0
\mathbb{Z}	Insieme dei numeri relativi
\mathbb{Q}	Insieme dei numeri razionali
\mathbb{R}	Insieme dei numeri reali

1.2 SIMBOLI LOGICI

	tale che
\Rightarrow	implica
\Leftrightarrow	se e solo se
\forall	per ogni
\exists	esiste
\nexists	non esiste
\in	appartiene
\notin	non appartiene

1.2.1 Intervalli

intervallo limitato chiuso	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} a \leq x \leq b\}$
intervallo limitato aperto	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} a < x < b\}$
intervallo limitato aperto a destra	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} a \leq x < b\}$
intervallo limitato aperto a sinistra	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} a < x \leq b\}$
intervallo illimitato chiuso a sinistra	$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} x \geq a\}$
intervallo illimitato aperto a sinistra	$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} x > a\}$
intervallo illimitato chiuso a destra	$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} x \leq b\}$
intervallo illimitato aperto a destra	$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} x < b\}$
intervallo illimitato	$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

1.3 INSIEMI

1.3.1 Relazioni tra insiemi

Dati due insiemi A e B :

INCLUSIONE: si dice che A è un sottoinsieme di B , o che è contenuto in B :

$$A \subseteq B$$

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

INCLUSIONE PROPRIA:

$$A \subsetneq B$$

$$\begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow x \in B \\ \exists x \in B | x \notin A \end{cases}$$

1.3.2 Operazioni tra insiemi

INTERSEZIONE:

$$A \cap B = \{x \in X | x \in A, x \in B\}$$

UNIONE:

$$A \cup B = \{x \in X | x \in A \text{ o } x \in B\}$$

DIFFERENZA INSIEMISTICA:

$$A \setminus B = \{x \in X | x \in A, x \notin B\}$$

COMPLEMENTARE:

$$A^C = \{x \in X | x \notin A\}$$

PRODOTTO CARTESIANO: dove (x, y) denota la coppia ordinata

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

1.4 NUMERI REALI

Dati $x, y, z \in \mathbb{R}$ sono definite le operazioni di:

- somma $x + y$
- prodotto xy

- relazione d'ordine $x < y$

Che soddisfano le seguenti proprietà:

ASSOCIATIVA.

$$(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$$

$$(xy)z = x(yz) = xyz$$

COMMUTATIVA.

$$x + y = y + x$$

$$xy = yx$$

DISTRIBUTIVA.

$$x(y + z) = xy + xz$$

ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO.

$$x + 0 = 0 + x = x$$

$$1x = x1 = x$$

ESISTENZA DELL'INVERSO.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! x = -x \in \mathbb{R} \mid x + (-x) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 0 \quad \exists! y = \frac{1}{x} \in \mathbb{R} \mid x \frac{1}{x} = 1$$

RELAZIONE D'ORDINE TOTALE. per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ una ed una sola delle seguenti relazioni è vera.

$$\begin{cases} x < y \\ x = y \\ x > y \end{cases}$$

TRANSITIVA.

$$(x < y) \cap (y < z) \Rightarrow (x < z)$$

COMPATIBILITÀ CON LA SOMMA.

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z$$

COMPATIBILITÀ CON IL PRODOTTO.

$$x < y \cap z > 0 \Rightarrow xz < yz$$

$$x < y \cap z < 0 \Rightarrow xz > yz$$

1.5 GEOMETRIA

1.5.1 Circonferenza

Dato il centro di una circonferenza $C = (x_c, y_c)$ Si esprime l'equazione della circonferenza nella forma:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

Oppure:

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = r^2$$

Per cui se $O = (0, 0)$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

1.5.1.1 Forma canonica:

$$\alpha = -2x_c \quad \beta = -2y_c \quad \gamma = x_c^2 + y_c^2 - r^2$$

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = r^2$$

Per ricavare il centro:

$$C = \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2} \right)$$

Per ricavare il raggio:

$$r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}$$

1.6 ELLISSE

Equazione dell'ellisse (con centro nell'origine degli assi)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad a \neq 0, b \neq 0$$

Parte II

FUNZIONI

FUNZIONI ELEMENTARI DI VARIABILE REALE

2.1 IL CONCETTO DI FUNZIONE

Definizione: una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dove $A \subseteq \mathbb{R}$ è una legge che assegna ad ogni $x \in A$ uno ed un solo valore $y = f(x) \in \mathbb{R}$

Nota: in questo caso, i valori di A sono chiamati variabile indipendente (x), mentre \mathbb{R} è la variabile dipendente $y = f(x)$

Nota: inoltre definiamo $A = \text{dom } f$ come il dominio della funzione.

Definizione: Il grafico di f :

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A, y = f(x)\}$$

Definizione: L'immagine di f , $\text{Im } f$:

$$f(A) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in A\}$$

2.2 OPERAZIONI TRA FUNZIONI

Date due funzioni $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ $g : B \rightarrow \mathbb{R}$

SOMMA E DIFFERENZA: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ $\text{dom}(f + g) = A \cap B$

PRODOTTO: $(fg)(x) = f(x)g(x)$ $\text{dom}(fg) = (A \cap B)$

RAPPORTO: $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $\text{dom}(\frac{f}{g}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A, x \in B, g(x) \neq 0\}$

RECIPROCO: $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}$ $\text{dom}(\frac{1}{f}) = \{x \in A \mid f(x) \neq 0\}$

2.2.1 Nomenclatura

Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$

- f è detta **iniettiva** se $\forall y_0 \in \mathbb{R}, f(x) = y_0$ ha al più una soluzione.
- f è detta **surgettiva** se $\forall y_0 \in \mathbb{R}, f(x) = y_0$ ha almeno una soluzione.
- f è detta **bigettiva** se $\forall y_0 \in \mathbb{R}, f(x) = y_0$ ha una ed una sola soluzione, ovvero se la funzione è sia iniettiva che surgettiva.

2.2.1.1 Osservazioni

1. f è surgettiva se e solo se $IMf = \mathbb{R}$
2. f è iniettiva se e solo se $y_0 \in IMf, f(x) = y_0$ ha al più una soluzione.

Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ sono fatti equivalenti:

- f è iniettiva
- $\forall x_1, x_2 \in A \cap x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$
- dati $x_1, x_2 \in A | f(x_1) = f(x_2)$ allora $x_1 = x_2$

2.3 FUNZIONI PARI E DISPARI

Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x), \forall x \in A \quad -x \in A$ f è detta:

$$f(-x) = \begin{cases} f(x) & \text{pari} \\ -f(x) & \text{dispari} \end{cases}$$

2.4 FUNZIONI MONOTONE

Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$

- $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2$ f è detta:

$$\begin{cases} f(x_1) \leq f(x_2) & \text{crescente} \\ f(x_1) \geq f(x_2) & \text{decrescente} \end{cases}$$

- $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2$ f è detta:

$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) & \text{strettamentecrescente} \\ f(x_1) > f(x_2) & \text{strettamentedecrescente} \end{cases}$$

2.5 TRASLAZIONI, DILATAZIONI E RIFLESSIONI

Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$:

TRASLAZIONI: $x_0 > 0, \quad y_0 \in \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x - x_0) \text{ Traslazione verso destra}$$

$$g(x) = f(x + x_0) \text{ Traslazione verso sinistra}$$

$$g(x) = f(x) + y_0 \text{ Traslazione verso l'alto}$$

$$g(x) = f(x) - y_0 \text{ Traslazione verso il basso}$$

DILATAZIONI: $a > 0$

$$g(x) = f\left(\frac{x}{a}\right) \text{ Dilata su asse } x$$

$$g(x) = a \times f(x) \text{ Dilata su asse } y$$

RIFLESSIONI:

$$g(x) = f(-x) \text{ Riflette su asse } y$$

$$g(x) = -f(x) \text{ Riflette su asse } x$$

$$g(x) = -f(-x) \text{ Riflette rispetto l'origine}$$

2.5.1 Osservazioni

Se $f(x)$ è dispari e $0 \in \text{dom } f$

$$f(0) = f(-0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Se $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$$f(x) = x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ volte}}$$

- se n è pari, f è pari
- se n è dispari, f è dispari

2.6 SIMMETRIE, TRASLAZIONI, COMPRESSIONI E DILATAZIONI DI GRAFICI.

Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$:

TRASLAZIONI: $x_0 > 0$, $y_0 \in \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x - x_0) \text{ Traslazione verso destra}$$

$$g(x) = f(x + x_0) \text{ Traslazione verso sinistra}$$

$$g(x) = f(x) + y_0 \text{ Traslazione verso l'alto}$$

$$g(x) = f(x) - y_0 \text{ Traslazione verso il basso}$$

DILATAZIONI: $a > 0$

$$g(x) = f\left(\frac{x}{a}\right) \text{ Dilata su asse } x$$

$$g(x) = a \times f(x) \text{ Dilata su asse } y$$

RIFLESSIONI:

$$g(x) = f(-x) \text{ Riflette su asse } y$$

$$g(x) = -f(x) \text{ Riflette su asse } x$$

$$g(x) = -f(-x) \text{ Riflette rispetto l'origine}$$

2.7 FUNZIONE COMPOSTA

Date due funzioni $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione:

$$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) \quad x \in A$$

Con dominio:

$$\text{dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} | x \in A \cap f(x) \in B\}$$

2.8 FUNZIONE INVERSA E SUE PROPRIETÀ.

Data una funzione iniettiva $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall y \in f = f(A), \exists! x \in A | f(x) = y$$

Da cui si ricava che:

$$x = f^{-1}(y) \quad f^{-1} : B \rightarrow \mathbb{R} \quad B = \text{Im}f$$

2.8.1 Costruire l'inverso di f

1. Determinare $\text{Im}f = B$ e $\text{dom}f^{-1} = B$
2. $y \in B$ determiniamo $x \in A | f(x) = y$
3. $x = f^{-1}(y)$
4. $y = f^{-1}(x) \quad x \rightleftarrows y$

Il grafico di $y = f^{-1}(x)$ è simmetrico rispetto alla bisettrice $x = y$ della funzione $y = f(x)$

2.8.1.1 Osservazioni

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(y)) &= y \quad \forall y \in \text{dom}f^{-1} = \text{Im}f \\ f^{-1}(f(x)) &= x \quad \forall x \in \text{dom}f = \text{Im}f^{-1} \end{aligned}$$

Inoltre f è invertibile se e solo se è iniettiva o surgettiva, da cui:

$$g^{-1} : \text{Im}f \rightarrow \mathbb{R}$$

2.9 POLINOMI

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ Coefficienti $a_n \neq 0$ n è il grado del polinomio

Per cui:

$$n = 1 \quad y = a_0 + a_1x \quad \text{Rette}$$

$$n = 2 \quad y = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad \text{Parabole}$$

FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

3.1 POTENZE

Fissato un esponente $a \in \mathbb{R}$ la funzione potenza è:

$$f(x) = x^a$$

la cui definizione e dominio dipendono dal valore dell'esponente a .

- $a = n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ volte}} \quad \text{dom } f = \mathbb{R} \quad \text{Im } f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } n \text{ dispari} \\ [0, +\infty) & \text{se } n \text{ pari } n \neq 0 \\ \{0\} & n = 1 \end{cases}$$

- $a = -n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{Im } f = \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & n \text{ dispari} \\ (0, +\infty) & n \text{ pari} \end{cases}$$

- $a = \frac{1}{n} \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \quad \text{dom } f = \begin{cases} \mathbb{R} & n \text{ dispari} \\ [0, +\infty) & n \text{ pari} \end{cases} \quad \text{Im } f = \begin{cases} \mathbb{R} & n \text{ dispari} \\ [0, +\infty) & n \text{ pari} \end{cases}$$

- $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1, m \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \quad \text{dom } f = (0, +\infty) \quad \text{Im } f = (0, +\infty)$$

- $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^a = \begin{cases} \sup\{x^q | q \in \mathbb{Q}, q \leq a\} & x \geq 1 \\ \inf\{x^q | q \in \mathbb{Q}, q \leq a\} & 0 < x < 1 \end{cases} \quad \text{dom } f = (0, +\infty) \quad \text{Im } f = (0, +\infty)$$

Osserviamo che:

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 1$
- se n pari f è pari
- se n dispari f è dispari

3.1.1 Proprietà delle potenze

- $x^{n+m} = x^n x^m$
- $(x^n)^m = x^{nm}$

OSSERVAZIONI

$$f(x) = x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$0^0 = 1$$

3.1.1.1 Dimostrazioni

$$x^{n+m} = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n+m \text{ volte}} = \underbrace{(x \times \cdots \times x)}_{n \text{ volte}} \times \underbrace{x \times \cdots \times x}_{m \text{ volte}} = x^{n+m}$$

$$(x^n)^m = \underbrace{x^n \times \cdots \times x^n}_{m \text{ volte}}$$

$$x^n = x^{n+0} = x^n x^0 \quad x \neq 0$$

$$x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

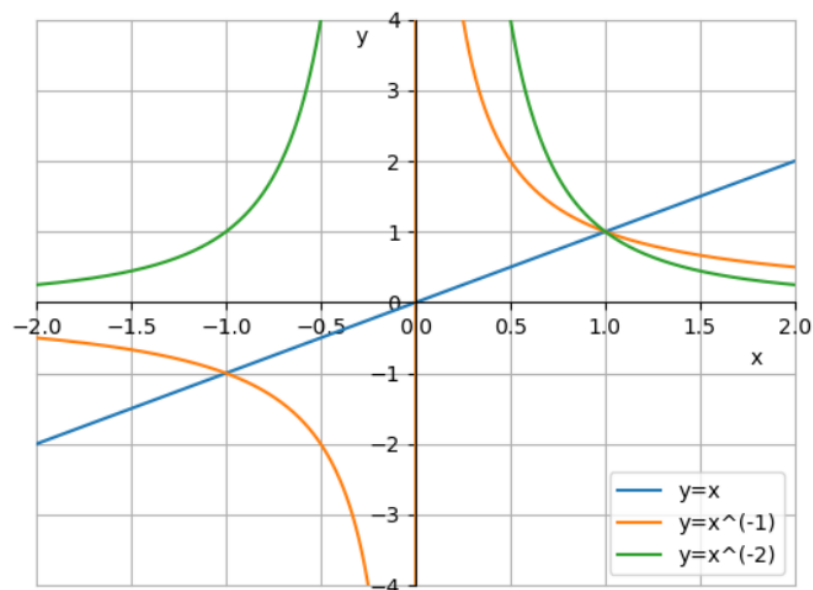


Figura 3.1: Grafici di funzioni di potenze.

3.2 ESPONENZIALE

Fissata la base $a > 0$ con $a \neq 1$, la funzione esponenziale è

$$f(x) = a^x \quad \text{dom } f = \mathbb{R} \quad \text{Im } f = (0, +\infty)$$

Se si sceglie come base il numero di Nepero $e = 2.71828 \dots > 1$, la funzione esponenziale si denota:

$$f(x) = e^x = \exp x$$

3.2.1 Proprietà

1. se $a > 1$, allora la funzione a^x è strettamente crescente
2. se $0 < a < 1$, allora la funzione a^x è strettamente decrescente
3. se $0 < a < b$ con $a, b \neq 1$

$$\begin{cases} a^x < b^x & x > 0 \\ a^x > b^x & x < 0 \end{cases}$$

4. valgono le seguenti proprietà:

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} a^{x_2} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \quad x \in \mathbb{R}$
- $(a^x)^b = a^{bx} \quad x, b \in \mathbb{R}$

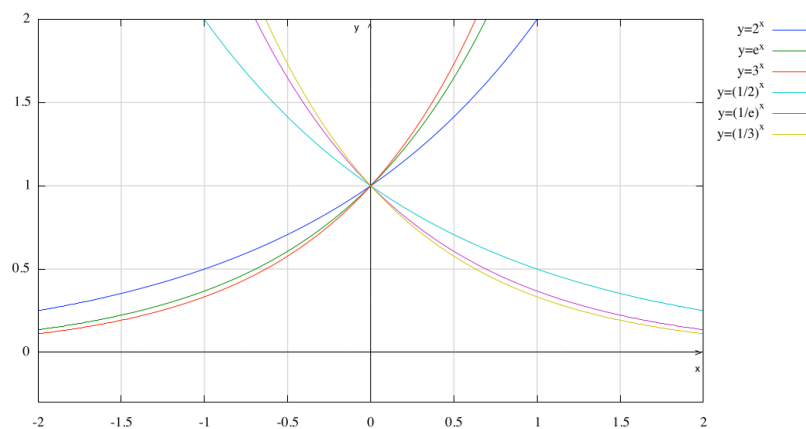


Figura 3.2: Grafici di funzioni esponenziali.

3.3 LOGARITMO

Fissata la base $a > 0$ con $a \neq 1$, la funzione logaritmo

$$f(x) = \log_a x \quad \text{dom } f = (0, +\infty) \quad \text{Im } f = \mathbb{R}$$

è definita come la funzione inversa della funzione esponenziale a^x . Se si sceglie come base il numero di Nepero e , il logaritmo si denota:

$$f(x) = \log_e = \log x = \ln x$$

1. se $a > 1$, allora la funzione $\log_a x$ è strettamente crescente
2. se $0 < a < 1$, allora la funzione $\log_a x$ è strettamente decrescente
3. se $0 < a < b$ con $a, b \neq 1$

$$\begin{cases} \log_a x > \log_b x & \text{se } x > 1 \\ \log_a x < \log_b x & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

4. valgono le seguenti proprietà:

- $\log_a a^x = x \quad x > 1$
- $a^{\log_a x} = x \quad x > 0$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \quad x_1, x_2 > 0$
- $\log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2 \quad x_1, x_2 > 0$
- $\log_a x^b = b \log_a x \quad x > 0, b \in \mathbb{R}$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a} \quad x > 0, b > 0, b \neq 1$
- $a^x = e^{(\ln a)x} \quad x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$

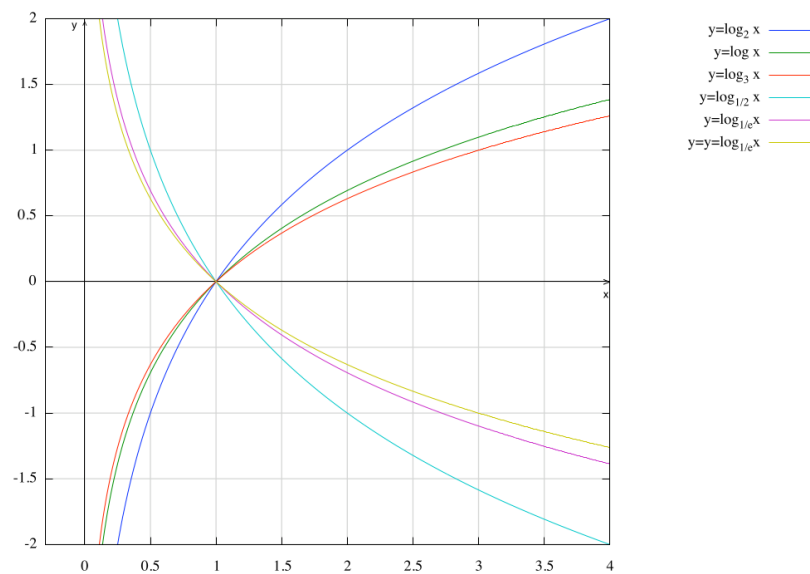


Figura 3.3: Grafici di funzioni logaritmiche.

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

4.1 RADIANTI

Sia γ una circonferenza di raggio 1 (detta circonferenza goniometrica) il cui centro O è anche l'origine di un sistema di assi cartesiani e sia A il punto $(1, 0)$. Partendo da A percorriamo la circonferenza in senso antiorario oppure in senso orario. Sia x un numero reale, denotiamo con P_x il punto su γ che si ottiene percorrendo la circonferenza a partire dal punto A per un arco di lunghezza $|x|$, in senso antiorario se $x \geq 0$, oppure in senso orario se $x < 0$. Il punto P_x individua un angolo nel piano avente vertice O e delimitato dalle semirette nel piano uscenti da O e passanti per A e per P_x . Il numero reale x rappresenta la misura dell'angolo in radianti.

La relazione tra radianti e gradi è data da:

$$\frac{\gamma_{\text{radianti}}}{2\pi} = \frac{\gamma_{\text{gradi}}}{360}$$

Osserviamo che l'incremento della lunghezza x di 2π corrisponde a compiere un intero giro sulla circonferenza in senso antiorario ritornando al punto P_x (così come decrementare di 2π la lunghezza x). Quindi si ha:

$$P_{x \pm k2\pi} = P_x \quad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$$

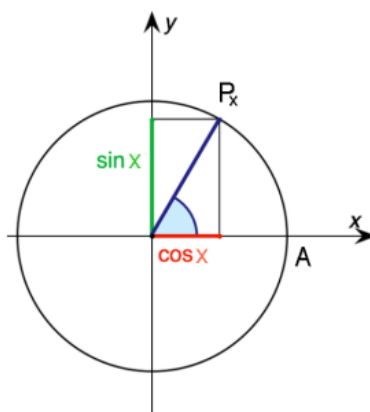


Figura 4.1: Circonferenza goniometrica

4.2 LE FUNZIONI SENO E COSENO

Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta periodica di periodo T , $T > 0$ se:

$$f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La caratteristica fondamentale delle funzioni periodiche è che i suoi valori si ripetono dopo intervalli di ampiezza T .

4.2.1 Simmetria

Indichiamo con $\cos x$ e con $\sin x$ rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto P_x . Le funzioni $y = \cos x$ e $y = \sin x$ sono definite su \mathbb{R} a

valori nell'intervallo $[-1, 1]$, sono periodiche di minimo periodo 2π e soddisfano la relazione:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

4.2.2 Monotonia

Per la periodicità di seno e coseno ci basta studiarne le proprietà nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Dalle definizioni segue subito che la funzione seno è dispari e la funzione coseno è pari; inoltre la funzione coseno è strettamente decrescente in $[0, \pi]$ e strettamente crescente in $[\pi, 2\pi]$. La funzione seno è strettamente crescente in $[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ e strettamente decrescente in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$.

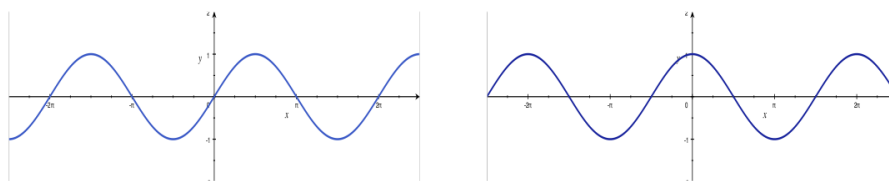


Figura 4.2: Grafico delle funzioni: seno e coseno

4.2.3 Formule trigonometriche

4.2.3.1 Formule di addizione e sottrazione

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

4.2.3.2 Formule di duplicazione

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$$

4.2.3.3 Formule di potenza

$$(\sin x)^2 = \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$(\cos x)^2 = \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

4.2.3.4 Formule di bisezione

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad 0 < x \leq 2\pi$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \quad -\pi < x \leq \pi$$

4.2.3.5 Formule di prostaferesi

$$\sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x \quad \sin(x + \pi) = -\sin x$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

4.3 LA FUNZIONE TANGENTE

La funzione tangente è:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Definita nei punti di \mathbb{R} diversi da $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e, come vedremo in seguito, ha immagine \mathbb{R} . La funzione tangente è periodica per: $\tan(x) = \tan(x + k\pi)$ per $k \in \mathbb{Z}$ cioè $\tan(x)$ è periodica di minimo periodo $T = \pi$.

Nella [Figura 4.3](#) è evidenziata la tangente nel punto $(A, Q_x = \tan(x))$.

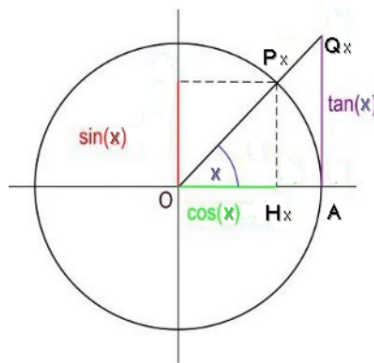


Figura 4.3: Tangente.

4.3.1 Simmetria

Dalle proprietà di simmetria delle funzioni seno e coseno, si deduce che la funzione tangente è dispari: il rapporto di una funzione pari e di una funzione dispari è dispari.

4.3.2 Monotonia

La funzione tangente è strettamente crescente in ogni intervallo $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$

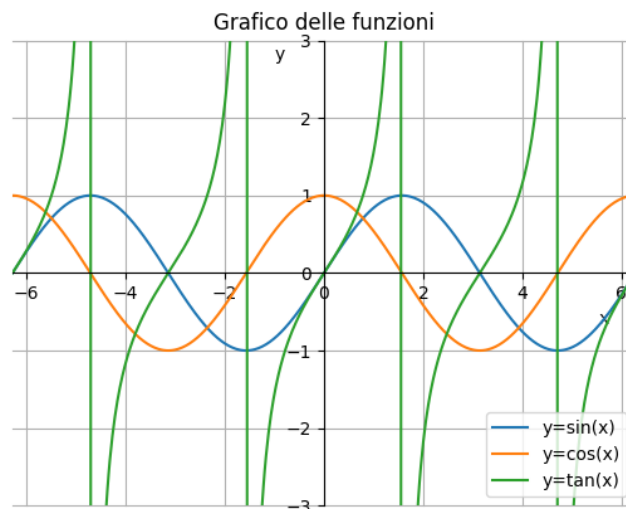


Figura 4.4: Funzioni trigonometriche

4.4 FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

Le funzioni trigonometriche inverse sono definite come, il dominio della funzione di partenza è stato ristretto per permettere l'inversione della funzione.

$$\arcsin x = f^{-1}(x) \quad f(x) = \sin(x) \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos x = f^{-1}(x) \quad f(x) = \cos(x) \quad x \in [0, \pi]$$

$$\arctan x = f^{-1}(x) \quad f(x) = \tan(x) \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

4.4.1 Dominio ed immagine

$$\text{dom } \arcsin x = [-1, 1] \quad \text{dom } \arccos x = [-1, 1] \quad \text{dom } \arctan x = \mathbb{R}$$

$$\text{Im } \arcsin x = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{Im } \arccos x = [0, \pi], \quad \text{Im } \arctan x = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

4.4.2 Parità

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$\arctan(-x) = -\arctan x$$

4.4.3 Monotonia

- la funzione $\arcsin x$ è strettamente crescente

- la funzione $\arccos x$ è strettamente decrescente
- la funzione $\arctan x$ è strettamente crescente

4.4.4 Relazioni

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$$

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$$

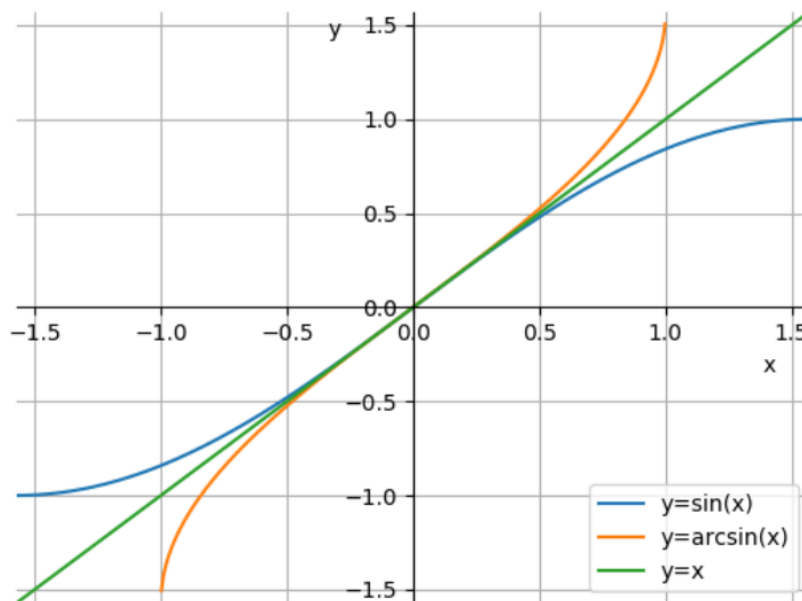


Figura 4.5: Arcoseno.

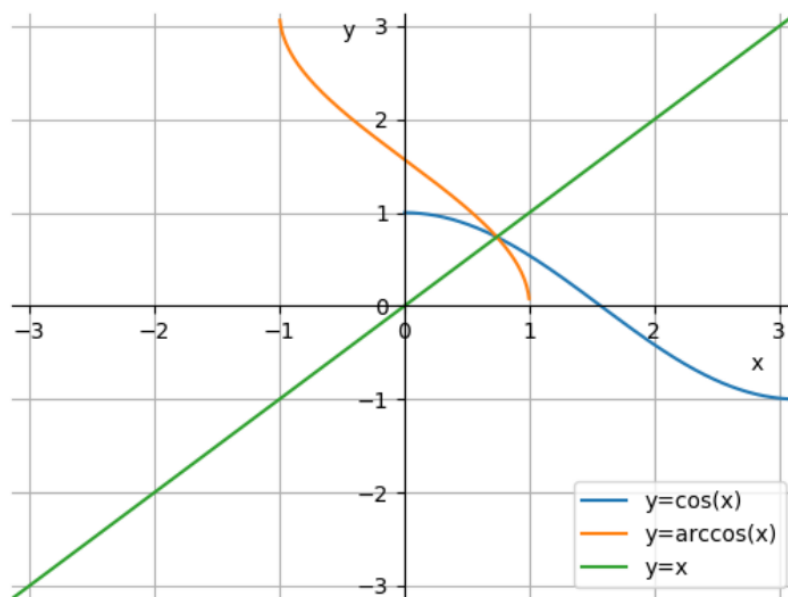


Figura 4.6: Arcocoseno.

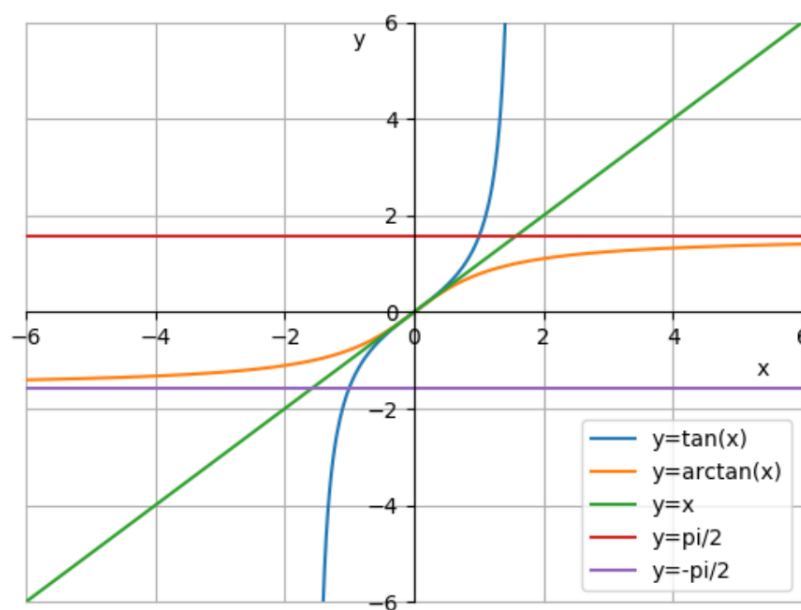


Figura 4.7: Arcotangente.

Parte III

FUNZIONI CONTINUE E LIMITI

FUNZIONI CONTINUE

5.1 FUNZIONI CONTINUE

Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$, ed un punto $x_0 \in A$, la funzione è detta continua in x_0 se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon \quad \forall x \in A \cap x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

La funzione è detta continua se è continua in x_0 per ogni $x_0 \in A$.

Teorema 5.1 (Continuità funzioni elementari)

Le funzioni potenza x^a , esponenziali a^x , logaritmo $\log_a x$, trigonometriche e trigonometriche inverse, sono continue.

Teorema 5.2 (Algebra delle funzioni continue)

Date due funzioni $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x), y = g(x)$, continue, allora:

1. *la somma $f(x) + g(x)$ è una funzione continua;*
2. *il prodotto $f(x)g(x)$ è una funzione continua;*
3. *il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ è una funzione continua sul suo dominio $x \in A | g(x) \neq 0$*

Teorema 5.3 (Continuità funzione composta)

Date due funzioni continue $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ allora la funzione composta:

$$g \circ f : x \in A | f(x) \in B \rightarrow \mathbb{R} \quad y = g(f(x))$$

è continua.

Teorema 5.4 (Continuità funzioni inverse)

Data una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$, tale che:

1. *f è iniettiva;*
2. *f è continua;*
3. *il dominio di I è un intervallo;*

allora, posto $B = \text{Im } f$, la funzione inversa $f^{-1} : B \rightarrow \mathbb{R}$ è continua.

LIMITI

6.1 PUNTO DI ACCUMULAZIONE

Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ e:

1. un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è detto punto di accumulazione per A se per ogni $\delta > 0$ esiste $x \in A$ tale che:

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \quad x \neq x_0$$

2. $+\infty$ è detto punto di accumulazione per A se per ogni $R > 0$ esiste $x \in A$ tale che $x > R$
3. $-\infty$ è detto punto di accumulazione per A se per ogni $R > 0$ esiste $x \in A$ tale che $x < -R$

6.2 LIMITE

Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, un punto di accumulazione $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ per A ed $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, si scrive

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

Si distinguono i casi:

1. $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$: se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon \quad \forall x \in A, x \neq x_0 \cap x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

2. $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell = \pm\infty$: se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\begin{cases} f(x) > M & \text{se } \ell = +\infty \\ f(x) < -M & \text{se } \ell = -\infty \end{cases} \quad \forall x \in A, x \neq x_0 \cap x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

3. $x_0 = \pm\infty$ e $\ell \in \mathbb{R}$: se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che:

$$\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon \quad \forall x \in A \cap \begin{cases} x > R & \text{se } x_0 = +\infty \\ x < -R & \text{se } x_0 = -\infty \end{cases}$$

4. $x_0 = \pm\infty$ e $\ell = \pm\infty$: se per ogni $M > 0$ esiste $R > 0$ tale che:

$$\begin{cases} f(x) > M & \text{se } \ell = +\infty \\ f(x) < -M & \text{se } \ell = -\infty \end{cases} \quad \forall x \in A \cap \begin{cases} x > R & \text{se } x_0 = +\infty \\ x < -R & \text{se } x_0 = -\infty \end{cases}$$

In tal caso, si dice che esiste finito il limite di f per x che tende a x_0 e vale ℓ oppure che $f(x)$ tende ad ℓ per x che tende a x_0 .

Proposizione 6.1 (Continuità dei limiti)

Data $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ed $x_0 \in A$ punto di accumulazione per A , f è continua in x_0 se e solo se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

6.2.1 Limite destro e sinistro

Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ed un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ per A tale che per ogni $\delta > 0$

$$A \cap (-\delta, x_0) \neq \emptyset \quad \text{e} \quad A \cap (x_0, \delta) \neq \emptyset$$

si scrive:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} & \text{limite destro} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R} & \text{limite sinistro} \end{cases}$$

Se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\begin{cases} \ell_1 - \epsilon < f(x) < \ell_1 + \epsilon \\ \ell_2 - \epsilon < f(x) < \ell_2 + \epsilon \end{cases} \quad \forall x \in A \cap \begin{cases} x_0 < x < x_0 + \delta & \text{limite destro} \\ x_0 - \delta < x < x_0 & \text{limite sinistro} \end{cases}$$

Analoghe definizioni valgono se $\ell_{1,2} = \pm\infty$

Proposizione 6.2

Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $\delta > 0$

$$A \cap (-\delta, x_0) \neq \emptyset \quad \text{e} \quad A \cap (x_0, \delta) \neq \emptyset$$

Allora x_0 è un punto di accumulazione per A e:

$$\text{esiste } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \text{esistono } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell \end{cases}$$

Teorema 6.1 (Algebra dei limiti)

Date due funzioni $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ed un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per A , se esitono:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

allora:

SOMMA:

	$l_2 \in \mathbb{R}$	$l_2 = +\infty$	$l_2 = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) =$	$l_1 \in \mathbb{R}$	$l_1 + l_2$	$+\infty$
	$l_1 = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$
	$l_1 = -\infty$	$-\infty$	$f.i.$

Dove *f.i.* = forma indeterminata $+\infty - \infty$

PRODOTTO:

		$l_2 < 0$	$l_2 = 0$	$l_2 > 0$	$l_2 = +\infty$	$l_2 = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) =$	$l_1 < 0$	$l_1 l_2$	0	$l_1 l_2$	$-\infty$	$+\infty$
	$l_1 = 0$	0	0	0	<i>f.i.</i>	<i>f.i.</i>
	$l_1 > 0$	$l_1 l_2$	0	$l_1 l_2$	$+\infty$	$-\infty$
	$l_1 = +\infty$	$-\infty$	<i>f.i.</i>	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	$l_1 = -\infty$	$+\infty$	<i>f.i.</i>	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Dove *f.i.* = forma indeterminata 0∞

RAPPORTO:

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} =$		$l_2 < 0$	$l_2 = 0^\pm$	$l_2 > 0$	$l_2 = +\infty$	$l_2 = -\infty$
	$l_1 < 0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\mp \infty$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0	0
	$l_1 = 0$	0	$f.i.$	0	0	0
	$l_1 > 0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\pm \infty$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0	0
	$l_1 = +\infty$	$-\infty$	$\pm \infty$	$+\infty$	$f.i.$	$f.i.$
	$l_1 = -\infty$	$+\infty$	$\mp \infty$	$-\infty$	$f.i.$	$f.i.$

Dove *f.i.* = forma indeterminata $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ e la notazione $l_2 = 0^\pm$ significa che:

1. esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

2. esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$

$$\begin{cases} g(x) > 0 & l_2 = 0^+ \\ g(x) < 0 & l_2 = 0^- \end{cases}$$

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ (analoga definizione se $x_0 = \pm\infty$).

Teorema 6.2 (Limite funzione composta.)

Date due funzioni $f : A \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$ e $g : B \rightarrow \mathbb{R}, z = g(y)$, tali che:

1. per ogni $x \in A$, allora $f(x) \in B$,
2. il punto x_0 è di accumulazione per A ed esiste:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

3. il punto y_0 è di accumulazione per B ed esiste:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

Allora esiste:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \ell$$

NOTA: Le condizioni del teorema non sono sufficienti per assicurare l'esistenza del limite $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \ell$. Occorre aggiungere delle ipotesi tecniche, che però sono sempre verificate negli esercizi. Ad esempio, è sufficiente richiedere che una delle seguenti tre condizioni sia soddisfatta:

1. il punto y_0 non appartiene a $\text{dom } g$;
2. la funzione g è continua in y_0 ;
3. esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \neq y_0$ per ogni $x \in A, x \neq x_0$ e $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$.

6.3 LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO DI DEFINIZIONE**6.3.1 Potenze**

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^b = +\infty$	$b > 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^b = 0$	$b < 0$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$	$n \in \mathbb{N}, n \text{ pari}$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$	$n \in \mathbb{N}, n \text{ dispari}$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{-n} = 0$	$n \in \mathbb{N}, n \geq 1$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$	$n \in \mathbb{N}, n \text{ dispari}$

6.3.2 *Esponenziali e logaritmi*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$a > 1$$

$$0 < a < 1$$

$$a > 1$$

$$0 < a < 1$$

$$a > 1$$

$$0 < a < 1$$

$$a > 1$$

$$0 < a < 1$$

6.3.3 *Funzioni trigonometriche ed inverse*

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tan x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

6.3.4 *Forme indeterminate del tipo o/o*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^b - 1}{x} = b \quad b \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad a > 0$$

6.3.5 *Forme indeterminate del tipo infinito/infinito o oinfinito*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty \quad a > 1, b > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{\log_a x} = +\infty \quad a > 1, b > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^b a^x = 0 \quad a > 1, b > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^b \log_a x = 0 \quad a, b > 0, a \neq 1$$