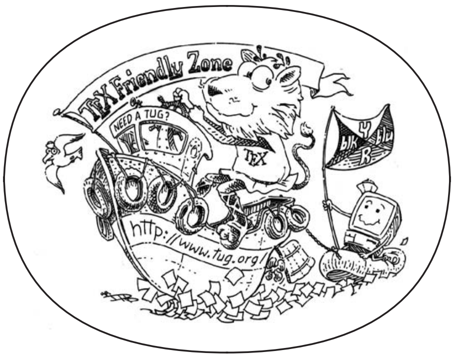
CALCULUS I

RICCARDO CEREGHINO



Elementi di Calculus

Marzo 2019 – classicthesis v4.6

INDICE

Parte I

INTRODUZIONE

1 NOTAZIONE

Un richiamo alla notazione che verrà utilizzata nel documento.

1.1 INSIEMISTICA

$\emptyset$	Insieme vuoto
$\mathbb{N}$	Insieme dei numeri naturali compreso lo 0
$\mathbb{Z}$	Insieme dei numeri relativi
$\mathbb{Q}$	Insieme dei numeri razionali
$\mathbb{R}$	Insieme dei numeri reali

1.2 SIMBOLI LOGICI

$\mid$	tale che
$\Rightarrow$	implica
$\Leftrightarrow$	se e solo se
$\forall$	per ogni
$\exists$	esiste
$\nexists$	non esiste
$\in$	appartiene
$\notin$	non appartiene

1.2.1 *Intervalli*

intervallo limitato chiuso	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \vert a \leq x \leq b\}$
intervallo limitato aperto	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \vert a < x < b\}$
intervallo limitato aperto a destra	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \vert a \leq x < b\}$
intervallo limitato aperto a sinistra	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \vert a < x \leq b\}$
intervallo illimitato chiuso a sinistra	$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \vert x \geq a\}$
intervallo illimitato aperto a sinistra	$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \vert x > a\}$
intervallo illimitato chiuso a destra	$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \vert x \leq b\}$
intervallo illimitato aperto a destra	$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \vert x < b\}$
intervallo illimitato	$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

1.3 INSIEMI

1.3.1 *Relazioni tra insiemi*

Dati due insiemi A e B:

INCLUSIONE: si dice che A è un sottoinsieme di B, o che è contenuto in B:

$$A \subseteq B$$

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

INCLUSIONE PROPRIA:

$$A \underset{\neq}{\subseteq} B$$

$$\begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow x \in B \\ \exists x \in B | x \notin A \end{cases}$$

1.3.2 *Operazioni tra insiemi*

INTERSEZIONE:

$$A \cap B = \{x \in X | x \in A, x \in B\}$$

UNIONE:

$$A \cup B = \{x \in X | x \in A or x \in B\}$$

DIFFERENZA INSIEMISTICA:

$$A \diagdown B = \{x \in X | x \in A, x \notin B\}$$

COMPLEMENTARE:

$$A^C = \{x \in X | x \notin A\}$$

PRODOTTO CARTESIANO: dove (x, y) denota la coppia ordinata

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

1.4 NUMERI REALI

Dati $x, y, z \in \mathbb{R}$ sono definite le operazioni di:

- somma $x + y$
- prodotto xy

- relazione d'ordine $x < y$

Che soddisfano le seguenti proprietà:

ASSOCIATIVA.

$$(x+y)+z = x+(y+z) = x+y+z$$

$$(xy)z = x(yz) = xyz$$

COMMUTATIVA.

$$x+y = y+x$$

$$xy = yx$$

DISTRIBUTIVA.

$$x(y+z) = xy+xz$$

ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO.

$$x+0 = 0+x = x$$

$$1x = x1 = x$$

ESISTENZA DELL'INVERSO.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! x = -x \in \mathbb{R} | x+(-x) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 0 \quad \exists! y = \frac{1}{x} \in \mathbb{R} | x\frac{1}{x} = 1$$

RELAZIONE D'ORDINE TOTALE. per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ una ed una sola delle seguenti relazioni è vera.

$$\begin{cases} x < y \\ x = y \\ x > y \end{cases}$$

TRANSITIVA.

$$(x < y) \cap (y < z) \Rightarrow (x < z)$$

COMPATIBILITÀ CON LA SOMMA.

$$x < y \Rightarrow x+z < y+z$$

COMPATIBILITÀ CON IL PRODOTTO.

$$x < y \cap z > 0 \Rightarrow xz < yz$$

$$x < y \cap z < 0 \Rightarrow xz > yz$$

1.5 GEOMETRIA

1.5.1 *Circonferenza*

Dato il centro di una circonferenza $C = (x_c, y_c)$ Si esprime l'equazione della circonferenza nella forma:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

Oppure:

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = r^2$$

Per cui se $O = (0, 0)$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

1.5.1.1 *Forma canonica:*

$$\alpha = -2x_c \quad \beta = -2y_c \quad \gamma = x_c^2 + y_c^2 - r^2$$
$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = r^2$$

Per ricavare il centro:

$$\mathrm{C} = \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right)$$

Per ricavare il raggio:

$$r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}$$

1.6 ELLISSE

Equazione dell'ellisse (con centro nell'origine degli assi)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad a \neq 0, b \neq 0$$

Parte II

FUNZIONI

2 FUNZIONI ELEMENTARI DI VARIABILE REALE

2.1 IL CONCETTO DI FUNZIONE

Definizione: una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ dove $A \subseteq \mathbb{R}$ è una legge che assegna ad ogni $x \in A$ uno ed un solo valore $y = f(x) \in \mathbb{R}$

Nota: in questo caso, i valori di A sono chiamati variabile indipendente (x), mentre $\mathbb{R}$ è la variabile dipendente $y = f(x)$

Nota: inoltre definiamo $A = dom \quad f$ come il dominio della funzione.

Definizione: Il grafico di f:

$$f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x \in A, y = f(x)\right\}$$

Definizione: L'immagine di f, Im f:

$$f(A) = \{f(x) \in \mathbb{R} | x \in A\}$$

2.2 OPERAZIONI TRA FUNZIONI

Date due funzioni $f : A \to \mathbb{R} \qquad g : B \to \mathbb{R}$

SOMMA E DIFFERENZA: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad dom(f + g) = A \cap B$

PRODOTTO: $(fg)(x) = f(x)g(x) \quad dom(fg) = (A \cap B)$

RAPPORTO: $(\frac{f}{g})(x) = f(x)g(x) \quad dom(\frac{f}{g}) = \{x \in \mathbb{R} | x \in A, x \in B, g(x) \neq 0\}$

RECIPROCO: $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1} \quad dom(\frac{1}{f}) = x \in A | f(x) \neq 0$

2.2.1 *Nomenclatura*

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$

- f è detta **iniettiva** se $\forall y_0 \in \mathbb{R}, f(x) = y_0$ ha al più una soluzione.
- f è detta **surgettiva** se $\forall y_0 \in \mathbb{R}, f(x) = y_0$ ha almeno una soluzione.
- f è detta **bigettiva** se $\forall y_0 \in \mathbb{R}, f(x) = y_0$ ha una ed una sola soluzione, ovvero se la funzione è sia iniettiva che surgettiva.

2.2.1.1 *Osservazioni*

1. f è surgettiva se e solo se $IMf = \mathbb{R}$
2. f è iniettiva se e solo se $y_0 \in IMf, f(x) = y_0$ ha al più una soluzione.

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$ sono fatti equivalenti:

- f è iniettiva
- $\forall x_1, x_2 \in A \cap x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$
- dati $x_1, x_2 \in A | f(x_1) = f(x_2)$ allora $x_1 = x_2$

2.3 FUNZIONI PARI E DISPARI

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x), \forall x \in A \quad -x \in A$ f è detta:

$$f(-x) = \begin{cases} f(x) & pari \\ -f(x) & dispari \end{cases}$$

2.4 FUNZIONI MONOTONE

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$

- $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2$ f è detta:

$$\begin{cases} f(x_1) \leq f(x_2) & crescente \\ f(x_1) \geq f(x_2) & decrescente \end{cases}$$

- $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2$ f è detta:

$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) & strettamentecrescente \\ f(x_1) > f(x_2) & strettamentedecrescente \end{cases}$$

2.5 TRASLAZIONI, DILATAZIONI E RIFLESSIONI

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$:

TRASLAZIONI: $x_0 > 0, \quad y_0 \in \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x - x_0) \text{ Traslazione verso destra}$$

$$g(x) = f(x + x_0) \text{ Traslazione verso sinistra}$$

$$g(x) = f(x) + y_0 \text{ Traslazione verso l'alto}$$

$$g(x) = f(x) - y_0 \text{ Traslazione verso il basso}$$

DILATAZIONI: $a > 0$

$$g(x) = f(\frac{x}{a}) \text{ Dilata su asse x}$$

$$g(x) = a \times f(x) \text{ Dilata su asse y}$$

RIFLESSIONI:

$$g(x) = f(-x) \text{ Riflette su asse } y$$

$$g(x) = -f(x) \text{ Riflette su asse } x$$

$$g(x) = -f(-x) \text{ Riflette rispetto l'origine}$$

2.5.1 *Osservazioni*

Se $f(x)$ è dispari e $0 \in$ dom f

$$f(0) = f(-0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Se $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$$f(x) = x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\textbf{n volte}}$$

- se n è pari, f è pari
- se n è dispari, f è dispari

2.6 SIMMETRIE, TRASLAZIONI, COMPRESSIONI E DILATAZIONI DI GRAFICI.

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$:

TRASLAZIONI: $x_0 > 0, \quad y_0 \in \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x - x_0) \text{ Traslazione verso destra}$$

$$g(x) = f(x + x_0) \text{ Traslazione verso sinistra}$$

$$g(x) = f(x) + y_0 \text{ Traslazione verso l'alto}$$

$$g(x) = f(x) - y_0 \text{ Traslazione verso il basso}$$

DILATAZIONI: $a > 0$

$$g(x) = f(\frac{x}{a}) \text{ Dilata su asse x}$$

$$g(x) = a \times f(x) \text{ Dilata su asse y}$$

RIFLESSIONI:

$$g(x) = f(-x) \text{ Riflette su asse } y$$

$$g(x) = -f(x) \text{ Riflette su asse } x$$

$$g(x) = -f(-x) \text{ Riflette rispetto l'origine}$$

2.7 FUNZIONE COMPOSTA

Date due funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$ la funzione:

$$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) \qquad x \in A$$

Con dominio:

$$\text{dom } (g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} | x \in A \cap f(x) \in B\}$$

2.8 FUNZIONE INVERSA E SUE PROPRIETÀ.

Data una funzione iniettiva $f : A \to \mathbb{R}$

$$\forall y \in f = f(A), \exists! x \in A | f(x) = y$$

Da cui si ricava che:

$$x = f^{-1}(y) \qquad f^{-1} : B \to \mathbb{R} \qquad B = Imf$$

2.8.1 *Costruire l'inverso di f*

1. Determinare $Imf = B$ e $domf^{-1} = B$
2. $y \in B$ determiniamo $x \in A | f(x) = y$
3. $x = f^{-1}(y)$
4. $y = f^{-1}(x) \qquad x \rightleftarrows y$

Il grafico di $y = f^{-1}(x)$ è simmetrico rispetto alla bisettrice $x = y$ della funzione $y = f(x)$

2.8.1.1 *Osservazioni*

$$f(f^{-1}(y)) = y \qquad \forall y \in dom^{f^{-1}} = Imf$$
$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall x \in domf = Imf^{-1}$$

Inoltre f è invertibile se e solo se è iniettiva o surgettiva, da cui:

$$g^{-1} : Imf \to \mathbb{R}$$

2.9 POLINOMI

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ Coefficienti $\qquad a_n \neq 0$ n è il grado del polinomio

Per cui:

$$n = 1 \qquad y = a_0 + a_1 x \quad \text{Rette}$$

$$n = 2 \qquad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad \text{Parabole}$$

3 FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

3.1 POTENZE

Fissato un esponente $a \in \mathbb{R}$ la funzione potenza è:

$$f(x) = x^a$$

la cui definizione e dominio dipendono dal valore dell'esponente a.

- $a = n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\textbf{n volte}} \qquad \text{dom } f = \mathbb{R} \qquad \text{Im } f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se n dispari} \\ [0, +\infty) & \text{se n pari } n \neq 0 \\ \{0\} & n = 1 \end{cases}$$

- $a = -n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad \text{dom } f = \mathbb{R} \backslash \{0\} \qquad \text{Im } f = \begin{cases} \mathbb{R} \backslash \{0\} & \text{n dispari} \\ (0, +\infty) & \text{n pari} \end{cases}$$

- $a = \frac{1}{n} \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \qquad \text{dom } f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{n dispari} \\ [0, +\infty) & \text{n pari} \end{cases} \qquad \text{Im } f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{n dispari} \\ [0, +\infty) & \text{n pari} \end{cases}$$

- $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1, m \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{m} \qquad \text{dom } f = (0, +\infty) \qquad \text{Im } f = (0, +\infty)$$

- $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^a = \begin{cases} \sup\{x^q | q \in \mathbb{Q}, q \leq a\} & x \geq 1 \\ \inf\{x^q | q \in \mathbb{Q}, q \leq a\} & 0 < x < 1 \end{cases} \qquad \text{dom } f = (0, +\infty) \qquad \text{Im } f = (0, +\infty)$$

Osserviamo che:

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 1$
- se n pari f è pari
- se n dispari f è dispari

3.1.1 *Proprietà delle potenze*

- $x^{n+m} = x^n x^m$
- $(x^n)^m = x^{nm}$

OSSERVAZIONI

$$f(x) = x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$0^0 = 1$$

3.1.1.1 *Dimostrazioni*

$$x^{n+m} = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\text{n+m volte}} = \underbrace{(x \times \cdots \times x)}_{\text{n volte}} \times \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\text{m volte}} = x^{n+m}$$

$$(x^n)^m = \underbrace{x^n \times \cdots \times x^n}_{\text{m volte}}$$

$$x^n = x^{n+0} = x^n x^0 \qquad x \neq 0$$

$$x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

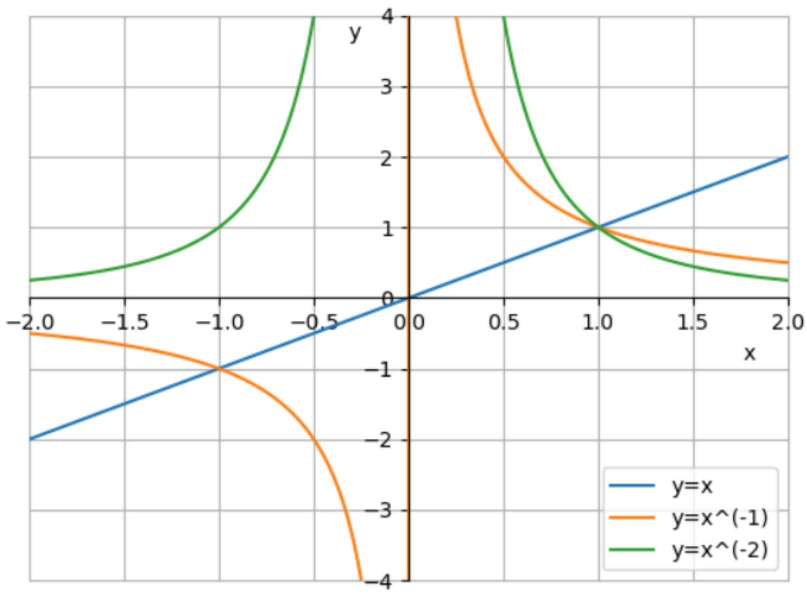


Figura 3.1: Grafici di funzioni di potenze.

3.2 ESPONENZIALE

Fissata la base $a > 0$ con $a \neq 1$, la funzione esponenziale è

$$f(x) = a^x \qquad \text{dom } f = \mathbb{R} \qquad \text{Im } f = (0, +\infty)$$

Se si sceglie come base il numero di Nepero $e = 2.71828 \cdots > 1$, la funzione esponenziale si denota:

$$f(x) = e^x = \exp x$$

3.2.1 *Proprietà*

1. se $a > 1$, allora la funzzione a^x è strettamente crescente
2. se $0 < a < 1$, allora la funzione a^x è strettamente decrescente
3. se $0 < a < b$ con $a, b \neq 1$

$$\begin{cases} a^x < b^x & x > 0 \\ a^x > b^x & x < 0 \end{cases}$$

4. valgono le seguenti proprietà:
   - $a^0 = 1$
   - $a^1 = a$
   - $a^{x_1+x_2} = a^{x_1+x_2} \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
   - $a^{-x} = (\frac{1}{a})^x \qquad x \in \mathbb{R}$
   - $(a^x)^b = a^{bx} \qquad x, b \in \mathbb{R}$

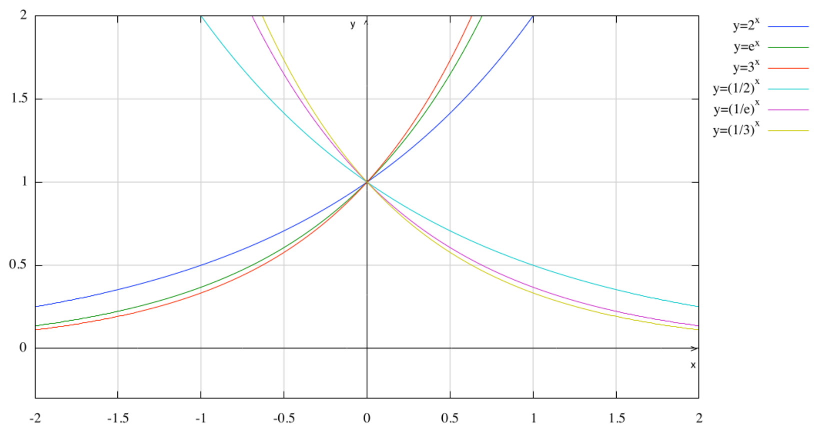


Figura 3.2: Grafici di funzioni esponenziali.

3.3 LOGARITMO

Fissata la base $a > 0$ con $a \neq 1$, la funzione logaritmo

$$f(x) = \log_a x \qquad \operatorname{dom} f = (0, +\infty) \qquad \operatorname{Im} f = \mathbb{R}$$

è definita come la funzione inversa della funzione esponenziale a^x. Se si sceglie come base il numero di Nepero e, il logaritmo si denota:

$$f(x) = \log_e = \log x = \ln x$$

1. se $a > 1$, allora la funzione $\log_a x$ è strettamente crescente
2. se $0 < a < 1$, allora la funzione $\log_a x$ è strettamente decrescente
3. se $0 < a < b$ con $a, b \neq 1$

$$\begin{cases} \log_a x > \log_b x & se x > 1 \\ \log_a x < \log_b x & se 0 < x < 1 \end{cases}$$

4. valgono le seguenti proprietà:
   - $\log_a a^x = x \qquad x > 1$
   - $a^{\log_a x} = x \qquad x > 0$
   - $\log_a 1 = 0$
   - $\log_a a = 1$
   - $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \qquad x_1, x_2 > 0$
   - $\log_a (\frac{x_1}{x_2}) = \log_a x_1 - \log_a x_2 \qquad x_1, x_2 > 0$
   - $\log_a x^b = b \log_a x \qquad x > 0, b \in \mathbb{R}$
   - $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad x > 0, b > 0, b \neq 1$
   - $a^x = e^{(\ln a)x} \qquad x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$

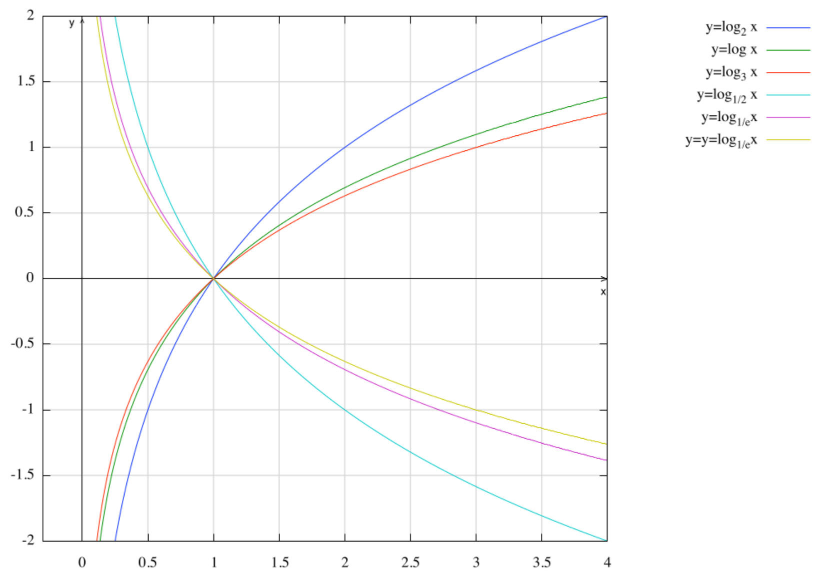


Figura 3.3: Grafici di funzioni logaritmiche.

4

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

4.1 RADIANTI

Sia γ una circonferenza di raggio 1 (detta circonferenza goniometrica) il cui centro O è anche l'origine di un sistema di assi cartesiani e sia A il punto $(1,0)$. Partendo da A percorriamo la circonferenza in senso antiorario oppure in senso orario. Sia x un numero reale, denotiamo con P_x il punto su γ che si ottiene percorrendo la circonferenza a partire dal punto A per un arco di lunghezza $|x|$, in senso antorario se $x \geq 0$, oppure in senso orario se $x < 0$. Il punto P_x individua un angolo nel piano avente vertice O e delimitatio dalle semirette nel piano uscenti da O e passanti per A e per P_x. Il numero reale x rappresenta la misura dell'angolo in radianti.

La relazione tra radianti e gradi è data da:

$$\frac{\gamma_{\text{radianti}}}{2\pi} = \frac{\gamma_{\text{gradi}}}{360}$$

Osserviamo che l'incremento della lunghezza x di 2π corrisponde a compiere un intero giro sulla circonferenza in senso antiorario ritornando al punto P_x (così come decrementare di 2π la lunghezza x). Quindi si ha:

$$P_{x \pm k2\pi} = P_x \qquad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$$

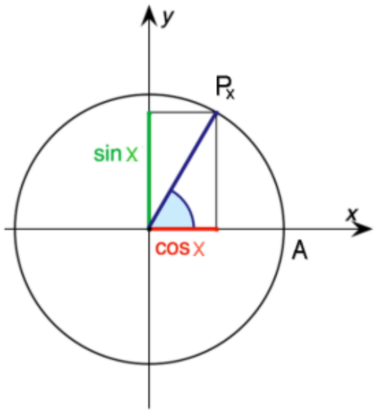


Figura 4.1: Circonferenza goniometrica

4.2 LE FUNZIONI SENO E COSENO

Una funzione $f : \mathbb{R} \in \mathbb{R}$ è detta periodica di periodo T, $T > 0$ se:

$$f(x+T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$$

La caratteristica fondamentale delle funzioni periodiche è che i suoi valori si ripetono dopo intervalli di ampiezza T.

4.2.1 *Simmetria*

Indichiamo con $\cos x$ e con $\sin x$ rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto P_x. Le funzioni $y = \cos x$ e $y = \sin x$ sono definite su $\mathbb{R}$ a valori nell'intervallo $[-1, 1]$, sono periodiche di minimo periodo 2π e soddisfano la relazione:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

4.2.2 *Monotonia*

Per la periodicità di seno e coseno ci basta studiarne le proprietà nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Dalle definizioni segue subito che la funzione seno è dispari e la funzione coseno è pari; inoltre la funzione coseno è strettamente decrescente in $[0, \pi]$ e strettamente crescente in $[\pi, 2\pi]$. La funzione seno è strettamente crescente in $[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ e strettamente decrescente in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$.

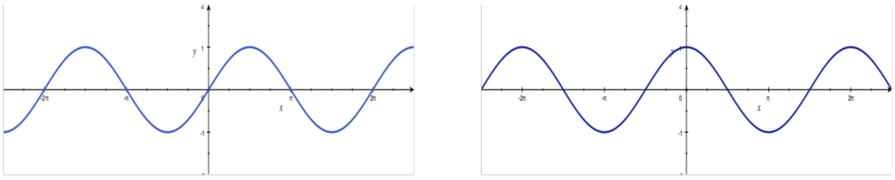


Figura 4.2: Grafico delle funzioni: seno e coseno

4.2.3 *Formule trigonometriche*

4.2.3.1 *Formule di addizione e sottrazione*

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

4.2.3.2 *Formule di duplicazione*

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$
$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

4.2.3.3 *Formule di potenza*

$$(\sin x)^2 = \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$
$$(\cos x)^2 = \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

4.2.3.4 *Formule di bisezione*

$$\sin(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \qquad 0 < x \leq 2\pi$$
$$\cos(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \qquad -\pi < x \leq \pi$$

4.2.3.5 *Formule di prostaferesi*

$$\sin x - \sin y = 2\sin(\frac{x-y}{2})\cos(\frac{x+y}{2})$$
$$\cos x - \cos y = -2\cos(\frac{x-y}{2})\sin(\frac{x+y}{2})$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos x \qquad \sin(x+\pi) = -\sin x$$
$$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x \qquad \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$$

4.3 la funzione tangente

La funzione tangente è:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Definita nei punti di $\mathbb{R}$ diversi da $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e, come vedremo in seguito, ha immagine $\mathbb{R}$. La funzione tangente è periodica per: $(x) = \tan(x + k\pi)$ per $k \in \mathbb{Z}$ cioè $\tan(x)$ è periodica di minimo periodo $T = \pi$.

Nella Figura 4.3 è evidenziata la tangente nel punto $(A, Q_x = \tan(x))$.

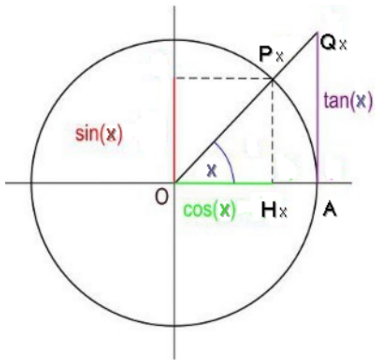


Figura 4.3: Tangente.

4.3.1 *Simmetria*

Dalle proprietà di simmetria delle funzioni seno e coseno, si deduce che la funzione tangente è dispari: il rapporto di una funzione pari e di una funzione dispari è dispari.

4.3.2 *Monotonia*

La funzione tangente è strettamente crescente in ogni intervallo $(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$

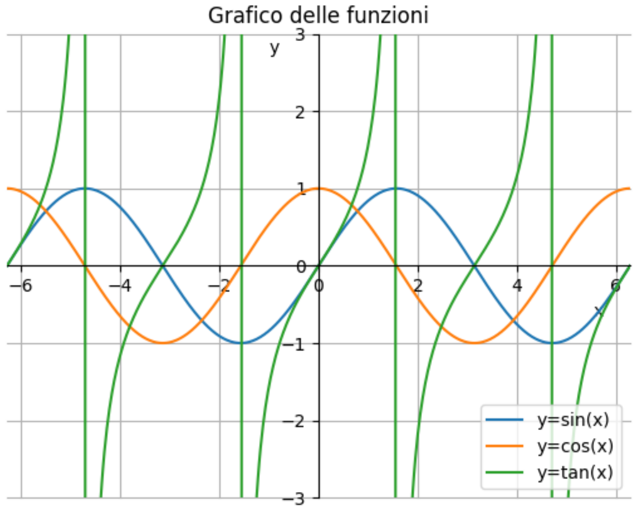


Figura 4.4: Funzioni trigonometriche

4.4 FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

Le funzioni trigonometriche inverse sono definite come, il dominio della funzione di partenza è stato ristretto per permettere l'inversione della funzione.

$$\arcsin x = f^{-1}(x) \qquad f(x) = \sin(x) \qquad x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\arccos x = f^{-1}(x) \qquad f(x) = \cos(x) \qquad x \in [0, \pi]$$

$$\arctan x = f^{-1}(x) \qquad f(x) = \tan(x) \qquad x \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

4.4.1 *Dominio ed immagine*

$$\text{dom } \arcsin x = [-1, 1] \qquad \text{dom } \arccos x = [-1, 1] \qquad \text{dom } \arctan x = \mathbb{R}$$

$$\text{Im } \arcsin x = [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \qquad \text{Im } \arccos x = [0, \pi], \qquad \text{Im } \arctan x = (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

4.4.2 *Parità*

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$\arctan(-x) = -\arctan x$$

4.4.3 *Monotonia*

- la funzione $\arcsin x$ è strettamente crescente

- la funzione $\arccos x$ è strettamente decrescente
- la funzione $\arctan x$ è strettamente crescente

4.4.4 *Relazioni*

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$$

$$\arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ \frac{-\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$$

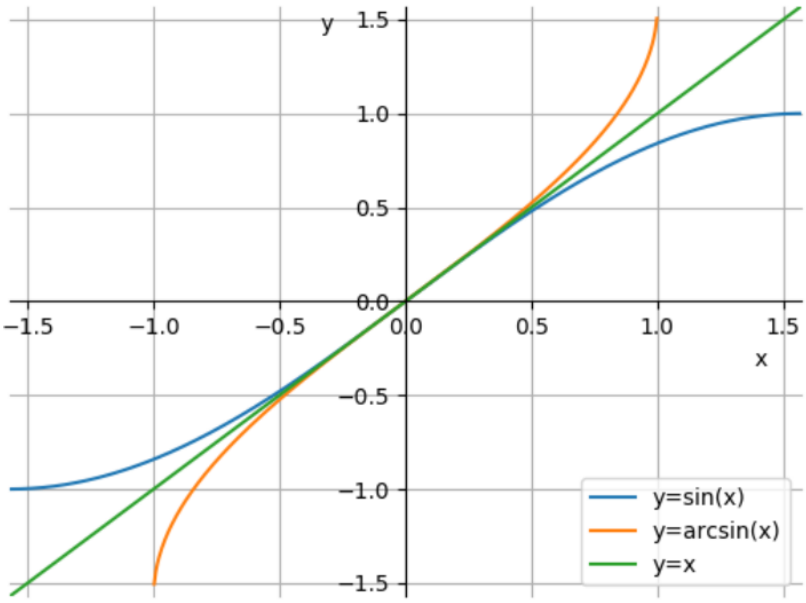


Figura 4.5: Arcoseno.

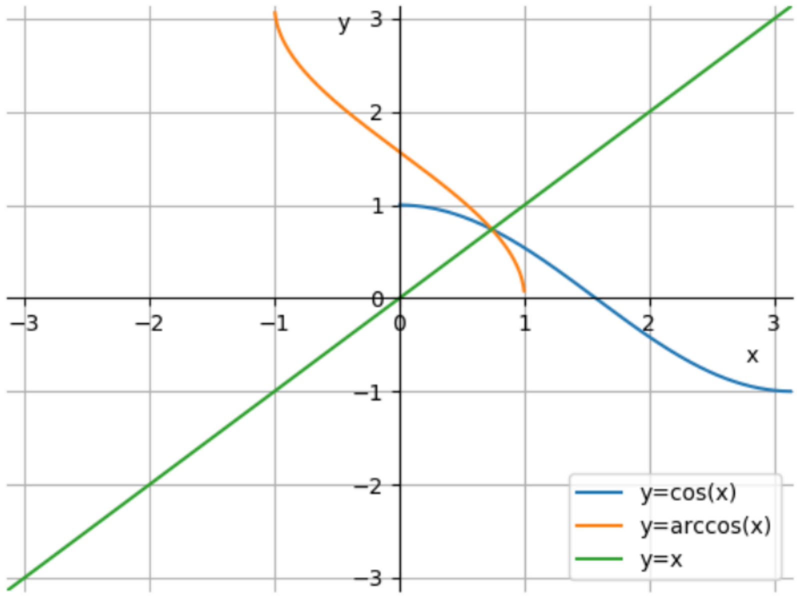


Figura 4.6: Arcocoseno.

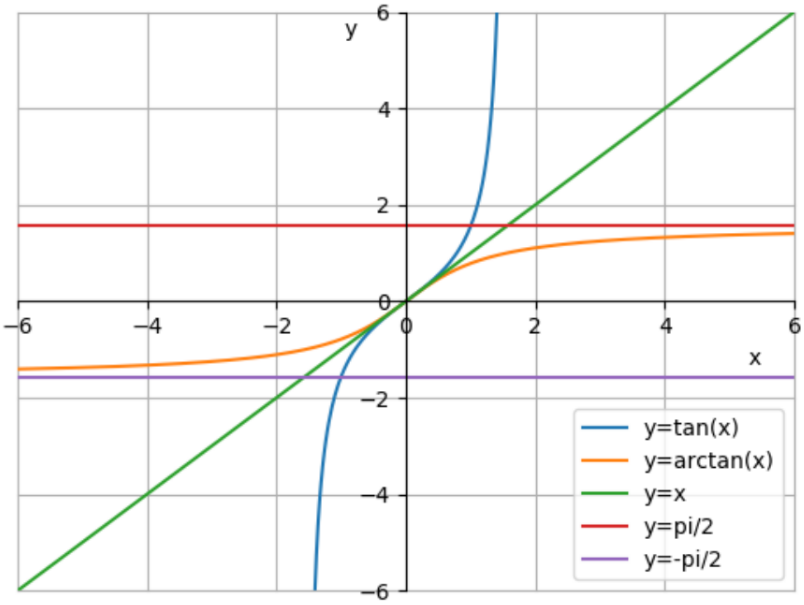


Figura 4.7: Arcotangente.

Parte III

FUNZIONI CONTINUE E LIMITI

5 FUNZIONI CONTINUE

5.1 FUNZIONI CONTINUE

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, y = f(x)$, ed un punto $x_0 \in A$, la funzione è detta continua in x_0 se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon \qquad \forall x \in A \cap x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

La funzione è detta continua se è continua in x_0 per ogni $x_0 \in A$.

Teorema 5.1 (Continuità funzioni elementari)
Le funzioni potenza x^a, esponenziali a^x, logaritmo $\log_a x$, trigonometriche e trigonometriche inverse, sono continue.

Teorema 5.2 (Algebra delle funzioni continue)
Date due funzioni $f, g : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x), \quad y = g(x)$, continue, allora:

1. *la somma $f(x) + g(x)$ è una funzione continua;*
2. *il prodotto $f(x)g(x)$ è una funzione continua;*
3. *il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ è una funzione continua sul suo dominio $x \in A | g(x) \neq 0$*

Teorema 5.3 (Continuità funzione composta)
Date due funzioni continue $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$ allora la funzione composta:

$$g \circ f : x \in A | f(x) \in B \to \mathbb{R} \qquad y = g(f(x))$$

è continua.

Teorema 5.4 (Continuità funzioni inversa)
Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$, tale che:

1. *f è iniettiva;*
2. *f è continua;*
3. *il dominio di I è un intervallo;*

allora, posto $B = Im\ f$, la funzione inversa $f^{-1} : B \to \mathbb{R}$ è continua.

[27 marzo 2019 at 17:15 – classicthesis v4.6]

6 LIMITI

6.1 PUNTO DI ACCUMULAZIONE

Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ e:

1. un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è detto punto di accumulazione per A se per ogni $\delta > 0$ esiste $x \in A$ tale che:
$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \qquad x \neq x_0$$
2. $+\infty$ è detto punto di accumulazione per A se per ogni $R > 0$ esiste $x \in A$ tale che $x > R$
3. $-\infty$ è detto punto di accumulazione per A se per ogni $R > 0$ esiste $x \in A$ tale che $x < -R$

6.2 LIMITE

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, un punto di accumulazione $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ per A ed $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Si distinguono i casi:

1. $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$: se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:
$$\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon \qquad \forall x \in A, x \neq x_0 \cap x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$
2. $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell = \pm\infty$: se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:
$$\begin{cases} f(x) > M & \text{se } \ell = +\infty \\ f(x) < -M & \text{se } \ell = -\infty \end{cases} \qquad \forall x \in A, x \neq x_0 \cap x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$
3. $x_0 = \pm\infty$ e $\ell =\in \mathbb{R}$: se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che:
$$\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon \quad \forall x \in A \cap \begin{cases} x > R & \text{se } x_0 = +\infty \\ x < -R & \text{se } x_0 = -\infty \end{cases}$$
4. $x_0 = \pm\infty$ e $\ell =\in \mathbb{R}$: se per ogni $M > 0$ esiste $R > 0$ tale che:
$$\begin{cases} f(x) > M & \text{se } \ell = +\infty \\ f(x) < -M & \text{se } \ell = -\infty \end{cases} \quad \forall x \in A \cap \begin{cases} x > R & \text{se } x_0 = +\infty \\ x < -R & \text{se } x_0 = -\infty \end{cases}$$

In tal caso, si dice che esiste finito il limite di f per x che tende a x_0 e vale ℓ oppure che $f(x)$ tende ad ℓ per x che tende a x_0.

Proposizione 6.1 (Continuità dei limiti)
Data $f : A \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in A$ punto di accumulazione per A, f è continua in x_0 se e solo se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

6.2.1 *Limite destro e sinitro*

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ ed un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ per A tale che per ogni $\delta > 0$

$$A \cap (-\delta, x_0) \neq \emptyset \qquad \text{e} \qquad A \cap (x_0, \delta) \neq \emptyset$$

si scrive:

$$\begin{cases} \lim_{x \to x_{0^+}} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} & \text{limite destro} \\ \lim_{x \to x_{0^-}} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R} & \text{limite sinistro} \end{cases}$$

Se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\begin{cases} \ell_1 - \epsilon < f(x) < \ell_1 + \epsilon \\ \ell_2 - \epsilon < f(x) < \ell_2 + \epsilon \end{cases} \qquad \forall x \in A \cap \begin{cases} x_0 < x < x_0 + \delta & \text{limite destro} \\ x_0 - \delta < x < x_0 & \text{limite sinistro} \end{cases}$$

Analoghe definizioni valgono se $\ell_{1,2} = \pm\infty$

Proposizione 6.2
Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $\delta > 0$

$$A \cap (-\delta, x_0) \neq \emptyset \qquad e \qquad A \cap (x_0, \delta) \neq \emptyset)$$

Allora x_0 è un punto di accumulazione per A e:

$$\textit{esiste } \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \textit{esistono } \begin{cases} \lim_{x \to x_{0^+}} f(x) = \ell \\ \lim_{x \to x_{0^-}} f(x) = \ell \end{cases}$$

Teorema 6.1 (Algebra dei limiti)
Date due funzioni $f, g : A \to \mathbb{R}$ ed un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per A, se esitono:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

allora:

SOMMA:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x) =$$

	$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$\ell_2 = +\infty$	$\ell_2 = -\infty$
$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_1 = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*f.i.*
$\ell_1 = -\infty$	$-\infty$	*f.i.*	$-\infty$

Dove f.i.= forma indeterminata $+\infty - \infty$

PRODOTTO:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) =$$

	$\ell_2 < 0$	$\ell_2 = 0$	$\ell_2 > 0$	$\ell_2 = +\infty$	$\ell_2 = -\infty$
$\ell_1 < 0$	$\ell_1\ell_2$	0	$\ell_1\ell_2$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_1 = 0$	0	0	0	*f.i.*	*f.i.*
$\ell_1 > 0$	$\ell_1\ell_2$	0	$\ell_1\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_1 = +\infty$	$-\infty$	*f.i.*	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_1 = -\infty$	$+\infty$	*f.i.*	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Dove f.i.= forma indeterminata 0∞

RAPPORTO:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

	$\ell_2 < 0$	$\ell_2 = 0^{\pm}$	$\ell_2 > 0$	$\ell_2 = +\infty$	$\ell_2 = -\infty$
$\ell_1 < 0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\mp\infty$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0	0
$\ell_1 = 0$	0	*f.i.*	0	0	0
$\ell_1 > 0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\pm\infty$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0	0
$\ell_1 = +\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	*f.i.*	*f.i.*
$\ell_1 = -\infty$	$+\infty$	$\mp\infty$	$-\infty$	*f.i.*	*f.i.*

Dove f.i.= forma indeterminata $\frac{0}{0}$ *o* $\frac{\infty}{\infty}$ *e la notazione* $l_2 = 0^{\pm}$ *significa che:*

1. *esiste il limite*

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

2. *esiste* $\delta > 0$ *tale che per ogni* $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$

$$\begin{cases} g(x) > 0 & \ell_2 = 0^+ \\ g(x) < 0 & \ell_2 = 0^- \end{cases}$$

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ *(analoga definizione se* $x_0 = \pm\infty$*).*

Teorema 6.2 (Limite funzione composta.)
Date due funzioni $f : A \to \mathbb{R}, y = f(x)$ *e* $g : B \to \mathbb{R}, z = g(y)$, *tali che:*

1. *per ogni* $x \in A$, *allora* $f(x) \in B$,
2. *il punto* x_0 *è di accumulazione per* A *ed esiste:*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$
3. *il punto* y_0 *è di accumulazione per* B *ed esiste:*
$$\lim_{y \to y_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

Allora esiste:

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell$$

NOTA: *Le condizioni del teorema non sono sufficienti per assicurare l'esistenza del limite* $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell$. *Occorre aggiungere delle ipotesi tecniche, che però sono sempre verificate negli esercizi. Ad esempio, è sufficiente richiedere che una delle seguenti tre condizioni sia soddisfatta:*

1. *il punto* y_0 *non appartiene a dom* g;
2. *la funzione* g *è continua in* y_0;
3. *esiste* $\delta > 0$ *tale che* $f(x) \neq y_0$ *per ogni* $x \in A, x \neq x_0$ *e* $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$.