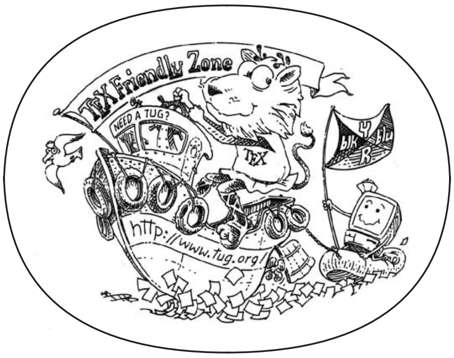
CALCULUS I

RICCARDO CEREGHINO



Fuck yeah

Febbraio 2019 – version 4.2

[6 marzo 2019 at 9:37 – `classicthesis` version 4.2]

Batman Grazie di esistere

Di nuovo grazie

ABSTRACT

Contenuti del corso di Calculus I

INDICE

ELENCO DELLE FIGURE

ELENCO DELLE TABELLE

LISTINGS

ACRONYMS

DRY Don't Repeat Yourself

API Application Programming Interface

UML Unified Modeling Language

Parte I

INTRODUZIONE

Argomenti introduttivi del corso

1 NOTAZIONE

1.1 insiemi

- $\emptyset$ = Insieme vuoto
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3...\}$ = Naturali
- $\mathbb{Z} = \{... - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$ = Relativi
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m} \middle| n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\right\}$ = Razionali
- $\mathbb{R}$ = Reali

1.2 logica

- $|$ tale che
- $\Rightarrow$ implica
- $\Leftrightarrow$ se e solo se
- $\forall$ per ogni
- $\exists$ esiste
- $\nexists$ non esiste
- $\in$ appartiene
- $\notin$ non appartiene

1.3 operazioni tra insiemi

- A sottoinsieme di B

  $$A \subseteq B$$

  $$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

- A sottoinsieme proprio

  $$A \subsetneqq B$$

  $$\begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow x \in B \\ \exists x \in B | x \notin A \end{cases}$$

- Intersezione

$$A \cap B = \{x \in X | x \in A, x \in B\}$$

- Unione

$$A \cup B = \{x \in X | x \in A or x \in B\}$$

- Differenza insiemistica

$$A \setminus B = \{x \in X | x \in A, x \notin B\}$$

- Complementare

$$A^C = \{x \in X | x \notin A\}$$

1.4 PRODOTTO CARTESIANO

Assegnati due numeri reali $a, b, a < b$, si definiscono intervalli gli insiemi seguenti:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

Coppia ordinata: $(1, 3) \neq (3, 1)$

1.4.1 *Intervalli*

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x \leqslant b\}$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x < b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leqslant b\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant a\}$$
$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$$
$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leqslant b\}$$
$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$$
$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

1.5 PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI TRA NUMERI REALI

$x, y, z \in \mathbb{R}$

- Associativa

$$(x+y)+z = x+(y+z) = x+y+z$$

$$(xy)z = x(yz) = xyz$$

- Commutativa

$$x+y = y+x$$

$$xy = yx$$

- Distributiva

$$x(y+z) = xy + xz$$

- Esistenza elemento neutro

$$x+0 = x$$

$$1x = x$$

- Esistenza dell'universo

1.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! y = -x \in \mathbb{R} | x + (-x) = 0$$

2.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 0 \quad \exists! y = \frac{1}{x} \in \mathbb{R} | x\frac{1}{x} = 1$$

- Relazione d'ordine totale

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x < y & \text{oppure} \\ x = y & \text{oppure} \\ x > y \end{cases}$$

- Transitività

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$(x < y) \cap (y < z) \Rightarrow (x < z)$$

- Compatibilità con la somma

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z$$

- Compatibilità con il prodotto

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$x < y \cap z > 0 \Rightarrow xz < yz$$

$$x < y \cap z < 0 \Rightarrow xz > yz$$

1.6 GEOMETRIA

1.6.1 *Circonferenza*

Dato il centro di una circonferenza $C = (x_c, y_c)$ Si esprime l'equazione della circonferenza nella forma:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = r^2$$

Per cui se $O = (0, 0)$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

FORMA CANONICA:

$$\alpha = -2x_c \quad \beta = -2y_c \quad \gamma = x_c^2 + y_c^2 - r^2$$

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = r^2$$

Da cui calcolare centro e raggio:

$$C = \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right); \quad r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}$$

1.6.2 *Ellisse*

Equazione dell'ellisse (con centro nell'origine degli assi)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad a \neq 0, b \neq 0$$

Parte II

FUNZIONI

2 FUNZIONI

2.1 IL CONCETTO DI FUNZIONE

Definizione: una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ dove $A \subseteq \mathbb{R}$ è una legge che assegna ad ogni $x \in A$ uno ed un solo valore $y = f(x) \in \mathbb{R}$

Nota: in questo caso, i valori di A sono chiamati variabile indipendente (x), mentre $\mathbb{R}$ è la variabile dipendente $y = f(x)$

Nota: inoltre definiamo $A = \mathrm{dom} \quad f$ come il dominio della funzione.

Definizione: Il grafico di f:

$$f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x \in A, y = f(x)\right\}$$

Definizione: L'immagine di f, Im f:

$$f(A) = \{f(x) \in \mathbb{R} | x \in A\}$$

2.2 OPERAZIONI TRA FUNZIONI

Date due funzioni $f : A \to \mathbb{R} \qquad g : B \to \mathbb{R}$

SOMMA E DIFFERENZA: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \mathrm{dom}(f + g) = A \cap B$

PRODOTTO: $(fg)(x) = f(x)g(x) \quad \mathrm{dom}(fg) = (A \cap B)$

RAPPORTO: $(\frac{f}{g})(x) = f(x)g(x) \quad \mathrm{dom}(\frac{f}{g}) = \{x \in \mathbb{R} | x \in A, x \in B, g(x) \neq 0\}$

RECIPROCO: $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1} \quad \mathrm{dom}(\frac{1}{f}) = x \in A | f(x) \neq 0$

2.2.1 *Nomenclatura*

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$

- f è detta **iniettiva** se $\forall y_0 \in \mathbb{R}, f(x) = y_0$ ha al più una soluzione.
- f è detta **surgettiva** se $\forall y_0 \in \mathbb{R}, f(x) = y_0$ ha almeno una soluzione.
- f è detta **bigettiva** se $\forall y_0 \in \mathbb{R}, f(x) = y_0$ ha una ed una sola soluzione, ovvero se la funzione è sia iniettiva che surgettiva.

2.2.1.1 *Osservazioni*

1. f è surgettiva se e solo se $IMf = \mathbb{R}$
2. f è iniettiva se e solo se $y_0 \in IMf, f(x) = y_0$ ha al più una soluzione.

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$ sono fatti equivalenti:

- f è iniettiva
- $\forall x_1, x_2 \in A \cap x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$
- dati $x_1, x_2 \in A | f(x_1) = f(x_2)$ allora $x_1 = x_2$

2.3 FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

2.3.1 *Funzioni pari e dispari*

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x), \forall x \in A \quad -x \in A$ f è detta:

$$f(-x) = \begin{cases} f(x) & pari \\ -f(x) & dispari \end{cases}$$

2.3.2 *Funzioni monotone*

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$

- $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2$ f è detta:
$$\begin{cases} f(x_1) \leqslant f(x_2) & crescente \\ f(x_1) \geqslant f(x_2) & decrescente \end{cases}$$
- $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2$ f è detta:
$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) & strettamentecrescente \\ f(x_1) > f(x_2) & strettamentedecrescente \end{cases}$$

2.4 TRASLAZIONI, DILATAZIONI E RIFLESSIONI

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$:

TRASLAZIONI: $x_0 > 0, \quad y_0 \in \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x - x_0) \text{ Traslazione verso destra}$$
$$g(x) = f(x + x_0) \text{ Traslazione verso sinistra}$$
$$g(x) = f(x) + y_0 \text{ Traslazione verso l'alto}$$
$$g(x) = f(x) - y_0 \text{ Traslazione verso il basso}$$

DILATAZIONI: $a > 0$

$$g(x) = f(\frac{x}{a}) \text{ Dilata su asse x}$$

$$g(x) = a \times f(x) \text{ Dilata su asse y}$$

RIFLESSIONI:

$$g(x) = f(-x) \text{ Riflette su asse } y$$

$$g(x) = -f(x) \text{ Riflette su asse } x$$

$$g(x) = -f(-x) \text{ Riflette rispetto l'origine}$$

2.4.0.1 *Osservazioni*

Se $f(x)$ è dispari e $0 \in \text{dom } f$

$$f(0) = f(-0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Se $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$

$$f(x) = x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\textbf{n volte}}$$

- se n è pari, f è pari
- se n è dispari, f è dispari

2.5 SIMMETRIE, TRASLAZIONI, COMPRESSIONI E DILATAZIONI DI GRAFICI.

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$:

TRASLAZIONI: $x_0 > 0, \quad y_0 \in \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x - x_0) \text{ Traslazione verso destra}$$

$$g(x) = f(x + x_0) \text{ Traslazione verso sinistra}$$

$$g(x) = f(x) + y_0 \text{ Traslazione verso l'alto}$$

$$g(x) = f(x) - y_0 \text{ Traslazione verso il basso}$$

DILATAZIONI: $a > 0$

$$g(x) = f(\frac{x}{a}) \text{ Dilata su asse x}$$

$$g(x) = a \times f(x) \text{ Dilata su asse y}$$

RIFLESSIONI:

$$g(x) = f(-x) \text{ Riflette su asse } y$$

$$g(x) = -f(x) \text{ Riflette su asse } x$$

$$g(x) = -f(-x) \text{ Riflette rispetto l'origine}$$

2.6 FUNZIONE COMPOSTA

Date due funzioni $f : A \to \mathbb{R} \qquad g : B \to \mathbb{R}$

$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) \qquad \text{dom } g \circ f(x) = \{x \in A \cap f(x) \in \qquad \text{se n dispari} B\}$

2.7 FUNZIONE INVERSA E SUE PROPRIETÀ.

Data una funzione iniettiva $f : A \to \mathbb{R}$

$$\forall y \in f = f(A), \exists! x \in A | f(x) = y$$

Da cui si ricava che:

$$x = f^{-1}(y) \qquad f^{-1} : B \to \mathbb{R} \qquad B = Imf$$

2.7.1 *Costruire l'inverso di f*

1. Determinare $Imf = B$ e $domf^{-1} = B$
2. $y \in B$ determiniamo $x \in A | f(x) = y$
3. $x = f^{-1}(y)$
4. $y = f^{-1}(x) \qquad x \rightleftarrows y$

Il grafico di $y = f^{-1}(x)$ è simmetrico rispetto alla bisettrice $x = y$ della funzione $y = f(x)$

2.7.1.1 *Osservazioni*

$$f(f^{-1}(y)) = y \qquad \forall y \in dom^{f^{-1}} = Imf$$
$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall x \in domf = Imf^{-1}$$

Inoltre f è invertibile se e solo se è iniettiva o surgettiva, da cui:

$$g^{-1} : Imf \to \mathbb{R}$$

3 FUNZIONI ELEMENTARI

3.0.1 *Polinomi*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ Coefficienti $\qquad a_n \neq 0$ n è il grado del polinomio

Per cui:

$$n = 1 \qquad y = a_0 + a_1 x \quad \text{Rette}$$

$$n = 2 \qquad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad \text{Parabole}$$

3.0.2 *Potenze*

Fissato un esponente $a \in \mathbb{R}$ la funzione potenza è:

$$f(x) = x^a$$

la cui definizione e dominio dipendono dal valore dell'esponente a.

- $a = n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\textbf{n volte}} \qquad \text{dom } f = \mathbb{R} \qquad \text{Im } f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se n dispari} \\ [0, +\infty) & \text{se n pari } n \neq 0 \\ \{0\} & n = 1 \end{cases}$$

- $a = -n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$

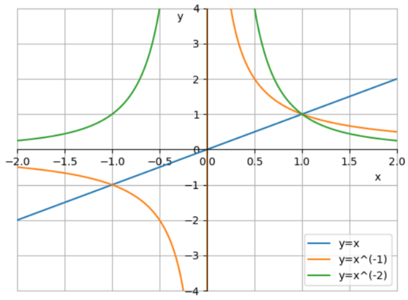
$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad \text{dom } f = \mathbb{R} \backslash \{0\} \qquad \text{Im } f = \begin{cases} \mathbb{R} \backslash \{0\} & \text{n dispari} \\ (0, +\infty) & \text{n pari} \end{cases}$$

- $a = \frac{1}{n} \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \qquad \text{dom } f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{n dispari} \\ [0, +\infty) & \text{n pari} \end{cases} \qquad \text{Im } f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{n dispari} \\ [0, +\infty) & \text{n pari} \end{cases}$$

- $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1, m \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{m} \qquad \text{dom } f = (0, +\infty) \qquad \text{Im } f = (0, +\infty)$$



(a) Potenze.

- $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^a = \begin{cases} \sup\{x^q | q \in \mathbb{Q}, q \leqslant a\} & x \geqslant 1 \\ \inf\{x^q | q \in \mathbb{Q}, q \leqslant a\} & 0 < x < 1 \end{cases} \qquad \text{dom } f = (0, +\infty) \qquad \text{Im } f = (0, +\infty$$

Osserviamo che:

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 1$
- se n pari f è pari
- se n dispari f è dispari

3.0.2.1 *Proprietà delle potenze*

- $x^{n+m} = x^n x^m$
- $(x^n)^m = x^{nm}$

OSSERVAZIONI

$$f(x) = x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$0^0 = 1$$

DIMOSTRAZIONI

$$x^{n+m} = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\text{n+m volte}} = \underbrace{(x \times \cdots \times x)}_{\text{n volte}} \times \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\text{m volte}} = x^{n+m}$$

$$(x^n)^m = \underbrace{x^n \times \cdots \times x^n}_{\text{m volte}}$$

$$x^n = x^{n+0} = x^n x^0 \qquad x \neq 0$$

$$x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3.0.3 *Esponenziale*

Fissata la base $a > 0$ con $a \neq 1$, la funzione esponenziale è

$$f(x) = a^x \qquad \text{dom } f = \mathbb{R} \qquad \text{Im } f = (0, +\infty)$$

Se si sceglie come base il numero di Nepero $e = 2.71828 \cdots > 1$, la funzione esponenziale si denota:

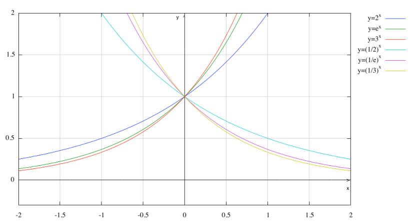
$$f(x) = e^x = \exp x$$

3.0.3.1 *Proprietà*

1. se $a > 1$, allora la funzzione a^x è strettamente crescente
2. se $0 < a < 1$, allora la funzione a^x è strettamente decrescente
3. se $0 < a < b$ con $a, b \neq 1$

$$\begin{cases} a^x < b^x & x > 0 \\ a^x > b^x & x < 0 \end{cases}$$

4. valgono le seguenti proprietà:
   - $a^0 = 1$
   - $a^1 = a$
   - $a^{x_1+x_2} = a^{x_1+x_2} \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
   - $a^{-x} = (\frac{1}{a})^x \qquad x \in \mathbb{R}$
   - $(a^x)^b = a^{bx} \qquad x, b \in \mathbb{R}$



(a) Esponenziali.

3.0.4 *Logaritmo*

Fissata la base $a > 0$ con $a \neq 1$, la funzione logaritmo

$$f(x) = \log_a x \qquad \text{dom } f = (0, +\infty) \qquad \text{Im } f = \mathbb{R}$$

è definita come la funzione inversa della funzione esponenziale a^x. Se si sceglie come base il numero di Nepero e, il logaritmo si denota:

$$f(x) = \log_e = \log x = \ln x$$

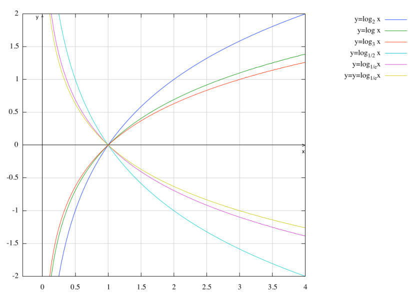
1. se $a > 1$, allora la funzione $\log_a x$ è strettamente crescente

2. se $0 < a < 1$, allora la funzione $\log_a x$ è strettamente decrescente

3. se $0 < a < b$ con $a, b \neq 1$

$$\begin{cases} \log_a x > \log_b x & se x > 1 \\ \log_a x < \log_b x & se 0 < x < 1 \end{cases}$$

4. valgono le seguenti proprietà:
   - $\log_a a^x = x \qquad x > 1$
   - $a^{\log_a x} = x \qquad x > 0$
   - $\log_a 1 = 0$
   - $\log_a a = 1$
   - $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \qquad x_1, x_2 > 0$
   - $\log_a(\frac{x_1}{x_2}) = \log_a x_1 - \log_a x_2 \qquad x_1, x_2 > 0$
   - $\log_a x^b = b \log_a x \qquad x > 0, b \in \mathbb{R}$
   - $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad x > 0, b > 0, b \neq 1$
   - $a^x = e^{(\ln a)x} \qquad x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$



(a) Logaritmi.

3.1 FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

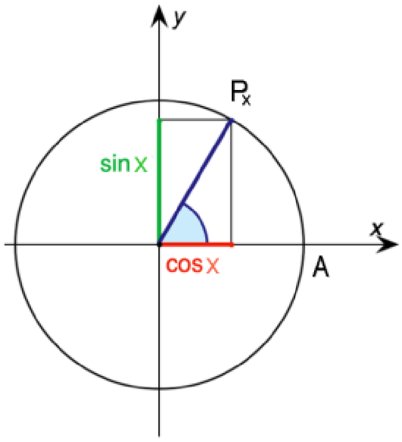
Una funuone $f : \mathbb{R} \in \mathbb{R}$ è detta periodica di periodo T, $T > 0$ se:

$$f(x+T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$$

La caratteristica fondamentale delle funzioni periodiche è che i suoi valori si ripetono dopo intervalli di ampiezza T.

3.1.1 *Le funzioni seno e coseno*

Sia γ una circonferenza di raggio 1 (detta circonferenza goniometrica) il cui centro O è anche l'origine di un sistema di assi cartesiani e sia A il punto $(1, 0)$. Partendo da A percorriamo la circonferenza in senso antiorario oppure in senso orario. Sia x un numero reale, denotiamo con P_x il punto su γ che si ottiene percorrendo la circonferenza a partire dal punto A per un arco di lunghezza $|x|$, in senso antorario se $x \geqslant 0$, oppure in senso orario se $x < 0$. Il punto P_x individua un angolo nel piano avente vertice O e delimitatio dalle semirette nel piano uscenti da O e passanti per A e per P_x. Il numero reale x rappresenta la misura dell'angolo in radianti.



(a) Circonferenza goniometrica con seno e coseno.

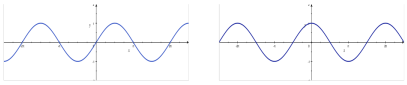
Osserviamo che l'incremento della lunghezza x di 2π corrisponde a compiere un intero giro sulla circonferenza in senso antiorario ritornando al punto P_x (così come decrementare di 2π la lunghezza x). Quindi si ha:

$$P_{x \pm k2\pi} = P_x \qquad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$$

simmetria Indichiamo con $\cos x$ e con $\sin x$ rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto P_x. Le funzioni $y = \cos x$ e $y = \sin x$ sono definite su $\mathbb{R}$ a valori nell'intervallo $[-1, 1]$, sono periodiche di minimo periodo 2π e soddisfano la relazione:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

monotonia Per la periodicità di seno e coseno ci basta studiarne le proprietà nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Dalle definizioni segue subito che la funzione seno è dispari e la funzione coseno è pari; inoltre la funzione coseno è strettamente decrescente in $[0, \pi]$ e strettamente crescente in $[\pi, 2\pi]$. La funzione seno è strettamente crescente in $[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ e strettamente decrescente in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$.



(a) Grafico delle funzioni: seno (sinistra) e coseno (destra).

3.1.1.1 *Formule trigonometriche*

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$
$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

FORMULE DI POTENZA

$$(\sin x)^2 = \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$
$$(\cos x)^2 = \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

FORMULE DI BISEZIONE

$$\sin(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad 0 < x \leqslant 2\pi$$
$$\cos(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad -\pi < x \leqslant \pi$$

FORMULE DI PROSTAFERESI

$$\sin x - \sin y = 2\sin(\frac{x-y}{2})\cos(\frac{x+y}{2})$$
$$\cos x - \cos y = -2\cos(\frac{x-y}{2})\sin(\frac{x+y}{2})$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos x \qquad \sin(x+\pi) = -\sin x$$
$$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x \qquad \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$$

3.1.2 *La funzione tangente e la funzione cotangente*

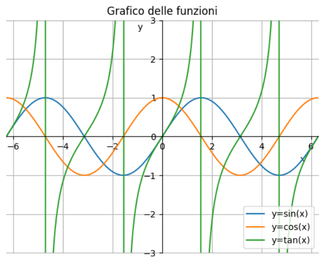
La funzione tangente è:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

è definita nei punti di $\mathbb{R}$ diversi da $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e, come vedremo in seguito, ha immagine $\mathbb{R}$.

3.1.2.1 *Proprietà fondamentali*

Dal grafico della tangente di ottiene che $\tan(x) = \tan(x + k\pi)$ per $k \in \mathbb{Z}$ cioè $\tan(x)$ è periodica di minimo periodo $T = \pi$



(a) Funzioni trigonometriche.

Parte III

APPENDIX

A APPENDIX TEST

Aliquam lectus. Vivamus leo. Quisque ornare tellus ullamcorper nulla. Mauris porttitor pharetra tortor. Sed fringilla justo sed mauris. Mauris tellus. Sed non leo. Nullam elementum, magna in cursus sodales, augue est scelerisque sapien, venenatis congue nulla arcu et pede. Ut suscipit enim vel sapien. Donec congue. Maecenas urna mi, suscipit in, placerat ut, vestibulum ut, massa. Fusce ultrices nulla et nisl.

Etiam ac leo a risus tristique nonummy. Donec dignissim tincidunt nulla. Vestibulum rhoncus molestie odio. Sed lobortis, justo et pretium lobortis, mauris turpis condimentum augue, nec ultricies nibh arcu pretium enim. Nunc purus neque, placerat id, imperdiet sed, pellentesque nec, nisl. Vestibulum imperdiet neque non sem accumsan laoreet. In hac habitasse platea dictumst. Etiam condimentum facilisis libero. Suspendisse in elit quis nisl aliquam dapibus. Pellentesque auctor sapien. Sed egestas sapien nec lectus. Pellentesque vel dui vel neque bibendum viverra. Aliquam porttitor nisl nec pede. Proin mattis libero vel turpis. Donec rutrum mauris et libero. Proin euismod porta felis. Nam lobortis, metus quis elementum commodo, nunc lectus elementum mauris, eget vulputate ligula tellus eu neque. Vivamus eu dolor.

A.1 APPENDIX SECTION TEST

Nulla in ipsum. Praesent eros nulla, congue vitae, euismod ut, commodo a, wisi. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Aenean nonummy magna non leo. Sed felis erat, ullamcorper in, dictum non, ultricies ut, lectus. Proin vel arcu a odio lobortis euismod. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Proin ut est. Aliquam odio. Pellentesque massa turpis, cursus eu, euismod nec, tempor congue, nulla. Duis viverra gravida mauris. Cras tincidunt. Curabitur eros ligula, varius ut, pulvinar in, cursus faucibus, augue.

More dummy text

Nulla mattis luctus nulla. Duis commodo velit at leo. Aliquam vulputate magna et leo. Nam vestibulum ullamcorper leo. Vestibulum condimentum rutrum mauris. Donec id mauris. Morbi molestie justo et pede. Vivamus eget turpis sed nisl cursus tempor. Curabitur mollis sapien condimentum nunc. In wisi nisl, malesuada at, dignissim sit amet, lobortis in, odio. Aenean consequat arcu a ante. Pellentesque porta elit sit amet orci. Etiam at turpis nec elit ultricies imperdiet.

LABITUR BONORUM PRI NO	QUE VISTA	HUMAN
fastidii ea ius	germano	demonstratea
suscipit instructior	titulo	personas
quaestio philosophia	facto	demonstrated

Tabella 1: Autem usu id.

Nulla facilisi. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse viverra aliquam risus. Nullam pede justo, molestie nonummy, scelerisque eu, facilisis vel, arcu.

A.2 ANOTHER APPENDIX SECTION TEST

Curabitur tellus magna, porttitor a, commodo a, commodo in, tortor. Donec interdum. Praesent scelerisque. Maecenas posuere sodales odio. Vivamus metus lacus, varius quis, imperdiet quis, rhoncus a, turpis. Etiam ligula arcu, elementum a, venenatis quis, sollicitudin sed, metus. Donec nunc pede, tincidunt in, venenatis vitae, faucibus vel, nibh. Pellentesque wisi. Nullam malesuada. Morbi ut tellus ut pede tincidunt porta. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam congue neque id dolor.

Donec et nisl at wisi luctus bibendum. Nam interdum tellus ac libero. Sed sem justo, laoreet vitae, fringilla at, adipiscing ut, nibh. Maecenas non sem quis tortor eleifend fermentum. Etiam id tortor ac mauris porta vulputate. Integer porta neque vitae massa. Maecenas tempus libero a libero posuere dictum. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Aenean quis mauris sed elit commodo placerat. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Vivamus rhoncus tincidunt libero. Etiam elementum pretium justo. Vivamus est. Morbi a tellus eget pede tristique commodo. Nulla nisl. Vestibulum sed nisl eu sapien cursus rutrum.

There is also a useless Pascal listing below: Listing 1.

Listing 1: A floating example (`listings` manual)

```
for i:=maxint downto 0 do
begin
{ do nothing }
end;
```

DECLARATION

Put your declaration here.

Rapallo, Febbraio 2019

Riccardo Cereghino

COLOPHON

This document was typeset using the typographical look-and-feel `classicthesis` developed by André Miede. The style was inspired by Robert Bringhurst's seminal book on typography "*The Elements of Typographic Style*". `classicthesis` is available for both LaTeX and LyX:

https://bitbucket.org/amiede/classicthesis/

Happy users of `classicthesis` usually send a real postcard to the author, a collection of postcards received so far is featured here:

http://postcards.miede.de/