

# CALCULUS I

RICCARDO CEREGHINO



Fuck yeah

Febbraio 2019 – version 4.2

Riccardo Cereghino: *Calculus I*, Fuck yeah, © Febbraio 2019

*Batman* Grazie di esistere

Di nuovo grazie



## ABSTRACT

---

Contenuti del corso di Calculus I



# INDICE

---

<b>I</b>	<b>INTRODUZIONE</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>NOTAZIONE</b>	<b>3</b>
1.1	Insiemi . . . . .	3
1.2	Logica . . . . .	3
1.3	Operazioni tra insiemi . . . . .	3
1.4	Prodotto cartesiano . . . . .	4
1.4.1	Intervalli . . . . .	4
1.5	Proprietà delle operazioni tra numeri reali . . . . .	4
1.6	Geometria . . . . .	6
1.6.1	Circonferenza . . . . .	6
1.6.2	Ellisse . . . . .	6
<b>II</b>	<b>FUNZIONI</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>FUNZIONI</b>	<b>9</b>
2.1	Il concetto di funzione . . . . .	9
2.2	Operazioni tra funzioni . . . . .	9
2.2.1	Nomenclatura . . . . .	9
2.3	Funzioni reali di variabile reale . . . . .	10
2.3.1	Funzioni pari e dispari . . . . .	10
2.3.2	Funzioni monotone . . . . .	10
2.4	Traslazioni, dilatazioni e riflessioni . . . . .	10
2.5	Simmetrie, traslazioni, compressioni e dilatazioni di gra- fici. . . . .	11
2.6	Funzione composta . . . . .	12
2.7	Funzione inversa e sue proprietà. . . . .	12
2.7.1	Costruire l'inverso di $f$ . . . . .	12
<b>3</b>	<b>FUNZIONI ELEMENTARI</b>	<b>13</b>
3.0.1	Polinomi . . . . .	13
3.0.2	Potenze . . . . .	13
3.0.3	Esponenziale . . . . .	15
3.0.4	Logaritmo . . . . .	15
3.1	Funzioni trigonometriche . . . . .	16
3.1.1	Le funzioni seno e coseno . . . . .	17
3.1.2	La funzione tangente e la funzione cotangente . . . . .	18
<b>III</b>	<b>APPENDIX</b>	<b>21</b>
<b>A</b>	<b>APPENDIX TEST</b>	<b>23</b>
A.1	Appendix Section Test . . . . .	23
A.2	Another Appendix Section Test . . . . .	24

## ELENCO DELLE FIGURE

---



## ELENCO DELLE TABELLE

---

Tabella 1	Autem usu id . . . . .	24
-----------	------------------------	----

## LISTINGS

---

Listing 1	A floating example (listings manual) . . . . .	24
-----------	--	----

## ACRONYMS

---

DRY Don't Repeat Yourself

API Application Programming Interface

UML Unified Modeling Language



## Parte I

### INTRODUZIONE

Argomenti introduttivi del corso



## NOTAZIONE

---

Un richiamo alla notazione che verrà utilizzata nel documento.

### 1.1 INSIEMI

$\emptyset$	Insieme vuoto
$\mathbb{N}$	Naturali compreso lo 0
$\mathbb{Z}$	Relativi
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$	Razionali
$\mathbb{R}$	Reali

### 1.2 LOGICA

$ $	tale che
$\Rightarrow$	implica
$\Leftrightarrow$	se e solo se
$\forall$	per ogni
$\exists$	esiste
$\nexists$	non esiste
$\in$	appartiene
$\notin$	non appartiene

### 1.3 OPERAZIONI TRA INSIEMI

#### A SOTTOINSIEME DI B

$$A \subseteq B$$

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

#### A SOTTOINSIEME PROPRIO

$$A \subsetneq B$$

$$\begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow x \in B \\ \exists x \in B \mid x \notin A \end{cases}$$

#### INTERSEZIONE

$$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A, x \in B\}$$

## UNIONE

$$A \cup B = \{x \in X | x \in A \text{ o } x \in B\}$$

## DIFFERENZA INSIEMISTICA

$$A \setminus B = \{x \in X | x \in A, x \notin B\}$$

## COMPLEMENTARE

$$A^C = \{x \in X | x \notin A\}$$

## 1.4 PRODOTTO CARTESIANO

Assegnati due numeri reali  $a, b$ ,  $a < b$ , si definiscono intervalli gli insiemi seguenti:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

Coppia ordinata:  $(1, 3) \neq (3, 1)$

## 1.4.1 Intervalli

intervallo limitato chiuso	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}   a \leq x \leq b\}$
intervallo limitato aperto	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}   a < x < b\}$
intervallo limitato aperto a destra	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}   a \leq x < b\}$
intervallo limitato aperto a sinistra	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}   a < x \leq b\}$
intervallo illimitato chiuso a sinistra	$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}   x \geq a\}$
intervallo illimitato aperto a sinistra	$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}   x > a\}$
intervallo illimitato chiuso a destra	$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}   x \leq b\}$
intervallo illimitato aperto a destra	$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}   x < b\}$
intervallo illimitato	$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

## 1.5 PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI TRA NUMERI REALI

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

## • Associativa

$$(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$$

$$(xy)z = x(yz) = xyz$$

## • Commutativa

$$x + y = y + x$$

$$xy = yx$$



- Distributiva

$$x(y + z) = xy + xz$$

- Esistenza elemento neutro

$$x + 0 = x$$

$$1x = x$$

- Esistenza dell'universo

1.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! y = -x \in \mathbb{R} | x + (-x) = 0$$

2.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 0 \quad \exists! y = \frac{1}{x} \in \mathbb{R} | x \frac{1}{x} = 1$$

- Relazione d'ordine totale

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x < y & \text{oppure} \\ x = y & \text{oppure} \\ x > y \end{cases}$$

- Transitività

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$(x < y) \cap (y < z) \Rightarrow (x < z)$$

- Compatibilità con la somma

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z$$

- Compatibilità con il prodotto

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$x < y \cap z > 0 \Rightarrow xz < yz$$

$$x < y \cap z < 0 \Rightarrow xz > yz$$

## 1.6 GEOMETRIA

## 1.6.1 Circonferenza

Dato il centro di una circonferenza  $C = (x_c, y_c)$  Si esprime l'equazione della circonferenza nella forma:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = r^2$$

Per cui se  $O = (0, 0)$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

FORMA CANONICA:

$$\alpha = -2x_c \quad \beta = -2y_c \quad \gamma = x_c^2 + y_c^2 - r^2$$

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = r^2$$

Da cui calcolare centro e raggio:

$$C = \left( -\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2} \right); \quad r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}$$

## 1.6.2 Ellisse

Equazione dell'ellisse (con centro nell'origine degli assi)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad a \neq 0, b \neq 0$$

Parte II

FUNZIONI



## FUNZIONI

## 2.1 IL CONCETTO DI FUNZIONE

**Definizione:** una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  dove  $A \subseteq \mathbb{R}$  è una legge che assegna ad ogni  $x \in A$  uno ed un solo valore  $y = f(x) \in \mathbb{R}$

*Nota:* in questo caso, i valori di  $A$  sono chiamati variabile indipendente ( $x$ ), mentre  $\mathbb{R}$  è la variabile dipendente  $y = f(x)$

*Nota:* inoltre definiamo  $A = \text{dom } f$  come il dominio della funzione.

**Definizione:** Il grafico di  $f$ :

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A, y = f(x)\}$$

**Definizione:** L'immagine di  $f$ ,  $\text{Im } f$ :

$$f(A) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in A\}$$

## 2.2 OPERAZIONI TRA FUNZIONI

Date due funzioni  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$        $g : B \rightarrow \mathbb{R}$

**SOMMA E DIFFERENZA:**  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$        $\text{dom}(f + g) = A \cap B$

**PRODOTTO:**  $(fg)(x) = f(x)g(x)$        $\text{dom}(fg) = (A \cap B)$

**RAPPORTO:**  $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$        $\text{dom}(\frac{f}{g}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A, x \in B, g(x) \neq 0\}$

**RECIPROCO:**  $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}$        $\text{dom}(\frac{1}{f}) = x \in A \mid f(x) \neq 0$

## 2.2.1 Nomenclatura

Data una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$

- $f$  è detta **iniettiva** se  $\forall y_0 \in \mathbb{R}, f(x) = y_0$  ha al più una soluzione.
- $f$  è detta **surgettiva** se  $\forall y_0 \in \mathbb{R}, f(x) = y_0$  ha almeno una soluzione.
- $f$  è detta **bigettiva** se  $\forall y_0 \in \mathbb{R}, f(x) = y_0$  ha una ed una sola soluzione, ovvero se la funzione è sia iniettiva che surgettiva.

## 2.2.1.1 Osservazioni

1.  $f$  è surgettiva se e solo se  $\text{IM}f = \mathbb{R}$
2.  $f$  è iniettiva se e solo se  $y_0 \in \text{IM}f, f(x) = y_0$  ha al più una soluzione.

Data una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$  sono fatti equivalenti:

- $f$  è iniettiva
- $\forall x_1, x_2 \in A \cap x_1 \neq x_2$  allora  $f(x_1) \neq f(x_2)$
- dati  $x_1, x_2 \in A | f(x_1) = f(x_2)$  allora  $x_1 = x_2$

## 2.3 FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

## 2.3.1 Funzioni pari e dispari

Data una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x), \forall x \in A$   $-x \in A$   $f$  è detta:

$$f(-x) = \begin{cases} f(x) & \text{pari} \\ -f(x) & \text{dispari} \end{cases}$$

## 2.3.2 Funzioni monotone

Data una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$

- $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2$   $f$  è detta:

$$\begin{cases} f(x_1) \leq f(x_2) & \text{crescente} \\ f(x_1) \geq f(x_2) & \text{decrescente} \end{cases}$$

- $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2$   $f$  è detta:

$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) & \text{strettamentecrescente} \\ f(x_1) > f(x_2) & \text{strettamentedecrescente} \end{cases}$$

## 2.4 TRASLAZIONI, DILATAZIONI E RIFLESSIONI

Data una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ :

TRASLAZIONI:  $x_0 > 0, y_0 \in \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x - x_0) \text{ Traslazione verso destra}$$

$$g(x) = f(x + x_0) \text{ Traslazione verso sinistra}$$

$$g(x) = f(x) + y_0 \text{ Traslazione verso l'alto}$$

$$g(x) = f(x) - y_0 \text{ Traslazione verso il basso}$$

DILATAZIONI:  $a > 0$

$$g(x) = f\left(\frac{x}{a}\right) \text{ Dilata su asse } x$$

$$g(x) = a \times f(x) \text{ Dilata su asse } y$$

RIFLESSIONI:

$$g(x) = f(-x) \text{ Riflette su asse } y$$

$$g(x) = -f(x) \text{ Riflette su asse } x$$

$$g(x) = -f(-x) \text{ Riflette rispetto l'origine}$$

#### 2.4.0.1 Osservazioni

Se  $f(x)$  è dispari e  $0 \in \text{dom } f$

$$f(0) = f(-0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Se  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$$f(x) = x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ volte}}$$

- se  $n$  è pari,  $f$  è pari
- se  $n$  è dispari,  $f$  è dispari

## 2.5 SIMMETRIE, TRASLAZIONI, COMPRESSIONI E DILATAZIONI DI GRAFICI.

Data una funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ :

TRASLAZIONI:  $x_0 > 0$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x - x_0) \text{ Traslazione verso destra}$$

$$g(x) = f(x + x_0) \text{ Traslazione verso sinistra}$$

$$g(x) = f(x) + y_0 \text{ Traslazione verso l'alto}$$

$$g(x) = f(x) - y_0 \text{ Traslazione verso il basso}$$

DILATAZIONI:  $a > 0$

$$g(x) = f\left(\frac{x}{a}\right) \text{ Dilata su asse } x$$

$$g(x) = a \times f(x) \text{ Dilata su asse } y$$

RIFLESSIONI:

$$g(x) = f(-x) \text{ Riflette su asse } y$$

$$g(x) = -f(x) \text{ Riflette su asse } x$$

$$g(x) = -f(-x) \text{ Riflette rispetto l'origine}$$

## 2.6 FUNZIONE COMPOSTA

Date due funzioni  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$   $g : B \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) \quad \text{dom } g \circ f(x) = \{x \in A \mid f(x) \in \text{se n dispari } B\}$$

## 2.7 FUNZIONE INVERSA E SUE PROPRIETÀ.

Data una funzione iniettiva  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall y \in f = f(A), \exists! x \in A \mid f(x) = y$$

Da cui si ricava che:

$$x = f^{-1}(y) \quad f^{-1} : B \rightarrow \mathbb{R} \quad B = \text{Im}f$$

2.7.1 Costruire l'inverso di  $f$ 

1. Determinare  $\text{Im}f = B$  e  $\text{dom}f^{-1} = B$
2.  $y \in B$  determiniamo  $x \in A \mid f(x) = y$
3.  $x = f^{-1}(y)$
4.  $y = f^{-1}(x) \quad x \leftrightarrow y$

Il grafico di  $y = f^{-1}(x)$  è simmetrico rispetto alla bisettrice  $x = y$  della funzione  $y = f(x)$

## 2.7.1.1 Osservazioni

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in \text{dom}f^{-1} = \text{Im}f$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in \text{dom}f = \text{Im}f^{-1}$$

Inoltre  $f$  è invertibile se e solo se è iniettiva o surgettiva, da cui:

$$g^{-1} : \text{Im}f \rightarrow \mathbb{R}$$



## FUNZIONI ELEMENTARI

## 3.0.1 Polinomi

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  Coefficienti  $a_n \neq 0$   $n$  è il grado del polinomio

Per cui:

$$n = 1 \quad y = a_0 + a_1x \quad \text{Rette}$$

$$n = 2 \quad y = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad \text{Parabole}$$

## 3.0.2 Potenze

Fissato un esponente  $a \in \mathbb{R}$  la funzione potenza è:

$$f(x) = x^a$$

la cui definizione e dominio dipendono dal valore dell'esponente  $a$ .

- $a = n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ volte}} \quad \text{dom } f = \mathbb{R} \quad \text{Im } f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } n \text{ dispari} \\ [0, +\infty) & \text{se } n \text{ pari } n \neq 0 \\ \{0\} & n = 0 \end{cases}$$

- $a = -n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

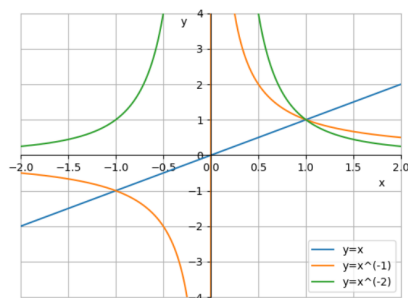
$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{Im } f = \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & n \text{ dispari} \\ (0, +\infty) & n \text{ pari} \end{cases}$$

- $a = \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \quad \text{dom } f = \begin{cases} \mathbb{R} & n \text{ dispari} \\ [0, +\infty) & n \text{ pari} \end{cases} \quad \text{Im } f = \begin{cases} \mathbb{R} & n \text{ dispari} \\ [0, +\infty) & n \text{ pari} \end{cases}$$

- $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1, m \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \quad \text{dom } f = (0, +\infty) \quad \text{Im } f = (0, +\infty)$$



(a) Potenze.

- $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^a = \begin{cases} \sup\{x^q | q \in \mathbb{Q}, q \leq a\} & x \geq 1 \\ \inf\{x^q | q \in \mathbb{Q}, q \leq a\} & 0 < x < 1 \end{cases} \quad \text{dom } f = (0, +\infty) \quad \text{Im } f = (0, +\infty)$$

Osserviamo che:

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 1$
- se  $n$  pari  $f$  è pari
- se  $n$  dispari  $f$  è dispari

### 3.0.2.1 Proprietà delle potenze

- $x^{n+m} = x^n x^m$
- $(x^n)^m = x^{nm}$

#### OSSERVAZIONI

$$f(x) = x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$0^0 = 1$$

#### DIMOSTRAZIONI

$$x^{n+m} = \underbrace{x \times \dots \times x}_{n+m \text{ volte}} = \underbrace{(x \times \dots \times x)}_{n \text{ volte}} \times \underbrace{x \times \dots \times x}_{m \text{ volte}} = x^{n+m}$$

$$(x^n)^m = \underbrace{x^n \times \dots \times x^n}_{m \text{ volte}}$$

$$x^n = x^{n+0} = x^n x^0 \quad x \neq 0$$

$$x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

### 3.0.3 Esponenziale

Fissata la base  $a > 0$  con  $a \neq 1$ , la funzione esponenziale è

$$f(x) = a^x \quad \text{dom } f = \mathbb{R} \quad \text{Im } f = (0, +\infty)$$

Se si sceglie come base il numero di Nepero  $e = 2.71828 \dots > 1$ , la funzione esponenziale si denota:

$$f(x) = e^x = \exp x$$

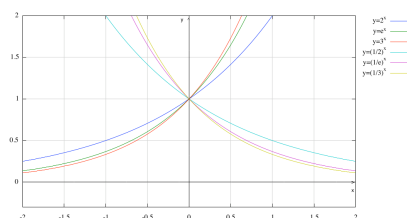
#### 3.0.3.1 Proprietà

1. se  $a > 1$ , allora la funzione  $a^x$  è strettamente crescente
2. se  $0 < a < 1$ , allora la funzione  $a^x$  è strettamente decrescente
3. se  $0 < a < b$  con  $a, b \neq 1$

$$\begin{cases} a^x < b^x & x > 0 \\ a^x > b^x & x < 0 \end{cases}$$

4. valgono le seguenti proprietà:

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} a^{x_2} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \quad x \in \mathbb{R}$
- $(a^x)^b = a^{bx} \quad x, b \in \mathbb{R}$



(a) Esponenziali.

### 3.0.4 Logaritmo

Fissata la base  $a > 0$  con  $a \neq 1$ , la funzione logaritmo

$$f(x) = \log_a x \quad \text{dom } f = (0, +\infty) \quad \text{Im } f = \mathbb{R}$$

è definita come la funzione inversa della funzione esponenziale  $a^x$ . Se si sceglie come base il numero di Nepero  $e$ , il logaritmo si denota:

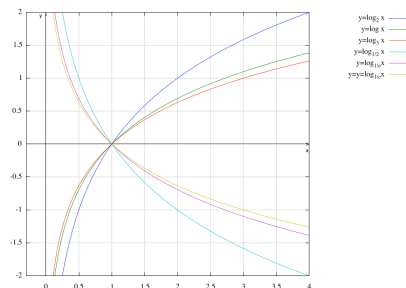
$$f(x) = \log_e = \log x = \ln x$$

1. se  $a > 1$ , allora la funzione  $\log_a x$  è strettamente crescente
2. se  $0 < a < 1$ , allora la funzione  $\log_a x$  è strettamente decrescente
3. se  $0 < a < b$  con  $a, b \neq 1$

$$\begin{cases} \log_a x > \log_b x & \text{se } x > 1 \\ \log_a x < \log_b x & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

4. valgono le seguenti proprietà:

- $\log_a a^x = x \quad x > 1$
- $a^{\log_a x} = x \quad x > 0$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \quad x_1, x_2 > 0$
- $\log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2 \quad x_1, x_2 > 0$
- $\log_a x^b = b \log_a x \quad x > 0, b \in \mathbb{R}$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a} \quad x > 0, b > 0, b \neq 1$
- $a^x = e^{(\ln a)x} \quad x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$



(a) Logaritmi.

### 3.1 FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

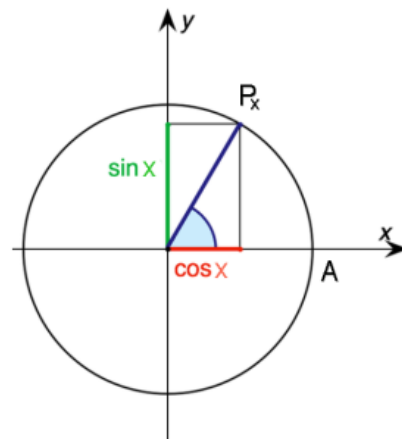
Una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è detta periodica di periodo  $T$ ,  $T > 0$  se:

$$f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La caratteristica fondamentale delle funzioni periodiche è che i suoi valori si ripetono dopo intervalli di ampiezza  $T$ .

## 3.1.1 Le funzioni seno e coseno

Sia  $\gamma$  una circonferenza di raggio 1 (detta circonferenza goniometrica) il cui centro  $O$  è anche l'origine di un sistema di assi cartesiani e sia  $A$  il punto  $(1, 0)$ . Partendo da  $A$  percorriamo la circonferenza in senso antiorario oppure in senso orario. Sia  $x$  un numero reale, denotiamo con  $P_x$  il punto su  $\gamma$  che si ottiene percorrendo la circonferenza a partire dal punto  $A$  per un arco di lunghezza  $|x|$ , in senso antiorario se  $x \geq 0$ , oppure in senso orario se  $x < 0$ . Il punto  $P_x$  individua un angolo nel piano avente vertice  $O$  e delimitato dalle semirette nel piano uscenti da  $O$  e passanti per  $A$  e per  $P_x$ . Il numero reale  $x$  rappresenta la misura dell'angolo in radianti.



(a) Circonferenza goniometrica con seno e coseno.

Osserviamo che l'incremento della lunghezza  $x$  di  $2\pi$  corrisponde a compiere un intero giro sulla circonferenza in senso antiorario ritornando al punto  $P_x$  (così come decrementare di  $2\pi$  la lunghezza  $x$ ). Quindi si ha:

$$P_{x \pm k2\pi} = P_x \quad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$$

**SIMMETRIA** Indichiamo con  $\cos x$  e con  $\sin x$  rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto  $P_x$ . Le funzioni  $y = \cos x$  e  $y = \sin x$  sono definite su  $\mathbb{R}$  a valori nell'intervallo  $[-1, 1]$ , sono periodiche di minimo periodo  $2\pi$  e soddisfano la relazione:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

**MONOTONIA** Per la periodicità di seno e coseno ci basta studiarne le proprietà nell'intervallo  $[0, 2\pi]$ . Dalle definizioni segue subito che la funzione seno è dispari e la funzione coseno è pari; inoltre la funzione coseno è strettamente decrescente in  $[0, \pi]$  e strettamente crescente in  $[\pi, 2\pi]$ . La funzione seno è strettamente crescente in  $[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$  e strettamente decrescente in  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ .



(a) Grafico delle funzioni: seno (sinistra) e coseno (destra).

3.1.1.1 *Formule trigonometriche*

## FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

## FORMULE DI DUPLICAZIONE

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$$

## FORMULE DI POTENZA

$$(\sin x)^2 = \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$(\cos x)^2 = \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

## FORMULE DI BISEZIONE

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad 0 < x \leq 2\pi$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \quad -\pi < x \leq \pi$$

## FORMULE DI PROSTAFERESI

$$\sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x \quad \sin(x + \pi) = -\sin x$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

3.1.2 *La funzione tangente e la funzione cotangente*

La funzione tangente è:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

è definita nei punti di  $\mathbb{R}$  diversi da  $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  e, come vedremo in seguito, ha immagine  $\mathbb{R}$ .

3.1.2.1 *Proprietà fondamentali*

Dal grafico della tangente si ottiene che  $\tan(x) = \tan(x + k\pi)$  per  $k \in \mathbb{Z}$  cioè  $\tan(x)$  è periodica di minimo periodo  $T = \pi$



(a) Funzioni trigonometriche.





## Parte III

### APPENDIX



## APPENDIX TEST

Aliquam lectus. Vivamus leo. Quisque ornare tellus ullamcorper nulla. Mauris porttitor pharetra tortor. Sed fringilla justo sed mauris. Mauris tellus. Sed non leo. Nullam elementum, magna in cursus sodales, augue est scelerisque sapien, venenatis congue nulla arcu et pede. Ut suscipit enim vel sapien. Donec congue. Maecenas urna mi, suscipit in, placerat ut, vestibulum ut, massa. Fusce ultrices nulla et nisl.

Etiam ac leo a risus tristique nonummy. Donec dignissim tincidunt nulla. Vestibulum rhoncus molestie odio. Sed lobortis, justo et pretium lobortis, mauris turpis condimentum augue, nec ultricies nibh arcu pretium enim. Nunc purus neque, placerat id, imperdiet sed, pellentesque nec, nisl. Vestibulum imperdiet neque non sem accumsan laoreet. In hac habitasse platea dictumst. Etiam condimentum facilisis libero. Suspendisse in elit quis nisl aliquam dapibus. Pellentesque auctor sapien. Sed egestas sapien nec lectus. Pellentesque vel dui vel neque bibendum viverra. Aliquam porttitor nisl nec pede. Proin mattis libero vel turpis. Donec rutrum mauris et libero. Proin euismod porta felis. Nam lobortis, metus quis elementum commodo, nunc lectus elementum mauris, eget vulputate ligula tellus eu neque. Vivamus eu dolor.

## A.1 APPENDIX SECTION TEST

Nulla in ipsum. Praesent eros nulla, congue vitae, euismod ut, commodo a, wisi. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Aenean nonummy magna non leo. Sed felis erat, ullamcorper in, dictum non, ultricies ut, lectus. Proin vel arcu a odio lobortis euismod. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Proin ut est. Aliquam odio. Pellentesque massa turpis, cursus eu, euismod nec, tempor congue, nulla. Duis viverra gravida mauris. Cras tincidunt. Curabitur eros ligula, varius ut, pulvinar in, cursus faucibus, augue.

*More dummy text*

Nulla mattis luctus nulla. Duis commodo velit at leo. Aliquam vulputate magna et leo. Nam vestibulum ullamcorper leo. Vestibulum condimentum rutrum mauris. Donec id mauris. Morbi molestie justo et pede. Vivamus eget turpis sed nisl cursus tempor. Curabitur mollis sapien condimentum nunc. In wisi nisl, malesuada at, dignissim sit amet, lobortis in, odio. Aenean consequat arcu a ante. Pellentesque porta elit sit amet orci. Etiam at turpis nec elit ultricies imperdiet.

LABITUR BONORUM PRI NO	QUE VISTA	HUMAN
fastidii ea ius	germano	demonstratea
suscipit instructor	titulo	personas
quaestio philosophia	facto	demonstrated

Tabella 1: Autem usu id.

Nulla facilisi. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse viverra aliquam risus. Nullam pede justo, molestie nonummy, scelerisque eu, facilisis vel, arcu.

## A.2 ANOTHER APPENDIX SECTION TEST

Curabitur tellus magna, porttitor a, commodo a, commodo in, tortor. Donec interdum. Praesent scelerisque. Maecenas posuere sodales odio. Vivamus metus lacus, varius quis, imperdiet quis, rhoncus a, turpis. Etiam ligula arcu, elementum a, venenatis quis, sollicitudin sed, metus. Donec nunc pede, tincidunt in, venenatis vitae, faucibus vel, nibh. Pellentesque wisi. Nullam malesuada. Morbi ut tellus ut pede tincidunt porta. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam congue neque id dolor.

Donec et nisl at wisi luctus bibendum. Nam interdum tellus ac libero. Sed sem justo, laoreet vitae, fringilla at, adipiscing ut, nibh. Maecenas non sem quis tortor eleifend fermentum. Etiam id tortor ac mauris porta vulputate. Integer porta neque vitae massa. Maecenas tempus libero a libero posuere dictum. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Aenean quis mauris sed elit commodo placerat. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Vivamus rhoncus tincidunt libero. Etiam elementum pretium justo. Vivamus est. Morbi a tellus eget pede tristique commodo. Nulla nisl. Vestibulum sed nisl eu sapien cursus rutrum.

There is also a useless Pascal listing below: [Listing 1](#).

Listing 1: A floating example (listings manual)

```

1 for i:=maxint downto 0 do
  begin
    { do nothing }
  end;
```

## DECLARATION

---

Put your declaration here.

*Rapallo, Febbraio 2019*

---

Riccardo Cereghino



## COLOPHON

This document was typeset using the typographical look-and-feel `classicthesis` developed by André Miede. The style was inspired by Robert Bringhurst's seminal book on typography "*The Elements of Typographic Style*". `classicthesis` is available for both  $\text{\LaTeX}$  and  $\text{\LyX}$ :

<https://bitbucket.org/amiede/classicthesis/>

Happy users of `classicthesis` usually send a real postcard to the author, a collection of postcards received so far is featured here:

<http://postcards.miede.de/>