

Calculus I

Riccardo Cereghino
S4651066

March 14, 2019

Contents

1	Notazione	1
1.1	Insiemi	1
1.2	Logica	1
1.3	Operazioni tra insiemi	2
1.4	Prodotto cartesiano	2
1.4.1	Intervalli	2
1.5	Proprietà delle operazioni tra numeri reali	3
1.6	Geometria	4
1.6.1	Circonferenza	4
1.6.2	Ellisse	4
2	Funzioni	5
2.1	Il concetto di funzione	5
2.2	Operazioni tra funzioni	5
2.2.1	Nomenclatura	5
2.3	Funzioni reali di variabile reale	6
2.3.1	Funzioni pari e dispari	6
2.3.2	Funzioni monotone	6
2.4	Traslazioni, dilatazioni e riflessioni	7
2.5	Simmetrie, traslazioni, compressioni e dilatazioni di grafici.	7
2.6	Funzione composta	8
2.7	Funzione inversa e sue proprietà.	8
2.7.1	Costruire l'inverso di f	8
2.8	Funzioni elementari	9
2.8.1	Polinomi	9
2.8.2	Potenze	9
2.8.3	Esponenziale	11
2.8.4	Logaritmo	12
2.9	Funzioni trigonometriche	13
2.9.1	Le funzioni seno e coseno	13
2.9.2	La funzione tangente e la funzione cotangente	15

Chapter 1

Notazione

1.1 Insiemi

- \emptyset = Insieme vuoto
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3\ldots\}$ = Naturali
- $\mathbb{Z} = \{\ldots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\ldots\}$ = Relativi
- $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} | n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$ = Razionali
- \mathbb{R} = Reali

1.2 Logica

- $|$ tale che
- \Rightarrow implica
- \Leftrightarrow se e solo se
- \forall per ogni
- \exists esiste
- \nexists non esiste
- \in appartiene
- \notin non appartiene

1.3 Operazioni tra insiemi

- A sottoinsieme di B

$$A \subseteq B$$
$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

- A sottoinsieme proprio

$$A \subsetneq B$$
$$\begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow x \in B \\ \exists x \in B | x \notin A \end{cases}$$

- Intersezione

$$A \cap B = \{x \in X | x \in A, x \in B\}$$

- Unione

$$A \cup B = \{x \in X | x \in A \text{ o } x \in B\}$$

- Differenza insiemistica

$$A \setminus B = \{x \in X | x \in A, x \notin B\}$$

- Complementare

$$A^C = \{x \in X | x \notin A\}$$

1.4 Prodotto cartesiano

Assegnati due numeri reali $a, b, a < b$, si definiscono intervalli gli insiemi seguenti:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

Coppia ordinata: $(1, 3) \neq (3, 1)$

1.4.1 Intervalli

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

1.5 Proprietà delle operazioni tra numeri reali

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

- Associativa

$$(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$$

$$(xy)z = x(yz) = xyz$$

- Commutativa

$$x + y = y + x$$

$$xy = yx$$

- Distributiva

$$x(y + z) = xy + xz$$

- Esistenza elemento neutro

$$x + 0 = x$$

$$1x = x$$

- Esistenza dell'universo

1.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! y = -x \in \mathbb{R} | x + (-x) = 0$$

2.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 0 \quad \exists! y = \frac{1}{x} \in \mathbb{R} | x \frac{1}{x} = 1$$

- Relazione d'ordine totale

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x < y & \text{oppure} \\ x = y & \text{oppure} \\ x > y \end{cases}$$

- Transitività

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$(x < y) \cap (y < z) \Rightarrow (x < z)$$

- Compatibilità con la somma

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z$$

- Compatibilità con il prodotto

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$x < y \cap z > 0 \Rightarrow xz < yz$$

$$x < y \cap z < 0 \Rightarrow xz > yz$$

1.6 Geometria

1.6.1 Circonferenza

Dato il centro di una circonferenza $C = (x_c, y_c)$ Si esprime l'equazione della circonferenza nella forma:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = r^2$$

Per cui se $O = (0, 0)$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Forma canonica:

$$\alpha = -2x_c \quad \beta = -2y_c \quad \gamma = x_c^2 + y_c^2 - r^2$$

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = r^2$$

Da cui calcolare centro e raggio:

$$C = \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2} \right); \quad r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}$$

1.6.2 Ellisse

Equazione dell'ellisse (con centro nell'origine degli assi)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad a \neq 0, b \neq 0$$

Chapter 2

Funzioni

2.1 Il concetto di funzione

Definizione: una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dove $A \subseteq \mathbb{R}$ è una legge che assegna ad ogni $x \in A$ uno ed un solo valore $y = f(x) \in \mathbb{R}$

Nota: in questo caso, i valori di A sono chiamati variabile indipendente (x), mentre \mathbb{R} è la variabile dipendente $y = f(x)$

Nota: inoltre definiamo $A = \text{dom } f$ come il dominio della funzione.

Definizione: Il grafico di f :

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A, y = f(x)\}$$

Definizione: L'immagine di f , Im f :

$$f(A) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in A\}$$

2.2 Operazioni tra funzioni

Date due funzioni $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ $g : B \rightarrow \mathbb{R}$

Somma e differenza: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ $\text{dom}(f + g) = A \cap B$

Prodotto: $(fg)(x) = f(x)g(x)$ $\text{dom}(fg) = (A \cap B)$

Rapporto: $(\frac{f}{g})(x) = f(x)g(x)$ $\text{dom}(\frac{f}{g}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A, x \in B, g(x) \neq 0\}$

Reciproco: $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1}$ $\text{dom}(\frac{1}{f}) = \{x \in A \mid f(x) \neq 0\}$

2.2.1 Nomenclatura

Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$

- f è detta **iniettiva** se $\forall y_0 \in \mathbb{R}, f(x) = y_0$ ha al più una soluzione.

- f è detta **surgettiva** se $\forall y_0 \in \mathbb{R}, f(x) = y_0$ ha almeno una soluzione.
- f è detta **bigettiva** se $\forall y_0 \in \mathbb{R}, f(x) = y_0$ ha una ed una sola soluzione, ovvero se la funzione è sia iniettiva che surgettiva.

Osservazioni

1. f è surgettiva se e solo se $IMf = \mathbb{R}$
2. f è iniettiva se e solo se $y_0 \in IMf, f(x) = y_0$ ha al più una soluzione.

Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$ sono fatti equivalenti:

- f è iniettiva
- $\forall x_1, x_2 \in A \cap x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$
- dati $x_1, x_2 \in A | f(x_1) = f(x_2)$ allora $x_1 = x_2$

2.3 Funzioni reali di variabile reale

2.3.1 Funzioni pari e dispari

Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x), \forall x \in A \quad -x \in A$ f è detta:

$$f(-x) = \begin{cases} f(x) & \text{pari} \\ -f(x) & \text{dispari} \end{cases}$$

2.3.2 Funzioni monotone

Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}, y = f(x)$

- $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2$ f è detta:

$$\begin{cases} f(x_1) \leq f(x_2) & \text{crescente} \\ f(x_1) \geq f(x_2) & \text{decrescente} \end{cases}$$

- $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2$ f è detta:

$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) & \text{strettamentecrescente} \\ f(x_1) > f(x_2) & \text{strettamentedecrescente} \end{cases}$$

2.4 Traslazioni, dilatazioni e riflessioni

Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$:

Traslazioni: $x_0 > 0$, $y_0 \in \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x - x_0) \text{ Traslazione verso destra}$$

$$g(x) = f(x + x_0) \text{ Traslazione verso sinistra}$$

$$g(x) = f(x) + y_0 \text{ Traslazione verso l'alto}$$

$$g(x) = f(x) - y_0 \text{ Traslazione verso il basso}$$

Dilatazioni: $a > 0$

$$g(x) = f\left(\frac{x}{a}\right) \text{ Dilata su asse } x$$

$$g(x) = a \times f(x) \text{ Dilata su asse } y$$

Riflessioni:

$$g(x) = f(-x) \text{ Riflette su asse } y$$

$$g(x) = -f(x) \text{ Riflette su asse } x$$

$$g(x) = -f(-x) \text{ Riflette rispetto l'origine}$$

Osservazioni

Se $f(x)$ è dispari e $0 \in \text{dom } f$

$$f(0) = f(-0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Se $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$$f(x) = x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ volte}}$$

- se n è pari, f è pari
- se n è dispari, f è dispari

2.5 Simmetrie, traslazioni, compressioni e dilatazioni di grafici.

Data una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$:

Traslazioni: $x_0 > 0, \quad y_0 \in \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x - x_0) \text{ Traslazione verso destra}$$

$$g(x) = f(x + x_0) \text{ Traslazione verso sinistra}$$

$$g(x) = f(x) + y_0 \text{ Traslazione verso l'alto}$$

$$g(x) = f(x) - y_0 \text{ Traslazione verso il basso}$$

Dilatazioni: $a > 0$

$$g(x) = f\left(\frac{x}{a}\right) \text{ Dilata su asse } x$$

$$g(x) = a \times f(x) \text{ Dilata su asse } y$$

Riflessioni:

$$g(x) = f(-x) \text{ Riflette su asse } y$$

$$g(x) = -f(x) \text{ Riflette su asse } x$$

$$g(x) = -f(-x) \text{ Riflette rispetto l'origine}$$

2.6 Funzione composta

Date due funzioni $f : A \rightarrow \mathbb{R} \quad g : B \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) \quad \text{dom } g \circ f(x) = \{x \in A \mid f(x) \in \text{se n dispari } B\}$$

2.7 Funzione inversa e sue proprietà.

Data una funzione iniettiva $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall y \in f = f(A), \exists! x \in A \mid f(x) = y$$

Da cui si ricava che:

$$x = f^{-1}(y) \quad f^{-1} : B \rightarrow \mathbb{R} \quad B = \text{Im } f$$

2.7.1 Costruire l'inverso di f

1. Determinare $\text{Im } f = B$ e $\text{dom } f^{-1} = B$

2. $y \in B$ determiniamo $x \in A \mid f(x) = y$

3. $x = f^{-1}(y)$

4. $y = f^{-1}(x) \quad x \rightleftarrows y$

Il grafico di $y = f^{-1}(x)$ è simmetrico rispetto alla bisettrice $x = y$ della funzione $y = f(x)$

Osservazioni

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in \text{dom} f^{-1} = \text{Im} f$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in \text{dom} f = \text{Im} f^{-1}$$

Inoltre f è invertibile se e solo se è iniettiva o surgettiva, da cui:

$$g^{-1} : \text{Im} f \rightarrow \mathbb{R}$$

2.8 Funzioni elementari

2.8.1 Polinomi

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k$$

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ Coefficienti $a_n \neq 0$ n è il grado del polinomio

Per cui:

$$n = 1 \quad y = a_0 + a_1x \quad \text{Rette}$$

$$n = 2 \quad y = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad \text{Parabole}$$

2.8.2 Potenze

Fissato un esponente $a \in \mathbb{R}$ la funzione potenza è:

$$f(x) = x^a$$

la cui definizione e dominio dipendono dal valore dell'esponente a .

- $a = n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = x^n = \underbrace{x \times \dots \times x}_{n \text{ volte}} \quad \text{dom } f = \mathbb{R} \quad \text{Im } f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } n \text{ dispari} \\ [0, +\infty) & \text{se } n \text{ pari } n \neq 0 \\ \{0\} & n = 1 \end{cases}$$

- $a = -n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{Im } f = \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0\} & n \text{ dispari} \\ (0, +\infty) & n \text{ pari} \end{cases}$$

- $a = \frac{1}{n} \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \quad \text{dom } f = \begin{cases} \mathbb{R} & n \text{ dispari} \\ [0, +\infty) & n \text{ pari} \end{cases} \quad \text{Im } f = \begin{cases} \mathbb{R} & n \text{ dispari} \\ [0, +\infty) & n \text{ pari} \end{cases}$$

- $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1, m \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \quad \text{dom } f = (0, +\infty) \quad \text{Im } f = (0, +\infty)$$

- $a \in \mathbb{R}$

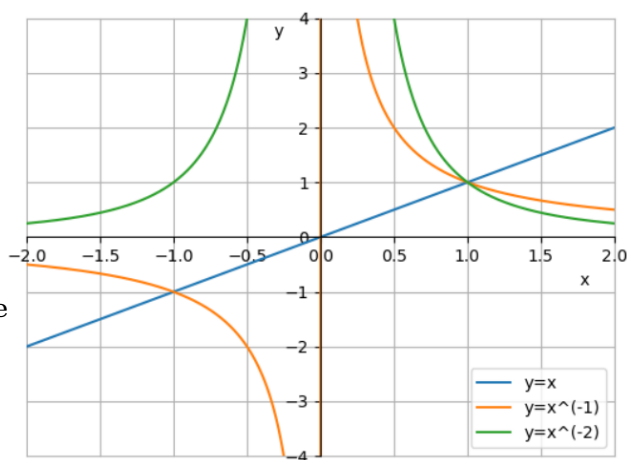
$$f(x) = x^a = \begin{cases} \sup\{x^q | q \in \mathbb{Q}, q \leq a\} & x \geq 1 \\ \inf\{x^q | q \in \mathbb{Q}, q \leq a\} & 0 < x < 1 \end{cases} \quad \text{dom } f = (0, +\infty) \quad \text{Im } f = (0, +\infty)$$

Osserviamo che:

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 1$
- se n pari f è pari
- se n dispari f è dispari

Proprietà delle potenze

- $x^{n+m} = x^n x^m$
- $(x^n)^m = x^{nm}$



Osservazioni

$$f(x) = x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Figure 2.1: Potenze

$$0^0 = 1$$

Dimostrazioni

$$x^{n+m} = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n+m \text{ volte}} = \underbrace{(x \times \cdots \times x)}_{n \text{ volte}} \times \underbrace{x \times \cdots \times x}_{m \text{ volte}} = x^{n+m}$$

$$(x^n)^m = \underbrace{x^n \times \cdots \times x^n}_{m \text{ volte}}$$

$$x^n = x^{n+0} = x^n x^0 \quad x \neq 0$$

$$x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2.8.3 Esponenziale

Fissata la base $a > 0$ con $a \neq 1$, la funzione esponenziale è

$$f(x) = a^x \quad \text{dom } f = \mathbb{R} \quad \text{Im } f = (0, +\infty)$$

Se si sceglie come base il numero di Nepero $e = 2.71828 \dots > 1$, la funzione esponenziale si denota:

$$f(x) = e^x = \exp x$$

Proprietà

1. se $a > 1$, allora la funzione a^x è strettamente crescente
2. se $0 < a < 1$, allora la funzione a^x è strettamente decrescente
3. se $0 < a < b$ con $a, b \neq 1$

$$\begin{cases} a^x < b^x & x > 0 \\ a^x > b^x & x < 0 \end{cases}$$

4. valgono le seguenti proprietà:

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} a^{x_2} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \quad x \in \mathbb{R}$
- $(a^x)^b = a^{bx} \quad x, b \in \mathbb{R}$

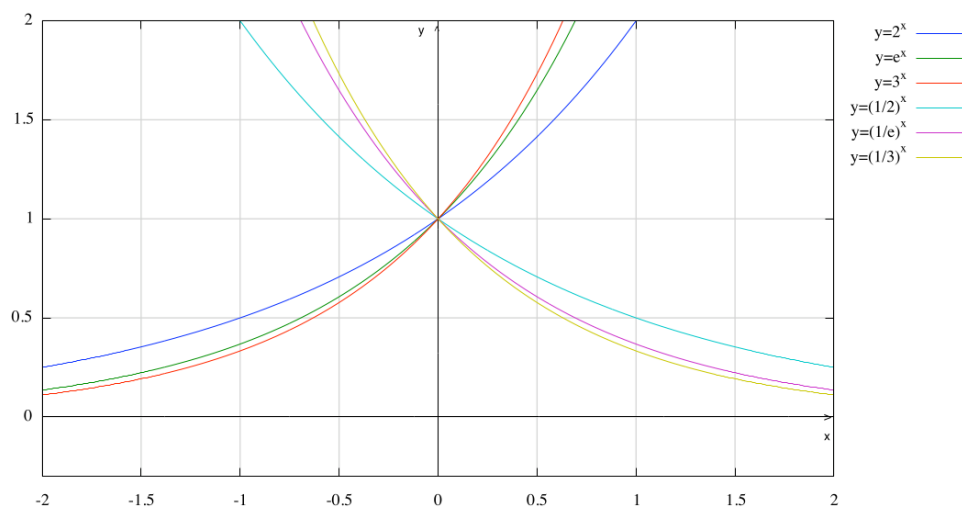


Figure 2.2: Esponenziali

2.8.4 Logaritmo

Fissata la base $a > 0$ con $a \neq 1$, la funzione logaritmo

$$f(x) = \log_a x \quad \text{dom } f = (0, +\infty) \quad \text{Im } f = \mathbb{R}$$

è definita come la funzione inversa della funzione esponenziale a^x . Se si sceglie come base il numero di Nepero e , il logaritmo si denota:

$$f(x) = \log_e = \log x = \ln x$$

1. se $a > 1$, allora la funzione $\log_a x$ è strettamente crescente
2. se $0 < a < 1$, allora la funzione $\log_a x$ è strettamente decrescente
3. se $0 < a < b$ con $a, b \neq 1$

$$\begin{cases} \log_a x > \log_b x & \text{se } x > 1 \\ \log_a x < \log_b x & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

4. valgono le seguenti proprietà:

- $\log_a a^x = x \quad x > 1$
- $a^{\log_a x} = x \quad x > 0$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \quad x_1, x_2 > 0$
- $\log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2 \quad x_1, x_2 > 0$
- $\log_a x^b = b \log_a x \quad x > 0, b \in \mathbb{R}$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a} \quad x > 0, b > 0, b \neq 1$
- $a^x = e^{(\ln a)x} \quad x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$

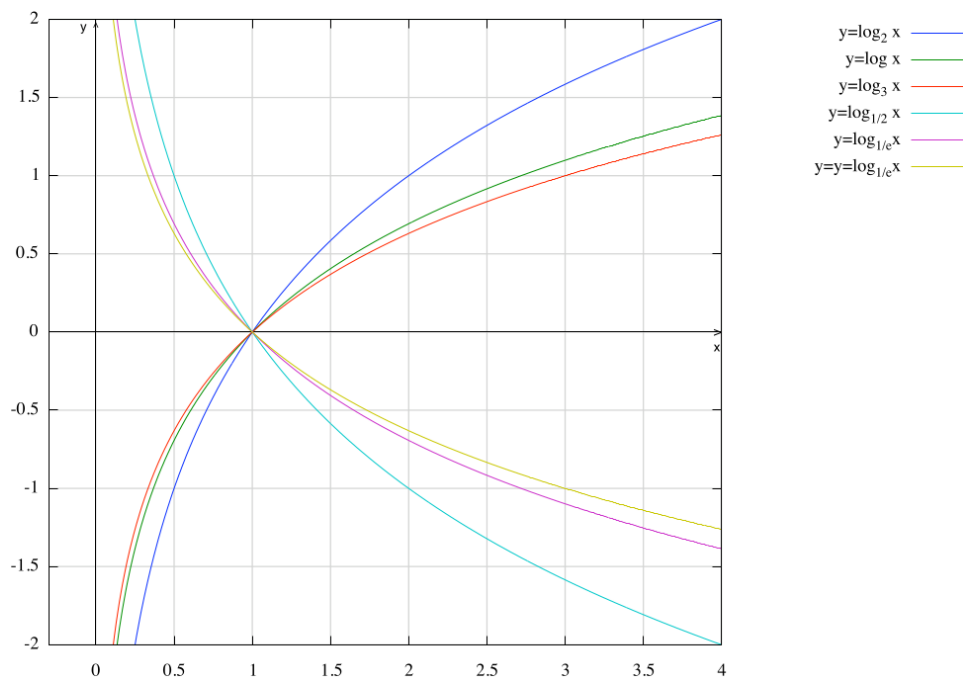


Figure 2.3: Logaritmi

2.9 Funzioni trigonometriche

Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta periodica di periodo T , $T > 0$ se:

$$f(x + T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$$

La caratteristica fondamentale delle funzioni periodiche è che i suoi valori si ripetono dopo intervalli di ampiezza T .

2.9.1 Le funzioni seno e coseno

Sia γ una circonferenza di raggio 1 (detta circonferenza goniometrica) il cui centro O è anche l'origine di un sistema di assi cartesiani e sia A il punto $(1, 0)$. Partendo da A percorriamo la circonferenza in senso antiorario oppure in senso orario. Sia x un numero reale, denotiamo con P_x il punto su γ che si ottiene percorrendo la circonferenza a partire dal punto A per un arco di lunghezza $|x|$, in senso antiorario se $x \geq 0$, oppure in senso orario se $x < 0$. Il punto P_x individua un angolo nel piano avente vertice O e delimitato dalle semirette nel piano uscenti da O e passanti per A e per P_x . Il numero reale x rappresenta la misura dell'angolo in radianti.

Osserviamo che l'incremento della lunghezza x di 2π corrisponde a compiere un intero giro sulla circonferenza in senso antiorario ritornando al punto P_x (così come decrementare di 2π la lunghezza x). Quindi si ha:

$$P_{x \pm k2\pi} = P_x \quad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$$

Simmetria Indichiamo con $\cos x$ e con $\sin x$ rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto P_x . Le funzioni $y = \cos x$ e $y = \sin x$ sono definite su \mathbb{R} a valori nell'intervallo $[-1, 1]$, sono periodiche di minimo periodo 2π e soddisfano la relazione:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

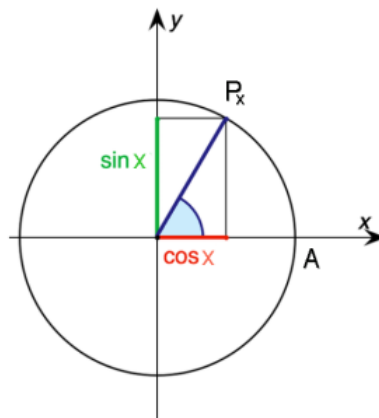


Figure 2.4: Circonferenza goniometrica con seno e coseno

Monotonia Per la periodicità di seno e coseno ci basta studiarne le proprietà nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Dalle definizioni segue subito che la funzione seno è dispari e la funzione coseno è pari; inoltre la funzione coseno è strettamente decrescente in $[0, \pi]$ e strettamente crescente in $[\pi, 2\pi]$. La funzione seno è strettamente crescente in $[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ e strettamente decrescente in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$.

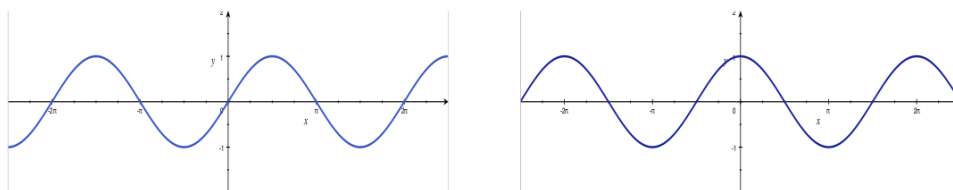


Figure 2.5: Grafico delle funzioni: seno (sinistra) e coseno (destra)

Formule trigonometriche

Formule di addizione e sottrazione

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

Formule di duplicazione

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$$

Formule di potenza

$$(\sin x)^2 = \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$(\cos x)^2 = \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Formule di bisezione

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad 0 < x \leq 2\pi$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \quad -\pi < x \leq \pi$$

Formule di prostaferesi

$$\sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x - y}{2}\right) \cos\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \cos\left(\frac{x - y}{2}\right) \sin\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x \quad \sin(x + \pi) = -\sin x$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

2.9.2 La funzione tangente e la funzione cotangente

La funzione tangente è:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

è definita nei punti di \mathbb{R} diversi da $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e, come vedremo in seguito, ha immagine \mathbb{R} .

Proprietà fondamentali

Dal grafico della tangente si ottiene che $\tan(x) = \tan(x + k\pi)$ per $k \in \mathbb{Z}$ cioè $\tan(x)$ è periodica di minimo periodo $T = \pi$

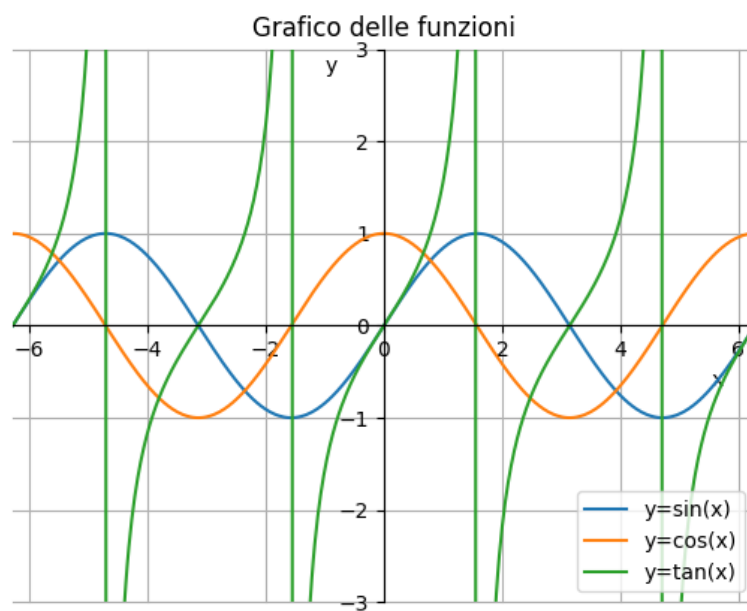


Figure 2.6: Funzioni trigonometriche