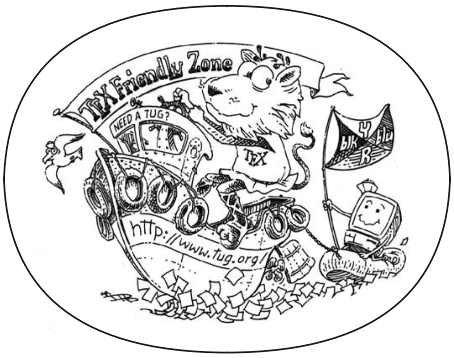
# CALCULUS I

RICCARDO CEREGHINO




Elementi di Calculus

Marzo 2019 – classicthesis v4.6

# INDICE

# Parte I

# INTRODUZIONE

# 1 NOTAZIONE

Un richiamo alla notazione che verrà utilizzata nel documento.

## 1.1 INSIEMISTICA

| | |
|---|---|
| $\emptyset$ | Insieme vuoto |
| $\mathbb{N}$ | Insieme dei numeri naturali compreso lo 0 |
| $\mathbb{Z}$ | Insieme dei numeri relativi |
| $\mathbb{Q}$ | Insieme dei numeri razionali |
| $\mathbb{R}$ | Insieme dei numeri reali |

## 1.2 SIMBOLI LOGICI

| | |
|---|---|
| $\mid$ | tale che |
| $\Rightarrow$ | implica |
| $\Leftrightarrow$ | se e solo se |
| $\forall$ | per ogni |
| $\exists$ | esiste |
| $\nexists$ | non esiste |
| $\in$ | appartiene |
| $\notin$ | non appartiene |

### 1.2.1 *Intervalli*

| | |
|---|---|
| intervallo limitato chiuso | $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ |
| intervallo limitato aperto | $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ |
| intervallo limitato aperto a destra | $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ |
| intervallo limitato aperto a sinistra | $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ |
| intervallo illimitato chiuso a sinistra | $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ |
| intervallo illimitato aperto a sinistra | $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ |
| intervallo illimitato chiuso a destra | $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ |
| intervallo illimitato aperto a destra | $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ |
| intervallo illimitato | $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ |

## 1.3 INSIEMI

### 1.3.1 *Relazioni tra insiemi*

Dati due insiemi $A$ e $B$:

**INCLUSIONE:** si dice che $A$ è un sottoinsieme di $B$, o che è contenuto in $B$:

$$A \subseteq B$$

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

**INCLUSIONE PROPRIA:**

$$A \subsetneqq B$$

$$\begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow x \in B \\ \exists x \in B | x \notin A \end{cases}$$

### 1.3.2 *Operazioni tra insiemi*

**INTERSEZIONE:**

$$A \cap B = \{x \in X | x \in A, x \in B\}$$

**UNIONE:**

$$A \cup B = \{x \in X | x \in A or x \in B\}$$

**DIFFERENZA INSIEMISTICA:**

$$A \setminus B = \{x \in X | x \in A, x \notin B\}$$

**COMPLEMENTARE:**

$$A^C = \{x \in X | x \notin A\}$$

**PRODOTTO CARTESIANO:** dove $(x, y)$ denota la coppia ordinata

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

## 1.4 NUMERI REALI

Dati $x, y, z \in \mathbb{R}$ sono definite le operazioni di:

- somma $x + y$
- prodotto $xy$

- relazione d'ordine $x < y$

Che soddisfano le seguenti proprietà:

ASSOCIATIVA.

$$(x+y)+z = x+(y+z) = x+y+z$$

$$(xy)z = x(yz) = xyz$$

COMMUTATIVA.

$$x+y = y+x$$

$$xy = yx$$

DISTRIBUTIVA.

$$x(y+z) = xy+xz$$

ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO.

$$x+0 = 0+x = x$$

$$1x = x1 = x$$

ESISTENZA DELL'INVERSO.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! x = -x \in \mathbb{R} | x+(-x) = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 0 \quad \exists! y = \frac{1}{x} \in \mathbb{R} | x\frac{1}{x} = 1$$

RELAZIONE D'ORDINE TOTALE. per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$ una ed una sola delle seguenti relazioni è vera.

$$\begin{cases} x < y \\ x = y \\ x > y \end{cases}$$

TRANSITIVA.

$$(x < y) \cap (y < z) \Rightarrow (x < z)$$

COMPATIBILITÀ CON LA SOMMA.

$$x < y \Rightarrow x+z < y+z$$

COMPATIBILITÀ CON IL PRODOTTO.

$$x < y \cap z > 0 \Rightarrow xz < yz$$

$$x < y \cap z < 0 \Rightarrow xz > yz$$

## 1.5 GEOMETRIA

### 1.5.1 *Circonferenza*

Dato il centro di una circonferenza $C = (x_c, y_c)$ Si esprime l'equazione della circonferenza nella forma:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

Oppure:

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = r^2$$

Per cui se $O = (0, 0)$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

#### 1.5.1.1 *Forma canonica:*

$$\alpha = -2x_c \quad \beta = -2y_c \quad \gamma = x_c^2 + y_c^2 - r^2$$
$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = r^2$$

Per ricavare il centro:

$$\mathrm{C} = \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right)$$

Per ricavare il raggio:

$$r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}$$

## 1.6 ELLISSE

Equazione dell'ellisse (con centro nell'origine degli assi)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad a \neq 0, b \neq 0$$

Parte II

# FUNZIONI

# 2 FUNZIONI ELEMENTARI DI VARIABILE REALE

## 2.1 IL CONCETTO DI FUNZIONE

**Definizione:** una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ dove $A \subseteq \mathbb{R}$ è una legge che assegna ad ogni $x \in A$ uno ed un solo valore $y = f(x) \in \mathbb{R}$

*Nota:* in questo caso, i valori di $A$ sono chiamati variabile indipendente $(x)$, mentre $\mathbb{R}$ è la variabile dipendente $y = f(x)$

*Nota:* inoltre definiamo $A = dom \quad f$ come il dominio della funzione.

**Definizione:** Il grafico di $f$:

$$f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x \in A, y = f(x)\right\}$$

**Definizione:** L'immagine di $f$, Im f:

$$f(A) = \{f(x) \in \mathbb{R} | x \in A\}$$

## 2.2 OPERAZIONI TRA FUNZIONI

Date due funzioni $f : A \to \mathbb{R} \qquad g : B \to \mathbb{R}$

**SOMMA E DIFFERENZA:** $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad dom(f+g) = A \cap B$

**PRODOTTO:** $(fg)(x) = f(x)g(x) \quad dom(fg) = (A \cap B)$

**RAPPORTO:** $(\frac{f}{g})(x) = f(x)g(x) \quad dom(\frac{f}{g}) = \{x \in \mathbb{R} | x \in A, x \in B, g(x) \neq 0\}$

**RECIPROCO:** $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1} \quad dom(\frac{1}{f}) = x \in A | f(x) \neq 0$

### 2.2.1 *Nomenclatura*

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$

- $f$ è detta **iniettiva** se $\forall y_0 \in \mathbb{R}, f(x) = y_0$ ha al più una soluzione.
- $f$ è detta **surgettiva** se $\forall y_0 \in \mathbb{R}, f(x) = y_0$ ha almeno una soluzione.
- $f$ è detta **bigettiva** se $\forall y_0 \in \mathbb{R}, f(x) = y_0$ ha una ed una sola soluzione, ovvero se la funzione è sia iniettiva che surgettiva.



[ 5 maggio 2019 at 18:56 – classicthesis v4.6 ]

#### 2.2.1.1 *Osservazioni*

1. $f$ è surgettiva se e solo se $IMf = \mathbb{R}$
2. $f$ è iniettiva se e solo se $y_0 \in IMf, f(x) = y_0$ ha al più una soluzione.

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$ sono fatti equivalenti:

- $f$ è iniettiva
- $\forall x_1, x_2 \in A \cap x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$
- dati $x_1, x_2 \in A | f(x_1) = f(x_2)$ allora $x_1 = x_2$

## 2.3 FUNZIONI PARI E DISPARI

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x), \forall x \in A \quad -x \in A$ f è detta:

$$f(-x) = \begin{cases} f(x) & pari \\ -f(x) & dispari \end{cases}$$

## 2.4 FUNZIONI MONOTONE

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$

- $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2$ f è detta:

$$\begin{cases} f(x_1) \leq f(x_2) & crescente \\ f(x_1) \geq f(x_2) & decrescente \end{cases}$$

- $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2$ f è detta:

$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) & strettamentecrescente \\ f(x_1) > f(x_2) & strettamentedecrescente \end{cases}$$

## 2.5 TRASLAZIONI, DILATAZIONI E RIFLESSIONI

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$:

TRASLAZIONI: $x_0 > 0, \quad y_0 \in \mathbb{R}$

$g(x) = f(x - x_0)$ Traslazione verso destra

$g(x) = f(x + x_0)$ Traslazione verso sinistra

$g(x) = f(x) + y_0$ Traslazione verso l'alto

$g(x) = f(x) - y_0$ Traslazione verso il basso

DILATAZIONI: $a > 0$

$$g(x) = f(\frac{x}{a}) \text{ Dilata su asse x}$$

$$g(x) = a \times f(x) \text{ Dilata su asse y}$$

RIFLESSIONI:

$$g(x) = f(-x) \text{ Riflette su asse } y$$

$$g(x) = -f(x) \text{ Riflette su asse } x$$

$$g(x) = -f(-x) \text{ Riflette rispetto l'origine}$$

### 2.5.1 *Osservazioni*

Se $f(x)$ è dispari e $0 \in$ dom f

$$f(0) = f(-0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Se $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$$f(x) = x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\textbf{n volte}}$$

- se $n$ è pari, $f$ è pari
- se $n$ è dispari, $f$ è dispari

## 2.6 SIMMETRIE, TRASLAZIONI, COMPRESSIONI E DILATAZIONI DI GRAFICI.

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$:

TRASLAZIONI: $x_0 > 0, \quad y_0 \in \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x - x_0) \text{ Traslazione verso destra}$$

$$g(x) = f(x + x_0) \text{ Traslazione verso sinistra}$$

$$g(x) = f(x) + y_0 \text{ Traslazione verso l'alto}$$

$$g(x) = f(x) - y_0 \text{ Traslazione verso il basso}$$

DILATAZIONI: $a > 0$

$$g(x) = f(\frac{x}{a}) \text{ Dilata su asse x}$$

$$g(x) = a \times f(x) \text{ Dilata su asse y}$$

RIFLESSIONI:

$$g(x) = f(-x) \text{ Riflette su asse } y$$

$$g(x) = -f(x) \text{ Riflette su asse } x$$

$$g(x) = -f(-x) \text{ Riflette rispetto l'origine}$$

## 2.7 FUNZIONE COMPOSTA

Date due funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$ la funzione:

$$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) \qquad x \in A$$

Con dominio:

$$\text{dom } (g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} | x \in A \cap f(x) \in B\}$$

## 2.8 FUNZIONE INVERSA E SUE PROPRIETÀ.

Data una funzione iniettiva $f : A \to \mathbb{R}$

$$\forall y \in f = f(A), \exists! x \in A | f(x) = y$$

Da cui si ricava che:

$$x = f^{-1}(y) \qquad f^{-1} : B \to \mathbb{R} \qquad B = Imf$$

### 2.8.1 *Costruire l'inverso di f*

1. Determinare $Imf = B$ e $domf^{-1} = B$
2. $y \in B$ determiniamo $x \in A | f(x) = y$
3. $x = f^{-1}(y)$
4. $y = f^{-1}(x) \qquad x \rightleftarrows y$

Il grafico di $y = f^{-1}(x)$ è simmetrico rispetto alla bisettrice $x = y$ della funzione $y = f(x)$

#### 2.8.1.1 *Osservazioni*

$$f(f^{-1}(y)) = y \qquad \forall y \in dom^{f^{-1}} = Imf$$
$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall x \in domf = Imf^{-1}$$

Inoltre $f$ è invertibile se e solo se è iniettiva o surgettiva, da cui:

$$g^{-1} : Imf \to \mathbb{R}$$

## 2.9 POLINOMI

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ Coefficienti $\qquad a_n \neq 0$ n è il grado del polinomio

Per cui:

$$n = 1 \qquad y = a_0 + a_1 x \quad \text{Rette}$$

$$n = 2 \qquad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad \text{Parabole}$$

# 3 FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

## 3.1 POTENZE

Fissato un esponente $a \in \mathbb{R}$ la funzione potenza è:

$$f(x) = x^a$$

la cui definizione e dominio dipendono dal valore dell'esponente a.

- $a = n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\textbf{n volte}} \qquad \text{dom } f = \mathbb{R} \qquad \text{Im } f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se n dispari} \\ [0, +\infty) & \text{se n pari } n \neq 0 \\ \{0\} & n = 1 \end{cases}$$

- $a = -n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad \text{dom } f = \mathbb{R} \backslash \{0\} \qquad \text{Im } f = \begin{cases} \mathbb{R} \backslash \{0\} & \text{n dispari} \\ (0, +\infty) & \text{n pari} \end{cases}$$

- $a = \frac{1}{n} \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \qquad \text{dom } f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{n dispari} \\ [0, +\infty) & \text{n pari} \end{cases} \qquad \text{Im } f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{n dispari} \\ [0, +\infty) & \text{n pari} \end{cases}$$

- $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1, m \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{m} \qquad \text{dom } f = (0, +\infty) \qquad \text{Im } f = (0, +\infty)$$

- $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^a = \begin{cases} \sup\{x^q | q \in \mathbb{Q}, q \leq a\} & x \geq 1 \\ \inf\{x^q | q \in \mathbb{Q}, q \leq a\} & 0 < x < 1 \end{cases} \qquad \text{dom } f = (0, +\infty) \qquad \text{Im } f = (0, +\infty)$$

Osserviamo che:

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 1$
- se $n$ pari $f$ è pari
- se $n$ dispari $f$ è dispari

### 3.1.1 *Proprietà delle potenze*

- $x^{n+m} = x^n x^m$
- $(x^n)^m = x^{nm}$

OSSERVAZIONI

$$f(x) = x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$0^0 = 1$$

#### 3.1.1.1 *Dimostrazioni*

$$x^{n+m} = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\text{n+m volte}} = \underbrace{(x \times \cdots \times x)}_{\text{n volte}} \times \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\text{m volte}} = x^{n+m}$$

$$(x^n)^m = \underbrace{x^n \times \cdots \times x^n}_{\text{m volte}}$$

$$x^n = x^{n+0} = x^n x^0 \qquad x \neq 0$$

$$x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

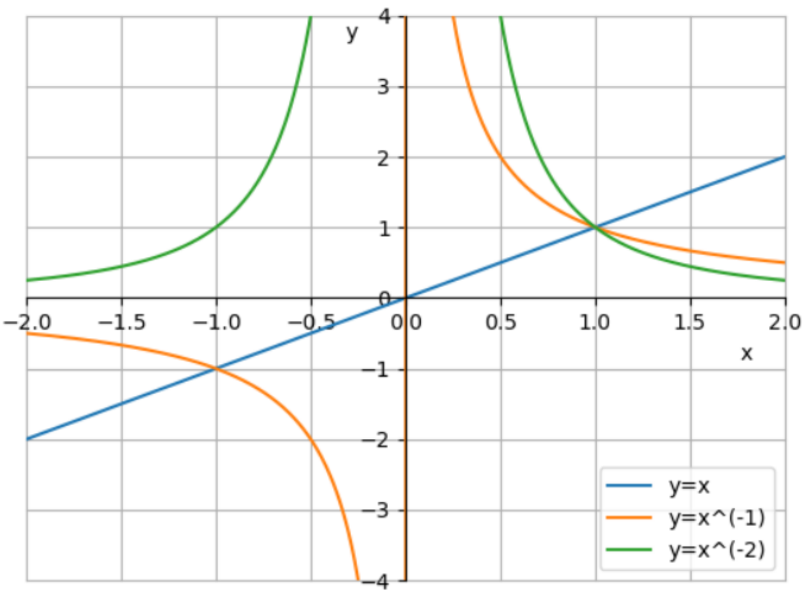



Figura 3.1: Grafici di funzioni di potenze.

## 3.2 ESPONENZIALE

Fissata la base $a > 0$ con $a \neq 1$, la funzione esponenziale è

$$f(x) = a^x \qquad \text{dom } f = \mathbb{R} \qquad \text{Im } f = (0, +\infty)$$

Se si sceglie come base il numero di Nepero $e = 2.71828 \cdots > 1$, la funzione esponenziale si denota:

$$f(x) = e^x = \exp x$$

### 3.2.1 *Proprietà*

1. se $a > 1$, allora la funzzione $a^x$ è strettamente crescente
2. se $0 < a < 1$, allora la funzione $a^x$ è strettamente decrescente
3. se $0 < a < b$ con $a, b \neq 1$

$$\begin{cases} a^x < b^x & x > 0 \\ a^x > b^x & x < 0 \end{cases}$$

4. valgono le seguenti proprietà:
   - $a^0 = 1$
   - $a^1 = a$
   - $a^{x_1+x_2} = a^{x_1+x_2} \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
   - $a^{-x} = (\frac{1}{a})^x \qquad x \in \mathbb{R}$
   - $(a^x)^b = a^{bx} \qquad x, b \in \mathbb{R}$

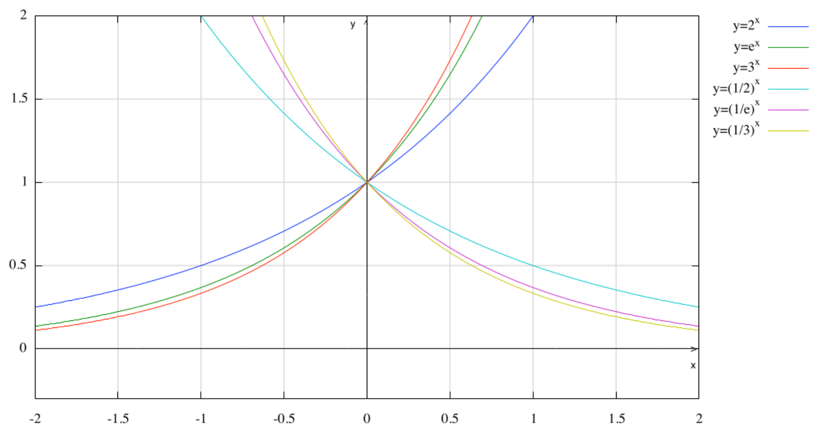



Figura 3.2: Grafici di funzioni esponenziali.

## 3.3 LOGARITMO

Fissata la base $a > 0$ con $a \neq 1$, la funzione logaritmo

$$f(x) = \log_a x \qquad \operatorname{dom} f = (0, +\infty) \qquad \operatorname{Im} f = \mathbb{R}$$

è definita come la funzione inversa della funzione esponenziale $a^x$. Se si sceglie come base il numero di Nepero $e$, il logaritmo si denota:

$$f(x) = \log_e = \log x = \ln x$$

1. se $a > 1$, allora la funzione $\log_a x$ è strettamente crescente
2. se $0 < a < 1$, allora la funzione $\log_a x$ è strettamente decrescente
3. se $0 < a < b$ con $a, b \neq 1$

$$\begin{cases} \log_a x > \log_b x & se x > 1 \\ \log_a x < \log_b x & se 0 < x < 1 \end{cases}$$

4. valgono le seguenti proprietà:
   - $\log_a a^x = x \qquad x > 1$
   - $a^{\log_a x} = x \qquad x > 0$
   - $\log_a 1 = 0$
   - $\log_a a = 1$
   - $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \qquad x_1, x_2 > 0$
   - $\log_a (\frac{x_1}{x_2}) = \log_a x_1 - \log_a x_2 \qquad x_1, x_2 > 0$
   - $\log_a x^b = b \log_a x \qquad x > 0, b \in \mathbb{R}$
   - $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad x > 0, b > 0, b \neq 1$
   - $a^x = e^{(\ln a)x} \qquad x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$

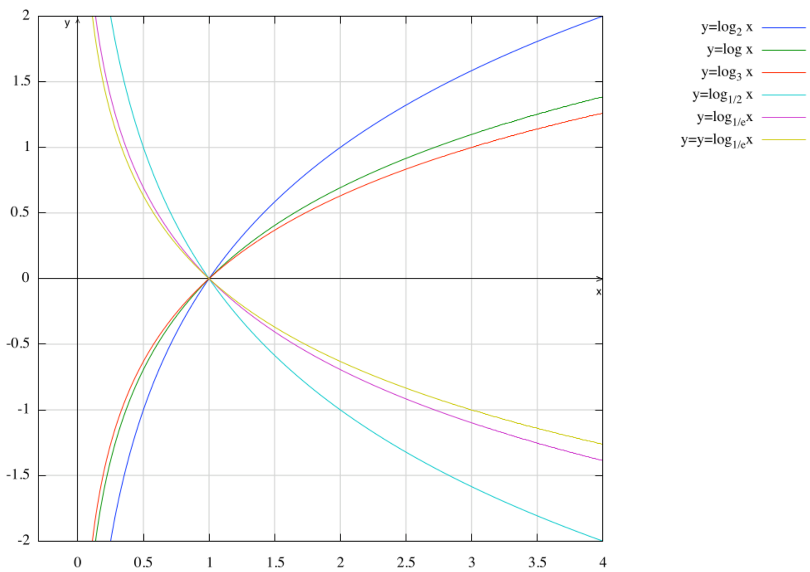



Figura 3.3: Grafici di funzioni logaritmiche.

# 4 FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

## 4.1 RADIANTI

Sia $\gamma$ una circonferenza di raggio 1 (detta circonferenza goniometrica) il cui centro $O$ è anche l'origine di un sistema di assi cartesiani e sia $A$ il punto $(1,0)$. Partendo da $A$ percorriamo la circonferenza in senso antiorario oppure in senso orario. Sia $x$ un numero reale, denotiamo con $P_x$ il punto su $\gamma$ che si ottiene percorrendo la circonferenza a partire dal punto $A$ per un arco di lunghezza $|x|$, in senso antorario se $x \geq 0$, oppure in senso orario se $x < 0$. Il punto $P_x$ individua un angolo nel piano avente vertice $O$ e delimitatio dalle semirette nel piano uscenti da $O$ e passanti per $A$ e per $P_x$. Il numero reale $x$ rappresenta la misura dell'angolo in radianti.

La relazione tra radianti e gradi è data da:

$$\frac{\gamma_{\text{radianti}}}{2\pi} = \frac{\gamma_{\text{gradi}}}{360}$$

Osserviamo che l'incremento della lunghezza $x$ di $2\pi$ corrisponde a compiere un intero giro sulla circonferenza in senso antiorario ritornando al punto $P_x$ (così come decrementare di $2\pi$ la lunghezza $x$). Quindi si ha:

$$P_{x \pm k2\pi} = P_x \qquad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$$

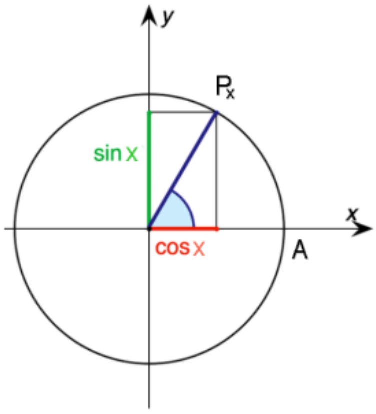



Figura 4.1: Circonferenza goniometrica

## 4.2 LE FUNZIONI SENO E COSENO

Una funzione $f : \mathbb{R} \in \mathbb{R}$ è detta periodica di periodo $T$, $T > 0$ se:

$$f(x+T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$$

La caratteristica fondamentale delle funzioni periodiche è che i suoi valori si ripetono dopo intervalli di ampiezza $T$.

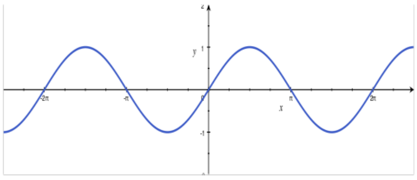
### 4.2.1 *Simmetria*

Indichiamo con $\cos x$ e con $\sin x$ rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto $P_x$. Le funzioni $y = \cos x$ e $y = \sin x$ sono definite su $\mathbb{R}$ a valori nell'intervallo $[-1,1]$, sono periodiche di minimo periodo $2\pi$ e soddisfano la relazione:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

### 4.2.2 *Monotonia*

Per la periodicità di seno e coseno ci basta studiarne le proprietà nell'intervallo $[0,2\pi]$. Dalle definizioni segue subito che la funzione seno è dispari e la funzione coseno è pari; inoltre la funzione coseno è strettamente decrescente in $[0,\pi]$ e strettamente crescente in $[\pi,2\pi]$. La funzione seno è strettamente crescente in $[0,\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ e strettamente decrescente in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$.



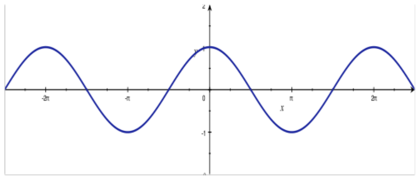


Figura 4.2: Grafico delle funzioni: seno e coseno

### 4.2.3 *Formule trigonometriche*

#### 4.2.3.1 *Formule di addizione e sottrazione*

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

#### 4.2.3.2 *Formule di duplicazione*

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$
$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

#### 4.2.3.3 *Formule di potenza*

$$(\sin x)^2 = \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$
$$(\cos x)^2 = \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

#### 4.2.3.4 *Formule di bisezione*

$$\sin(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad 0 < x \leq 2\pi$$
$$\cos(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad -\pi < x \leq \pi$$

#### 4.2.3.5 *Formule di prostaferesi*

$$\sin x - \sin y = 2\sin(\frac{x-y}{2})\cos(\frac{x+y}{2})$$
$$\cos x - \cos y = -2\cos(\frac{x-y}{2})\sin(\frac{x+y}{2})$$

$$\cos(x+\pi) = -\cos x \qquad \sin(x+\pi) = -\sin x$$
$$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x \qquad \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$$

## 4.3 LA FUNZIONE TANGENTE

La funzione tangente è:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Definita nei punti di $\mathbb{R}$ diversi da $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ e, come vedremo in seguito, ha immagine $\mathbb{R}$. La funzione tangente è periodica per: $(x) = \tan(x+k\pi)$ per $k \in \mathbb{Z}$ cioè $\tan(x)$ è periodica di minimo periodo $T = \pi$.

Nella Figura 4.3 è evidenziata la tangente nel punto $(A, Q_x = \tan(x))$.

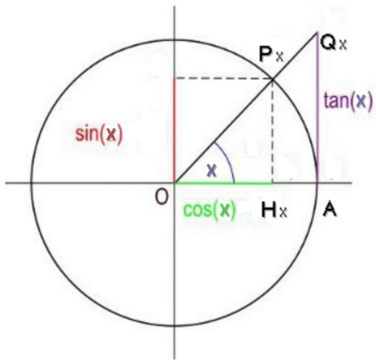



Figura 4.3: Tangente.

### 4.3.1 *Simmetria*

Dalle proprietà di simmetria delle funzioni seno e coseno, si deduce che la funzione tangente è dispari: il rapporto di una funzione pari e di una funzione dispari è dispari.

### 4.3.2 *Monotonia*

La funzione tangente è strettamente crescente in ogni intervallo $(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$

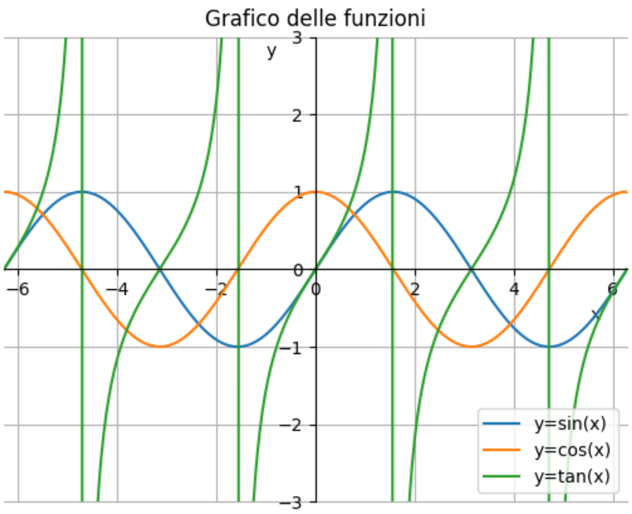



Figura 4.4: Funzioni trigonometriche

## 4.4 FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

Le funzioni trigonometriche inverse sono definite come, il dominio della funzione di partenza è stato ristretto per permettere l'inversione della funzione.

$$\arcsin x = f^{-1}(x) \qquad f(x) = \sin(x) \qquad x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
$$\arccos x = f^{-1}(x) \qquad f(x) = \cos(x) \qquad x \in [0, \pi]$$
$$\arctan x = f^{-1}(x) \qquad f(x) = \tan(x) \qquad x \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

### 4.4.1 *Dominio ed immagine*

$$\text{dom } \arcsin x = [-1, 1] \qquad \text{dom } \arccos x = [-1, 1] \qquad \text{dom } \arctan x = \mathbb{R}$$
$$\text{Im } \arcsin x = [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \qquad \text{Im } \arccos x = [0, \pi], \qquad \text{Im } \arctan x = (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

### 4.4.2 *Parità*

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$
$$\arctan(-x) = -\arctan x$$

### 4.4.3 *Monotonia*

- la funzione $\arcsin x$ è strettamente crescente

- la funzione $\arccos x$ è strettamente decrescente
- la funzione $\arctan x$ è strettamente crescente

### 4.4.4 *Relazioni*

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$$

$$\arctan x + \arctan(\frac{1}{x}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ \frac{-\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$$

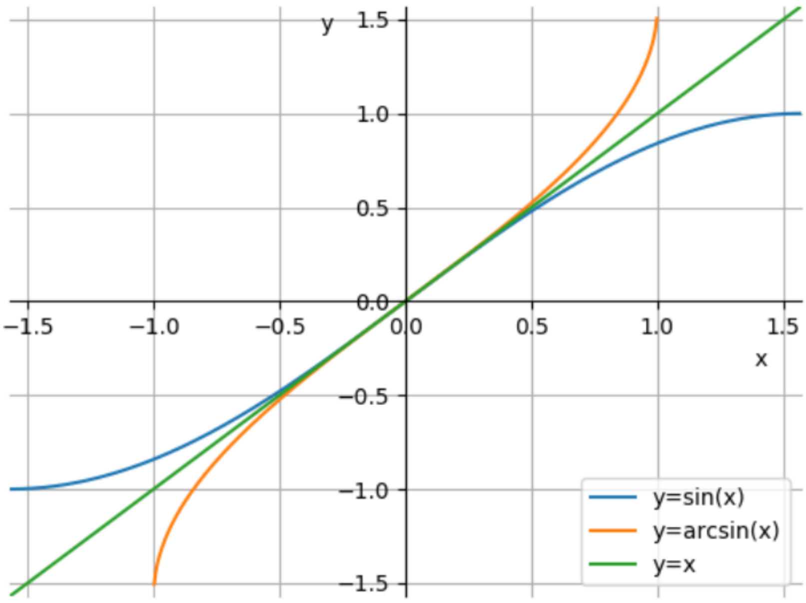



Figura 4.5: Arcoseno.

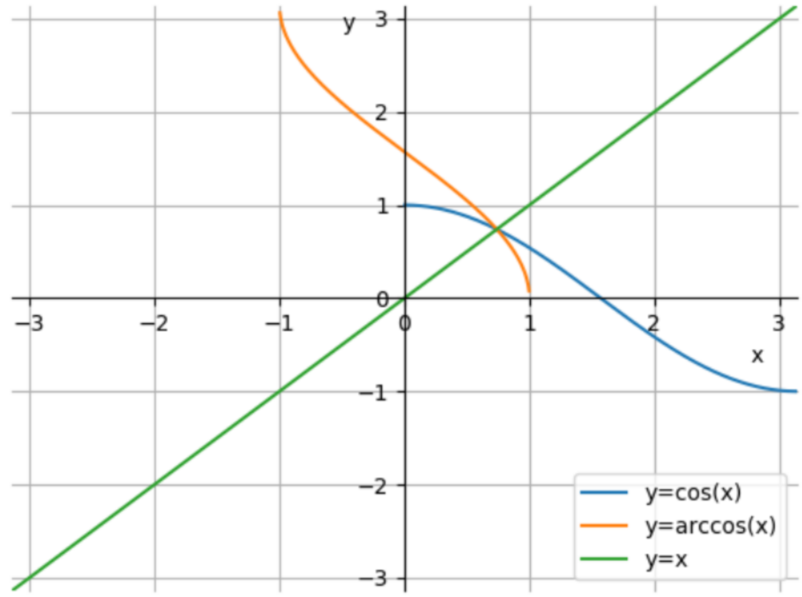



Figura 4.6: Arcocoseno.

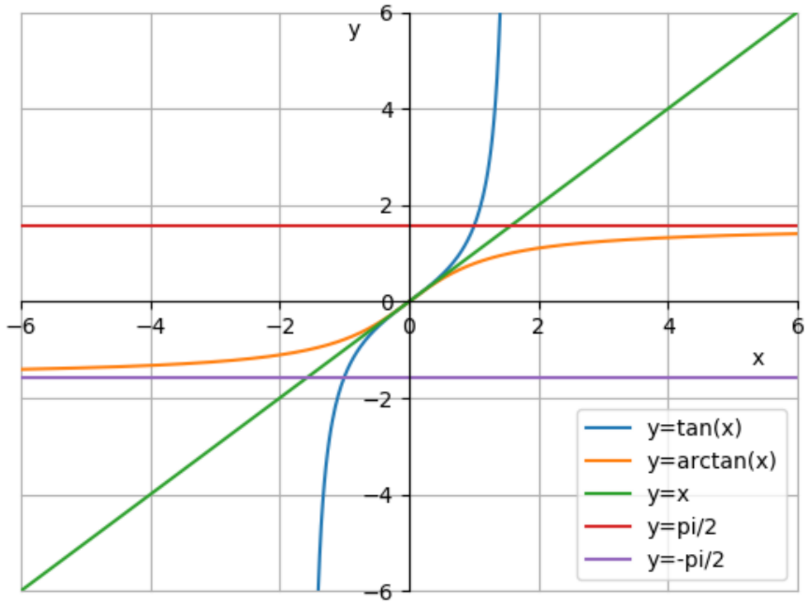



Figura 4.7: Arcotangente.

Parte III

# FUNZIONI CONTINUE E LIMITI

# 5 FUNZIONI CONTINUE

## 5.1 FUNZIONI CONTINUE

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, y = f(x)$, ed un punto $x_0 \in A$, la funzione è detta continua in $x_0$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon \qquad \forall x \in A \cap x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

La funzione è detta continua se è continua in $x_0$ per ogni $x_0 \in A$.

**Teorema 5.1 (Continuità funzioni elementari)**
*Le funzioni potenza $x^a$, esponenziali $a^x$, logaritmo $\log_a x$, trigonometriche e trigonometriche inverse, sono continue.*

**Teorema 5.2 (Algebra delle funzioni continue)**
*Date due funzioni $f, g : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x), \quad y = g(x)$, continue, allora:*

1. *la somma $f(x) + g(x)$ è una funzione continua;*
2. *il prodotto $f(x)g(x)$ è una funzione continua;*
3. *il rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ è una funzione continua sul suo dominio $x \in A | g(x) \neq 0$*

**Teorema 5.3 (Continuità funzione composta)**
*Date due funzioni continue $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$ allora la funzione composta:*

$$g \circ f : x \in A | f(x) \in B \to \mathbb{R} \qquad y = g(f(x))$$

*è continua.*

**Teorema 5.4 (Continuità funzioni inversa)**
*Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$, tale che:*

1. *$f$ è iniettiva;*
2. *$f$ è continua;*
3. *il dominio di $I$ è un intervallo;*

*allora, posto $B = Im\ f$, la funzione inversa $f^{-1} : B \to \mathbb{R}$ è continua.*

# 6 LIMITI

## 6.1 PUNTO DI ACCUMULAZIONE

Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ e:

1. un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è detto punto di accumulazione per $A$ se per ogni $\delta > 0$ esiste $x \in A$ tale che:

   $$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \qquad x \neq x_0$$

2. $+\infty$ è detto punto di accumulazione per $A$ se per ogni $R > 0$ esiste $x \in A$ tale che $x > R$

3. $-\infty$ è detto punto di accumulazione per $A$ se per ogni $R > 0$ esiste $x \in A$ tale che $x < -R$

## 6.2 LIMITE

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, un punto di accumulazione $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ per $A$ ed $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Si distinguono i casi:

1. $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$: se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

   $$\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon \qquad \forall x \in A, x \neq x_0 \cap x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

2. $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell = \pm\infty$: se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

   $$\begin{cases} f(x) > M & \text{se } \ell = +\infty \\ f(x) < -M & \text{se } \ell = -\infty \end{cases} \qquad \forall x \in A, x \neq x_0 \cap x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

3. $x_0 = \pm\infty$ e $\ell = \in \mathbb{R}$: se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che:

   $$\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon \quad \forall x \in A \cap \begin{cases} x > R & \text{se } x_0 = +\infty \\ x < -R & \text{se } x_0 = -\infty \end{cases}$$

4. $x_0 = \pm\infty$ e $\ell = \in \mathbb{R}$: se per ogni $M > 0$ esiste $R > 0$ tale che:

   $$\begin{cases} f(x) > M & \text{se } \ell = +\infty \\ f(x) < -M & \text{se } \ell = -\infty \end{cases} \quad \forall x \in A \cap \begin{cases} x > R & \text{se } x_0 = +\infty \\ x < -R & \text{se } x_0 = -\infty \end{cases}$$

In tal caso, si dice che esiste finito il limite di $f$ per $x$ che tende a $x_0$ e vale $\ell$ oppure che $f(x)$ tende ad $\ell$ per $x$ che tende a $x_0$.

**Proposizione 6.1 (Continuità dei limiti)**
*Data $f : A \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in A$ punto di accumulazione per $A$, $f$ è continua in $x_0$ se e solo se:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

### 6.2.1 *Limite destro e sinitro*

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ ed un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ per $A$ tale che per ogni $\delta > 0$

$$A \cap (-\delta, x_0) \neq \emptyset \qquad \text{e} \qquad A \cap (x_0, \delta) \neq \emptyset$$

si scrive:

$$\begin{cases} \lim_{x \to x_{0^+}} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} & \text{limite destro} \\ \lim_{x \to x_{0^-}} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R} & \text{limite sinistro} \end{cases}$$

Se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che:

$$\begin{cases} \ell_1 - \epsilon < f(x) < \ell_1 + \epsilon \\ \ell_2 - \epsilon < f(x) < \ell_2 + \epsilon \end{cases} \qquad \forall x \in A \cap \begin{cases} x_0 < x < x_0 + \delta & \text{limite destro} \\ x_0 - \delta < x < x_0 & \text{limite sinistro} \end{cases}$$

Analoghe definizioni valgono se $\ell_{1,2} = \pm\infty$

**Proposizione 6.2**
*Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $\delta > 0$*

$$A \cap (-\delta, x_0) \neq \emptyset \qquad e \qquad A \cap (x_0, \delta) \neq \emptyset)$$

*Allora $x_0$ è un punto di accumulazione per $A$ e:*

$$\textit{esiste } \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \textit{esistono } \begin{cases} \lim_{x \to x_{0^+}} f(x) = \ell \\ \lim_{x \to x_{0^-}} f(x) = \ell \end{cases}$$

**Teorema 6.1 (Algebra dei limiti)**
*Date due funzioni $f, g : A \to \mathbb{R}$ ed un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per $A$, se esitono:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

*allora:*

SOMMA:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x) =$$

| | $\ell_2 \in \mathbb{R}$ | $\ell_2 = +\infty$ | $\ell_2 = -\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\ell_1 \in \mathbb{R}$ | $\ell_1 + \ell_2$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\ell_1 = +\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | *f.i.* |
| $\ell_1 = -\infty$ | $-\infty$ | *f.i.* | $-\infty$ |

*Dove f.i.= forma indeterminata* $+\infty - \infty$

PRODOTTO:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) =$$

| | $\ell_2 < 0$ | $\ell_2 = 0$ | $\ell_2 > 0$ | $\ell_2 = +\infty$ | $\ell_2 = -\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ell_1 < 0$ | $\ell_1\ell_2$ | $0$ | $\ell_1\ell_2$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\ell_1 = 0$ | $0$ | $0$ | $0$ | *f.i.* | *f.i.* |
| $\ell_1 > 0$ | $\ell_1\ell_2$ | $0$ | $\ell_1\ell_2$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\ell_1 = +\infty$ | $-\infty$ | *f.i.* | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\ell_1 = -\infty$ | $+\infty$ | *f.i.* | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

*Dove f.i.= forma indeterminata* $0\infty$

RAPPORTO:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

| | $\ell_2 < 0$ | $\ell_2 = 0^{\pm}$ | $\ell_2 > 0$ | $\ell_2 = +\infty$ | $\ell_2 = -\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ell_1 < 0$ | $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ | $\mp\infty$ | $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ | $0$ | $0$ |
| $\ell_1 = 0$ | $0$ | *f.i.* | $0$ | $0$ | $0$ |
| $\ell_1 > 0$ | $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ | $\pm\infty$ | $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ | $0$ | $0$ |
| $\ell_1 = +\infty$ | $-\infty$ | $\pm\infty$ | $+\infty$ | *f.i.* | *f.i.* |
| $\ell_1 = -\infty$ | $+\infty$ | $\mp\infty$ | $-\infty$ | *f.i.* | *f.i.* |

*Dove f.i.= forma indeterminata* $\frac{0}{0}$ *o* $\frac{\infty}{\infty}$ *e la notazione* $l_2 = 0^{\pm}$ *significa che:*

1. *esiste il limite*

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

2. *esiste* $\delta > 0$ *tale che per ogni* $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$

$$\begin{cases} g(x) > 0 & \ell_2 = 0^+ \\ g(x) < 0 & \ell_2 = 0^- \end{cases}$$

*Se* $x_0 \in \mathbb{R}$ *(analoga definizione se* $x_0 = \pm\infty$*).*

**Teorema 6.2 (Limite funzione composta.)**
*Date due funzioni* $f : A \to \mathbb{R}, y = f(x)$ *e* $g : B \to \mathbb{R}, z = g(y)$*, tali che:*

1. *per ogni* $x \in A$*, allora* $f(x) \in B$*,*
2. *il punto* $x_0$ *è di accumulazione per* $A$ *ed esiste:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

3. *il punto* $y_0$ *è di accumulazione per* $B$ *ed esiste:*

$$\lim_{y \to y_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

*Allora esiste:*

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell$$

NOTA: *Le condizioni del teorema non sono sufficienti per assicurare l'esistenza del limite* $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell$*. Occorre aggiungere delle ipotesi tecniche, che però sono sempre verificate negli esercizi. Ad esempio, è sufficiente richiedere che una delle seguenti tre condizioni sia soddisfatta:*

1. *il punto* $y_0$ *non appartiene a dom* $g$*;*
2. *la funzione* $g$ *è continua in* $y_0$*;*
3. *esiste* $\delta > 0$ *tale che* $f(x) \neq y_0$ *per ogni* $x \in A, x \neq x_0$ *e* $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$*.*

## 6.3 LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO DI DEFINIZIONE

### 6.3.1 *Potenze*

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to +\infty} x^b = +\infty && b > 0 \\
&\lim_{x \to +\infty} x^b = 0 && b < 0 \\
&\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty && n \in \mathbb{N}, \text{n pari} \\
&\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty && n \in \mathbb{N}, \text{n dispari} \\
&\lim_{x \to -\infty} x^{-n} = 0 && n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \\
&\lim_{x \to -\infty} \sqrt[n]{n} = -\infty && n \in \mathbb{N}, \text{n dispari}
\end{aligned}$$

### 6.3.2 *Esponenziali e logaritmi*

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to0} \ln x = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \qquad a > 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \qquad 0 < a < 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \qquad a > 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \qquad 0 < a < 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty \qquad a > 1$$
$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty \qquad 0 < a < 1$$
$$\lim_{x\to0} \log_a x = -\infty \qquad a > 1$$
$$\lim_{x\to0} \log_a x = +\infty \qquad 0 < a < 1$$

### 6.3.3 *Funzioni trigonometriche ed inverse*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$
$$\nexists \lim_{x\to\pm\infty} \sin x$$
$$\nexists \lim_{x\to\pm\infty} \cos x$$
$$\nexists \lim_{x\to\pm\infty} \tan x$$
$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

### 6.3.4 *Forme indeterminate del tipo 0/0*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad a>0$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a} \quad a>0, a\neq 1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^b-1}{x}=b \quad b\in\mathbb{R}$$

### 6.3.5 *Forme indeterminate del tipo infinito/infinito o oinfinito*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^b}=+\infty \qquad a>1, b>0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{\log_a x}=+\infty \qquad a>1, b>0$$
$$\lim_{x\to-\infty}|x|^b a^x=0 \qquad a>1, b>0$$
$$\lim_{x\to 0}x^b\log_a x=0 \qquad a,b>0, a\neq 1$$

## 6.4 INTORNO

Dato $x_0\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, un insieme $I$ della forma:

$$I=\begin{cases}(x_0-r, x_0+r) & r>0 \quad se x_0\in\mathbb{R}\\ (\mathbb{R},+\infty) & R>0 \quad se x_0=+\infty\\ (-\infty,-\mathbb{R}) & R>0 \quad se x_0=-\infty\end{cases}$$

è detto intorno di $x_0$.

**Teorema 6.3 (Teorema del confronto.)**
*Data una funzione $f: A\to\mathbb{R}$ ed un punto $x_0$ di accumulazione per $A$, se:*

1. *esistono due funzioni $g,h: A\to\mathbb{R}$ tali che:*
$$g(x)\leq f(x)\leq h(x) \qquad \forall x\in A\cap I, x\neq x_0$$
*dove $I$ è un opportuno intorno di $x_0$.*
2. *esistono i limiti:*
$$\lim_{x\to x_0}g(x)=\ell \qquad e \qquad \lim_{x\to x_0}h(x)=\ell$$
*dove $\ell\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.*

*Allora esiste:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

## 6.5 limiti di successioni

Una successione è una funzione definita sui numeri naturali:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad f(n) = a_n \qquad n \in \mathbb{N},$$

denotata con $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oppure:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$$

Poichè $\mathbb{N}$ non è superiormente limitato, $x_0 = +\infty$ è un punto di accumulazione per $\mathbb{N}$ e, se esiste, si denota con:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Valgono tutti i teoremi visti per i limiti di funzioni.

**Teorema 6.4 (Caratterizzazione per successioni.)**
*Data uan funzione $f : A \to \mathbb{R}, y = f(x)$, ed un punto $x_0$ di accumulazione per $A$ sono fatti equivalenti:*

a. *esiste:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

b. *per ogni successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che:*

$$a_n \in A \qquad a_n \neq x_0 \qquad \lim_{n \to +\infty} a_n = x_0$$

*allora esiste:*

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

## 6.6 estremo superiore, inferiore, massimo e minimo assoluto.

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$,

1. un elemento $y_0 \in \mathbb{R}$ è detto un maggiorante di $\operatorname{Im} f$ se:

$$f(x) \leq y_0 \qquad \forall x \in A$$

inoltre, se esiste un maggiorante, $f$ si dice superiormente limitata.

2. un elemento $M \in \mathbb{R}$ è detto estremo superiore di $f$ se:

$$\begin{cases} f(x) \leq M & \forall x \in A \\ \forall \epsilon > 0 \exists x \in A | f(x) > M - \epsilon \end{cases}$$

e si scrive $M = \sup_{x \in A} f(x)$. Se $f$ non è superiormente limitata, si pone:

$$\sup_{x \in A} f(x) = +\infty$$

3. $x_M \in A$ è detto punto di massimo assoluto se:

$$f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in A$$

e $f(x_M) = \max_{x \in A} f(x)$ è detto massimo assoluto di $f$.

4. un elemento $y_0 \in \mathbb{R}$ è detto un minorante di $A$ se:

$$f(x) \geq y_0 \qquad \forall x \in A$$

e, se esiste un minorante, $f$ si dice inferiormente limitata.

5. un elemento $x_m \in \mathbb{R}$ è detto punto di minimo assoluto di $f$ se:

$$f(x) \geq f(x_m) \qquad \forall x \in A$$

e $f(x_m) = \min_{x \in A} f(x)$ è detto minimo assoluto di $f$

6. un elemento $m \in \mathbb{R}$ è detto estremo inferiore se:

$$\begin{cases} f(x) \geq m & \forall x \in A \\ \forall \epsilon > 0 \exists x \in A | f(x) < m + \epsilon \end{cases}$$

e si scrive $m = \inf_{x \in A} f(x)$. Se $f$ non è inferiormente limitata, si pone:

$$\inf_{x \in A} f(x) = -\infty$$

7. $f$ è detta limitata se è inferiormente e superiormente limitata, cioè se esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tali che:

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall x \in I$$

OSSERVAZIONE Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$,

a. se $x_m \in A$ è un punto di minimo assoluto, allora:

$$\min_{x \in A} f(x) = \inf_{x \in A} f(x) = f(x_m)$$

b. se $x_M \in A$ è un punto di massimo assoluto, allora:

$$\max_{x \in A} f(x) = \sup_{x \in A} f(x) = f(x_M)$$

c. se $f$ è limitata, allora:

$$\text{Im } f \subseteq [\inf_{x \in A} f(x), \sup_{x \in A} f(x)]$$

## 6.7 teorema degli zeri

Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ tale che:

a. il dominio di $I$ è un intervallo;

b. la funzione $f$ è continua;

c. esistono $x_0, x_1 \in I$, $x_0 < x_1$, tali che:

$$f(x_0)f(x_1) < 0$$

Allora esiste $x^* \in I$ tale che:

$$f(x^*) = 0 \qquad \text{e} \qquad x_0 < x^* < x_1$$

# Parte IV

# DERIVATE

# 7 DERIVATE

## 7.1 RETTE NEL PIANO

Dato un punto $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ le rette passanti per $P_0$ hanno equazione:

$$y = m(x - x_0) + y_0 \qquad \text{oppure} \qquad x = x_0 \text{ retta verticale,}$$

dove $m = tan\theta$ è il coefficiente angolare e $\theta \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è l'angolo che la retta forma con la retta $y = y_0$, parallela all'asse delle ascisse.

Dati due punti $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$, la retta passante per $P_0$ e $P_1$ ha equazione:

$$\begin{cases} y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0 & x_0 \neq x_1 \\ x = x_0 & x_0 = x_1 \end{cases}$$

Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su intervallo $I$ ed $x_0 \neq x_1 \in I$, l'equazione della retta secante il grafico di $f$ nei punti $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$ è:

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f(x_0).$$

In particolare, la retta secante non è parallela all'asse delle ordinate ed il suo coefficiente angolare è:

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

## 7.2 DERIVATA E RETTA TANGENTE

Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo $I$

A. fissato $x_0 \in I$, si dice che $f$ è derivabile in $x_0$ se esiste finito:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =: f'(x_0),$$

il valore del limite$f'(x_0)$ si chiama derivata della funzione $f$ nel punto $x_0$.

B. la funzione $f$ si dice derivabile se è derivabile in $x_0$ per ogni $x_0 \in I$ e la funzione:

$$f' : I \to \mathbb{R} \qquad y = f'(x),$$

è detta derivata prima.

NOTA La definizione di funzione derivabile si estende al caso di funzioni definite su un unione di intervalli disgiunti.

## 7.3 DERIVATE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

| $f(x)$ | | $f'(x)$ | $I$ |
|---|---|---|---|
| $x^b$ | $b \in \mathbb{R}$ | $bx^{b-1}$ | $(0, +\infty)$ |
| $c$ | $c \in \mathbb{R}$ | $0$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n$ | $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ | $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ | $-n\frac{1}{x^{n+1}}$ | $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ |
| $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ | $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ | $\frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}}$ | $n$ pari$(0, +\infty)$, $n$ dispari$\mathbb{R} \backslash \{0\}$ |
| $e^x$ | | $e^x$ | $\mathbb{R}$ |
| $a^x$ | $a > 0$ | $\log a \; a^x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\log x$ | | $\frac{1}{x}$ | $(0, +\infty)$ |
| $\log_a x$ | $a > 0, a \neq 1$ | $\frac{1}{\log a} \frac{1}{x}$ | $(0, +\infty)$ |
| $\sin x$ | | $\cos x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos x$ | | $-\sin x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\tan x$ | | $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ | $\mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ |
| $\arcsin x$ | | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(-1, 1)$ |
| $\arccos x$ | | $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $(-1, 1)$ |
| $\arctan x$ | | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\mathbb{R}$ |

OSSERVAZIONE. Se si pone $h = x - x_0$ la definizione di derivata diventa:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

dove è inteso che il limite esiste finito. La quantità:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

è detta rapporto incrementale della funzione ed è il coefficiente angolare della retta secante il grafico di $f(x)$ nei punti $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_h = (x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Facendo tendere $h$ a zero, il punto $P_h$ tente a $P_0$ e la corrispondente retta secante converge alla retta tangente, se $f$ è derivabile.

Ne segue che l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ è:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(y_0)$$

In particolare la derivata $f'(x_0)$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente.

## 7.4 DERIVATA DESTRA E SINISTRA

Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo $I$ di estremo sinistro $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ed estremo destro $b \in \mathbb{R} \cap \{+\infty\}$, ed un punto $x_0 \neq a$, se esiste finito:

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'_-(x_0)$$

Il valore $f'_-(x_0)$ si chiama derivata sinistra. Se $x_0 \neq b$ se esiste finito:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'_+(x_0)$$

OSSERVAZIONE. Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo $I$ di estremo sinistro $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ed estremo destro $b \in \mathbb{R} \cap \{+\infty\}$, ed un punto $x_0 \in I, x_0 \neq a, x_0 \neq b$, allora sono fatti equivalenti:

A. la funzione $f$ è derivabile in $x_0$;

B. la funzione $f$ ammette derivata sinistra e destra in $x_0$ e sono uguali tra loro.

In tal caso

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

## 7.5 PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI DERIVABILI.

**Teorema 7.1 (Continuità funzioni derivabili.)**
*Sia: $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo $I$. Se $f(x)$ è derivabile in $x_0 \in I$, allora $f(x)$ è continua in $x_0$. Da notare che esistono funzioni continue non derivabili come $f(x) = |x|$.*

**Teorema 7.2 (Algebra delle funzioni derivabili.)**
*Date due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$ definite su un intervallo $I$ e derivabili, allora:*

A. *dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la combinazione lineare $\alpha f(x) + \beta g(x)$ è derivabile e vale*

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x);$$

*in particolare:*

$$(\alpha f(x))' = \alpha f'(x) \qquad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

B. *il prodotto $f(x)g(x)$ è derivabile e vale:*

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

C. *se* $g(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in I$, *allora il rapporto* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *è derivabile e vale:*

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'g(x) - f(x)(x)g'(x)}{g(x)^2},$$

*in particolare:*

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

**Teorema 7.3 (Derivata funzione composta.)**
*Date due funzioni* $f : I \to \mathbb{R}, y = f(x), g : J \to \mathbb{R}, z = g(y)$, *dove* $I$ *e* $J$ *sono due intervalli, tali che:*

A. *per ogni* $x \in I$ *allora* $f(x) \in J$

B. *le funzioni* $f$ *e* $g$ *sono derivabili*

*allora la funzione composta* $g \circ f : I \to \mathbb{R}, z = g(f(x))$, *è derivabile e:*

$$g(f(x))' = g'(f(x))f'(x) \text{ regola di derivazione in catena.}$$

## 7.6 DERIVATA FUNZIONE INVERSA

Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ tale che:

A. il dominio $I$ è un intervallo;

B. $f$ è iniettiva;

C. $f$ è derivabile;

D. per ogni $x \in I, f'(x) \neq 0$

allora, posto $J = \text{Im } f$, la funzione inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$è derivabile e:

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

## 7.7 ESTREMI RELATIVI

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in A$ è detto punto di estremo relativo se esiste $\delta > 0$ tale che:

- minimo relativo:

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$$

- massimo relativo:

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$$

Il valore $f(x_0)$ è detto estremo (minimo/massimo) relativo.

**Teorema 7.4 (Condizione necessaria del I ordine)**
*Data $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo $I$ di estremo sinistro $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ed estremo destro $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ed un punto $x_0 \in I$ tali che:*

1. *la funzione $f$ è derivabile in $x_0$;*
2. *$x_0$ è un punto di estremo relativo per $f$;*
3. *$x_0 \neq a$ e $x_0 \neq b$;*

*allora $f'(x_0) = 0$.*

OSSERVAZIONE. *Il teorema assicura che la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ è parallela all'asse delle ascisse purchè:*

1. *$f$ sia derivabile in $x_0$ e quindi ammette retta tangente;*
2. *il punto $x_0$ sia di minimo o massimo relativo;*
3. *$x_0$ non coincida con gli estremi $a$ e $b$, cioè $x_0 \in (a, b)$*

**Teorema 7.5 (Teorema di Lagrange.)**
*Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che:*

1. *$f$ è continua in $x_0$ per ogni $x_0 \in [a, b]$;*
2. *$f$ è derivabile in $x_0$ per ogni $x_0 \in (a, b)$;*

*allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che:*

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

OSSERVAZIONE. Dal punto di vista grafico, significa che esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ è parallela alla retta secante passante per i punti $P_1 = (a, f(a))$ e $P_2 = (b, f(b))$.

**Nota:** nel caso in cui $f(a) = f(b)$ il teorema di Lagrange implica che esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0)$ (teorema di Rolle.)

**Teorema 7.6 (Caratterizzazione monotonia.)**
*Data $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo $I$ di estremo sinistro $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ed estremo destro $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tale che:*

1. *$f$ è continua in $x_0$ per ogni $x_0 \in I$;*
2. *$f$ è derivabile in $x_0$ per ogni $x_0 \in (a, b)$;*

*allora:*

$$\begin{array}{lcc}
f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) & \Leftrightarrow & f(x) \text{ è crescente su } I \\
f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b) & \Leftrightarrow & f(x) \text{ è decrescente su } I \\
f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b) & \Leftrightarrow & f(x) \text{ è costante su } I \\
f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) & \Leftrightarrow & f(x) \text{ è strettamente crescente su } I \\
f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b) & \Leftrightarrow & f(x) \text{ è strettamente decrescente su } I
\end{array}$$

**Nota:** *Se il dominio nella funzione $f$ non è un intervallo, il segno della derivata prima non permette di caratterizzare la monotonia della funzione. Infatti, se $f(x) = \frac{1}{x}$ con dominio $\mathbb{R}$
$\{0\}$, la sua derivata $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ per ogni $x \neq 0$. Il grafico $f(x)$ è l'iperbole equilatera $xy = 1$, per cui la funzione è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$ così come nell'intervallo $(0, +\infty)$. Tuttavia non è decrescente sull'unione dei due intervalli $\mathbb{R}$
$\{0\}$: infatti:*

$$f(x_1) < 0 < f(x_2) \qquad \textit{se } x_1 < 0 < x_2$$

.