Calculus I

Riccardo Cereghino
S4651066

March 3, 2019

Contents

Chapter 1

Notazione

1.1 Insiemi

- $\emptyset$ = Insieme vuoto
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3...\}$ = Naturali
- $\mathbb{Z} = \{... - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$ = Relativi
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \middle| n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}$ = Razionali
- $\mathbb{R}$ = Reali

1.2 Logica

- $|$ tale che
- $\Rightarrow$ implica
- $\Leftrightarrow$ se e solo se
- $\forall$ per ogni
- $\exists$ esiste
- $\nexists$ non esiste
- $\in$ appartiene
- $\notin$ non appartiene

1.3 Operazioni tra insiemi

- A sottoinsieme di B
$$A \subseteq B$$
$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$$
- A sottoinsieme proprio
$$A \subsetneqq B$$
$$\begin{cases} \forall x \in A \Rightarrow x \in B \\ \exists x \in B | x \notin A \end{cases}$$
- Intersezione
$$A \cap B = \{x \in X | x \in A, x \in B\}$$
- Unione
$$A \cup B = \{x \in X | x \in A or x \in B\}$$
- Differenza insiemistica
$$A \diagdown B = \{x \in X | x \in A, x \notin B\}$$
- Complementare
$$A^C = \{x \in X | x \notin A\}$$

1.4 Prodotto cartesiano

Assegnati due numeri reali $a, b, a < b$, si definiscono intervalli gli insiemi seguenti:
$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$
Coppia ordinata: $(1, 3) \neq (3, 1)$

1.4.1 Intervalli

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$$
$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$$
$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}$$
$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$$
$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

1.5 Proprietà delle operazioni tra numeri reali

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

- Associativa
$$(x+y)+z = x+(y+z) = x+y+z$$
$$(xy)z = x(yz) = xyz$$

- Commutativa
$$x+y = y+x$$
$$xy = yx$$

- Distributiva
$$x(y+z) = xy+xz$$

- Esistenza elemento neutro
$$x+0 = x$$
$$1x = x$$

- Esistenza dell'universo

  1.
  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists! y = -x \in \mathbb{R} | x+(-x) = 0$$

  2.
  $$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 0 \quad \exists! y = \frac{1}{x} \in \mathbb{R} | x\frac{1}{x} = 1$$

- Relazione d'ordine totale
$$x, y, z \in \mathbb{R}$$
$$\begin{cases} x < y & oppure \\ x = y & oppure \\ x > y \end{cases}$$

- Transitività
$$x, y, z \in \mathbb{R}$$
$$(x<y) \cap (y<z) \Rightarrow (x<z)$$

- Compatibilità con la somma
$$x, y, z \in \mathbb{R}$$
$$x<y \Rightarrow x+z < y+z$$

- Compatibilità con il prodotto
$$x, y, z \in \mathbb{R}$$
$$x<y \cap z>0 \Rightarrow xz < yz$$
$$x<y \cap z<0 \Rightarrow xz > yz$$

1.6 Geometria

1.6.1 Circonferenza

Dato il centro di una circonferenza $C = (x_c, y_c)$ Si esprime l'equazione della circonferenza nella forma:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = r^2$$

Per cui se $O = (0, 0)$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Forma canonica:

$$\alpha = -2x_c \quad \beta = -2y_c \quad \gamma = x_c^2 + y_c^2 - r^2$$

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = r^2$$

Da cui calcolare centro e raggio:

$$C = \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right); \quad r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}$$

1.6.2 Ellisse

Equazione dell'ellisse (con centro nell'origine degli assi)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \qquad a \neq 0, b \neq 0$$

Chapter 2

Funzioni

2.1 Il concetto di funzione

Definizione: una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ dove $A \subseteq \mathbb{R}$ è una legge che assegna ad ogni $x \in A$ uno ed un solo valore $y = f(x) \in \mathbb{R}$

Nota: in questo caso, i valori di A sono chiamati variabile indipendente (x), mentre $\mathbb{R}$ è la variabile dipendente $y = f(x)$

Nota: inoltre definiamo $A = dom \quad f$ come il dominio della funzione.

Definizione: Il grafico di f:

$$f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x \in A, y = f(x)\right\}$$

Definizione: L'immagine di f, Im f:

$$f(A) = \{f(x) \in \mathbb{R} | x \in A\}$$

2.2 Operazioni tra funzioni

Date due funzioni $f : A \to \mathbb{R} \qquad g : B \to \mathbb{R}$

Somma e differenza: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad dom(f + g) = A \cap B$

Prodotto: $(fg)(x) = f(x)g(x) \quad dom(fg) = (A \cap B)$

Rapporto: $(\frac{f}{g})(x) = f(x)g(x) \quad dom(\frac{f}{g}) = \{x \in \mathbb{R}|x \in A, x \in B, g(x) \neq 0\}$

Reciproco: $\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1} \quad dom(\frac{1}{f}) = x \in A|f(x) \neq 0$

2.2.1 Nomenclatura

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$

- f è detta **iniettiva** se $\forall y_0 \in \mathbb{R}, f(x) = y_0$ ha al più una soluzione.

- f è detta **surgettiva** se $\forall y_0 \in \mathbb{R}, f(x) = y_0$ ha almeno una soluzione.
- f è detta **bigettiva** se $\forall y_0 \in \mathbb{R}, f(x) = y_0$ ha una ed una sola soluzione, ovvero se la funzione è sia iniettiva che surgettiva.

Osservazioni

1. f è surgettiva se e solo se $IMf = \mathbb{R}$
2. f è iniettiva se e solo se $y_0 \in IMf, f(x) = y_0$ ha al più una soluzione.

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$ sono fatti equivalenti:

- f è iniettiva
- $\forall x_1, x_2 \in A \cap x_1 \neq x_2$ allora $f(x_1) \neq f(x_2)$
- dati $x_1, x_2 \in A | f(x_1) = f(x_2)$ allora $x_1 = x_2$

2.3 Funzioni reali di variabile reale

2.3.1 Funzioni pari e dispari

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x), \forall x \in A \quad -x \in A$ f è detta:

$$f(-x) = \begin{cases} f(x) & pari \\ -f(x) & dispari \end{cases}$$

2.3.2 Funzioni monotone

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$

- $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2$ f è detta:

$$\begin{cases} f(x_1) \leq f(x_2) & crescente \\ f(x_1) \geq f(x_2) & decrescente \end{cases}$$

- $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2$ f è detta:

$$\begin{cases} f(x_1) < f(x_2) & strettamentecrescente \\ f(x_1) > f(x_2) & strettamentedecrescente \end{cases}$$

2.4 Traslazioni, dilatazioni e riflessioni

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$:

Traslazioni: $x_0 > 0, \quad y_0 \in \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x - x_0) \text{ Traslazione verso destra}$$

$$g(x) = f(x + x_0) \text{ Traslazione verso sinistra}$$

$$g(x) = f(x) + y_0 \text{ Traslazione verso l'alto}$$

$$g(x) = f(x) - y_0 \text{ Traslazione verso il basso}$$

Dilatazioni: $a > 0$

$$g(x) = f(\frac{x}{a}) \text{ Dilata su asse x}$$

$$g(x) = a \times f(x) \text{ Dilata su asse y}$$

Riflessioni:

$$g(x) = f(-x) \text{ Riflette su asse } y$$

$$g(x) = -f(x) \text{ Riflette su asse } x$$

$$g(x) = -f(-x) \text{ Riflette rispetto l'origine}$$

Osservazioni

Se $f(x)$ è dispari e $0 \in$ dom f

$$f(0) = f(-0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

Se $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$$f(x) = x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\textbf{n volte}}$$

- se n è pari, f è pari
- se n è dispari, f è dispari

2.5 Simmetrie, traslazioni, compressioni e dilatazioni di grafici.

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$:

Traslazioni: $x_0 > 0, \quad y_0 \in \mathbb{R}$

$$g(x) = f(x - x_0) \text{ Traslazione verso destra}$$

$$g(x) = f(x + x_0) \text{ Traslazione verso sinistra}$$

$$g(x) = f(x) + y_0 \text{ Traslazione verso l'alto}$$

$$g(x) = f(x) - y_0 \text{ Traslazione verso il basso}$$

Dilatazioni: $a > 0$

$$g(x) = f(\frac{x}{a}) \text{ Dilata su asse x}$$

$$g(x) = a \times f(x) \text{ Dilata su asse y}$$

Riflessioni:

$$g(x) = f(-x) \text{ Riflette su asse } y$$

$$g(x) = -f(x) \text{ Riflette su asse } x$$

$$g(x) = -f(-x) \text{ Riflette rispetto l'origine}$$

2.6 Funzione composta

Date due funzioni $f : A \to \mathbb{R} \qquad g : B \to \mathbb{R}$

$g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) \qquad \text{dom } g \circ f(x) = \{x \in A \cap f(x) \in \qquad \text{se n dispari} B\}$

2.7 Funzione inversa e sue proprietà.

Data una funzione iniettiva $f : A \to \mathbb{R}$

$$\forall y \in f = f(A), \exists! x \in A | f(x) = y$$

Da cui si ricava che:

$$x = f^{-1}(y) \qquad f^{-1} : B \to \mathbb{R} \qquad B = Imf$$

2.7.1 Costruire l'inverso di f

1. Determinare $Imf = B$ e $domf^{-1} = B$
2. $y \in B$ determiniamo $x \in A | f(x) = y$
3. $x = f^{-1}(y)$
4. $y = f^{-1}(x) \qquad x \rightleftarrows y$

Il grafico di $y = f^{-1}(x)$ è simmetrico rispetto alla bisettrice $x = y$ della funzione $y = f(x)$

Osservazioni

$$f(f^{-1}(y)) = y \qquad \forall y \in dom^{f^{-1}} = Imf$$
$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall x \in domf = Imf^{-1}$$

Inoltre f è invertibile se e solo se è iniettiva o surgettiva, da cui:

$$g^{-1} : Imf \to \mathbb{R}$$

2.8 Funzioni elementari

2.8.1 Potenze

Fissato un esponente $a \in \mathbb{R}$ la funzione potenza è:

$$f(x) = x^a$$

la cui definizione e dominio dipendono dal valore dell'esponente a.

- $a = n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\textbf{n volte}} \qquad \text{dom } f = \mathbb{R} \qquad \text{Im } f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se n dispari} \\ [0, +\infty) & \text{se n pari } n \neq 0 \\ \{0\} & n = 1 \end{cases}$$

- $a = -n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad \text{dom } f = \mathbb{R} \backslash \{0\} \qquad \text{Im } f = \begin{cases} \mathbb{R} \backslash \{0\} & \text{n dispari} \\ (0, +\infty) & \text{n pari} \end{cases}$$

- $a = \frac{1}{n} \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \qquad \text{dom } f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{n dispari} \\ [0, +\infty) & \text{n pari} \end{cases} \qquad \text{Im } f = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{n dispari} \\ [0, +\infty) & \text{n pari} \end{cases}$$

- $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1, m \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{m} \qquad \text{dom } f = (0, +\infty) \qquad \text{Im } f = (0, +\infty)$$

- $a = n \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^a = \begin{cases} \sup\{x^q | q \in \mathbb{Q}, q \leq a\} & x \geq 1 \\ \inf\{x^q | q \in \mathbb{Q}, q \leq a\} & 0 < x < 1 \end{cases} \qquad \text{dom } f = (0, +\infty) \qquad \text{Im } f = (0, +\infty)$$

Osserviamo che:

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 1$
- se n pari f è pari
- se n dispari f è dispari

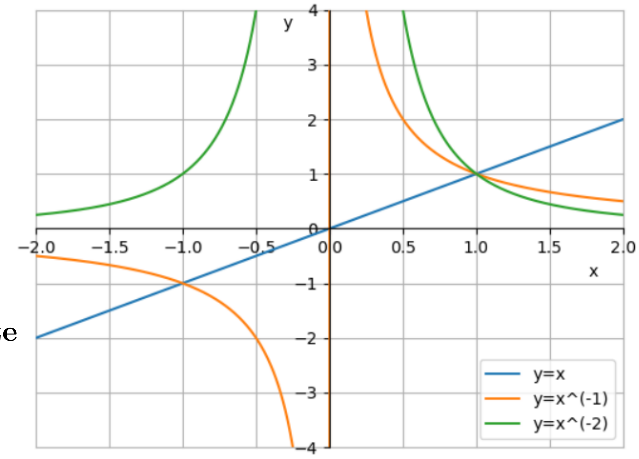

Figure 2.1: Potenze

Proprietà delle potenze

- $x^{n+m} = x^n x^m$
- $(x^n)^m = x^{nm}$

Osservazioni

$f(x) = x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$0^0 = 1$$

Dimostrazioni

$$x^{n+m} = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\text{n+m volte}} = \underbrace{(x \times \cdots \times x)}_{\text{n volte}} \times \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\text{m volte}} = x^{n+m}$$

$$(x^n)^m = \underbrace{x^n \times \cdots \times x^n}_{\text{m volte}}$$

$$x^n = x^{n+0} = x^n x^0 \qquad x \neq 0$$

$$x^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2.8.2 Esponenziale

Fissata la base $a > 0$ con $a \neq 1$, la funzione esponenziale è

$$f(x) = a^x \qquad \text{dom } f = \mathbb{R} \qquad \text{Im } f = (0, +\infty)$$

Se si sceglie come base il numero di Nepero $e = 2.71828 \cdots > 1$, la funzione esponenziale si denota:

$$f(x) = e^x = \exp x$$

Proprietà

1. se $a > 1$, allora la funzione a^x è strettamente crescente
2. se $0 < a < 1$, allora la funzione a^x è strettamente decrescente
3. se $0 < a < b$ con $a, b \neq 1$

$$\begin{cases} a^x < b^x & x > 0 \\ a^x > b^x & x < 0 \end{cases}$$

4. valgono le seguenti proprietà:
   - $a^0 = 1$
   - $a^1 = a$
   - $a^{x_1 + x_2} = a^{x_1 + x_2} \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
   - $a^{-x} = (\frac{1}{a})^x \qquad x \in \mathbb{R}$
   - $(a^x)^b = a^{bx} \qquad x, b \in \mathbb{R}$

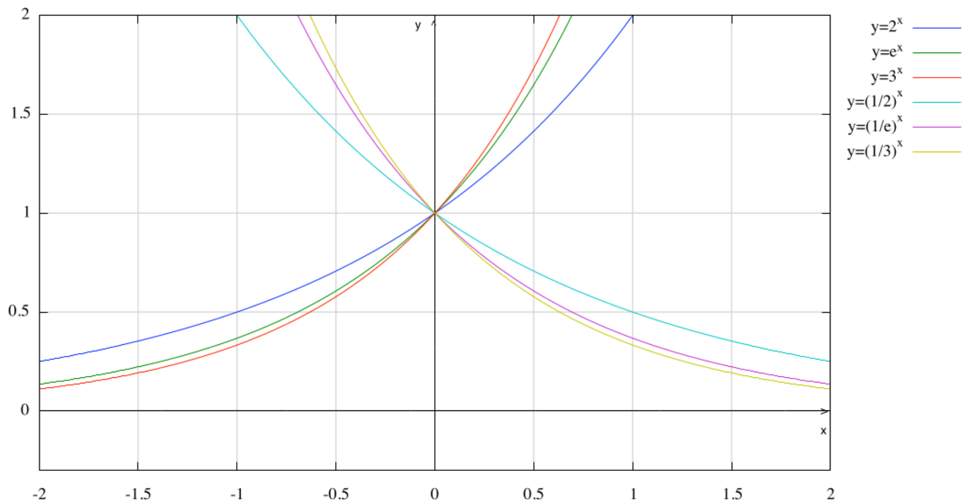

Figure 2.2: Esponenziali

2.8.3 Logaritmo

Fissata la base $a > 0$ con $a \neq 1$, la funzione logaritmo

$$f(x) = \log_a x \qquad \text{dom } f = (0, +\infty) \qquad \text{Im } f = \mathbb{R}$$

è definita come la funzione inversa della funzione esponenziale a^x. Se si sceglie come base il numero di Nepero e, il logaritmo si denota:

$$f(x) = \log_e = \log x = \ln x$$

1. se $a > 1$, allora la funzione $\log_a x$ è strettamente crescente
2. se $0 < a < 1$, allora la funzione $\log_a x$ è strettamente decrescente
3. se $0 < a < b$ con $a, b \neq 1$

$$\begin{cases} \log_a x > \log_b x & se x > 1 \\ \log_a x < \log_b x & se 0 < x < 1 \end{cases}$$

4. valgono le seguenti proprietà:
   - $\log_a a^x = x \qquad x > 1$
   - $a^{\log_a x} = x \qquad x > 0$
   - $\log_a 1 = 0$
   - $\log_a a = 1$
   - $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \qquad x_1, x_2 > 0$
   - $\log_a(\frac{x_1}{x_2}) = \log_a x_1 - \log_a x_2 \qquad x_1, x_2 > 0$
   - $\log_a x^b = b \log_a x \qquad x > 0, b \in \mathbb{R}$
   - $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad x > 0, b > 0, b \neq 1$
   - $a^x = e^{(\ln a)x} \qquad x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$

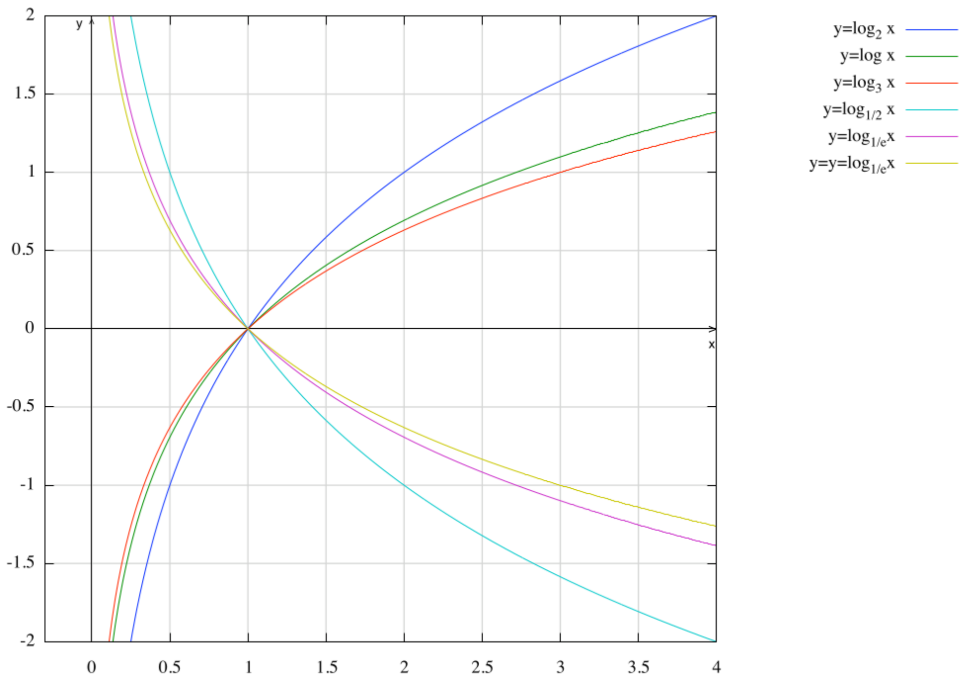

Figure 2.3: Logaritmi