Indice

1 Teoria degli errori **3**

1.1 Errore inerente 4

1.1.1 Condizionamento del problema 4

1.2 Rappresentazione dei numeri in un calcolatore 5

1.2.1 Margine di errore 5

1.3 Errori algoritmici 7

1.3.1 Addizione 7

1.3.2 Sottrazione 8

1.3.3 Moltiplicazione 8

1.3.4 Divisione 8

1.3.5 Esercizio: 8

1.4 Rappresentazione di algoritmi tramite grafi 9

L'obiettivo del corso è di tradurre in linguaggio matematico problemi, affinchè possano essere processati da un calcolatore, tenendo in considerazione i fattori che limitano le capacità dello stesso: la quantità di dati, il tempo di esecuzione e l'approssimazione.

Si individuano i seguenti passaggi per la concezione di un algoritmo in grado di essere processato da un calcolatore:

1. Individuazione del **problema**;
2. Trasformazione del problema in un **modello matematico**;
3. conversione del modello matematico in un **modello discreto**, ovvero con un numero finito di input ed output;
4. generazione del **metodo numerico**, ovvero l'algoritmo tenendo in considerazione gli errori di arrotondamento.

Capitolo 1

Teoria degli errori

Tra i vari passaggi nella generazione di un algoritmo, possiamo individuare tre diversi componenti di errore:

- **Errori analitici:** nascono nella formulazione del problema, nella traduzione in modello matematico o nella discretizzazione (modello discreto);
- **Errori inerenti:** sono gli errori di misurazione, che derivano quindi dai dati, per cui sono sempre presenti;
- **Errori algoritmici** dipendono dalle approssimazioni a cui sono soggette le variabili nei risultati intermedi all' interno del calcolatore.

Le misurazioni standard degli errori sono:

- **Errore assoluto:** la differenza tra il valore ottenuto ed il valore atteso:

$$\delta = \tilde{x} - x$$

- **Errore relativo:** l'errore assoluto in rapporto al valore atteso:

$$\varepsilon = \frac{\tilde{x} - x}{x} \rightarrowtail \tilde{x}(1 + \varepsilon)$$

1.1 Errore inerente

Siano $x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}$ l'input e $y_1 \dots y_m$ l'output e $\tilde{x_1} \dots \tilde{x_n}$ i valori perturbati in uso dal calcolatore, gli errori inerenti sull'input e l'output saranno:

- **Errore sul dato:**
$$\tilde{x} = x(1+\varepsilon) \rightarrowtail x(1+d)$$

- **Errore sull'output:**
$$\tilde{y} = y(1+\varepsilon_y) \rightarrowtail y(1+r)$$

1.1.1 Condizionamento del problema

Sia il codizionamento del problema il rapporto:

$$c = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{r}{d}$$

Si dice ben condizionato se c non cambia l'ordine di grandezza, < 10.

Formula per il condizionamento

Sia x un dato in input ed y uno in output si può ricavare una formula per il condizionamento:

$$x \rightarrowtail y = f(x) \qquad \varepsilon = \frac{\tilde{x} - x}{x} \qquad r = \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}$$

$$C_f = \frac{xf'(x) - f(x)}{f(x)} \approx \text{cond} \Rightarrow \varepsilon_{\text{in}} \approx C_g \varepsilon_x$$

Dato $x_1, \dots, x_n$ in input e usando $y_1, \dots, y_m$ in output:

$$C_{\text{ij}} = \frac{xf'(x_i)}{f_j(x_1, \dots, x_n)} \Rightarrow \frac{af_j}{ax_i}$$

1.2 Rappresentazione dei numeri in un calcolatore

- **Virgola fissa (fixed point):** si stabilisce l'utilizzo di $n+1$ cifre prima della virgole e s cifre dopo, sia B la base; un numero si può scrivere come:

$$\sum_{i=-s}^{m} B^i$$

$$x > (B-1)\sum_{i=-s}^{m} d_i B^i$$

Se si rappresentano numeri oltre i limiti minimi o massimi, si verificherà rispettivamente un **Underflow** o **Overflow**.

$$0 < x < B^{-s} \rightarrow \text{Underflow}$$

- **Virgola mobile (floating point):**

$$B^P.0d_1\dots d_t \quad d_1 \neq 0$$

sia B^P la caratteristica e $0.d_1\dots d_t$ la mantissa.

Siano p il numero che si vuole rappresentare, B la base, m ed M la mantissa, la rappresentazione in funzione dei numeri di macchina:

$$F(B,t,m,M) = \begin{cases} x \in \mathbb{R} : x = \pm B^p \sum_{i=1}^{t} d_i B^i \\ -m \leq p \leq M \\ d_i \in \{0,1,\dots B-1\} \\ d_1 \neq 0 \end{cases} \cup \{0\}$$

1.2.1 Margine di errore

Si possono implementare due diversi metodi per decidere come interpretare numeri troppo lunghi per il calcolatore, il **troncamento** e l' **arrotondamento**.

- **Troncamento (chopping):** ignora le cifre che escono dallo spazio di rappresentazione;

$$\tilde{x} = B^P.0d_1 \dots d_t = \mathrm{trn}(x)$$

Per individuare il margine di errore usando il troncamento bisogna operare sul numero reale ed il numero di macchina:

$$x = B^P.0d_1 \dots d_t \dots d_{t+\infty}$$

$$\tilde{x} \in F(B, t, m, M)$$

Quindi per trovare ε_x, l'errore relativo:

$$\varepsilon_x = \frac{\tilde{x} - x}{x} = \frac{B^P \tilde{f} - B^P f}{f B^P}$$

$$|\varepsilon_x| \leq \frac{B^{-t}}{f} \leq \frac{B^{-t}}{B^{-1}} = B^{1-t}$$

- **Arrotondamento (rounding):** controlla se la prima cifra fuori da t è minore o maggiore della metà della base, se maggiore aggiungo una unità nel'ultima cifra disponibile.

$$d_{t+1} < \frac{B}{2} \Rightarrow \tilde{x} = d_{t+1} \geq \frac{B}{2} \Rightarrow \tilde{x} = (trn)(x) + b^P B^{-t}$$

Per individuare il margine di errore dell'arrotondamento, si può seguire la medesima procedura del troncamento, con la differenza di $\tilde{f} - f$, per cui:

$$|\tilde{f} - f| \leq \frac{B}{2} B^{-t-1} = \frac{1}{2} B^{-t}$$

$$|\varepsilon_x| \leq \frac{\frac{1}{2} B^{-t}}{B^{-1}} =$$

$$u = \frac{1}{2} B^{1-t} = \text{Precisione di macchina}$$

1.3 Errori algoritmici

Supponendo di avere in input $x_1 \dots x_n$ e supponendo di avere un algoritmo in cui ci siano errori sui dati in input ed errore conseguente di arrotondamento sull'output, si studiano gli errori delle quattro operazioni fondamentali.

1.3.1 Addizione

$$y = a + b \to \tilde{y} = (\tilde{a} + \tilde{b})(1 + \varepsilon_y)$$

$$\varepsilon_a \to \tilde{a}(1 + \varepsilon_a)$$

$$\varepsilon_b \to \tilde{b}(1 + \varepsilon_b)$$

$$\varepsilon_{a+b} = \frac{\tilde{y} - y}{y} = \frac{(a(1 + \varepsilon_a) + b(1 + \varepsilon_b))(1 + \varepsilon_y) + (a + b)}{a + b} =$$

Per semplificare si applica *l'analisi del primo ordine*, per cui si ignorano degli elementi che influiscono sul risultato, in particolare i prodotti tra errori, per cui:

$$\varepsilon_{a+b} = \varepsilon_y + \varepsilon_a \frac{a}{a + b} + \varepsilon_b \frac{b}{a + b}$$

.

Coefficienti di amplificazione

I rapporti $\frac{a}{a+b}$ e $\frac{b}{a+b}$ sono detti coefficienti di amplificazione:

- se a, b sono concordi, il coefficiente sarà $c_{textamp} \leq 1$, quindi l'errore potrebbe ridursi, sommare numeri di segno concorde è considerata un'operazione sicura;

- nel case che a, b siano discorsi (es. $a \approx -b$), il coefficiente risulterà elevato, (l'esempio precedente è un istanza di *cancellazione*, non si deve verificare).

1.3.2 Sottrazione

L'operazione di sottrazione è analoga all'addizione, ma cambia il segno:

$$\varepsilon_{a-b} = \varepsilon_y + \varepsilon_a \frac{a}{a-b} - \varepsilon_b \frac{b}{a-b}$$

.

1.3.3 Moltiplicazione

L'errore relativo della moltiplicazione è legato all'approssimazione, alla somma degli errori dei fattori ed all'errore locale dell' operazione.

$$y = a + b \rightarrow \tilde{y} = (\tilde{a}\tilde{b})(1+\varepsilon)$$

$$\varepsilon_a \rightarrow \tilde{a}(1+\varepsilon_a) \qquad \varepsilon_b \rightarrow \tilde{b}(1+\varepsilon_b)$$

$$\varepsilon_{ab} = \frac{ab(1+\varepsilon_a+\varepsilon_b+\varepsilon) - ab}{ab}$$

$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon$$

1.3.4 Divisione

La divisione è soggetta al fenomeno della *cancellazione* come la sottrazione.

$$a, b \rightarrowtail y = \frac{a}{b}$$

$$\tilde{y} = \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}(1+\varepsilon) = \frac{\tilde{a}(1+\varepsilon_a)(1+\varepsilon)}{\tilde{b}(1+\varepsilon_b)} = \frac{a(1+\varepsilon_a+\varepsilon-\varepsilon_b)}{b}$$

$$\varepsilon_{a/b} = \frac{\tilde{y}-y}{y} = \frac{a}{b}\frac{(1+\varepsilon_a)(1+\varepsilon)}{\frac{a}{b}} = \varepsilon_a - \varepsilon_b + \varepsilon$$

1.3.5 Esercizio:

$$f(x) = 1 - \cos x$$

$$C_f = \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \approx 2 \rightarrow \varepsilon_m \approx 2\varepsilon_x$$

Tasformando la funzione in un algoritmo:

$$c = \cos x$$

$$y_1 = 1 - c \rightarrow \varepsilon_{\text{alg1}} = \frac{1}{y_1}\varepsilon_1 - \frac{c}{y_1}\varepsilon_c + \varepsilon_1 = -\frac{\cos x}{1 - \cos x}\varepsilon_c + \varepsilon_1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1 - \cos x} = +\infty$$

Quindi questo algoritmo ha un costo molto elevato, è un esempio di algoritmo *instabile*, dovuto all'implementazione di una cancellazione, $1 - \cos x$.

Un altro algoritmo che potrebbe essere più efficiente:

$$(1 - \cos x)\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \qquad x \approx 0$$

$$= \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$$

Quindi:

$$c = \cos x, \quad s = \sin x, \quad n = ss, \quad d = 1 + c, \quad y2 = n/d$$

$$\varepsilon_{\text{alg2}} = \varepsilon_n - \varepsilon_d + \varepsilon_2$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_n =& \varepsilon_s + \varepsilon_s + \varepsilon_n \\ =& (2\varepsilon_s + \varepsilon_n) - (\frac{c}{1+c}\varepsilon_c + \varepsilon_d) + \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.4 Rappresentazione di algoritmi tramite grafi

Si possono rappresentare gli algoritmi come grafi, interpretando i nodi come i valori e gli archi come le funzioni.

Si applica l'errore inerente a ciascun nodo in cui è contenuta la variabile e, su ogni arco, il pesò sarà pari al coefficiente di amplificazione; quindi etichettati i nodi, si procede a calcolare l'errore algoritmico.

Esempio 1

$$f_{\text{alg1}}(x) = x^2 - 7x$$

$$f_{\text{alg2}}(x) = x(x-7)$$

Algoritmo 1 *Algoritmo 1:*

$$q = x^2 p = 7x y_1 = 1 - p \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{alg_1} =& \frac{\tilde{y_1} - y_1}{y_1} = \\ =& \frac{(\tilde{q} - \tilde{p})(1+\varepsilon_1) - q + p}{q - p} = \\ =& \cdots = \\ =& \varepsilon_q \frac{x^2}{x^2 - 7x} - \varepsilon_p \frac{7x}{x^2 - 7x} + \varepsilon_1 \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} f(x) =& \frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\sqrt{x}} \qquad x \approx 0 \\ =& \frac{1+\sqrt{x} - (1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} \\ =& \frac{2\sqrt{x}}{1-x} \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$C_f = \frac{xf'(x)}{f(x)}$$

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{2(\sqrt{x})'(1-x) - 2\sqrt{x}(-1)}{(1-x)^2} \\ =& \frac{2\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-x) + 2\sqrt{x}}{(1-x)^2} \\ =& \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(1-x) + 2\sqrt{(x)}}{(1-x)^2} \\ =& \frac{\sqrt{x}(1-x) + 2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(1-x)} \\ =& \frac{1+x}{2-2x} \to \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Quindi grafo(3).