Appunti del corso di teoria dell'informazione e dell'inferenza

Riccardo Cereghino

13 marzo 2020

Indice

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

Capitolo 1

Introduzione alla probabilità

Lo studio della probabilità ha molteplici utilizzi:

- analisi e design degli algoritmi;
- *data science*, intelligenza artificiale.

1.1 Calcolo combinatorio

Definiamo un *esperimento* come un operazione che produce dei risultati.

Tipi di esperimenti sono:

- permutazione;
- disposizione;
- combinazione.

Sia N il numero di elementi di un insieme.

Permutazioni La permutazione rappresenta i possibili ordinamenti di N.

$$P(N) = N!$$

Disposizioni La disposizione rappresenta i possibili ordinamenti di i oggetti tra N.

$$D(i, N) = \frac{N!}{(N-i)!}$$

Combinazioni La combinazione rappresenta la scelta di i oggetti da N.

$$C(i, N) = \frac{N!}{i!(N-i)!}$$

1.2 Definizione assiomatica di probabilità

Definiamo la probabilità in modo assiomatico discutento alcune proprietà nel caso semplice, ma importante in cui sia possibile individuare eventi equiprobabili.

1.2.1 Nozioni fondamentali

- **Spazio campionario:** è l'insieme S dei possibili risultati di un esperimento;
- **evento:** è un qualunque sottoinsieme E di S che si realizza se il risultato dell'esperimento appartiene ad E.

Indichiamo gli eventi di:

- **unione:** come $E \cup F$;
- **intersezione:** EF;
- **mutualmente esclusivi:** $EF = \emptyset$;
- **complementare:** E^C tale che $E \cup E^C = S$.

1.2.2 Assiomi

Una probabilità $P(.)$ risulta ben definita sugli eventi di uno spazio campionario S se:

$$\begin{aligned}
&A1 : 0 \leq P(E) \leq 1 \qquad \forall E \subseteq S \\
&A2 : P(S) = 1 \\
&A3 : \text{se } E_i, i = 1, 2, \ldots \text{ mutualmente esclusivi} \rightarrow P(\cup E_i) = \sum_i P(E_i)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Sono conseguenze di $A1$, $A2$, $A3$:

$$\begin{aligned}
(i) &: \forall E, P(E^C) = 1 - P(E) \\
(ii) &: E \subseteq F \rightarrow P(E) \leq P(F) \qquad \forall E, F \\
(iii) &: P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF) \qquad \forall E, F
\end{aligned} \tag{1.2}$$

1.2.3 Eventi equiprobabili

Sia S lo *spazio campionario* costituito da un insieme finito di N risultati che indichiamo con i primi $\mathbb{N}$ numeri naturali (*cardinalità*), ovvero $S = \{1, 2, \ldots, N\}$, sia $\#S$ la cardinalità dell'insieme. Se le probabilità $P(i)$ sono tutte uguali allora $P(\{i\}) = \frac{1}{N}$.

La probabilità di un insieme $E \subseteq S$ in questo caso sarà:

$$P(E) = \frac{\#E}{\#S}$$

Esercizio 1 (Ottenere 7 lanciando due dadi)
Casi possibili: 6×6. *Casi favorevoli:* $\{6, 1\}, \{1, 6\}, \{5, 2\}, \{2, 5\}, \{4, 3\}, \{3, 4\}$.

$$P(E) = \frac{\#E}{\#S} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Esercizio 2 (Due persone nate nello stesso giorno)
Casi possibili: $\#E = 365!$. *Casi favorevoli:* $\#S = 365^{n-1}$.

$$P(E) = \frac{\#E}{\#S} = \frac{365!}{365^{n-1}}$$