Appunti del corso di teoria dell'informazione e dell'inferenza

Riccardo Cereghino

24 marzo 2020

Indice

Elenco delle figure

Elenco delle tabelle

Capitolo 1

Introduzione alla probabilità

Lo studio della probabilità ha molteplici utilizzi:

- analisi e design degli algoritmi;
- *data science*, intelligenza artificiale.

1.1 Calcolo combinatorio

Definiamo un *esperimento* come un operazione che produce dei risultati.

Tipi di esperimenti sono:

- permutazione;
- disposizione;
- combinazione.

Sia N il numero di elementi di un insieme.

Permutazioni La permutazione rappresenta i possibili ordinamenti di N.

$$P(N) = N!$$

Disposizioni La disposizione rappresenta i possibili ordinamenti di i oggetti tra N.

$$D(i, N) = \frac{N!}{(N-i)!}$$

Combinazioni La combinazione rappresenta la scelta di i oggetti da N.

$$C(i, N) = \frac{N!}{i!(N-i)!}$$

1.2 Definizione assiomatica di probabilità

Definiamo la probabilità in modo assiomatico discutento alcune proprietà nel caso semplice, ma importante in cui sia possibile individuare eventi equiprobabili.

1.2.1 Nozioni fondamentali

- **Spazio campionario:** è l'insieme S dei possibili risultati di un esperimento;
- **evento:** è un qualunque sottoinsieme E di S che si realizza se il risultato dell'esperimento appartiene ad E.

Indichiamo gli eventi di:

- **unione:** come $E \cup F$;
- **intersezione:** EF;
- **mutualmente esclusivi:** $EF = \emptyset$;
- **complementare:** E^C tale che $E \cup E^C = S$.

1.2.2 Assiomi

Una probabilità $P(.)$ risulta ben definita sugli eventi di uno spazio campionario S se:

$$\begin{aligned} &A1 : 0 \leq P(E) \leq 1 \qquad \forall E \subseteq S \\ &A2 : P(S) = 1 \\ &A3 : \text{se } E_i, i = 1, 2, \ldots \text{ mutualmente esclusivi} \rightarrow P(\cup E_i) = \sum_i P(E_i) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Sono conseguenze di $A1$, $A2$, $A3$:

$$\begin{aligned} (i) &: \forall E, P(E^C) = 1 - P(E) \\ (ii) &: E \subseteq F \rightarrow P(E) \leq P(F) \qquad \forall E, F \\ (iii) &: P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF) \qquad \forall E, F \end{aligned} \tag{1.2}$$

Dimostrazione (i) La proprietà segue dal fatto che $E^C E = \emptyset$ e $E^C \cup E = S$, quindi $P(E) + P(E^C) = 1$.

(ii) La proprietà si dimostra notando che $P(EF) = P(E)$ che si può scrivere come $F = E \cup E^C F$, da cui possiamo derivare $P(F) = P(E) + \frac{P(E^C F}{\geq 0}$.

(iii)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

In primo luogo,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$$

(per il terzo Assioma), quindi,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B))$$

perché

$$B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$$

E,

$$P(B) = P(B \setminus (A \cap B)) + P(A \cap B)$$

sottraendo

$$P(B \setminus (A \cap B))$$

da entrambe le equazioni otteniamo il risultato voluto.

1.2.3 Eventi equiprobabili

Sia S lo *spazio campionario* costituito da un insieme finito di N risultati che indichiamo con i primi $\mathbb{N}$ numeri naturali (*cardinalità*), ovvero $S = \{1, 2, \ldots, N\}$, sia $\#S$ la cardinalità dell'insieme. Se le probabilità $P(i)$ sono tutte uguali allora $P(\{i\}) = \frac{1}{N}$.

La probabilità di un insieme $E \subseteq S$ in questo caso sarà:

$$P(E) = \frac{\#E}{\#S}$$

Esercizio 1 (Ottenere 7 lanciando due dadi)
Casi possibili: 6×6. *Casi favorevoli:* $\{6,1\}, \{1,6\}, \{5,2\}, \{2,5\}, \{4,3\}, \{3,4\}$.

$$P(E) = \frac{\#E}{\#S} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Esercizio 2 (Due persone nate nello stesso giorno)
Casi possibili: $\#E = 365!$. *Casi favorevoli:* $\#S = 365^{n-1}$.

$$P(E) = \frac{\#E}{\#S} = \frac{365!}{365^{n-1}}$$

Capitolo 2

Probabilità condizionata e indipendenza

Dati due eventi E ed F siamo interessati a calcolare la probabilità di E quando sappiamo che si è realizzato F.

Sia $P(E|F)$ la probabilità di E condizionata a F.

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$$

Si osservi che:

- $0 < P(E|F) < 1$
- $P(F|F) = 1$
- $E_i, E_j = 0; P(\cup E_i|F) = \sum P(E_i|F)$

Regola di moltiplicazione Iniziamo scrivendo:

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} \Rightarrow P(EF) = P(E|F)P(F)$$

Dati E_1, E_2, E_3

$$P(E_1E_2E_3) = P(E_1|E_2E_3)P(E_2E_3)$$

$$P(E_1E_2E_3) = P(E_1|E_2E_3)P(E_2|E_3)P(E_3)$$

2.1 Teorema di Bayes

$$P(E|F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F)}$$

Formula della probabilità assoluta:

$$P(F) = P(F)P(E|F) + P(F^C)P(F|E^C)$$

Da cui:

$$P(E|F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F)P(E|F) + P(F^C)P(F|E^C)}$$

2.1.1 Eventi indipendenti

2.2 Variabili casuali discrete

Sia S lo spazio campionario, $X :\rightarrow \mathbb{R}$

$$(S, P) \xrightarrow[X]{(} \mathbb{R}, \_)$$

Definizione 1 (Variabile causale (aleatoria))
Discreta:

$$X : S \rightarrow \{a_1, \dots, a_n\} \quad a_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, n$$

Funzione di probabilità di massa

Funzione di probabilità cumulata