

Integrali e zeri di funzioni

Indice

1 Metodo Babilonese per la radice quadrata	1
2 Temperatura di Boyle	1
3 Quantizzazione di Bohr–Sommerfeld	1
4 Gas ideale di Fermi	2

1 Metodo Babilonese per la radice quadrata

Implementare il metodo Babilonese per il calcolo della radice quadrata, testandolo su alcuni numeri tra 1 e 10^9 .

2 Temperatura di Boyle

Considerando un gas di particelle la cui interazione è descritta dal potenziale di Lennard-Jones, calcolare la temperatura di Boyle T_B^* , definita da

$$B(T_B^*) = 0,$$

dove $T^* = k_B T / \varepsilon$ indica la temperatura ridotta del sistema.

3 Quantizzazione di Bohr–Sommerfeld

Le energie E_n degli stati stazionari di una particella che si muove in un potenziale unidimensionale $V(x)$ sono date, in prima approssimazione, dall'espressione

$$h \left(n + \frac{1}{2} \right) = 2 \int_a^b \sqrt{2m(E_n - V(x))} \, dx,$$

dove h è la costante di Planck, $n = 0, 1, 2, \dots$ ed a e b sono i punti di inversione classici del moto di una particella con energia E_n . Utilizzare questa formula per:

- calcolare le energie dei primi 5 stati di un oscillatore armonico, confrontando il risultato ottenuto col valore noto dalla risoluzione esatta del problema,
- calcolare le energie dei primi 3 stati legati di un dimero di Neon in onda s , assumendo che i due atomi interagiscano secondo un potenziale di Lennard-Jones con $\varepsilon/k_B = 35.7$ K e $\sigma = 2.79$ Å, e riportando il risultato in J/k_B , dove k_B è la costante di Boltzmann,
- stabilire sotto quali condizioni un sistema di due particelle interagenti secondo il potenziale Lennard-Jones non presenta alcuno stato legato in questa approssimazione.

4 Gas ideale di Fermi

Calcolare il potenziale chimico μ di un gas di Fermi ideale per particelle di massa m a spin $\sigma = \frac{1}{2}$ in funzione della temperatura T e della densità numerica $\varrho = N/V$, risolvendo l'equazione

$$\varrho = \frac{(2\sigma + 1)}{(2\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty dE \frac{\sqrt{E}}{\exp\left(\frac{E-\mu}{k_B T}\right) + 1}$$

in un opportuno sistema di unità ridotte e confrontando i risultati ottenuti con l'espansione al secondo ordine per basse temperature

$$\frac{\mu(T, \varrho)}{E_F} = 1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^2 - \frac{\pi^4}{80} \left(\frac{k_B T}{E_F} \right)^4 + \dots$$

dove

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2 \varrho}{2\sigma + 1} \right)^{2/3}.$$

Stabilire per quale valore della temperatura T il potenziale chimico μ si discosta dal suo valore approssimato per più del 5% nel caso di un sistema di atomi di ^3He ad una densità $\rho = 0.059$ g cm $^{-3}$, supponendo che si possa trattare l'Elio-3 come un fluido fermionico ideale.

Ripetere lo stesso calcolo per un gas di elettroni (nell'approssimazione in cui questi siano non-interagenti) corrispondenti alla densità media presente in un blocco di Ferro ($\rho_{\text{Fe}} = 7.874$ g cm $^{-3}$).

Discutere il limite di alta temperatura della funzione $\mu(T, \varrho)$, derivandone un'espressione analitica. Stabilire il valore minimo di T (in opportune unità ridotte) oltre il quale il limite di alta temperatura si discosta dal valore numerico per meno del 5%.