1 Teoria della produzione

1.1 Terminologia e introduzione

In questa branca si studia le combinazioni di una tecnologia di produzione, include sia la produzione che la vendita, e tratta prezzi decisi per beni dati, ciò implica che esiste un mercato per questi beni.
Tutti i problemi che tratteremo saranno flussi in unità di tempo, tale unità di tempo può variare in base alla situazione, inoltre le merci o beni trattati sono non contingenti cioè tale bene non dipende da condizioni incerte nel futuro, a differenza dei beni Arrow-Debrau.
Questi processi vengono definiti come di **Input Output**.

Sia $y \in Y \in R^n$ allora abbiamo che y vettore colonna è un piano di produzione e Y è l'insieme delle possibilità produttive. Gli elementi del vettore y sono detti net-put, se sono quantità positive sono output se negative sono input.
Con funzione di produzione intendiamo la $f(x) = (Max(y)|y_i - x \in Y)$ cioè il massimo output per un determinato livello di input, tale può essere vista anche come la frontiera delle attività produttive.
Con piano di produzione ristretto si intendono un insieme più piccolo $\in Y$ tale che si mantengono costanti gli input di lungo periodo quindi abbiamo $x_r = z$.
Con insieme degli input necessari intendiamo i valori minimi per realizzare y cioè
$V(y) = (x \in R^n|(y_i - x) \in Y)$. Una frontiera di input necessari è detta Isoquanto cioè
$Q(y) = (x \in V(y)|x \in V(y'), y' > y)$, tale rappresentazione è possibile solo se la frontiera è monotona.
Si parla di pareto efficienza se e solo se y è il massimo possibile dato un determinato input ciò ci fa capire che la funzione di produzione è la frontiera pareto efficiente.

1.2 Metodi e tipi di discriminazione tecnologica

Posso capire la tecnologia produttiva guardando:

- Se ho un solo output mi basta V(y) o Q(y).
- Se ho l'insieme di Y.
- Se ho la funzione di produzione.
- Se ho la funzione di trasformazione, cioè $T : R^n \to R$ dove T(y)=0 se e solo se y è efficiente

I tipi di tecnologia, descritti avendo due input e un output, sono:

- **Coubb-Douglass** o rendimenti costanti di scala se dato $0 < a < 1$ $Y = ((y, -x_1, -x_2) \in R^3 : y < x_1^a * x_2^{1-a})$ tale funzione crea una funzione di produzione omogenea e di grado 1, essa ha come isoquanto $Q(y) = (x \in R^2|x_2 = y^{\frac{1}{1-a}} * x_1^{\frac{-a}{1-a}})$, tale isoquanto è monotono decrescente.
  In questa tecnologia la tangente dell'angolo che conduce al punto dell'isoquanto con l'origine è detta rapporto di produzione ed è uguale a $\frac{x_1}{x_2}$.
  Le Coubb-Douglass possono essere generalizzate facilmente in più dimensioni con vari a_i e il rango è dato da $\sum a_i$, oppure si possono prendere le sue trasformate.

- **Tecnologie lineari** Sia $a, b > 0$ allora $Y = ((y, -x_1, -x_2) \in R^3 : y < x_1 * a + x_2 * b)$ e isoquanto $Q(y) = (x \in R^2|x_2 = \frac{y}{b} - \frac{a}{b}x_1)$ quindi è una funzione lineare.

- **Tecnologia di Leontief** Sia $a, b > 0$ allora $Y = ((y, -x_1, -x_2) \in R^3 : y < Min(x_1 * a, x_2 * b))$, abbiamo come isoquanto un punto visto che è un minimo, ed è sulla retta con pendenza $\frac{a}{b}$

1.3 Assunzioni fatte su V(y)

Tale insieme è:

- Non vuoto.
- Chiuso.
- Monotono cioè se $x \in V(y)$ e $\hat{x} \geq x$ allora $\hat{x} \in V(y)$, tutti gli esempi visti sono così, tale proprietà è detta disposizioni senza costo.
- Scalabile(continuità): è possibile produrre meno output usando meno input al netto dell'indivisibilità degli elementi.
- Convessità: Visto che è un insieme scalabile allora posso assumere che ogni output è ottenibile come combinazione lineare di vari input, quindi se $\lambda \in (0,1)$ e $\hat{x}, x \in V(y)$ vale che
  $\lambda * x + (1-\lambda)\hat{x} \in V(y)$.

Se assumiamo questo ne deriva che la funzione di produzione è quasi concava e crescente, e quindi ne implica che l'isoquanto formato è convesso, inoltre spesso assumeremo anche che gli isoquanti sono derivabili.

1.4 Assunzioni fatte su Y

- Non vuoto.
- Chiuso.
- Sia $0 \in Y$ allora $Y \cap R+^n \leq 0$.
- Monotono cioè se $y \in Y$ e $\hat{y} \leq y$ allora $\hat{y} \in Y$, cioè con più input produco almeno lo stesso output.

La assunzione di convessità non viene fatta spesso perchè troppo forte, inoltre se Y è convesso lo è anche V(y) ma non vale il vice versa.

1.5 Assunzioni fatte su f(x) funzione di produzione

- Monotono crescente in x.
- Concavo in x.

2 Misure di sensibilità e Rendimenti

2.1 Saggio marginale di sostituzione tecnica

Intendiamo la derivata prima dell'isoquanto o la tangente dell'angolo della retta con l'asse delle x, dati due prezzi delle materie prime, quindi indica il rapporto di scambio tra la merce 1 e merce 2. Può essere visto anche come il rapporto tra le due derivate parziali della funzione di produzione, cioè $SMST = \frac{f_1'}{f_2'}$. Negli esempi che tratteremo esisterà sempre e sarà unica su tutto R visto che vale il teorema di Dini.

Prendiamo come esempio la tecnologia Coub-Douglass ho che ha come funzione di produzione $y = x_1^a x_2^b$ dove $a, b > 0$ allora avrò come derivata parziale rispetto ad x_1, $ax_1^{a-1}x_2^b$ può essere anche scritta come $\frac{ay}{x_1}$ e invece quella rispetto a x_2 è $\frac{by}{x_2}$ perciò il suo SMST è uguale a $\frac{ax_2}{bx_1}$, notiamo quindi che la pendenza dipende da che punto ci troviamo sull'isoquanto.
Tale soluzione può essere ottenuta anche dalla derivata prima rispetto a x_1 sapendo che l'isoquanto è $x_2(x_1) = y^{1/b}x_1^{-a/b}$.

Se prendiamo come esempio le tecnologie lineari ho $y = ax_1 + bx_1$ la sua SMST= $\frac{a}{b}$ notiamo quindi che è costante su tutto l'isoquanto.

2.2 Misura di elasticità

Sapendo che $f(x) : R \to R$ è la funzione primaria allora:

- **Funzione marginale** è la derivata prima di f.
- **Funzione media** è il rapporto $\frac{f(x)}{x}$.

La misura di elasticità è il rapporto tra la funzione marginale e la funzione media quindi è $\frac{f'(x)x}{f(x)}$ può essere anche vista come $\frac{\delta log(f(x))}{\delta log(x)}$, tale funzione ci dice quanto è sensibile la produzione ad un cambiamento di un determinato input, inoltre se essa è maggiore di 1 ci dice che la media della nostra funzione è crescente. Ogni x_i ha la sua sensibilità indicata come ϵ_i.

Nel caso di tecnologia Coub-Douglas ho elasticità $\epsilon_1 = a$ $\epsilon_2 = b$, notiamo che sono costanti rispetto alle x.
Quelle lineari invece ho $\epsilon_1 = a\frac{x_1}{y}$ $\epsilon_2 = b\frac{x_2}{y}$, notiamo che visto che $y > ax_1$ variano sempre tra 0 e 1.

2.3 Elasticità di scala

Se sommassi tutte le singole elasticità ottengo l'elasticità di scala, ed è definita come $\frac{\delta log(f(\lambda * x))}{\delta log(\lambda * x)}$, essa valuta come reagisce l'output ad un aumento proporzionale di tutti gli input.

Se valuto quella di un Coub-Douglas noto che è $a + b$ e quindi se è definita nel modo classico $a + b$=1.
Posso valutare anche una Coub-Douglas multi dimensionale $\prod x_i^{a_i}$ in questo caso è $\sum a_i$, oppure una lineare generalizzata $\sum(a_i * x_i)^{k/\rho}$ dove in questo caso l'elasticità è data da k.

2.4 Elasticità di sostituzione

E' definita come $\frac{\delta log(\frac{x_2}{x_1})}{\delta log(SMST)}$ essa rappresenta la tangente dell'angolo della retta perpendicolare alla retta tangente dell'isoquanto. Essa rappresenta di quanto si modifica il rapporto di produzione rispetto al SMST (spesso vale $\log(\frac{w_1}{w_2})$, dove w_1, w_2 sono i prezzi).

Essa è definita in maniera generale come $\delta_{i,j} = -\frac{\delta log(\frac{x_i(w)}{x_j(w)})}{\log(w_i)}$ dove w è vettore totale dei prezzi.

Prendiamo per esempio la spesa di produzione relativa tra due elementi $\frac{w_i * x_i}{w_j * x_j}$ se cambia il prezzo w_i avrò come cambiamento di spesa relativo un misura simile alla elasticità di sostituzione cioè $1 - \delta_{i,j}$, nel caso delle Coub-Douglas ho spesa costante per ciò $\delta_{i,j} = 1$.

2.5 Tipi di rendimento

Per individuare il tipo di investimenti utilizzo l'elasticità di scala, se essa è $= 1$ si considera il primo caso, se minore di 1 il secondo caso, se maggiore di 1 il terzo caso:

- **Rendimenti di scala costanti** Si parla di essi se data $x \in Q(y) \rightarrow \lambda * x \in Q(\lambda * y)$ oppure scritto anche come $y \in Y \rightarrow \lambda * y \in \lambda * Y$ o anche come $f(\lambda * x) = \lambda * f(x)$ ciò implica che la funzione sia omogenea di ordine 1. In questo caso si parla di forma triangolare della produzione visto che la frontiera produttiva può essere esclusivamente una retta.

- **Rendimenti di scala non crescenti (decrescenti)** Si dicono tali se $f(\lambda * x) < \lambda * f(x)$ ciò vuol dire che $y \in Y \rightarrow \lambda * y \in \lambda * Y$, ciò indica che l'aumento di input porta ad un aumento di output meno che proporzionale, ma vale anche il contrario cioè che una diminuzione di di input porta ad un aumento di output meno che proporzionale cioè se $\lambda < 1$, quindi il vantaggio sta che si può rimpicciolire la produzione facilmente ma si scala difficilmente.
  Se ho una tecnologia a rendimenti costanti ma un parametro non è più aumentabile allora tale tecnologia diventa a rendimenti decrescenti.

- **Rendimenti di scala non decrescenti (crescenti)** Si dicono tali se $f(\lambda * x) > \lambda * f(x)$ ciò vuol dire che $y \in Y \rightarrow \lambda * y \in \lambda * Y$, ciò indica che l'aumento di input porta ad un aumento di output più che proporzionale, ciò porta dei benefici di scala, quindi se $\lambda > 1$, ma delle difficoltà se si vuole ridurre la dimensione.
  Se ho una tecnologia a rendimenti costanti ma come spesso succede ha dei costi di avvio allora tale tecnologia diventa automaticamente a rendimenti crescenti, infatti se provo a diminuire le dimensioni di tale azienda mi diventa quasi impossibile.

2.6 Funzioni omogenee

Si parla di funzione omogenea di ordine h se $f(\lambda * x) = \lambda^h * f(x)$, vale il **teorema di eulero** se $f \in O^h$ allora $h = \frac{\sum f_i'(x) * x_i}{f(x)}$ cioè l'elasticità di scala, inoltre so che $f_i'(x) \in O^{h-1}$.
Da qua ne deriva che se la funzione di produzione è omogenea di ordine 1 allora $SMST(x) = SMST(\lambda * x)$. Quindi gli isoquanti sono tutti paralleli.

Un esempio può essere la tecnologia di porduzione di Leontief infatti $f(\lambda * x) = min(\lambda * x_1, \lambda * x_2) = \lambda * min(x_1, x_2)$. Spesso si assume che i rendimenti siano costanti anche se erroneamente, infatti su scale piccolissime o grandi può non valere.

2.7 Tecnologie omotetiche

Se la funzione di produzione di può scrivere se $h(x) \in O^1$, come $f(x) = T(h(x))$ con T è monotonica crescente, da qua ne deriva che $SMST(\lambda * x) = \frac{T'(h(\lambda * x)) * h_i'(\lambda * x) * x}{T'(h(\lambda * x)) * h_j'(\lambda * x) * x} = \frac{h_i'}{h_j'} = SMST(x)$ come avevamo detto prima. Tra queste rientrano anche le CES.

2.7.1 Tecnologie con elasticità di sostituzione costante CES

Se la funzione di produzione è $f(x) = (ax_1^\rho + bx_1^\rho)^{1/\rho}$ dove $a, b > 0$ e $\rho \in (-\infty, 1)$ e sono a rendimenti costanti.
L'elasticità di sostituzione in questo caso è $\delta = \frac{1}{1-\rho}$ e SMST$=\frac{a}{b} * (\frac{x_2}{x_1})^{1-\rho}$, notiamo perchè vale sempre $\rho =< 1$ se non fosse così la funzione non sarebbe più quasi concava quindi non ci interessa più il suo studio.
Questa tecnologia contiene tutte quelle studiate infatti se:

- $\rho = 1$ ho la tecnologia **Lineare**, ed ho come $\delta = \infty$ e SMST$=\frac{a}{b}$.

- $\rho = 0$ ho la tecnologia **Coub-Douglas**, ed ho come $\delta = 1$ posso ricavarlo da $\lim_{\rho \to 0} log(a * x_1^\rho + b * x_2^\rho)/\rho = a * log(x_1) + blog(x_2)$ che elevandolo alla exp diventa una funzione di produzione C-D.

- $\rho = -\infty$ ho la tecnologia **Leontief**, ed ho come $\delta = 0$ posso ricavarlo da $\lim_{\rho \to -\infty} (a * x_1^\rho + b * x_2^\rho)^{1/\rho}$ in questo caso il risultato dipende da se $x_1 < x_2$ ho $x_1(a + b * \frac{x_2}{x_1}^\rho)^{1/\rho}$ quindi portato al limite visto che la divisione è maggiore di 1 ho x_1 e se $x_1 > x_2$ avrei come risultato x_2 ,quindi vediamo che diventa funzione di produzione Leonfitef.

3 Funzione del profitto

Sia $\Pi(p, w)$ funzione di profitto $\Pi(p, w) = Max(p{*}f(x) - w{*}x)$ e costo di produzione $C(w, y) = Min(w{*}x : f(x) > y)$, per trovare il massimo profitto devo minimizzare tale funzione a parità di y prodotto.

Sia $\pi(P) = MAX(P'Y)$ funzione di profitto valgono le seguenti proprietà:

- Sappiamo che $\pi(P) \in O^1$, se per assurdo diciamo che $\pi(\lambda * P) \neq \lambda * P'Y$ è come sostenere che esista un altro $\hat{Y}$ tale che $\lambda * P'Y < \lambda * P'\hat{Y}$ ed elidendo λ notiamo che andiamo contro la definizione di funzione di profitto, inoltre dal teorema di Eulero ne deriva che $X^* = ARGMAX(\pi(P))$ è omogena di grado 0 e quindi associato ad esso ho l'offerta di output $f(X^*)$ ed è omogenea di grado 0 .
- Monotona al crescere di P cresce anche $\pi(P)$ e al decrescere di w cresce $\pi(P)$.
- $\pi(P)$ è continua nei prezzi se ben definita.
- $\pi(p)$ è convessa infatti $\pi(\lambda * p + (1 - \lambda) * \hat{p})$. Ciò implica che se c'è alta volatilità nei prezzi il profitto per l'azienda è maggiore infatti grazie alla disuguaglianza di Jensen $E(\pi(p)) > \pi(E(p))$

3.1 Massimizzazione del profitto

Per trovare la scelta ottima dobbiamo trovare dove $\frac{\sigma\Pi}{\sigma x_i} = 0$ e $\frac{\sigma\Pi}{\sigma^2 x_i} \leq 0$ anche solo localmente.
Operativamente noi troviamo gli ottimi interni cioè $X^* > 0$ è ottimo se $f'(X^*) = \frac{w}{p}$ e $f''(X^*) \leq 0$, nell'ambito matriciale avremmo che $P' * \Sigma f'(X^*) = w$ e $f''(X^*)$ è semi definita negativa, negli esercizi assumiamo che è invertibile e definita negativa, è detta fortemente concava.
Questa trattazione porta a vari problemi:

- f non è sempre differenziabile vedi il caso dei Leontief
- Soluzioni non interne nell'ottimo, e quindi si usano le condizioni di Kuntacher cioè se $P * \Sigma f'(X^*) \leq w$ e $X^* \geq 0$ quindi vale $(Pf_i'(X^*) - w_i)x_i = 0$, cioè se l'utilita marginale della funzione di produzione non è abbastanza non si produce, è detto ottimo di frontiera.
- Non ci sono soluzioni.
- Molteplicità di ottimi, ciò succede con i rendimenti di scala costanti.

Un esempio che possiamo vedere è $f(x) = x^a$ con $a > 0$ trovo derivando $X^* = (\frac{w}{ap})^{1/(a-1)}$ vedo che è una funzione omogenea di grado 0, inoltre noto che per avere una funzione concava, quindi risultato ottimo, $a < 1$ (rendimenti di scala decrescenti), infatti se $a > 1$ ho dei rendimenti di scala crescenti e non avrei un ottimo.
Se invece $a = 1$ ho un caso particolare avrei $f(x) = x$ quindi funzione di profitto $p * x - w * x$ in questo caso se $w > p$ non ho una soluzione, se $w < p$ tale situazione è un ottimo di frontiera.
Se invece ho $p = w$ ho una situazione di profitto nullo quindi senza soluzioni.

Ora estendiamo l'esempio di prima in due dimensioni ho $f(x) = x_1^a x_2^b$, in questo caso posso trovare il valore di ottimo se $a + b < 1$ visto che se fossero $a + b \geq 1$ avremmo i problemi visti nell'esempio univariato.

Da questo esempio riusciamo ad evincere subito il **Lemma di Ottelling** cioè che $\frac{\sigma\pi}{\sigma p} = Y(w, p)$ e $\frac{\sigma\pi}{\sigma w} = -X(w, p)$, da qua vedo che $\frac{\sigma\pi}{\sigma p} > 0 > \frac{\sigma\pi}{\sigma w}$, ciò ci dice che all'aumento del prezzo guadagno di più, invece se aumentano i costi guadagno di meno.
Sempre dal Lemma di Ottelling derivano anche che $\frac{\sigma Y}{\sigma w} = -\frac{\sigma x}{\sigma p} = -\frac{f'(x(P,w))}{p{*}f''(x(P,w))}$, questa proprietà generale ci dice che l'aumento del costo delle materie prime impatta la produzione in maniera uguale ma inversa di quanto un aumento di prezzo impatta la domanda di beni.

Se negli esercizi di statica comparata, non si riesce a trovare una soluzione analitica usiamo il **Teorema del Dini o della funzione implicita**
Sia $F(x, y) : R^{n+m} \to R^m$, con F continua e differenziabile quindi di classe C^1 e $F(x^*, y^*) = 0$ e $DET(\Delta F'(x^*, y^*)) \neq 0$ allora esiste ed è unica in un intorno di (x^*, y^*) la soluzione $y(x^*)$ e $\Delta_y F'(x, y) * \Delta_x Y(x) = -\Delta_x F'(x, y)$.

Se applichiamo questo teorema sappiamo che se prendiamo un vettore di derivate di profitto del tipo $\begin{bmatrix} P * f'(w,p) - w_1 = 0 \\ P * f'(w,p) - w_2 = 0 \end{bmatrix}$, noto che posso usare il teorema di Dini, impostando che $Y = x$ e $x = w$, trovo che: $P{*}\Delta_x^2 f(x(w,p)){*}\Delta_w X(p,w) = I_2$, dove $\Delta_x^2 f(x(w,p))$ è l'hessiana della matrice di produzione.
Da qua ottengo $\Delta_w X(p,w) = \frac{\Delta_x^2 f(x(w,p))^{-1}}{P} < 0$ questo perchè la matrice è definita negativa per definizione, inoltre visto che l'hessiana è simmetrica lo è anche la Jacobiana di X, economicamente indica che l'effetto che ha w_i su X_j è lo stesso che ha w_j su X_i, quindi $\frac{\delta X_i}{\delta w_j} = \frac{\delta X_j}{\delta w_i}$.
Se tali derivate:

- Sono positive allora si parla di input sostituti, cioè se aumenta il prezzo di w_i ne diminuirà la domanda ma nel mentre aumenterà la domanda di w_j.
- Sono negative allora si parla di input complementi, se aumenta il prezzo di w_i ne diminuirà la domanda e contemporaneamente diminuirà la domanda di w_j.
- Sappiamo anche che $\frac{\delta X_i}{\delta w_i} < 0$ sempre.

Altro importante teorema è quello di **Teorema di Lagrange** Sia $M(a) = MAX(f(x,a))$ con vincolo $X, a \geq 0$, per risolverlo posso creare L=$f(x,a) + \sum \lambda_j * (V(x,a))$ dove V(x,a) sono i vincoli che abbiamo messo, per trovare il massimo interno devo porre $\begin{bmatrix} \frac{L}{\delta X_j} = 0 \\ \frac{L}{\delta \lambda_j} = 0 \end{bmatrix}$ Troviamo così X(a) e $\lambda(a)$ due funzioni massimizzanti,se la matrice Hessiana di L $\Delta^2 L$ è semi definita negativa.
Teorema: Se L è differenziabile allora $\frac{\delta L(X(a),\lambda(a),a)}{\delta a_i} = L'(X(a),\lambda(a),a)$ questo perchè i valori derivati sono uguali a 0 e lo abbiamo visto da prima.

Se applico questo teorema alla funzione del profitto ottengo che che $\left[\frac{\pi(P,w)}{\delta p} = y(p,w) \frac{\pi(P,w)}{\delta w} = -x(p,w)\right]$ e se ne facciamo la matrice hessiana otteniamo che $\begin{bmatrix} \frac{\delta Y(p,w)}{\delta p} & \Delta_w Y(p,w) \\ -\Delta_p X(p,w) & -\Delta_w X(p,w) \end{bmatrix}$ essendo Hessiana è simmetrica quindi ridimostro che $\Delta_w Y(p,w) = -\Delta_p X(p,w)$, cioè le conclusioni precedentemente trovate.

Se ci soffermiamo all'osservazione di prima possiamo classificare i beni in altri due modi:

- Se $\frac{\sigma Y}{\sigma w} = -\frac{\sigma x}{\sigma p} < 0$ si parla di input normale, se aumenta la produzione aumento questo input.
- Se $\frac{\sigma Y}{\sigma w} = -\frac{\sigma x}{\sigma p} > 0$ si parla di input regressivo, se aumenta la produzione diminuisco il bisogno di questo input.

3.2 Differenze lungo e breve periodo(Le chatellier principle)

Definiamo ora la **funzione passiva** Dato delle quantità fisse $\hat{Y}$ allora definiamo la sua funzione di profitto come $\pi(\hat{P}) = P'\hat{Y}$, notiamo che questo è sempre minore uguale di $\pi(P)$, infatti esso è al massimo uguale nel punto di tangenza.

Da queste informazioni possiamo ridimostrare il **Lemma di Otelling** Sia $\pi(\hat{P})$ funzione passiva e $g(x) = \pi(P) - \pi(\hat{P})$, quindi tale funzione è sempre $\geq$ e inoltro è $= 0$ se P=$\hat{P}$ cioè il prezzo ottimo per le quantità fissate, avrà quindi in quel punto $g'(P) = 0$ e $g''(P) \geq 0$ essendo un minimo, perciò trovo che $(\pi(P) - \pi(\hat{P}))/\delta p = 0$ che essendo P fissato nella passiva ho $\pi(P)/\delta p = y$.

Ora applichiamo la definizione nel breve periodo, infatti ci sono delle scelte che ci vengono precluse che saranno indicate come $\hat{Z}$ perciò posso definire solo la funzione di profitto ristretta $\pi(P,w,\hat{Z})$, e se scriviamo la funzione come $g(w) = \pi(P,w) - \pi(P,w,\hat{Z}) \geq 0$, so che nel suo minimo è $= 0$ e $\Delta g(P,W) = 0 = \Delta\pi(P,w) - \Delta\pi(P,w,\hat{Z})$ inoltre so che $\Delta^2 g(P,W) \geq 0$, per Otelling so anche che
$\Delta\pi(P,w) - \Delta\pi(P,w,\hat{Z}) = \begin{bmatrix} y(p,w) \\ ... \\ -x_n(p,w) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_b(p,w) \\ ... \\ -x_{b,n}(p,w) \end{bmatrix} = 0$ Quindi lungo e breve periodo danno lo stesso profitto esclusivamente se i prezzi degli input sono identici.
Invece sapendo che la funzione è convessa capisco che $\frac{y_l(p,w)}{\delta p} \geq \frac{y_b(p,w)}{\delta p}$ e $\frac{x_l(p,w)}{\delta w_i} \leq \frac{x_b(p,w)}{\delta w_i}$, quindi nel breve periodo l'aumento dell'output è più difficile e l'altro dice che nel breve periodo la riduzione di input è più lenta.

4 Minimizzazione dei costi

Definiamo la funzione di costo come $C(w, y) = MIN(w'X : f(x) > y)$ con un y fissato, in questo caso la domanda di input condizionata è $\hat{x}(w, y) = ARGMIN(w'x : f(x) \geq y)$, sappiamo che $C(w, y) \in O^1$ e $\hat{X} \in O^0$.
La funzione di isocosto è del tipo $\sum w_i * x_i = C$, notiamo quindi che ha una forma lineare perciò se ho due beni $X_2 = \frac{C}{w_1} - \frac{w_1}{w_2} * X_1$ cioè il consumo di 2 è inversamente proporzionale al suo prezzo. La pendenza della retta data da $\frac{w_1}{w_2}$ decide quanto X_1 e X_2 consumiamo se è troppo ripida consumo solo X_2 se piatta consumo solo X_1.
Possiamo dimostrare che se ci spostiamo dal punto di tangenza tra l'isocosto e l'isoquanto avremo sempre produzione minore infatti se prendo X^* punto di tangenza e $f(X^* + \delta x) - f(X^*)$ espandendo con Taylor otteniamo che $\Delta f^t(X^*) + \delta x^t * \Delta^2 f(X^*) * \delta x$, nel punto di massimo $\Delta f^t(X^*) = 0$ e sapendo che $f(X^*)$è concava allora la sua Hessiana e semi-definita negativa quindi è ≤ 0 e abbiamo dimostrato che spostandoci da $f(X^*)$ diminuiamo la produzione.

Se analizziamo attraverso il teorema di lagrange la minimizzazione dei costi (con due input) otteniamo un problema del tipo $L = w' * x + \lambda(y - f(x))$ quindi (derivo rispetto a lambda e x) $\Delta L = \begin{bmatrix} y - f(x) = 0 \\ w_1 - \lambda * f_1'(x) = 0 \\ w_2 - \lambda * f_2'(x) = 0 \end{bmatrix}$ e matrice Hessiana $\Delta^2 L = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta f^t(x) \\ -\Delta f(x) & -\lambda \Delta^2 f(x) \end{bmatrix}$ notiamo che è semi definita negativa quindi è giusto. λ sta a indicare il costo marginale di un bene.
Le condizione di di massimo possono essere semplificate anche tenendo in considerazione solo $\begin{bmatrix} y = f(x^*) \\ SMST = \frac{w_1}{w_1} = \frac{f_1(x^*)}{f_2(x^*)} \end{bmatrix}$.

Notiamo che se voglio aumnetare Y il rapporto tra gli input non cambia al netto di cambiamento di prezzo, cioè sto sempre sulla stessa isoclina detta sentiero di espansione dell'output.

Vale il **Teorema del massimo** Cioè se $M(a) = MAX(f(x, a))$ al variare di a $x \in G(x)$ allora $ARGMAX(x \in G(x)) = X(a)$, se f e G sono continue e variano su un compatto non vuoto allora $M(a)$ è continua e X(a) è superiormente continua (se gli isoquanti sono curve e non rette) ecco quindi che le soluzioni ai nostri problemi sono sensate.

La trattazione per trovare $\hat{X}$ domanda condizionale di input può portare a dei problemi come nella funzione di profitto e sono:

- Funzione non differenziabile
- Soluzioni di frontiera, anche in questo caso dobbiamo mettere le condizioni di Kuntacher cioè valutare se $f(X^*) - y \geq 0$ allora $(f(X^*) - y) * \lambda$ cioè $\lambda = 0$, oppure se $w_i - \lambda * f_i'(x) \geq 0$ allora vale $(w_i - \lambda * f_i'(x)) * x_i = 0$ cioè se l'utilità marginale non supera il costo allora non produco
- Ci sono infinite soluzione
- Non ci sono soluzioni

4.1 Esempio di minimizzazione

- **Coub-Douglas** Ho una Coub-Douglas del tipo $f(x) = A * x_1^a * x_2^b$, vediamo subito che essendo una curva convessa assinitotica agli assi ho solo una soluzione interna. Impostiamo il sistema come $\begin{bmatrix} \frac{aX_2}{bX_1} = \frac{w_1}{w_2} \\ y = Ax_1^a * x_2^b \end{bmatrix}$
  Sviluppando otteniamo che $x_1 = \frac{y}{A}^{1/(a+b)} * \frac{a*w_2}{b*w_1}^{b/(a+b)}$, notiamo che è omogenea di grado 0 e che è inversamente proporzionale a w_1.

  Possiamo vedere la funzione di costo come $C(w, y) = g(w) * h(y)$ essendo una funzione omotetica vale, quindi posso mostrare il **lemma di Sheppard** cioè che $\frac{\delta C(w,y)}{\delta w_i} = \hat{x}_i(w, t) = h(y) * \frac{\delta g(w)}{w_i}$ è molto simile al lemma di Hotelling. Si può dimostrare come segue so che $C(w, y) = L(\hat{x}(w, y), \lambda(w, y), w, y)$ per il teorema di Lagrange ho $\frac{\delta C}{\delta w_i} = \frac{\delta L}{\delta w_i} = x_i^*(w, y)$, ovviamente vale anche che $\frac{\delta C}{\delta y} = \lambda(w, y)$ che è il costo marginale.
  Oppure sia $g(w) = w * x^* - w * \hat{x}$ dove x^* è fissato e non è sempre ottimo, avrò che è una funzione passiva quindi ha come minimo 0 ed è minimo solo quando $x^* = \hat{x}$ perciò se guardo la sua derivata vedo che $\Delta_w g(w) = x^* - \Delta_w C(w, y) = 0$ quindi $x^* = \Delta_w C(w, y)$. Inoltre visto che ho un minimo $\Delta_w^2 g(w) \geq 0$ ed è $\Delta_w^2 g(w) = \Delta_w^2 C(w, y) = \Delta_w \hat{X}$.

- **CES** Sia $f(x) = (x_1^\rho + x_2^\rho)(1/\rho)$ creando il sistema come prima ottengo che il $C(w, y) = (w_1^{(\rho-1)/\rho} + w_2^{(\rho-1)/\rho})^{(\rho-1)/\rho}$, quindi una media pesata per i prezzi.

- **Teconologia Leontief** Ho $y = MIN(ax_1, bx_2)$ ottengo molto facilmente che $X_1 = y/a$ e $X_2 = y/b$ avendo una funzione di costo $C(w_1/a + w_2/b)Y$ notiamo che vale Shephard.

- **Tecnologia lineare** $f(x) = a*x_1 + b*x_2$ qua si hanno degli ottimi di frontiera essendo una retta, avrò quindi che

  - Se $\frac{a}{b} < \frac{w_1}{w_2}$ prendo solo x_2 infatti la curva di isocosto è troppo pendente.
  - Se $\frac{a}{b} > \frac{w_1}{w_2}$ prendo solo x_1 infatti la curva di isocosto è troppo piatta.
  - Se $\frac{a}{b} = \frac{w_1}{w_2}$ ho infinite combinazioni giuste tutte quelle che stanno sulla retta.

  La sua funzione di costo è quindi $C(w, y) = MIN(w_1/a, w_2/b) * Y$ notiamo che non è differenziabile.

4.2 Considerazioni generiche

Sia $wX + \lambda(y - f(x))$ so che $\Delta L = \begin{bmatrix} y - f(x) = 0 \\ w_1 - \lambda * f_1'(x) = 0 \\ w_2 - \lambda * f_2'(x) = 0 \end{bmatrix}$ e matrice Hessiana $\Delta^2 L = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta f^t(x) \\ -\Delta f(x) & -\lambda \Delta^2 f(x) \end{bmatrix}$ che per il teorema della funzione implicita ho che $\Delta^2 L * \begin{bmatrix} \Delta\lambda(w, y) \\ \Delta\hat{X}(w, y) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0_n^t & 1 \\ I_n & 0_n \end{bmatrix}$ dove la matrice centrale rappresenta lo Jacobinao rispetto a w e y.
Invertendo vedo che $\begin{bmatrix} \Delta\lambda(w, y) \\ \Delta\hat{X}(w, y) \end{bmatrix} = -\Delta^2 L^{-1} * \begin{bmatrix} 0_n^t & 1 \\ I_n & 0_n \end{bmatrix}$ da qua vedo che $\frac{\delta\lambda(w,y)}{\delta w_2} = -\Delta^2 L_{1,2}^{-1}$ o $\Delta_{w_2}\hat{x}(w, y) = -\Delta^2 L_{2,2}^{-1}$ e così via. Notiamo inoltre che gli effetti dei prezzi sulla domanda di beni essendo derivante da un Hessiana sono simmetrici quindi come nella produzione vale che $\frac{\delta x_i(w,y)}{w_j} = \frac{\delta x_j(w,y)}{w_i}$.
Un'altra derivante dalla matrice hessiana che si può fare è che $\frac{\delta C}{\delta w} = X(\hat{w, y})$ e la derivata mista $\frac{\delta C}{\delta^2 w, y} = \frac{\hat{X}(w,y)}{\delta y} = \frac{\delta\lambda(w,y)}{\delta w}$, come avevamo visto nella funzione di profitto.

Teorema di Cramer sia Ax=c un sistema di equazioni lineare se voglio $X_1 = \frac{det(A(c, A_2.., A_n))}{det(A)}$.
Se applico ciò nel nostro caso con due input ho

$$\begin{bmatrix} 0 & -f_1 & -f_2 \\ -f_1 & \lambda * f_{1,1} & \lambda * f_{1,2} \\ -f_2 & \lambda * f_{2,1} & \lambda * f_{2,2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta_{w_1}\lambda & \Delta_{w_2}\lambda & \Delta_y\lambda \\ \Delta_{w_1}\hat{X}_1 & \Delta_{w_2}\hat{X}_1 & \Delta_y\hat{X}_1 \\ \Delta_{w_1}\hat{X}_2 & \Delta_{w_2}\hat{X}_2 & \Delta_y\hat{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Applicando Cramer ottengo che $\Delta_y\lambda = \lambda * (f_{1,1} * f_{2,2} - f_{1,2}^2) > 0$ quindi dimostro che al crescere della produzione il costo marginale aumenta sempre localmente.

4.2.1 Identificazione beni regressivi

La definizione di beni regressivi è $\frac{\hat{X}_i(w,y)}{\delta y} < 0$ e si possono identificare guardando le seguenti derivate:

- Visto che $\frac{\hat{X}_i(w,y)}{\delta y} = \frac{\delta \lambda(w,y)}{\delta w_i}$ se tale derivata è negativa allora parlo input inferiori o come sinonimo beni regressivi, cioè se aumento la produzione diminuisco la richiesta di quel bene.
- $\frac{\delta Y}{\delta w_i} = -\frac{\Delta_y C}{\delta w_i} / \Delta_y^2 C$ dove $\Delta_y^2 C = \frac{\delta \lambda(w,y)}{\delta y}$, so che $\Delta_y^2 C > 0$ quindi $\frac{\delta Y}{\delta w_i}$ è di segno opposta a $\frac{\Delta_y C}{\delta w_i}$, se $\frac{\delta Y}{\delta w_i}$ ha segno positivo parlo di input regressivi, come visto nella funzione di profitto.
- $\frac{\delta \lambda}{\delta w_i}$ ottengo $-\lambda(f_{2,1} * f_2 - f_1 * f_{2,2})$ vedo che $f_{2,2} < 0$ sempre e $f_{2,1}$ cambia segno se $f_{2,1} > 0$ avremo che la derivata è negativa quindi si parla di bene regressivo.

Tutti gli input non possono essere regressivi/inferiori infatti, se tutti lo fossero all'aumentare della produzione tutti gli input diminuirebbe, e se tutti gli input diminuiscono non riesco a mantenere la produzione. Matematicamente vale $y = f(\hat{X}(w,y))$ derivo rispetto a y ed ho $1 = \Delta_y f(\hat{X}(w,y)) * \Delta_y \hat{X}(w,y)$ vedo che $\Delta_y f(\hat{X}(w,y))$ è sempre positiva invece $\Delta_y \hat{X}(w,y)$ essendo input regressivi sarà negativi, ciò porta ad un paradosso quindi non è possibile.

4.2.2 Beni sostituti e complementi

Sempre con lo stesso metodo voglio $\frac{\hat{X}_1(w,y)}{\delta w_1} = -c * f_2^2$ essendo una quantità positiva per una costante negativa vedo che conferma quello detto prima cioè se il prezzo del bene sale la richiesta per essere diminuisce.

Come prima voglio $\frac{\hat{X}_1(w,y)}{\delta w_2} = c * f_1 * f_2$ se tale derivata è positiva quindi se aumenta il prezzo di w_2 aumenta la richiesta per X_1 come la teoria suggerisce, questo input sono anche detto sostituto netto. Se invece ho più di due beni questa relazione può non essere sempre positiva se non lo è si parla di complementi netti.
Come nel caso di prima, non possiamo pensare che tutti gli input siano complementi, visto che diminuendo tutte le X non potrei produrre abbastanza Y.

Se la tecnologia è di Leontief ho che $\frac{\delta \hat{X}_1}{\delta w_1} = 0$ sono detti perfetti complementi.

4.3 Decomposizione di Slutsky

Abbiamo visto come sia attraverso il profitto che attraverso la minimizzazione del costo dividiamo i beni in sostituti o complementi, solamente che nella teoria della produzione si parla di **lordi** nella funzione di costo di **netti**.
Questi due sono legati da una **Decomposizione detta di Slutsky**, essa afferma che $\hat{X}(w, y(p,w)) = X(p,w)$ cioè gli input che massimizzano i profitti dati e minimizzano i costi sono gli stessi. Da qua derivo rispetto a w_j ed ottengo che $\frac{\delta x_i(p,w)}{\delta w_j} = \frac{\delta \hat{x}_i(w,y(p,w))}{\delta w_j} + \frac{\delta \hat{x}_i(p,w)}{\delta y} * \frac{\delta y(p,w)}{\delta w_j}$, vediamo che se il segno di $\frac{\delta \hat{x}_i(w,y(p,w))}{\delta w_j} > 0$ non è detto che $\frac{\delta x_i(p,w)}{\delta w_j} > 0$, visto che dipende anche se i beni sono inferiori o normali, perciò possono esistere complementi lordi anche con sostituti netti, oppure posso avere che due input complementi netti siano due sostituti lordi.
Oppure possiamo vedere ciò come $\frac{\delta x_i}{\delta w_j} = \frac{\delta \hat{x}_i}{\delta w_j} - \frac{\frac{\delta \hat{x}_i}{\delta y} * \frac{\delta \hat{x}_j}{\delta y}}{\frac{\delta C}{\delta^2 y}}$, da qua vediamo che i beni possono essere tutti complementi lordi ma non tutti complementi netti, il valore $\frac{\delta \hat{x}_i}{\delta y} * \frac{\delta \hat{x}_j}{\delta y}$ è detto effetto output, che ci dice infatti come cambiare isoquanto per massimizzare il profitto, così facendo producono di meno e la domanda generale si riduce. Nel caso delle Coub-douglass ho tutti sostituti netti ma complementi lordi.

Ora vediamo tale funzione ma nella versione dell'elasticità ed è $\frac{\delta log(x_i)}{\delta log(w_i)} = S_j(w, y(p,w))(G_{i,j}(w,y) - \frac{\frac{\delta log(\hat{x}_i)}{\delta log(y)} * \frac{\delta log(\hat{x}_j)}{\delta log(y)}}{\frac{\delta log(\Delta_y C)}{\delta log(y)} * \frac{\delta log(C)}{\delta log(y)}})$.
Dove la frazione è l'effetto output, $S_j = \frac{w_j * \hat{x}_j}{C}$ cioè la porzione del costo totale e $G_{i,j} = \frac{\delta log(\hat{x}_i)}{\delta log(w_j)} / S_J$ cioè l'elasticità di sostituzione i,j scritta in forma di Allen-Uzawa ed è uguale a $\frac{\Delta_{w_i,w_j} C * C}{\Delta_{w_i} C * \Delta_{w_i} C}$.

5 Funzione di costo

E' una funzione nello spazio dei prezzi che però ci permette di identificare univocamente le tecnologie di produzione al pari dello spazio produttivo o altro. Infatti se ho una domanda condizionale $\hat{x}$ e modifico i prezzi degli input posso muovermi sull'isoquanto in modo da identificarlo, inoltre se muovo y posso ricondurmi a Y insieme delle possibilità produttive.

Come per la funzione di profitto anche quella di costo ha un trattamento diverso in base al breve e lungo periodo. Se indichiamo come costi fissi di breve periodo $w'_f * x_f > 0$ per definizione, avrò quindi che $\hat{x}_v(w_v, x_f, y) = argmin(w'_v x_v \ : \ f(x_v, x_f) \geq y)$ tale è definita come domanda condizionale di breve periodo e i costi variabili saranno $\hat{C}_v = w'_v \hat{x}_v$ e poi il costo complessivo $\hat{C}$ che è la somma dei due. Operativamente se voglio trovare y che massimizza il profitto data la funzione di costo devo trovare dove $\frac{\delta \hat{C}}{\delta y} = p$, infatti devo trovare $MAX(P*y - C(w,y))$

Posso così calcolare il costo unitario $\frac{\hat{C}}{y} = \frac{\hat{C}_v}{y} + \frac{\hat{C}_f}{y}$ e il costo marginale di breve periodo $\frac{\delta \hat{C}}{\delta y} = \frac{\delta \hat{C}_v}{\delta y}$, manca il costo fisso avendo derivata 0.

5.1 Proprietà funzione di costo

- C(w,y) è continua, per il teorema del massimo è anche differenziabile.
- C(w,y) è monotonica infatti se prendo $\hat{w} > w$ e $\hat{x}$ domanda condizionale con i prezzi $\hat{w}$, allora $C(w,y) = w * x \leq w * \hat{x} \leq \hat{w} * \hat{x} = \hat{C}(w,y)$. Oppure se $\hat{y} \geq y$ allora $w * x \leq w * \hat{x}$ visto che per produrre $\hat{Y}$ mi serve $\hat{x}$ e posso produrre Y con $\hat{x}$ ma non è x ottimo.
- C(w,y) è omogeneo di primo grado. Infatti se prendo $C = \sum_i w_i * \hat{x}_i = \sum_i w_i * \frac{\delta C}{\delta w}$ perciò secondo il teorema di Eulero ho $C = \sum_i w_i * \frac{\delta C}{\delta w} / C * C = h * C$ dove h grado di omogeneità che è per forza 1.
  Possiamo aggiungere che sempre per il teorema di Eulero $\hat{x}_i$ è omogenea di grado 0 essendo derivata di C.
- C(w,y) è concava rispetto ai prezzi, visto che la passiva era convessa la funzione di costo deve essere per forza concavo.
  Se ho un aumento molteplice dei prezzi al netto di sostituti o lordi la risposta della domanda di X è opposta a w, cioè il vettore risposta ha un angolo maggiore di 90 gradi con il vettore dei prezzi

5.2 Esempio Coub-Douglas

5.2.1 Funzioni omotetiche

La funzione di costo per una tecnologia omotetica è $C(w,y) = g(w) * h(y)$ dove $h(y) = T^{-1}$, inoltre nel caso dei rendimenti costanti $T = I_k$,
Invece $g(w)$ si ricava sapendo che $T(f(\lambda * x)) = T(\lambda * f(x)) = y$ vedo che $\lambda = \frac{T^{-1}(y)}{T^{-1}(1)}$ quindi ho $C = \lambda * w * x = g(w) * h(y)$, ho $g(w) = \frac{w*x}{T^{-1}(1)}$ nel particolare g(w) dice i movimenti tra isoquanti e h(y) i movimenti all'interno dell'isoquanto.

5.2.2 Rendimenti decrescenti di scala

Sia $f(x) = x_1^a x_2^{1-a}$, omogenea di grado 1, è vincolata nel breve periodo a $f(x) = x_1^a K^{1-a}$ quindi diventa omogenea di grado $a < 1$, mi ricavo sapendo che è una funzione omotetiche che la funzione di costo è $y^{1/a} g(w)$ ha costo marginale $CMA = \frac{1}{a} * y^{1/a} g(w)$ e costo medio $y^{1/a} * g(w)$ notiamo quindi che essendo $a < 1$ il costo marginale è sempre maggiore del costo medio, quindi lo va ad incrementare aumentando la produzione, si può vedere anche con l'elasticità infatti $f'(x) * x / f(x) > 1$.
Inoltre se $a < 1/2$ ho le funzioni di costo convesse se $a \geq 1/2$ ho le funzioni di costo concave.

Da qua ne deriva che il minimo del costo medio nel breve periodo CMV si ha quando il $CMA = CMV$ e il costo medio generale CM è minimo quando $CM = CMA$, quel punto è detto scala efficiente di produzione.
Inoltre so che $\lim_{x \to 0} CMV = CMA$ visto che non produco niente non spendo niente per unità e $lim_{y \to \infty} CMV = CM$ visto che i costi fissi si azzerano.

5.2.3 Rendimenti costanti di scala

Se ho rendimenti costanti di scala e voglio produrre $y = 1$ allora ho $C(w,Y) = g(w) * y = g(w)$ questo vale visto che gli isoquanti sono paralleli, inoltre è assurdo che scalando la produzione ho una domanda condizionata diversa visto che andrebbe contro la sua stessa definizione.
Questo risultato deriva dallo studio delle funzioni omotetiche.

5.2.4 Coub-Douglass generica

Ho $f(x) = x_1^a x_2^b$ avrò quindi $C(w,y) = g(w) * y^{1/(a+b)} = K * w_1^a * w_2^b * y$, posso ricavare $CMA = g(w) * h'(y) = g(W) * y^{\frac{1-a-b}{a+b}}/(a+b)$ e anche $CMV = g(w) * h(y)/y = g(W) * y^{\frac{1-a-b}{a+b}}$.
Come si può immaginare il valore di a+b determina i rendimenti di scala e di conseguenza i costi di scale se $a+b < 1$ avrò costi crescenti e rendimenti decrescenti, $a+b = 1$ costi e rendimenti costanti e infine $a+b > 1$ ho costi decrescenti e rendimenti crescenti.
Dal Lagrangiano posso scrivere $f'(x) * x/f(x) = \frac{\lambda * f(x)}{\sum w_i * x_i}$ che è uguale a $\frac{f(x)}{\sum f_i' * x_i}$ visto che $w_i = \lambda * f_i'$, notiamo quindi anche c'è una relazione inversa rispetto ai rendimenti. Infatti se tale valore è maggiore 1 avrò costi crescenti e rendimenti decrescenti, se minore di 1 ho costi decrescenti e rendimenti crescenti.

5.2.5 Decomposizione di slutsky in senso elastico

Se calcolo $S_j = w_j * \hat{X}_j/C$ so che $\hat{X}_j = \frac{\delta C}{\delta w_j} = \frac{\delta g(w)}{\delta w_j} * h(y)$ quindi $S_j = w_j * \frac{\delta g(w)}{\delta w_j}/g(w)$, notiamo che è un'elasticità in particolare quella della funzione di costi rispetto ai prezzi, ed è l'inverso dell'elasticità di produzione, inoltre notiamo che una dipende dai prezzi degli input l'altra dai prodotti.

In questo caso è semplice guardare la decomposizione di slutsky nel senso elastico ed abbiamo che $\frac{\delta log(x_i)}{\delta log(w_i)} = w_j * \frac{\delta g(w)}{\delta w_j}/g(w) * (1 - \frac{h'(y) * y}{h(y)} * \frac{h''(y)y}{h'(y)})$, l'elasticità di sostituzione è 1 essendo una CD, inoltre nella CD $\frac{\delta log(\hat{x}_i)}{\delta log(y)} = \frac{\delta log(\hat{x}_j)}{\delta log(y)} = \frac{\delta log(C)}{\delta log(y)} = \frac{h'(y) * y}{h(y)}$ e $\frac{h''(y)y}{h'(y)} = \frac{\delta log(\Delta_y C)}{\delta log(y)}$, in tutte le funzioni omotetiche i beni sono complementi lordi visto che tale valore è negativo.

Ciò si può dimostrare infatti $\frac{\delta log(C)}{\log(y)} = \frac{\Delta_y C * y}{C}$, so anche che $\Delta_y C$ è il costo marginale che è uguale a $\sum_i w_i * \frac{\delta \hat{x}_i}{\delta y}$ visto che $C = \sum_i w_i * \hat{x}_i$; se sostituisco nell'equazione di prima trovo che $\frac{\delta log(C)}{\log(y)} = \sum_i w_i * \frac{\delta \hat{x}_i}{\delta y} * y/C$ se moltiplico sopra e sotto per $\hat{x}_i$ trovo che è $\sum_i (w_i * \hat{x}_i/C) * \frac{\delta \hat{x}_i}{\delta y} * y/\hat{x}_i$ scrivibile come $\sum_i S_i * \frac{\delta log(\hat{x}_i)}{\log(y)}$ visto che $\sum_i S_i = 1$ allora $\frac{\delta log(\hat{x}_i)}{\log(y)} = \frac{\delta log(C)}{\log(y)} = \frac{h'(y) * y}{h(y)}$.

Infine visto che $\frac{\delta log(\hat{x}_i)}{\log(y)}$ sono tutte uguali a $\frac{h'(y) * y}{h(y)}$ cioè hanno lo stesso segno e visto che gli input non possono essere tutti regressivi netti nelle omotetiche avrò tutti sostituti netti.

5.2.6 Esempio CES

Ho $y = (ax_1^\rho + bx_2^\rho)^{k/\rho}$ vediamo quindi che è omogenea di grado $k < 1$. Ho che $C = g(w) * h(y) = g(w) * y^{1/k}$ o se omogenea di grado quindi $K = 1$ ho $(w_1^r + w_2^r)^{1/r} * y$ dove $r = \rho/(\rho - 1)$. Posso trovare $h'(y) = Y^{\frac{1-k}{k}}/k$ e posso calcolare se sono complementi lordi o netti gli x_i attraverso la forma dell'elasticità $\frac{\delta log(x_i)}{\delta log(w_i)} = S_j(\frac{1}{1-\rho} - \frac{1}{1-K})$ perciò se $\rho > k$ ho che sono sostituti lordi.

Essendo omotetica posso scrivere che C(w,y)=g(w)*h(y) quindi $\frac{\delta C}{\delta w} = \frac{\delta g(w)}{\delta w} * h(y) = \hat{X}$ perciò se calcolo $\frac{\hat{x}_i}{\hat{x}_j} = \frac{\Delta_w g_i(w)}{\Delta_w g_j(w)}$, la combinazione produttiva dipende solo dai prezzi quindi, se aumento la produzione rimane indifferente; ciò porta ad avere le iscoline rette nell'origine, e quindi che l'elasticità rispetto ai prezzi è di 1. Ne deriva che la quota di spesa S_j non deriva dall'output ed è scrivibile come $\frac{w_j * \Delta_w g_j(w)}{g(w)} = \frac{\delta log(C(w,y))}{\delta w_j}$

5.3 Considerazione di breve e lungo periodo

Come per la funzione di produzione vale il principio di Le Chatellier, quindi $C_l - C_b \leq 0$ ho un minimo quando raggiungo 0 e vuol dire che $X_v^l = \hat{X}_v^b(w, y, x_f(w, y))$ e quindi $C_l = \hat{C}_b(w, y, x_f(w, y))$. Se prendo $\hat{C}$ ho che $\frac{\delta C_l}{\delta y} = \frac{\delta \hat{C}_b}{\delta y} + \Delta_{x_f} \hat{C}_b * \Delta_y * \hat{X}_f$ so che $\Delta_{x_f} \hat{C}_b = 0$ derivando da una massimizzazione, quindi vedo che $\frac{\delta C_l}{\delta y} = \frac{\delta \hat{C}_b}{\delta y}$. Se invece valuto la derivata seconda di questo oggetto che che $\hat{C}'' > C''$ cioè i costi marginali crescono più velocemente nel breve periodo.
Come ultima osservazione i costi medi $\frac{C}{y} = \frac{\hat{C}}{y}$ ovviamente solo nel punto in cui $X_v^l = \hat{X}_v^b(w, y, x_f(w, y))$.

Il lungo periodo può essere visto come un insieme di breve e la sua funzione di costo sarà il minimo delle linee presenti. Inoltre nel lungo periodo i tipo di costo/rendimento possono variare a seconda delle tecnologie.

5.4 Esercizi

Per fare gli esercizi devo controllare prima di tutto la concavità della funzione di costo, se concava avrò un ottimo di frontiera, quindi se per esempio ho due tipi prodotto di sceglierò sempre quello che costa meno mai un mix tra i due.

Se il prezzo è minore del costo medio di produzione ho un ottimo di frontiera e non produrrò nulla.

Se ho due tecnologie per minimizzare i costi avrà un mix delle due in particolare scelgo la tecnologia in base al suo costo marginale preferisco quella con il costo marginale minore.

6 Dualità

6.1 Dalla funzione di costo alla funzione di produzione

Le dualità come abbiamo visto sono utili per descrivere la tecnologia, infatti è più facile estrarre informazione da una funzione di profitto o costo, che da una di produzione.

Supponendo di avere la funzione di costo $C(w)$ da essa posso ottenere $\hat{x}$ domanda condizionale e facendo variare w ottengo diverse $\hat{x}$, che essendo tutte perpendicolari alla funzione di isocosto vanno a formare Q(y) cioè la mappa degli isoquanti. Quindi da una funzione di costo ci siamo ricavati una funzione di produzione, quindi la descrizione della tecnologia.
La dualità perfetta si ha esclusivamente se gli isoquanti sono convessi e monotoni. Se gli isoquanti non dovessero rispettare tali condizioni allora avrei che nei punti di non convessità la retta non li intersecherebbe, quindi andrebbe a creare $\hat{Q}(y)$ una funzione semplificata degli isoquanti.

Se esprimo $\hat{x}(w_1/w_2, 1, y)$ è in forma di rapporto di prezzi, è possibile scriverla cosi visto che è omogenea di grado 0, questa scrittura è utile perchè posso ottenere y scritto come una funzione di produzione.
Se per esempio prendo $C_1 = w_1^a * w_2^{1-a} y$ se derivo per $\Delta_w C = \hat{x}_i$ e quindi dopo averli ricavati posso sostituire l'uno nell'altro ottenendo così la funzione $Y = f(x)$.

6.2 Dalla funzione di profitto alla funzione di produzione

La seconda dualità lega la funzione di profitto alla funzione di produzione.
Se prendo $\Pi(p, w)$ e la normalizzo cioè divido per P ottengo $\Pi(\hat{w})$ se chiamo $x(\hat{w}) = argmax f(x) - \hat{w} * x$, si definisce offerta normalizzata $y(\hat{w})$, ne risulta che avrò la derivata prima come $\Delta_x f(x) = \hat{w}(x)$.
Avendo queste informazioni posso dire che $f(x) = MIN_w(\Pi(\hat{w}) + \hat{w}x)$ dalla derivata prima noto che $x(\hat{w}) = x$ e come derivata seconda ho $\Delta_w^2 \Pi(\hat{w}) \geq 0$, vedendo che dato $\hat{w}$ e $x(\hat{w})$ quantità che massimizzano il profitto allora avrò $f(x(\hat{w})) - \hat{w} * x(\hat{w}) \geq f(x) - \hat{w} * x$ e sono = solo se $x = x(\hat{w})$ che è un minimo, se sottrago a destra e sinistra $\hat{w}x$ avrò quindi $f(x(\hat{w})) = f(x)$.

Con queste osservazioni noto che $x(\hat{w})$ e $\hat{w}(x)$ ottengo il sistema di domanda interna cioè che domanda deve esserci per avere un determinato prezzo, o dato un determinato prezzo che domanda ci sarà, essi sono legati come $x(\hat{w}) = \hat{w}(x)^{-1}$ questo si capisce grazie alla matrice Hessiana, possiamo vedere le seguenti proprietà $\Delta_w x(w) = \Delta_{x,w}^2 f(x, w)^{-1}$ e varrà quindi $\Delta_x \hat{w}(x) = \Delta_{x,w}^2 f(x, w)$ da ciò il risultato di prima, inoltre ne eredita quindi la simmetria.

Una considerazione che possiamo fare è la sostituibilità inversa essendo $\Delta^2 f(x) \leq 0$ ho che $\Delta_w x \leq 0$ e $\Delta_x w \leq 0$, ciò vale perchè l'inversa di una matrice semi definita negativa rimane tale.
Inoltre vale che $\frac{\delta x_i}{\delta w_j} \geq 0$ se e solo se $\frac{\delta w_j}{\delta x_i} \leq 0$, nella prima disequazione vediamo la definizione di sostituti lordi **diretti** nella seconda la definizioni dei sostituti lordi **indiretti**, tale ragionamento vale anche nel caso dei complementi solamente con i segni al contrario. Questi ragionamenti valgono unicamente se ho due beni.
Altra considerazione è se voglio consumare un maggiore quantitativo di X_2 ma voglio tenere fisso X_1, se i beni sono sostituti, posso abbassare W_2 ma ciò farebbe diminuire X_1 e quindi devo abbassare anche W_1, se i beni sono complementari W_2 viene diminuito per evitare che X_1 salga aumento W_1.

6.3 Funzione di produzione indiretta

E' definita come $\hat{Y}(w,c) = MAX(f(x) : w' * x \leq C) = MAX(Y : C(w,y) \leq C)$ da qua otteniamo che $\tilde{x}(w,c) = ARGMAX(\hat{y})$, $\hat{Y}$ è una funzione continua omogenea di grado 0 e quasi convessa in w e c.
Essendo un problema di massimo vincolato è scrivibile con la Lagrangiana $L = f(x) + \lambda(c - w * x)$ notiamo che $\Delta_x f(x) = \lambda * w$ come nella minimizzazione dei costi. Ed inoltre vale anche che $\Delta^2 f(x)$ è semi definita negativa, quindi ha soluzione.

Per il teorema dell'inviluppo posso vedere anche che $\frac{\delta Y(\hat{w},c)}{(\delta C)} = \lambda = \Delta_x f(\tilde{x}(w,c)) * \Delta_c \tilde{x}(w,c)$; sempre per il teorema dell'inviluppo vedo che $\frac{\delta \hat{Y}(w,c)}{\delta w} = -\lambda * \tilde{x}(w,c)$ che sapendo quanto vale λ ottengo il **lemma di Roy** cioè $\tilde{x}(w,c) = -\frac{\Delta_w \hat{Y}(w,c)}{\delta \hat{Y}(w,c)/\delta C}$.
Ora so che $\tilde{x}(w,c(w,y)) = \hat{x}(w,y)$ e che $\tilde{x}(w,c) = \hat{x}(w,\hat{y}(w,c))$, da qua posso ricavarmi che $C(w) = Y_c^{-1}(w,y)$ dove indica l'inversa parziale rispetto a c, e vale anche $\hat{Y}(w,C) = C_y^{-1}(w,c)$.

Altra osservazione è che $\frac{\delta \tilde{X}_i(w,c)}{\delta w_i} = \frac{\delta \hat{X}_i(w,\hat{y})}{\delta w_i} + \Delta_{w_i} \hat{Y}(w,c) * \Delta_y \hat{X}_i(w,\hat{y}))$ che sapendo il lemma di Roy diventa $\frac{\delta \hat{X}_i(w,\hat{y})}{\delta w_i} - \lambda * \tilde{X}_i(w,c) * \Delta_y \hat{X}_i(w,\hat{y}))$, noto che ho un valore negativo per definizione a sinistra, a destra ne ho due positivi ma $\Delta_y \hat{X}_i(w,\hat{y}))$ non ha segno definito quindi se fosse abbastanza minore di 0 potrebbe rendere $\frac{\delta \tilde{X}_i(w,c)}{\delta w_i} < 0$ succede se il bene è fortemente regressivo, tale bene è detto giffen, ma non può accadere nella produzione quindi tale classificazione è sbagliata.
Analogamente se voglio $\frac{\delta \tilde{X}_i(w,c)}{\delta w_j} = \frac{\delta \hat{X}_i(w,\hat{y})}{\delta w_j} - \lambda * \tilde{X}_j(w,c) * \Delta_y \hat{X}_i(w,\hat{y}))$, questa uguaglianza per classificare i beni con la funzione di produzione inversa è ancora sbagliata visto che possono avere segni opposti.
Come ultima osservazione notiamo che $\frac{\delta log(\hat{Y}(w,c))}{\delta log(C)} = \frac{\lambda * w' * \hat{X}(w,c)}{f(w,\hat{x})} = \delta_x f(\hat{x}) * \hat{X}(w,c)/f(\hat{x})$, quindi è veramente un elasticità.

6.4 Geometria dei costi

La dualità tra funzione di produzione e costo è legata anche in maniera grafica, infatti se la curva di isocosto nello spazio dei prezzi è ripida avrò un isoquanto nello spazio delle quantità meno curvo e vale anche il vice versa.
Gli esempi estremi sono la tecnologia di Leontief che ha curva di isocosto una retta e curva di isoquanto un punto angoloso. Oppure la tecnologia lineare che ha un punto angoloso come isocosto e una retta come isoquanto.

Un'altra differenza si ha se si violano monotonicità o convessità nella funzione di produzione, infatti:

- Se nella funzione di produzione ho un tratto lineare, nella funzione di isocosto ho un punto con derivata prima non concorde (tratto angoloso), nella funzione di domanda condizionale invece avrò in quel segmento una retta orizzontale.
- Se nella funzione di produzione ho un tratto angoloso , nella funzione di isocosto ho un un tratto lineare, nella funzione di domanda condizionale invece avrò in quel segmento una retta verticale.
- Se nella funzione di produzione ho un tratto non convesso , nella funzione di isocosto ho un punto angoloso, nella funzione di domanda condizionale invece avrò in quel segmento una tratto orizzontale ma vuoto.

7 Teoria delle scelte di consumo

In questo ambito si agisce a prezzi dati con una spesa data e l'insieme di scelta è R^n+ quindi continuo, dove i prezzi $P \geq 0$ e il vincolo di spesa $m \geq 0$.

Definiamo come scelte $B(x) = (X : P * x \leq m)$, l'insieme delimitato da B(x) è compatto e finito, inoltre la funzione B(x) è omogenea di grado 0, quindi si parla di assenza di illusione monetaria.
Il consumatore ha come criterio di preferenza R, in particolare xRy si legge che x è preferito a y, ed ha le seguenti proprietà :

- Transitivo xRy e yRz allora xRz.
- Completo e riflessivo infatti xRx e vale per tutti gli elementi possibili.
- Monotonico se x è pareto superiore ad y ho che xRy.
- Continuo visto che l'insieme di tutti i preferiti rispetto ad X X^+ è chiuso.

A volte vengono a mancare delle proprietà in particolare la completezza infatti non è detto che si conoscano tutte le alternative ed ecco perchè le scelte si raffinano con il passare del tempo, altra caratteristica che potrebbe mancare è la transitività non sempre le scelte dei consumatori sono coerenti creando così un possibile arbitraggio.

7.1 Funzione di utilità

Avendo queste proprietà possiamo definire $U(x) \geq U(y)$ se e solo se xRy tale funzione è continua ed è detta funzione di utilità. Essa è:

- Continua
- Monotona: ha utilità marginali $\frac{\delta U(x)}{x_i} \geq 0$ quindi è monotona crescente
- Concava: nello spazio dei beni, ciò ci dice che una combinazione lineare di due beni è sempre preferita al bene singolo. Se U(x) fosse convesso avrei solo ottimi di frontiera
- Curve di indifferenza simili agli isoquanti quindi sono monotoniche decrescenti e convesse
- Ordinale ma non ha alcun tipo di cardinalità, cioè che ogni trasformazione monotonica di T(U(x)) è a sua volta una funzione di utilità con gli stessi risultati quindi il livello di utilità in se non è significativo ha senso solo se se messo in relazione con gli altri risultati.

L'ottimo di consumo ha che SMS(saggio marginale di sostituzione)=$\frac{U_1}{U_2} = \frac{P_1}{P_2}$ ed è anche la condizione del primo ordine, ciò vale se è un ottimo interno se ottimo di frontiera ho le condizione di Kuntacher.
Ovviamente questo essendo un problema di massimizzazione vincolata può essere visto attraverso la lagrangiana $L = U(x) + \lambda(m - p * x)$, essa inoltre ci permette di valutare le condizioni del secondo ordine e capire che L è semidefinita negativa quindi ammette massimo.

Come altra possibilità ci sono le scelte lessicografiche cioè le scelte che sceglie sempre quella con X_1 maggiore e poi guarda X_2, queste preferenze non permettono di creare le curve di indifferenza visto che parliamo solo di punti, in questo modo manca continuità nell'insieme e non riesco a creare U(x).

7.2 Funzione di utilità indiretta

Se chiamo $V(p,m) = MAX(U(x) : x \in B(x))$ è detta funzione di utilità indiretta e essendo B(x) compatto tale funzione avrà sempre un massimo quindi è sempre definita, chiamiamo $X = ARGMAX(V(x))$ è detta domanda Marshalliana.
Prima abbiamo visto che T(U(x)) ha gli stessi risultati di U(x) questo vale anche per la sua domanda Marshalliana questo è facile da vedere infatti so per le condizioni del primo ordine che $\Delta U(x) = \lambda_1 * P$ e tale espressione è scrivibile come $\sum_i U_i(x) * x_i = \lambda_1 * \sum_i P_i * x_i = m * \lambda_1$ quindi $\lambda_1 = \sum_i U_i(x) * x_i/m$ e se modifico $U_i(x)$ essendo derivata ho $T'(U(x)) * U_i(x)$ perciò ho $T'(U(x)) * U_i(x) = T'(U(x)) * \lambda_1 * P$ che elidendosi danno la stessa $\hat{X}$.

V(p,m) ha come proprietà:

- Continua in generale grazie al Teorema del massimo ed anche differenziabile.
- Monotonica, cioè se P aumenta la funzione diminuisce e se M aumenta la funzione aumenta.
- Omogenea di grado 0 derivando da B(x).
- Quasi convessa in P e in M, creo un upper set concavo nel indice dei prezzi.

Dal teorema dell'inviluppo che vale in V posso vedere che $\frac{\delta V(p,m)}{\delta m} = \lambda = \Delta_u X(p,m) * \Delta_m X(p,m)$ e anche che $\frac{\delta V(p,m)}{\delta p} = -\lambda X_i$ e da qua ricavo l'identità di Roy quindi $\hat{X}_i(p,m) = -\frac{\delta V}{\delta P_i}/\frac{\delta V}{\delta m}$.

7.3 Funzione di spesa

Sia $e(p,u) = MIN(P * x : u(x) \geq u)$ questa è molto simile alla funzione di minimazzazione dei costi infatti ha le stesse proprietà:

- Continua nei prezzi e a U.
- Omogenea di grado 1 rispetto ai prezzi e a U .
- Monotonica se P o U sale anche la funzione sale.
- Concava rispetto ai prezzi.

In questo caso noto che $V(p, e(p,u)) = u$ e che $e(p, V(p,m)) = m$ da qua posso capire che $e(p,u) = V_m^{-1}(P,u)$ e $V(P,m) = e_u^{-1}(p,m)$ se chiamo h la x che è $h = ARGMIN(P * x : u(x) \geq u)$ è detta domanda Hicksiana o compensata. quindi $X(P, e(p,u)) = h(P,U)$ e vale che $H(P, V(P,m)) = x(P,m)$ quindi noto che gli argmin di $e(P,u)$ e $V(p,m)$ coincidono.
Inoltro noto che $\frac{\delta V(p,m)}{\delta m} = \lambda = \frac{1}{\delta e/\delta u}$ inoltre vale il lemma di Shepard cioè $\frac{\delta e}{\delta p} = h(p,u)$.

Come valeva per la funzione di costo indiretta possiamo normalizzare $e(p,U)$ così da ottenere una simil funzione di utilità, detta in metrica monetaria.
Se chiamo questa nuova funzione $\mu(x)$ è una funzione di utilità dovuta ad una trasformazione monotonica di U(x), infatti $\mu(x)$ ha derivata positiva rispetto a x. In particolare questa nuova funzione di utilità ci dice quanto dovrebbe guadagnare per stare come l'anno scorso.
E' anche chiamata utilità indiretta sviluppata sullo spazio monetario vale che $\mu(p,q,m) = e(p, V(q,m))$ dove p sono i prezzi nuovi e q i prezzi vecchi.

7.3.1 Preferenze omotetiche

Come nella produzione ho curve di indifferenza parallele, quindi ho isocline che sono delle rette che partono nell'origine. Tutte le funzioni di preferenze sono omotetiche perchè trasformazioni monotone di U(x) che è omogenea di grado 1.
Come nella funzione di costo ho che $e(P,U) = g(P) * h(U)$ ma in questo caso $H(U) = U$ inoltre $g(P) \in O^1$ inoltre in questa forma posso scrivere che $h(p,U) = U * \Delta_p g(p)$ e $V(p,m) = m/g(P)$.
In particolare $\Delta_m V(p,m) = 1/g(P) = \hat{g}(P)$ e $\frac{\delta V}{\delta p_i} = m\frac{\delta \hat{g}(p)}{\delta p_i}$.
Dal lemma di Roy so che $\hat{X}_i(p,m) = -\frac{\delta V}{\delta P_i}/\frac{\delta V}{\delta m}$ quindi vale che $x(p,m) = -\frac{\delta \hat{g}(p)/\delta P_i * m}{\hat{g}(p)}$. Infine essendo tecnologia omotetiche la sua elasticità è $\frac{\delta log(x_i)}{\delta log(m)} = 1$.

Infine vedo che la quantità di spesa $S_i = P_i * x_i/m = -\frac{\delta log(g(p))}{\delta log(p)}$, quindi il rapporto tra i consumi dipende esclusivamente dai prezzi e non dal livello di reddito. Inoltre so che $m = \sum P_i * x_i$ e se faccio la derivata rispetto a m ottengo $1 = \sum S_i \frac{\delta log(x_i)}{\delta log(m)}$ e questa è sempre vera.

7.3.2 Preferenze Coub-Douglas

Sia $U(x) = x_1^a * x_2^{1-a}$ ha come funzione di spesa $e(p, u) = u * K * P_1^a * P_2^{1-a}$ inoltre essendo omotetica e omogenea di grado 1 la funzione di spesa ha forma $e(p, u) = g(p) * u$, grazie al lemma di Shepard ottengo che $h_1 = \frac{\delta e}{\delta P_1} = aK \frac{P_2}{P_1}^{1-a} * u$ e identico anche h_2 inoltre se voglio trovare la domanda inversa $V(p, m)$ pongo $e = m$ e poi inverto e porto fuori $u = V$.
Se invece voglio trovare il marshalliano X_1 uso il lemma di Roy trovando così $X_1 = \frac{am}{P_1}$, notiamo quindi che nel caso C-D il X_i e quindi anche S_i non dipendo dal prezzo dell'altro bene, e avrò che la quota di spesa per i due beni sarà a e 1-a.
Se voglio valutare la metrica monetaria $m(p, x) = K * P_1^a P_2^{1-a} * X_1^a X_2^{1-a}$ e $U(p, q, m) = \frac{P_1}{q_1}^a \frac{P_2}{q_2}^{1-a} * m$.

7.3.3 Preferenze CES

Ho $U(X) = (X_1^\rho + X_2^\rho)^{1/\rho}$ ha come funzione di spesa $e(p, u) = (P_1^r + P_2^r)^{1/r}$ dove $r = \rho/(\rho - 1)$, come prima ricaviamo Hicksiano con il lemma di Sheppard $h_i = (P_1^r + P_2^r)^{1/r-1} * P_i^{r-1} * u$ e poi con il lemma di Roy otteniamo anche il Masrhalliano $X_i = M * P_i^{r-1}/P_1^r + P_2^r$ notiamo quindi che la domanda di X e la spesa di conseguenza come da teoria non dipendono dal reddito ma esclusivamente dai prezzi.

8 Statica comparata dell'utilità

8.1 Reddito mobile con prezzi fissi

Se varia il reddito nel caso di beni omotetici il rapporto di consumo tra i beni non cambia quindi $\frac{\delta X_i}{\delta m} = 0$, ma non è sempre cosi infatti può capitare di avere dei beni normali che $\frac{\delta X_i}{\delta m} > 0$ o addirittura beni di lusso e quindi che $\frac{\delta log(x_i)}{\delta log(m)} > 1$, invece possono esserci beni di necessità $\frac{\delta log(x_i)}{\delta log(m)} < 1$ che possono diventare inferiori se $\frac{\delta X_i}{\delta m} < 0$. Nel caso delle omotetiche non sono ne di necessita ne di lusso. La distinzione tra beni di lusso e beni di necessità la posso evincere anche tra $\frac{\delta S_2}{\delta m} = \frac{P_i * (\delta X_2/\delta m - X_2)}{m^2}$ il segno è deciso da $\delta X_2/\delta m$ che se positivo porta tutto ad essere positivo e diventare un bene di lusso.

8.2 Reddito fisso con prezzi mobili

Se P_i diminuisci allora divento anche implicitamente più ricco quindi sono portato a spendere di più, se le preferenze non sono omotetiche non è detto che consumi sicuramente più bene 1, infatti se tale bene fosse regressivo ne consumerei addirittura di meno, infatti esclusivamente nella teoria del consumo ed esclusivamente nelle funzioni non omotetiche, può capire che $\frac{\delta X_i}{\delta P_i} > 0$.
Ciò si può osservare guardando l'identità $h(p,u) = x(p, e(p,u))$ che modificando un prezzo p' ho due spostamenti:

- Il primo per mettere la curva di isospesa parallala alla nuova.
- Il secondo traslo la nuova curva in alto aumentando il reddito.

Questi due movimenti sono descritti dalla **Decomposizione di slutsky**, inoltre tale decomposizione spiega come possano esistere beni giffen cioè se $\frac{\delta X_i}{\delta P_i} > 0$.
Deririviamo $\frac{\delta h_i}{\delta P_i} = \frac{\delta X_i}{\delta P_i} + \frac{\delta X_i}{\delta m} * \frac{\delta e}{\delta P_i}$ grazie al lemma di sheppard è scrivibile come $\frac{\delta X_i}{\delta P_i} + \frac{\delta X_i}{\delta m} * h_i$ da qua ricavo che $\frac{\delta X_i}{\delta P_i} = \frac{\delta h_i}{\delta P_i} - \frac{\delta X_i}{\delta m} * h_i$, quindi vedo che se $\frac{\delta X_i}{\delta m}$ e particolarmente negativo rende l'equazione positiva così creando i beni Giffen. So anche che $h(P,u) = X_i$ se è una soluzione interna di ottimo.
La decomposizione di slutsky sottolinea un altro problema, cioè quello che non possiamo classificare beni e complementi secondo la domanda marshalliana, visto che $\frac{\delta X_i}{\delta m}$ non è simmetrico come avveniva nel caso della funzione inversa della produzione.
Li possiamo classificare esclusivamente attraverso h_i quindi ha senso solo parlare di beni netti in generale. Ciò non vale nel caso omotetico infatti $\frac{\delta X_i}{\delta m} > 0$ quindi ho simmetria nell'equazione cioè $sign(\frac{\delta h_i}{\delta P_i}) = sign(\frac{\delta X_i}{\delta P_i})$.

Ritornando al analisi dei beni Giffen $\frac{\delta X_i}{\delta P_i} > 0$, questo è possibile solo nel consumo perchè se aumento e diminuisce il prezzo posso modificare anche la mia utilità così da creare appunto i beni Giffen. Inoltre nell'equazione di slutsky che crea i beni Giffen notiamo che ci sono due effetti contrari l'uno all'altro $\frac{\delta h_i}{\delta P_i}$ detto effetto sostituzione e $-\frac{\delta X_i}{\delta m} * h_i$ detto effetto reddito.

Se moltiplico nell'equazione di Slutsky Δp cioè la differenza dei prezzi otteniamo $\Delta X_i = \Delta p * \frac{\delta X_i}{\delta P_i} = \Delta p * \frac{\delta h_i}{\delta P_i} - \frac{\delta X_i}{\delta m} * h_i * \Delta p$, in particolare se prendiamo in considerazione $h_i * \Delta p$ è detta compensazione Hicksiana, ci dice quanto deve guadagnare in più o in meno il consumatore per passare sullo stesso isoquanto, ed essa nel continuo è uguale a $X_i * \Delta p$, compensazione alla slutsky, ci dice quanti soldi dobbiamo dare al consumatore per avere un utilità superiore a prima nel discreto però $X_i * \Delta p > h_i * \Delta p$. Questo perchè $h_i * \Delta p = e(P + \Delta p, u) - e(P, u)$ se sviluppo alla taylor ottengo $h(P,U) * \Delta p + 1/2 \Delta p * \Delta_p h(p,u) * \Delta p$ visto che $h(P,U) = X_i$ in questo caso e $\Delta_p h(p,u) < 0$ dimostro quindi che $X_i * \Delta p > h_i * \Delta p$.

8.2.1 Esempio Coub-Douglas

Sia $X_1^a * X_2^{1-a}$ so che $e(p,u) = K * u * P_1^a * P_2^{1-a}$ e da qua mi ricavo che $V(p,m) = \frac{m}{KP_1^a * P_2^{1-a}}$ controllo in questo esempio che l'equazione di slutsky sia sensata quindi che $\frac{\delta X_1}{\delta P_2} = \frac{\delta h_1}{\delta P_2} - \frac{\delta X_1}{\delta m} * x_2$, so che $h_1 = \frac{\delta e(p,u)}{\delta P_1} = K * u * a * \frac{P_2}{P_1}^{1-a}$ e $\frac{\delta h_1}{\delta P_2} = a(1-a)K * \frac{P_1}{P_2}^a * \frac{u}{P_1}$, ricavo poi $X_2 =$ che nel caso di un C-D è $\frac{(1-a)m}{P_2}$ e calcolo $\frac{\delta X_1}{\delta P_2} = 0$ visto che la domanda marshialliana dipende solo dal suo prezzo ottengo quindi che $\frac{\delta h_1}{\delta P_2} = \frac{\delta X_1}{\delta m} * x_2$ calcolo infine $\frac{\delta X_1}{\delta m} = \frac{a}{P_1}$ ora sostituisco $V(p,m)$ in u di $\frac{\delta h_1}{\delta P_2}$ ed ottengo che l'uguaglianza viene rispettata.

8.3 Risultati dalla statica comparata

Come nella produzioe non sempre riusciamo a trovare una soluzione ottima per x, ecco quindi che attraverso il teorema della funzione implicita ne studiamo alcune proprietà. Se ricordiamo la lagrangiana $L = U(x) + \lambda(m - Px)$ otteniamo che le condizioni del primo ordine sono $\Delta_x L = \begin{bmatrix} m - PX = 0 \\ \Delta_x u(x) - \lambda * P = 0 \end{bmatrix}$ e come matrice hessiana $\begin{bmatrix} 0 & -P \\ -P & \Delta_x^2 U(x) \end{bmatrix}$, da qua posso usare la funzione implicita visto che l'hessiana è invertibile, se prendiamo come esempio una funzione con due beni, ricordando che derivo rispetto a λ, x ottengo

$\begin{bmatrix} 0 & -P_1 & -P_2 \\ -P_1 & U_{1,1} & U_{1,2} - P_2 & U_{2,1} & U_{2,2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{\delta\lambda}{\delta P_1} & \frac{\delta\lambda}{\delta P_2} & -\frac{\delta\lambda}{\delta m} \\ \frac{\delta X_1}{\delta P_1} & \frac{\delta X_1}{\delta P_2} & -\frac{\delta X_1}{\delta m} \\ \frac{\delta X_2}{\delta P_1} & \frac{\delta X_2}{\delta P_2} & -\frac{\delta X_2}{\delta m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & 1 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix}$ grazie a Cramer ottengo che:

- $\frac{\delta X_1}{\delta P_1} = \frac{-X_1((U_{1,2}P_2 - U_{2,2}P_1) - \lambda * P_2^2)}{det(\Delta^2)}$, noto che se U è concavo e $U_{1,2} > 0$ dice è i beni non possono essere giffen visto che rende la disuguaglianza negativa, infatti i beni sono giffen perchè U non è sempre concava.
- $\frac{\delta X_1}{\delta m} = \frac{P_2 U_{1,2} - P_1 * U_{2,2}}{det(\Delta^2)}$ se U è concavo e $U_{1,2} > 0$ ho una disuguaglianza positiva, quindi i beni sono normali.
- $\frac{\delta\lambda}{\delta m} = \frac{U_{1,1} * U_{2,2} - U_{1,2}}{det(\Delta^2)}$ se U è concavo la disuguaglianza è positiva.

8.4 Dualità del consumo: rapporto utilità diretta con utilità indiretta

Come nella parte della produzione la dualità tra $V(p, m)$ e $U(x)$ è presente, infatti $V(P, m) = U(x(P, m))$, ciò è dimostrabile, infatti se prendiamo la funzione $V(\hat{P}) = V(P/m, 1) = V(P, m)$ visto che V omogenea di grado 0, ho che $V(\hat{P}) = MAX(U(x) : \hat{P}X = 1)$ allora vale la seguente affermazione, $U(x) = MIN(V(\hat{P}) : \hat{P} * x = 1)$ da qua ne derivo la Lagrangiana scritta come $L = V(\hat{P}) + \lambda(\hat{P}X - 1)$ derivo e ottengo $\frac{\delta L}{\delta \hat{p}} = 0 = \Delta_{\hat{p}} V(\hat{P}) + \lambda * X$ quindi $\Delta_{\hat{p}} V(\hat{P}) = -\lambda * X$ ricordiamo inoltre che $\Delta_{\hat{p}} V(\hat{P}) = \Delta_p V(\hat{P}) * m$.
Sapendo ciò ottengo $\sum_i^n \frac{\delta V(\hat{P})}{\delta \hat{P}_i} * \hat{P}_i = \sum_i^n \frac{\delta V(\hat{P})}{\delta P_i} * P_i * m = -\frac{\delta V(\hat{P})}{\delta m} * m$.
Sapendo che $\hat{P} * x = 1$ se moltiplico $\hat{P}$, sapendo che m=1, nell'uguaglianza $\Delta_{\hat{p}} V(\hat{P}) = -\lambda * X$ ho $\Delta_{\hat{p}} V(\hat{P}) * \hat{P} = -\lambda$, e ottengo quindi che $\lambda = \frac{\delta V(\hat{P})}{\delta m} * m$, cioè proporzionale all'utilità marginale. Avendo queste informazioni possiamo derivare il lemma di Roy per la domanda indiretta $X_i = \frac{-\delta V(\hat{P}/\delta \hat{P})}{\lambda} = X(\hat{P(x)})$.

Altra osservazione che si può fare è che $ARGMIN(V(\hat{P}) : \hat{P} * X = 1) = \hat{P}(x)$ domanda di prezzo rispetto alla quantità ed è in relazione inversa con $X(\hat{P(x)})$.
Attraverso il teorema dell'inviluppo $U(x) = L(\hat{P}(x), u(x), x)$ ho che $\frac{U(x)}{\delta x_i} = \lambda * \hat{P}_i$ da qua ottengo $\lambda = \frac{U(x)}{\delta x_i} * \frac{1}{\hat{P}_i}$ da prima so che $1/\hat{P}_i(x) = x$ quindi capisco che $\lambda = \sum_i^n \frac{U(x)}{\delta x_i} * x$, oppure ottengo che $\hat{P}_i = \frac{U(x)}{\delta x_i} / \lambda$, questa è chiamata **Idendità di Hotelling-Wold**.

9 Misure di benessere economico

Per misurare il benessere economico dovrei aggregare un insieme di funzioni di utilità o di domande, facendo ciò però si rischia di creare domande insensate, infatti per esempio sommando i redditi non si riesce a capire chi è ricco e chi no, questi problemi vengono sorvolati se la funzione di utilità inversa è $V(p, m) = \alpha(p) + B(p) * m$ detta forma polare o quasi omotetiche.

Per valutare il benessere in due tempi diversi posso fare $V(P_1, m_1) - V(P_0, m_0)$ oppure la stessa vista in metrica monetaria $\mu(q, P_1, m_1) - \mu(q, P_0, m_0)$, se tale equazione è maggiore di 0 sto meglio di prima. Per misurare il benessere si usano due indici:

- Laspairs cioè uso $q = P_0$ ottengo $\mu(P_0, P_1, m_1) - \mu(P_0, P_0, m_0) = VE$, dove VE è variazione è equivalente se maggiore di 0 il consumatore sta meglio, ed è come cambia il reddito per avere l'utilità futura ai prezzi di ora.
- Paasche usa $q = P_1$ ottengo $\mu(P_1, P_1, m_1) - \mu(P_1, P_0, m_0) = VC$ dove $VC = -\Delta_m^h$ variazione compensativa, misura come deve cambiare il reddito per avere la stessa utilità dei prezzi passati.

9.1 Preferenze quasi lineari

Sono tali se $U(x) = A(x) + X_0$ e $A(x)$ concava e $P_0 = 1$ e $m >> P$, se $X_0(p, m) = 0$ allora è una funzione di utilità normale come al solito, se invece $X_0 > 0$ allora ho che la lagrangiana $L = A(x) + X_0 + \lambda(m - Px - X_0)$ so che $\frac{\delta L}{\delta x_0} = 1$ quindi ne consgue che $\lambda = 1$.
Sapendo ciò posso creare una lagrangiana semplificata quindi $MAX(U(x) - Px + m)$, ottengo quindi $\Delta_x U(x) = P(x)$ quindi che è ricavabile come $X(p) = P^{-1}(x)$ noto che non dipende dal reddito, scrivo che
$V(p, m) = A(x(p)) + m - PX(p) = g(p) + m$ e di conseguenza $e(p, m) = U - g(p)$ da qua vedo che il lemma di sheppard vale $h(p, m) = -g'(p)$ e dal lemma di roy vedo che $X_i = -g'(p)$ quindi domanda $h = x$ sempre, vale anche quindi che si possono classificare i beni anche con la jacobiana di X.
Notiamo infine che $V(p, m)$ è convessa visto $g(p)$ è convessa, inoltre $g(p)$ è chiamato surplus del consumatore e si può scrivere come $g(p) = MAX(U(x) - PX)$ e per dualità $U(x) = MIN(g(p) + PX)$ essendo una simil funzione di profitto vale il lemma di Hotelling quindi $\frac{\delta g(p)}{\delta p_i} = -X_i$, infine notiamo che $P(X) = ARGMIN(g(p) + PX)$.