UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO

DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICO-AZIENDALI
FINANZA AZIENDALE E MERCATI FINANZIARI (LM77)

MODELLO DI BLACK-SCHOLES-MERTON, UN'APPLICAZIONE PRATICA

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

CANDIDATO:

RICCARDO LESSIO

893707

RELATORE: PROF. CLAUDIO MATTALIA

CO-RELATORE: PROF. FEDERICO NERVI

TORINO, 2024

UNIVERSITÀ
DI TORINO

SOMMARIO

CAPITOLO 0

PREFAZIONE

Nel vasto panorama della finanza moderna, gli strumenti derivati rivestono un ruolo di fondamentale importanza, offrendo agli investitori una serie di opportunità di gestione del rischio e di speculazione sui movimenti dei mercati finanziari. Questi strumenti finanziari, la cui valutazione e utilizzo richiedono un solido fondamento teorico e una profonda comprensione dei mercati, rivestono un ruolo sempre più cruciale nell'ambito delle decisioni finanziarie sia per gli investitori istituzionali sia per gli operatori individuali.

In questa dissertazione esamineremo in dettaglio le opzioni, esplorandone la natura e le caratteristiche. Successivamente valuteremo le teorie e i fondamenti dei modelli matematici utilizzati per il pricing delle opzioni, con particolare riguardo al modello di Black-Scholes-Merton applicato alle opzioni europee. Successivamente il modello andrà implementato mediante codice python al fine di mostrarne un pratico utilizzo.

Diverse sono le fonti utilizzate per la realizzazione di questo scritto; il libro "*Options, Futures and Other Derivatives*" di John C. Hull è stato il principale -ma non l'unico- riferimento per lo sviluppo degli argomenti teorici riguardanti gli strumenti finanziari, le altre fonti minoritarie quali articoli, pubblicazioni e riviste saranno utili ai fini dei concetti storici preliminari e degli sviluppi, successivi al modello BSM, presentati nei capitoli finali.

Il seguente elaborato sarà così suddiviso:

- *Capitolo 1: Introduzione:*

Brevi cenni storici di matematica finanziaria e le pietre miliari.

- *Capitolo 2: Strumenti derivati:*

Digressione storica dei derivati e mercati di riferimento, con successiva spiegazione teorica dei singoli strumenti; con particolare riguardo verso le opzioni e le loro proprietà/caratteristiche.

- *Capitolo 3: Il pricing:*

Verranno presentate le fondamenta matematiche del comportamento dei sottostanti, partendo dal moto Browniano, random walk e passando dai processi stocastici; fino ad arrivare alla risoluzione in forma chiusa della celebre formula BSM.

- *Capitolo 4: Applicazione:*

Verrà presentata l'applicazione in codice Python del modello BSM e relativi backtest

- *Capitolo 5: Modelli alternativi e conclusioni:*

Verranno presentati i limiti del modello BSM e brevemente verranno citati alcuni dei modelli alternativi più recenti; infine la conclusione verterà sulla valutazione dell'applicazione pratica del modello analizzato.

CAPITOLO 1

INTRODUZIONE

La matematica finanziaria è intrisa di una ricca interazione tra teoria e pratica, che ha plasmato il modo in cui comprendiamo e utilizziamo gli strumenti finanziari derivati oggi. Da antiche radici nell'aritmetica commerciale e nei primi trattati di interesse composto, fino alle sofisticate modellazioni stocastiche e alle tecniche di pricing sviluppate nel XX secolo, questa disciplina ha attraversato un percorso affascinante e intricato.

La scoperta del moto browniano, particolarmente significativo per la matematica finanziaria, è un evento di fondamentale importanza nella storia della scienza. Fu individuato per la prima volta dal botanico Robert Brown nel 1827 durante le sue osservazioni al microscopio di particelle di polline sospese in acqua. Il botanico britannico notò questi movimenti irregolari e incessanti, inspiegabilmente casuali, e ai quali all'epoca non si riuscì a fornire una dimostrazione rigorosa. Bisognerà attendere fino al 1905 quando il fenomeno osservato empiricamente venne modellizzato da Albert Einstein,William Sutherland e Marian von Smoluchowsk.

Il moto browniano, il movimento casuale di particelle sospese in un fluido, di primo acchito sembra un concetto estraneo al campo di studio relativo alla finanza; fino a quando all'inizio del XX secolo la matematica finanziaria ebbe un vero e proprio cambio di rotta.

Louis Bachelier durante la tesi di laurea assistito dal professore Henri Poincaré ebbe un intuizione rivoluzionaria che ha ridefinito radicalmente il modo in cui proviamo a comprendere i mercati finanziari. La scoperta fondamentale è stata l'introduzione del movimento browniano come modello per descrivere il comportamento casuale dei prezzi degli asset finanziari. Questo modello è un lavoro pionieristico del 1900 intitolato: *Théorie de la spéculation* ed ha gettato le basi per lo sviluppo delle successive teorie dei processi stocastici aprendo numerose strade alla valutazione rigorosa degli strumenti derivati.

Dopo circa 7 decadi ed una lunga evoluzione della materia, Fischer Black, Myron Scholes e Robert Merton scolpiscono un'altra pietra miliare della matematica finanziaria con la formulazione del celebre modello di pricing delle opzioni, noto come modello di *Black-Scholes-Merton*; per questo contributo, Scholes e Merton ricevettero nel 1997 il Premio Nobel per l'economia. Il modello BSM, presentato nel 1973, ha rivoluzionato l'intero settore finanziario fornendo un metodo deterministico per l’ottenimento di un prezzo equo di un contratto derivato in base a variabili quali il prezzo dell'asset sottostante, il tasso d'interesse risk free e la volatilità.

CAPITOLO 2

DERIVATI

Gli strumenti finanziari derivati sono contratti il cui valore dipende dall'andamento di un'attività sottostante ovvero dal verificarsi nel futuro di un evento osservabile oggettivamente.

Con la stipula contrattuale, le controparti del contratto si impegnano a comprare o a vendere la specifica attività sottostante del derivato entro o ad una precisa data di scadenza e ad un prezzo precedentemente concordato o prestabilito. La risoluzione del contratto può avvenire in contanti, come differenza tra il valore dei sottostanti (acquistati o venduti) e il valore a termine stabilito nel contratto, questa tipologia risolutiva prende il nome di *cash settlement*. La seconda metodologia di adempimento del contratto avviene mediante consegna del sottostante da parte del venditore all'acquirente, dietro pagamento del prezzo di consegna stabilito preventivamente, prendendo il nome di *phisical delivery*.

2.1 STORIA DEI CONTRATTI DERIVATI

Le origini dei contratti derivati risalgono all'epoca antica, quando venivano utilizzati per gestire il rischio associato alle fluttuazioni dei prezzi delle merci agricole.

La prima stipulazione di un contratto derivato di cui siamo a conoscenza risale al 580 a.C., si trattava di un contratto a termine che venne usato nell'antica Grecia, fu documentato da Aristotele il quale in *Politica (I, A, 11, 1259a)* riportò di un affare molto remunerativo concluso da Talete di Mileto, matematico e astrologo dell'epoca. Egli fu in grado di predire la quantità raccolta di olive relative alla futura stagione agraria, concordando con gli agricoltori acquistò preventivamente il diritto di utilizzare i frantoi limitrofi fino all'autunno successivo. Durante l'inverno investì una piccola somma di denaro, distribuendo dei piccoli anticipi sui guadagni futuri. Il suo piccolo investimento si sarebbe trasformato in un grande profitto con l'avverarsi delle sue previsioni, le quali si rivelarono corrette ed egli quindi esercitò il diritto di usufruire dei frantoi in un momento temporale altamente redditizio. Si arricchì quindi grazie ad uno strumento derivato.

I veri primi contratti definibili come futures risalgono all'età romana. I *fora vendalia* furono mercati specializzati nella vendita di contratti, con risoluzione futura, che avevano come attività sottostante particolari produzioni agricole dislocate in parti diverse del vasto impero romano.

I primi mercati dei futures simili a quelli moderni si svilupparono nel medioevo, spesso si effettuavano i contratti in ricorrenza di importanti fiere stagionali dove avvenivano i principali commerci dell'epoca, questi avvenivano principalmente nello *Champagne* in Francia. Lo scopo fondamentale era quello di prezzare in maniera equa e ottimale i futuri raccolti, in questo modo gli agricoltori riuscivano ad eliminare la componente di aleatorietà relativa al prezzo dei cereali.

Sono giunte a noi anche attestazioni di strumenti finanziari assimilabili a derivati risalenti al Medioevo, uno tra questi, la cessione da parte della città di Genova delle proprie future entrate fiscali ad un istituto finanziario nel 1164. Tra il XVI e il XVII secolo si assiste alla nascita dei primi mercati organizzati per la negoziazione di questi prodotti, come il Royal Exchange di Londra, dove nel 1600 vennero ammessi i contratti forward.

La standardizzazione e il conseguente aumento dei volumi scambiati dei contratti derivati si concretizza alla fine del XVIII secolo, in concomitanza con la Rivoluzione Industriale, in risposta alle esigenze dei mercanti europei che importavano dagli Stati Uniti con i "to-arrive contract" su cotone e cereali.

La seconda metà del XX secolo segna l'affermazione di questi strumenti finanziari, favorita da 5 principali avvenimenti:

- Il crollo del sistema di cambi fissi di Bretton Woods nel 1971, con l'emergere del rischio di cambio.
- La globalizzazione dei mercati e l'aumento sempre crescente del valore monetario dei mercati finanziari.
- Gli shock petroliferi del 1973 e del 1979, che intensificarono il rischio di mercato e l'inflazione.
- Il miglioramento e l'innovazione tecnologica, che aumentò esponenzialmente la capacità e velocità di calcolo.

- Il perfezionamento di modelli teorici per la stima del prezzo dei derivati, ad opera di Black, Scholes e Merton.

Tra il 1989 e il 1992 si registra un'impennata del mercato dei derivati, con un valore complessivo che raggiunge i 20.000 miliardi di dollari. Le ingenti perdite subite da alcune grandi aziende (Metallgesellschaft nel 1993, Procter & Gamble nel 1994) e il fallimento della Barings Bank nel 1995 causarono una temporanea frenata all'espansione.

A dicembre 2010, il valore complessivo delle attività sottostanti di derivati ammontava a circa 670.000 miliardi di dollari, di cui 601.048 miliardi per derivati Over The Counter (OTC). La prevalenza degli Interest Rate Swaps (IRS) tra i derivati OTC, con un ammontare di 364.378 miliardi di dollari, evidenzia l'ampio utilizzo di questi strumenti per la gestione del rischio di tasso.

Ad oggi i dati più recenti, forniti dalla *Bank for International Settlements*, risalgono al primo semestre del 2023 e indicano un valore nozionale di 714'744 miliardi di dollari per il totale derivati OTC (componente maggioritaria). Tuttavia risulta fuorviante considerare unicamente il valore nozionale, infatti nei contratti derivati vengono esclusivamente scambiati i differenziali *(payoff)* e non l'ammontare del valore nozionale. La *BIS* fornisce anche il valore indicato come *Gross market value*, il quale è il più consono per indicare l'esposizione di mercato: la media storica risulta essere il 3% del *Notional amounts outstanding*, nel caso del H1 2023 ammonta a 19'832 miliardi di dollari. Una stima ancora più precisa sui flussi reali di denaro scambiati è il net market value, cioè la posizione netta, che elide i derivati che comportano flussi di cassa speculari tra loro, l'ammontare risulta essere circa il 10% del gross market value.

La corretta valutazione dell'ammontare del valore monetario dei contratti derivati fornita dalla *BIS* consente di visualizzare il vero peso della componente di questi strumenti finanziari rispetto al PIL mondiale, evitando quindi di considerare unicamente il valore nozionale; infatti il *Gross market value* ha un multiplo di x0,20 sul Pil mondiale a differenza del x7,5 relativo al *Notional amounts outstanding.*

In conclusione, l'excursus storico illustra l'evoluzione dei derivati da semplici contratti a strumenti finanziari complessi e pervasivi. La loro diffusione ha avuto un impatto significativo sui mercati finanziari, offrendo nuove opportunità di gestione del rischio e speculazione, ma talvolta accrescendo la complessità e i rischi sistemici.

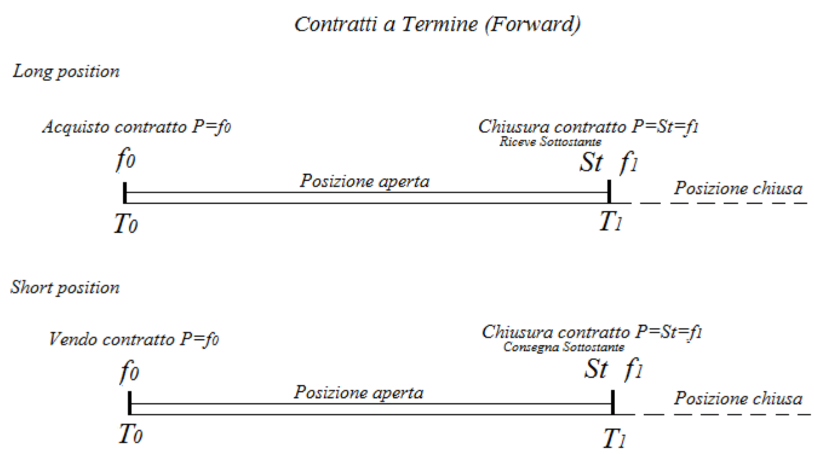
2.2 Futures e forward

I contratti forward sono contratti di compravendita "a termine" (forward) non standardizzati, con i quali le parti si impegnano a scambiare un'attività ad un prezzo prefissato con liquidazione differita in data futura.

Si differenziano dai contratti “a pronti” (spot) in quanto lo scambio dell’attività e la liquidazione, avvengono simultaneamente ed a prezzi attuali. I contratti forward sono derivati simmetrici, per ottenere il payoff sperato dai contraenti, c’è il bisogno che ci sia la controparte che ne assicura il corretto adempimento; di fatto è un incontro di domanda e offerta tra due soggetti con prezzo fissato, in data specifica e sul medesimo sottostante.

Questi contratti sono concordati privatamente tra due controparti, sono su “misura” e hanno grandezza rilevante, sono quindi non standardizzati, vengono regolati alla fine del contratto e comportano il rischio di credito della controparte. Questa tipologia di contrattazione è definita over the counter (OTC), che sta a significare che le quotazioni e gli scambi vengono effettuate fuori borsa e da grossi agenti di mercato.

Tavola 1

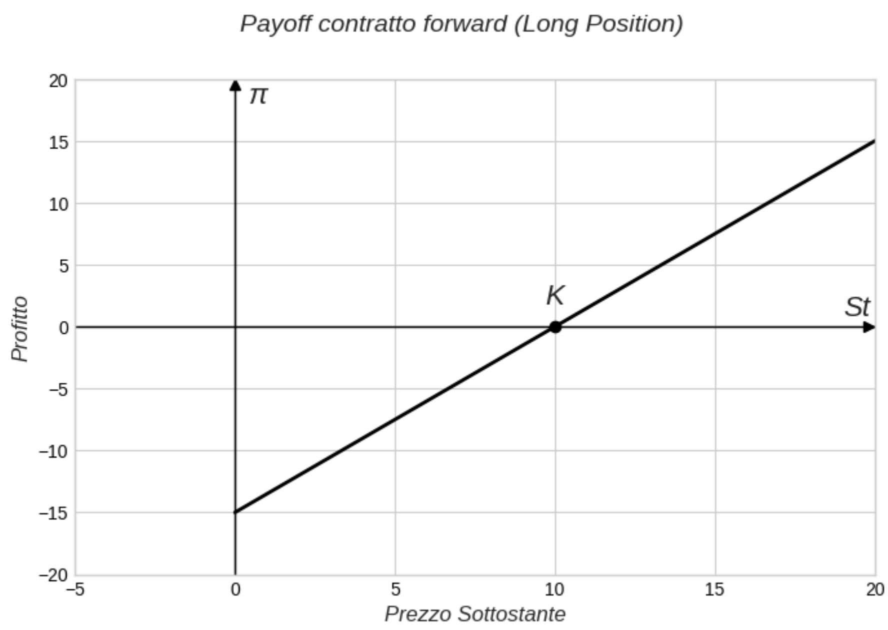


Le due parti speculari sono chiamate “posizione lunga” (Long) e “posizione corta” (Short).

L’operatore in posizione long si impegna ad acquistare l’attività sottostante, ad una data specifica per un certo prezzo.

L’operatore in posizione short si impegna a vendere l’attività alla stessa data per lo stesso prezzo.

Tavola 2



Il valore finale del contratto è chiamato payoff, e per un forward in posizione lunga, scritto su una quantità unitaria dell’attività sottostante, risulterà calcolato come segue:

$$Payoff = St - K$$

dove:

- St = Prezzo del sottostante alla scadenza del contratto, questo valore è il prezzo spot alla data T.
- K = Prezzo di consegna del sottostante, il quale era stato pattuito dalle controparti.

Il contraente in posizione lunga acquista il sottostante al prezzo K mentre l’attività ha valore St.

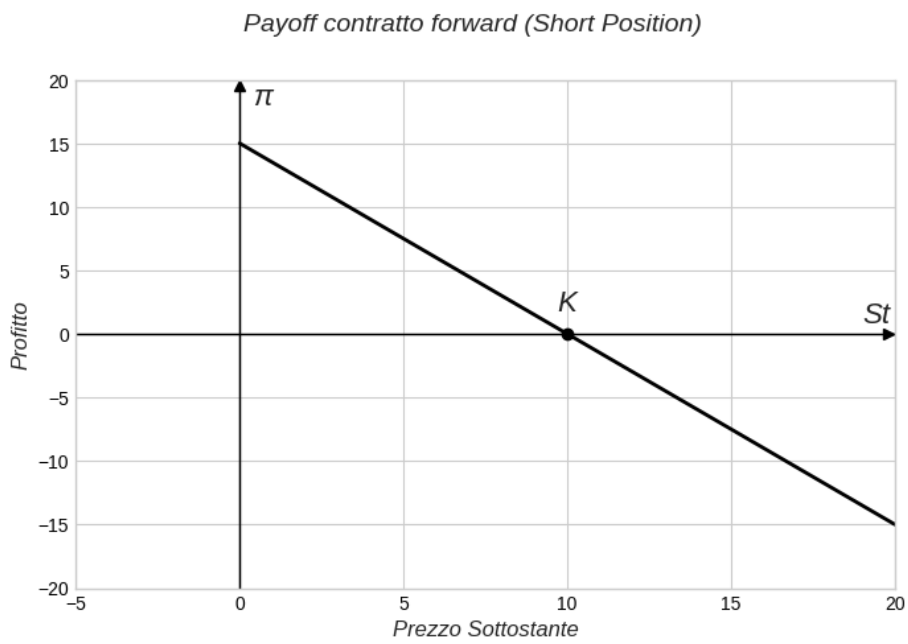
I contratti long sono utilizzati quando si ha necessità di acquistare il sottostante in un tempo conosciuto futuro, e “bloccando” il prezzo d’acquisto al tempo t0, viene meno il rischio di future oscillazioni di prezzo. L’alternativa “rischiosa” sarebbe il semplice acquisto al prezzo St in data futura ma con un prezzo, al momento dell’acquisto, sconosciuto.

Il contratto “anticipa” ad oggi l’acquisto futuro eliminando un possibile rischio.

Il payoff di questo contratto può essere sia positivo sia negativo, in particolare:

1. POSITIVO se $St => K$ per cui $St - k > 0$
2. NEGATIVO se $St < K$ per cui $St - k < 0$

Tavola 3



Il payoff, di un forward in posizione corta, scritto su una quantità unitaria dell’attività sottostante, risulterà calcolato come segue:

$$Payoff = K - St$$

dove le variabili St e K hanno lo stesso valore della posizione lunga.

Il contraente in posizione corta vende il sottostante al prezzo K, mentre l'attività ha valore St.

I contratti short sono utilizzati quando si ha necessità di vendere il sottostante in un tempo conosciuto futuro, ma "bloccando" il prezzo di vendita al tempo t_0, viene meno il rischio di future oscillazioni di prezzo. L'alternativa "rischiosa" sarebbe la semplice vendita al prezzo St in data futura ma con un prezzo sconosciuto, al momento della vendita.

Il contratto "anticipa" ad oggi la vendita futura eliminando un possibile rischio.

Il payoff di questo contratto può essere sia positivo sia negativo, in particolare:

1. POSITIVO se $St <= K$ per cui $K - St > 0$
2. NEGATIVO se $St > K$ per cui $K - St < 0$

Abbiamo visto la composizione e i relativi payoff dei contratti forward, le caratteristiche intrinseche di questi accordi contrattuali sono le medesime per quanto riguarda i futures, contratti per consegna futura.

I contratti differiscono in quanto i futures, a differenza dei forward (OTC), sono negoziati in borsa. Essendo scambiati in borsa sono standardizzati e viene assicurato dall'intermediario che il contratto venga onorato.

I futures, essendo standardizzati, sono soggetti a generalità comuni, e con similarità in tutte le borse più importanti.

Generalità:

- Chiusura/termine contrattuale: la quasi totalità dei contratti vengono chiusi evitando la consegna del sottostante, ma effettuando un'operazione di segno opposto. La liquidazione avviene quindi in cash settlement.

- Attività del contratto: le borse devono specificare chiaramente il sottostante di riferimento. In alcuni casi se l'oggetto è una merce è necessario conoscere i dati qualitativi relativi al sottostante.

●Dimensione: specifica della dimensione del contratto e quindi dell'esatto ammontare dell'attività sottostante, un contatto futures opera in "leva", hanno infatti esposizione multipla ai sottostanti di riferimento.

●Consegna: in caso avvenisse la consegna è opportuna l'indicazione del luogo della stessa.

●Tempo di Consegna: è fondamentale fornire indicazione rispetto ai mesi di consegna, in quanto è un dato identificativo del contratto stesso.

Differenze principali tra forward e futures:

Forward	*Futures*
Contratto privato	Scambio in borsa
Non standardizzati	Standardizzati
Data di consegna specifica	N date di consegna
Regolati alla data di chiusura	Regolati a chiusura giornaliera
Generalmente si verifica la consegna	Generalmente chiusura anticipata
Rischio di credito della controparte	Rischio di credito risibile

2.3 Funzione in economia dei derivati e stock exchange

Precedentemente abbiamo visto quanto il mercato dei derivati sia importante per quanto concerne la grandezza rispetto al pil mondiale. Questo è dovuto al fatto che i derivati in un'economia moderna sono di fondamentale importanza, consentendo agli operatori di ridurre rischi, effettuare swap o speculare. In questo capitolo vedremo i contratti più usati e i ruoli che svolgono i contraenti.

I macro-gruppi dei contratti più usati sono:

1. Contratti a termine:

Sono stati visti all'interno degli scorsi capitoli e sono principalmente:

- Forward: scambiati in mercati non regolamentati over the counter;
- Futures: negoziati su mercati regolamentati quindi standardizzati per oggetto, dimensione, data di chiusura e regole di negoziazione. L'unica variabile decisa dal mercato avviene per meccanismo domanda/offerta tramite la negoziazione dei soggetti.

2. Gli Swap:

Sono contratti OTC e vengono stipulati da grossi agenti di mercato. I singoli contratti di questo macro-gruppo hanno una componente comune tra loro, quella di scambiarsi tra le controparti flussi di denaro, l'ammontare è corrispettivo al sottostante di riferimento dello specifico contratto, i versamenti sono effettuati in date prestabilite.

I principali sono:

- *Interest Rate Swap* (IRS), due controparti si scambiano flussi di denaro derivanti da interessi, calcolati su una somma di denaro, detta capitale nozionale di riferimento, per un periodo di tempo predefinito pari alla durata del contratto. La più diffusa forma di IRS è denominata plain vanilla swap ed è caratterizza per il fatto che uno dei due flussi di pagamenti è basato su un tasso di interesse fisso, mentre l'altro è indicizzato a un tasso di interesse variabile. Questo contratto è utilizzato per scambiare proventi di investimenti tra due controparti che hanno l'interesse di scambiarsi il rischio di un interesse variabile.

● *Currency Swap*, è lo scambio tra valute. Le controparti si impegnano a scambiarsi il capitale e gli interessi espressi in diverse valute.

● *Asset Swap*, sono contratti in cui due soggetti si scambiano pagamenti periodici liquidati in relazione ad una security (asset). Chi detiene il titolo obbligazionario scambia il rendimento con la controparte, la quale paga un'altra tipologia di interesse.

● *Credit Default Swap* (CDS), sono contratti in cui un soggetto "protetto/assicurato", si impegna al pagamento di flussi di denaro periodici effettuati a favore della controparte "assicuratore". Il fine del CDS è quello di eliminare il rischio di credito derivante dall'esposizione del sottostante per la quale si stipula il contratto.

3. Le Opzioni:

Sono il macro-gruppo di contratti che verranno esaminati minuziosamente nelle successive pagine e saranno l'oggetto dei modelli di pricing.

Hanno similitudini con i contratti forward/futures, in quanto, consentono al contraente la compravendita di un sottostante ad un prezzo stabilito, in una determinata data nel futuro. Sono contratti standardizzati e negoziati in borsa ma differiscono dai forward/futures in quanto hanno un costo, inoltre alla stipula garantiscono al soggetto il diritto di futura compravendita ma non l'obbligo.

Le opzioni si suddividono in:

- Opzioni Call:
  - Long
  - Short
- Opzioni Put:
  - Long
  - Short

Le funzioni economiche principali svolte dagli operatori di derivati sono 3:

1. Arbitraggio: La definizione tipica di arbitraggio è una qualsiasi attività che consenta di effettuare profitto senza rischio istantaneamente. Solitamente effettuato a causa di divergenze di prezzi su diverse borse merci, disallineamento del prezzo di alcuni asset o asset prezzati

con fattori di sconto diversi dai tassi free risk. L'operatività di queste attività è piuttosto semplice e consiste nell'utilizzare operazioni di segno opposto, incassando le differenze di prezzo; risulta invece difficoltoso trovare opportunità che consentano questa operatività.

2. Speculatori: Sono soggetti che piazzano sui mercati "scommesse", sono effettuate mediante lo studio dei sottostanti, gli speculatori hanno come fine ultimo quello di predire i movimenti futuri di mercato.

3. Hedger (operazioni di copertura): Sono soggetti che intendono "assicurarsi" ed effettuare coperture di rischi, solitamente scambiando sottostanti con prezzo conosciuto per una compravendita futura.

Le principali borse in cui vengono effettuati scambi di futures sono:

- Chicago Mercantile Exchange (CME)
- Chicago Board of Trade (CBOE)
- Commodity Exchange (COMEX)
- New York Mercantile Exchange (NYMEX)
- ICE Futures U.S. NYBOT
- ICE Futures Europe (ICE)
- EUREX
- EURONEXT Amsterdam & Parigi
- IDEM

2.4 Opzioni

Le opzioni sono strumenti finanziari derivati il cui valore deriva dal prezzo di un'attività sottostante.

Come accennato precedentemente hanno in comune alcune caratteristiche con i contratti a termine (forward,futures), la principale differenza è il conferimento al contraente (compratore) di un diritto ma non l'obbligo di esercizio.Tipicamente i sottostanti più utilizzati nelle opzioni non sono beni, azioni, indici azionari, valute e indici alternativi (es. volatilità,*Vix*,*Vstoxx*,...)

Def.: Il contratto di opzione stipulato su di un determinato sottostante dà al contraente che la detiene la possibilità di esercizio del diritto (ma senza l'obbligo), di acquistare o vendere l'attività con prezzo S_0 (prezzo del sottostante in t_0) ad una data fissata futura T (maturity) e ad un certo prezzo prefissato K (strike price).

Il fattore che determina la possibilità di esercizio, e quindi un diritto, è il prezzo. La stipula di contratti forward e futures non hanno un costo vero e proprio dovuto all'obbligatorietà della risoluzione contrattuale. Invece in caso di acquisto di opzioni si è obbligati al pagamento di un versamento iniziale p o c (premio) che rappresenta il valore atteso del contratto.Le opzioni verranno presentate osservando payoff e profitti, i primi si calcolano al lordo dei costi (c e p), mentre i secondi al netto dei costi (c e p)

In questo capitolo e nel successivo si presenteranno i dettagli tecnici delle opzioni (call e put).

2.4.1 Opzioni call

Le opzioni call danno il diritto di acquistare l'attività sottostante ad un prezzo prefissato; chi le acquista ha aspettative rialziste sul prezzo del sottostante.

Def.: Un'opzione call conferisce all'acquirente il diritto di comprare l'attività sottostante a un prezzo predeterminato mediante il pagamento di un premio alla controparte quindi al venditore dell'opzione, il quale sarà obbligato a fornire la prestazione di controparte qualora l'acquirente esercitasse il diritto.

La comune nomenclatura per l'indicazione delle variabili principali di questi contratti è la seguente:

- t_0 : Tempo iniziale all'istante 0.
- T : Tempo fine contratto.
- S_0 : Prezzo del sottostante al tempo t_0.
- K : Prezzo di esercizio, strike price.
- St : Prezzo del sottostante al tempo t, con; $t_0 < t < T$.
- ST : Prezzo del sottostante al tempo T, fine contratto.
- P, π : Profitto del contratto.
- c : Premio pagato/incassato dai contraenti.

Le opzioni call si suddividono in due contratti speculari:

1. Long Call
2. Short Call

La posizione Long su un'opzione Call avviene mediante l'acquisto tramite pagamento del premio di una Call.

Tavola 4

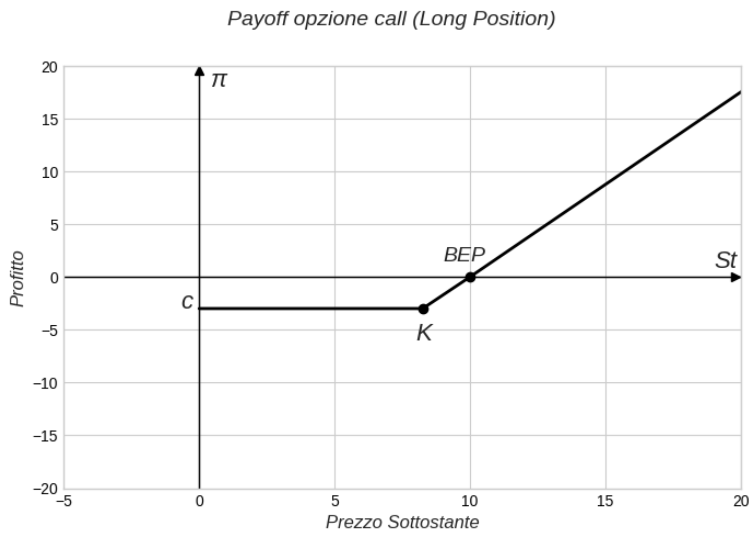


Figura: tavola della funzione del profitto rispetto al prezzo del sottostante St

Come si evince dal grafico il costo dell'opzione è c, inoltre l'opzione verrà esercitata quando $St >= K$, avrà profitto nullo in corrispondenza del punto BEP $St = (K - c)$ e profittabilità positiva ($\pi > 0$) con $St > (K - c)$.

Il payoff sarà calcolato come segue:

$$payoff: max\{ST - K;\ 0\}.$$

$$payoff: (ST - K)^{+}.$$

Il profitto (π) invece terrà in considerazione anche l'esborso iniziale:

$$\pi: max\{ST - K;\ 0\} - c.$$

$$\pi: (ST - K)^{+} - c.$$

Come si può intuire dal grafico, la caratteristica intrinseca delle Long Call, a fronte di un premio, è di avere perdite contenute (capped) uguali a c e potenziali profitti tendenti all'infinito.

La posizione Short su un'opzione Call avviene mediante la vendita dell'opzione e con l'incasso del premio.

Tavola 5

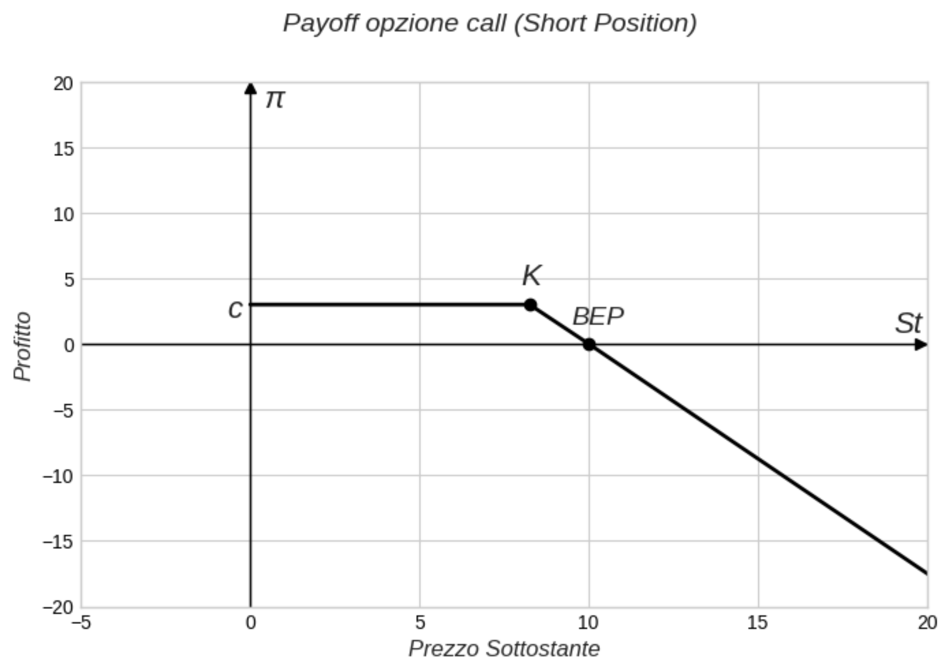


Figura: tavola della funzione del profitto rispetto al prezzo del sottostante St

Come si evince dal grafico il profitto massimo dell'opzione è rappresentato da c, inoltre l'opzione verrà esercitata dall'acquirente quando $St => K$, avrà profitto nullo in corrispondenza del punto BEP $St = (K + c)$ e profittabilità positiva ($\pi > 0$) con $St < (K + c)$.

Il payoff sarà calcolato come segue:

$$payoff\colon -max\{ST - K;\ 0\} = min\{K - ST\ ;\ 0\}.$$

$$payoff\colon -(ST - K)^{+} = (K - ST)^{-}.$$

Il profitto (π) invece terrà in considerazione anche l'incasso iniziale:

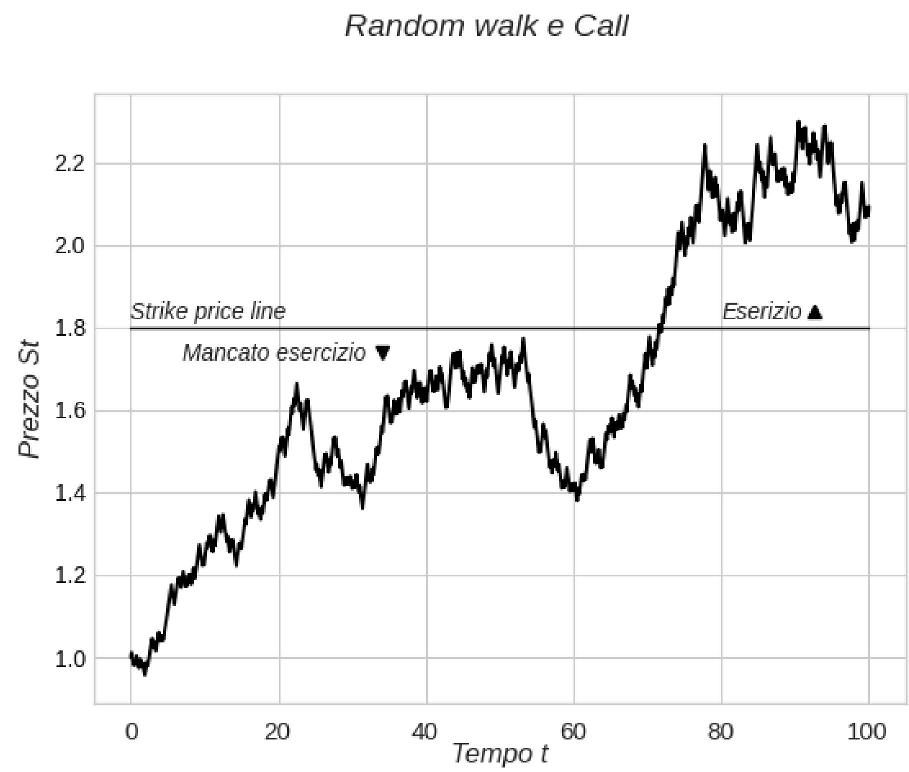
$$\pi\colon -max\{ST - K;\ 0\} + c = min\{K - ST\ ;\ 0\} + c$$

$$\pi\colon -(ST - K)^{+} + c = (K - ST)^{-} + c$$

Come si può intuire dal grafico precedente la caratteristica intrinseca delle Short Call, a fronte di un premio incassato, è di avere profitti contenuti (capped) massimo uguali a c e potenziali perdite tendenti all'infinito.

Al fine di riassumere la distanza tra Strike Price (K) e prezzo del sottostante (S_0), le opzioni vengono suddivise comunemente dagli agenti di mercato in 3 “stati”: In the money, At the money e out of the money.

Tavola 6



In the money (ITM): Il prezzo St è maggiore del prezzo K. L’opzione verrebbe esercitata, e il suo payoff sarebbe Long: $ST - K > 0$, Short: $ST - K < 0$.

At the money (ATM): Il prezzo St è uguale del prezzo K. L’opzione è indifferente rispetto all’esercizio, ma qualora St variasse si troverebbe ITM o OTM; il suo payoff sarebbe$ST - K = 0$

Out of the Money (OTM): Il prezzo St è minore del prezzo K. Il suo payoff teorico sarebbe Long: $ST - K < 0$, Short: $ST - K > 0$, l’opzione non verrà esercitata, il payoff sarà posto a 0 per la natura del contratto.

2.4.2 Opzioni Put

Le opzioni Put danno il diritto di vendere l'attività sottostante ad un prezzo prefissato; chi le acquista ha aspettative ribassiste sul prezzo del sottostante.

Def.: Un'opzione put conferisce all'acquirente il diritto di vendere l'attività sottostante a un prezzo predeterminato, mediante il pagamento di un premio alla controparte quindi al venditore dell'opzione, il quale sarà obbligato a fornire la prestazione di controparte qualora l'acquirente esercitasse il diritto.

La comune nomenclatura per l'indicazione delle variabili principali di questi contratti è la seguente:

- t_0 : Tempo iniziale all'istante 0.
- T : Tempo fine contratto.
- S_0 : Prezzo del sottostante al tempo t_0.
- K : Prezzo di esercizio, strike price.
- St : Prezzo del sottostante al tempo t, dove $t_0 < t < T$.
- ST : Prezzo del sottostante al tempo T, fine contratto.
- P, π : Profitto del contratto.
- p : Premio pagato/incassato dai contraenti.

Le opzioni call si suddividono in due contratti speculari:

1. Long put
2. Short put

La posizione Long su un'opzione Put avviene mediante l'acquisto tramite pagamento del premio.

Tavola 7

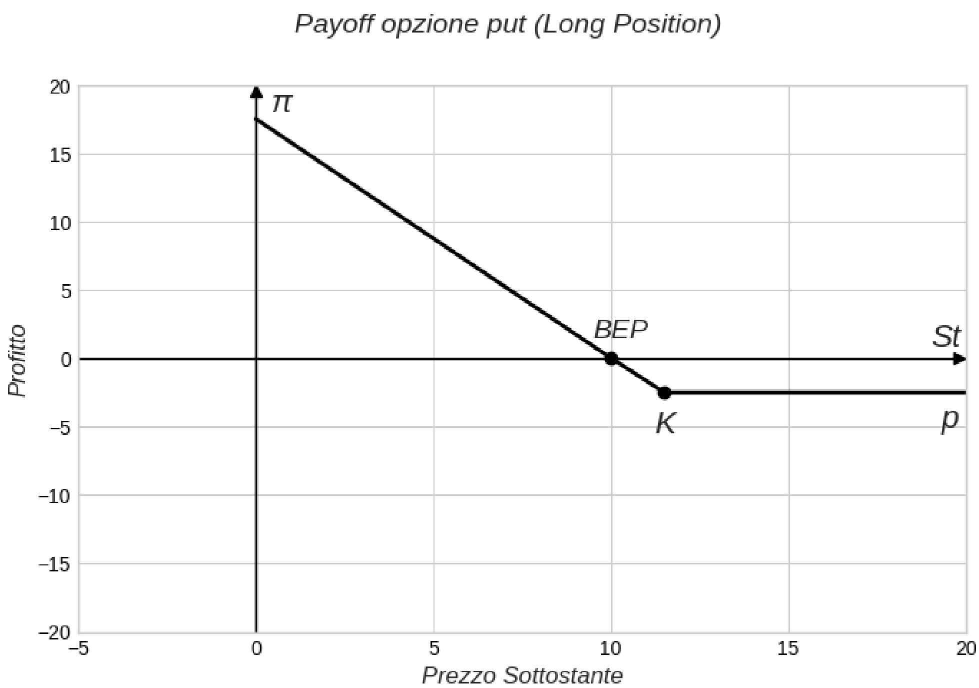


Figura: tavola della funzione del profitto rispetto al prezzo del sottostante St

Come si evince dal grafico il costo dell'opzione è p, inoltre l'opzione verrà esercitata quando $St <= K$, avrà profitto nullo in corrispondenza del punto BEP $St = (K + p)$ e profittabilità positiva ($\pi > 0$) con $St < (K + p)$.

Il payoff sarà calcolato come segue:

$$payoff: max\{K - ST;\ 0\}$$

$$payoff: (K - ST)^{+}$$

Il profitto (π) invece terrà in considerazione anche l'esborso iniziale:

$$\pi: max\{K - ST;\ 0\} - p$$

$$\pi: (K - ST)^{+} - p$$

Come si può intuire dal grafico, la caratteristica intrinseca delle Long Put, a fronte di un premio, è di avere perdite contenute (capped) uguali a p e potenziali profitti massimi uguali a $St + p$, avendo la condizione di non negatività dei prezzi.

La posizione Short su un'opzione Put avviene mediante la vendita dell'opzione e con l'incasso del premio.

Tavola 8

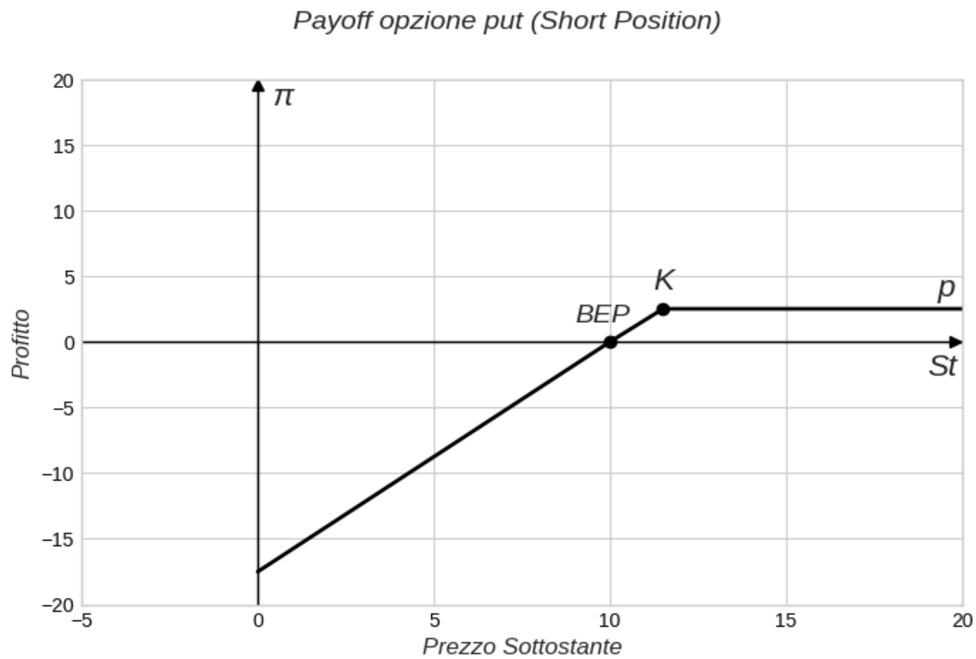


Figura: tavola della funzione del profitto rispetto al prezzo del sottostante St

Come si evince dal grafico il profitto dell'opzione è rappresentato da p, inoltre l'opzione verrà esercitata dall'acquirente quando $St <= K$, avrà profitto nullo in corrispondenza del punto BEP $St = (K - p)$ e profittabilità positiva $(\pi > 0)$ con $St > (K - p)$.

Il payoff sarà calcolato come segue:

$$payoff : -max\{K - ST\ ;\ 0\} = min\{ST - K\ ;\ 0\}$$

$$payoff: -(K - ST)^{+} = (ST - K)^{-}$$

Il profitto (π) invece terrà in considerazione anche dell'incasso iniziale:

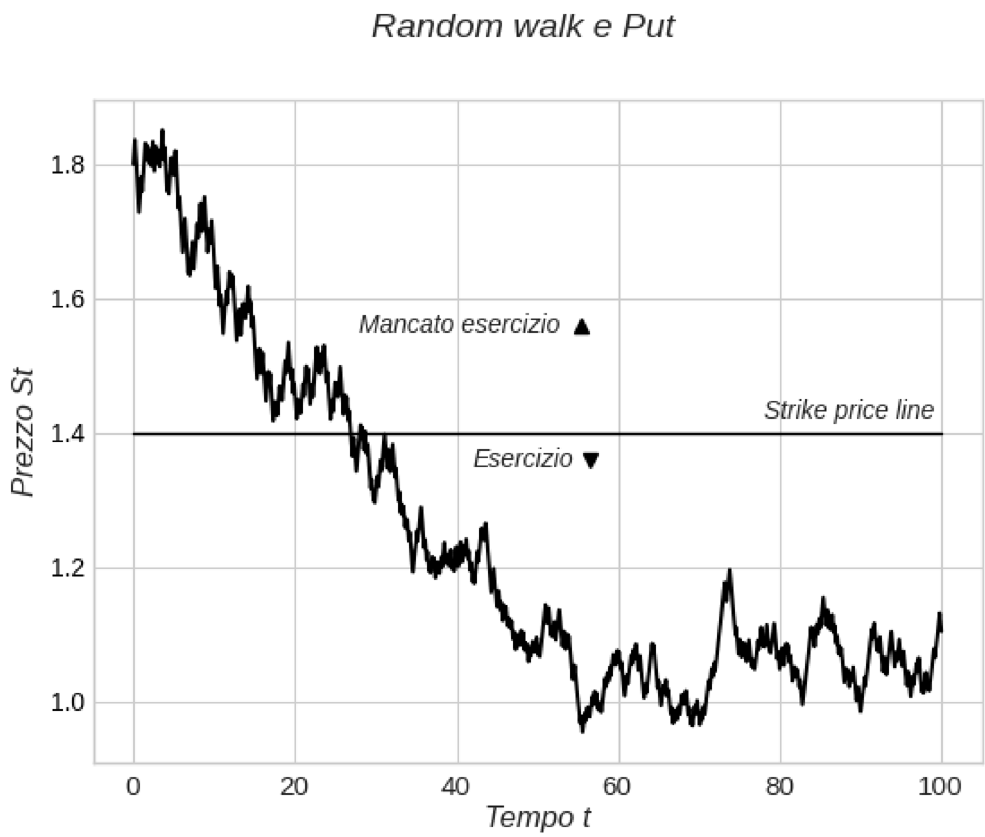
$$\pi: -max\{K - ST\ ;\ 0\} + p = min\{ST - K\ ;\ 0\} + p$$

$$\pi: -(K - ST)^{+} + p = (ST - K)^{-} + p$$

Come si può evincere dal grafico, la caratteristica intrinseca delle Short Put, a fronte di un premio incassato, è di avere profitti contenuti (capped) massimo uguali a p e potenziali perdite tendenti a $ST - p$, avendo la condizione di non negatività dei prezzi.

Al fine di riassumere la distanza tra strike price (K) e prezzo del sottostante (S_0), le opzioni vengono suddivise comunemente dagli agenti di mercato in 3 “stati”: In the money, At the money e Out of the money.

Tavola 9



In the money (ITM): Il prezzo St è minore del prezzo K. L’opzione verrebbe esercitata; il suo payoff sarebbe; Long : $K - ST > 0$, Short : $K - ST < 0$.

At the money (ATM): Il prezzo St è uguale al prezzo K. L’opzione è indifferente rispetto all’esercizio, ma qualora St variasse si troverebbe ITM o OTM; il suo payoff sarebbe: $K - ST = 0$

Out of the Money (OTM): Il prezzo St è maggiore del prezzo K. Il suo payoff teorico sarebbe Long : $K - ST < 0$, Short : $K - ST > 0$, Se l'opzione non verrà esercitata il payoff sarà posto a 0 per la natura del contratto.

2.4.3 Opzioni europee e americane

Le opzioni si dividono in due sottoinsiemi, nei quali la discriminante è il tempo di esercizio:

• Opzioni europee:

Def.: Opzione che può essere esercitata solo alla data di scadenza del contratto.

• Opzioni americane:

Def.: Opzione che può essere esercitata in qualsiasi momento prima o in concomitanza della scadenza.

Le altre caratteristiche del contratto rimangono per entrambi i sottoinsiemi uguali a quanto visto in precedenza. L'unica variazione è proprio la possibilità di esercizio o non nel corso del tempo.

La diversità tra i due sottoinsiemi di opzioni causata dalla possibilità o meno di esercitare il diritto di opzione in diversi istanti, pone diverse problematiche anche in merito al pricing degli strumenti finanziari. Nelle europee si ha un prezzo dato dal valore atteso di una stima di un possibile e unico valore monetario maturato a scadenza e quindi al tempo T (tempo certo), e invece in quelle americane si ha una condizione aleatoria dovuta a tutte le possibilità di esercizio comprese dal tempo t_0 al tempo T(tempo incerto).

2.4.4 Put-Call Parity

La relazione Put-Call parity garantisce che i premi di due opzioni europee Call (c) e Put (p), scritte con medesime condizioni dei sottostanti, siano legati mediante la condizione di non arbitraggio. La costruzione di questa relazione permette di calcolare il prezzo equo di un'opzione e avviene attraverso un'equivalenza di due portafogli.

Si considerano due portafogli così composti:

- Portafoglio 1
  - Call europea
  - Importo in denaro: $Ke^{(-rT)}$
- Portafoglio 2
  - Put europea
  - Sottostante (azione)

Ptf $1(t_0) : c + Ke^{(-rT)}$	Ptf $2(t_0) : p + S_0$

Ora dimostriamo l'equivalenza dei due portafogli al tempo T

Payoff (T)			
ST <= K		***ST >=K***	
Ptf 1 (T)	*Ptf 2 (T)*	*Ptf 1 (T)*	*Ptf 2 (T)*
*Ke^(-rT)*e^(rT)=K*	*S0 ——> St*	*Ke^(-rT)*e^(rT)=K*	*S0 ——> St*
Call non esercitata	*Put esercitata (K-ST)*	*Call esercitata (ST-K)*	*Put non esercitata*
K+0	*St+(K-ST)*	*K+(ST-K)*	*ST+0*
payoff: K	*payoff: K*	*payoff: ST*	*payoff: ST*

Dimostrato che ptf1 e ptf2 hanno il medesimo valore al tempo T con ST uguali, con payoff per entrambi di:

$$max(ST, K)$$

a causa della natura delle opzioni europee, si deduce che anche i due portafogli al tempo t_0 debbano avere lo stesso valore.

Si ha quindi la relazione Put-Call Parity come segue:

$$ptf1 = ptf2$$

$$c + Ke^{(-rT)} = p + S_0$$

Tale relazione è rispettata in caso di opzioni europee, le quali possono essere esercitate esclusivamente al tempo T, e permette la predizione dei payoff con ST uguali per entrambe le opzioni.

In caso di discrepanze rilevanti si può ottenere un rendimento privo di rischio istantaneo (arbitraggio), acquistando il portafoglio sottovalutato e vendendo quello sopravvalutato.

Lo sfruttamento di questo mismatch da parte degli arbitraggisti consente di mantenere costante l'equilibrio tra il valore dei due portafogli.

2.5 Greche e proprietà delle opzioni

Le Greche sono un gruppo di strumenti che misurano il rischio derivato dalle variabili che compongono il prezzo delle opzioni. Permettono di avere una stima del rischio e quindi la sensitività del prezzo rispetto alla variazione di un determinato fattore del sottostante.

Le principali sono Delta, Gamma, Theta, Rho, Vega; quelle secondarie sono Vanna e Vomma. Matematicamente sono di fatto derivate di primo e secondo ordine di un fattore considerato rispetto al prezzo del sottostante S.

2.5.1 Delta e prezzi

Def.: Il delta è l'indicatore che esprime la variazione del prezzo di uno strumento derivato associata alla variazione, di un punto percentuale, del prezzo dell'attività sottostante.

Il delta in termini matematici è definito come segue:

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$$

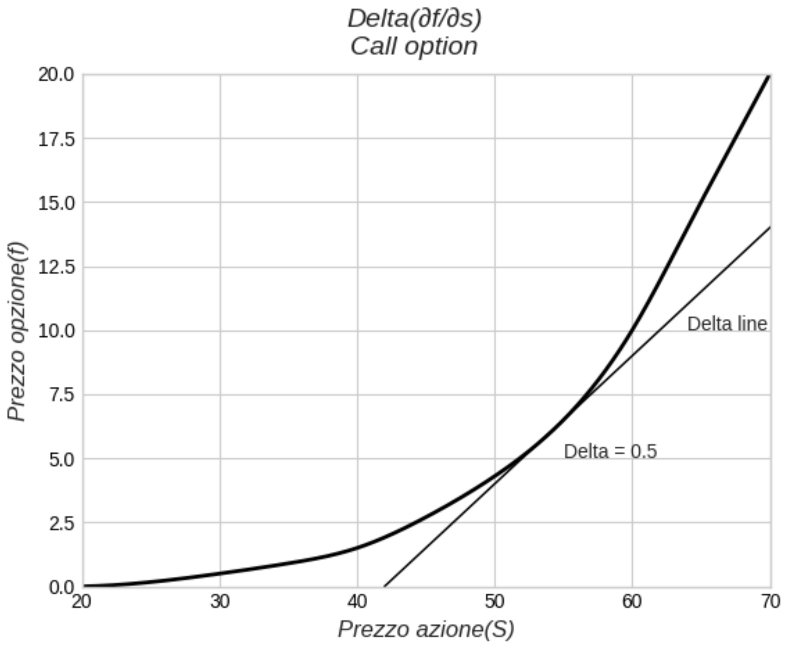
dove:

f = valore dell'opzione

S = valore del sottostante

Graficamente invece è rappresentato da una curva che mette in relazione il prezzo dell'opzione e il sottostante, tracciando una tangente in corrispondenza del prezzo S interessato permette di ottenere Δ

Tavola 10



Il delta è essenziale per quanto riguarda l'hedging cioè la copertura delle posizioni in opzioni, ci dà una misura infatti della quantità di sottostante da detenere al fine di ottenere una posizione neutra. Il valore del portafoglio, costituito da sottostante e opzioni, rimane stabile in caso di basse variazioni di prezzo. La costruzione di un portafoglio privo di rischio è stato presentato dallo studio Black, Scholes e Merton.

Questa operazione è definita come "delta hedging" e si ottiene da un portafoglio espresso in termini di delta come segue:

- -1 : posizione in opzioni
- $+\Delta$: posizione in azioni

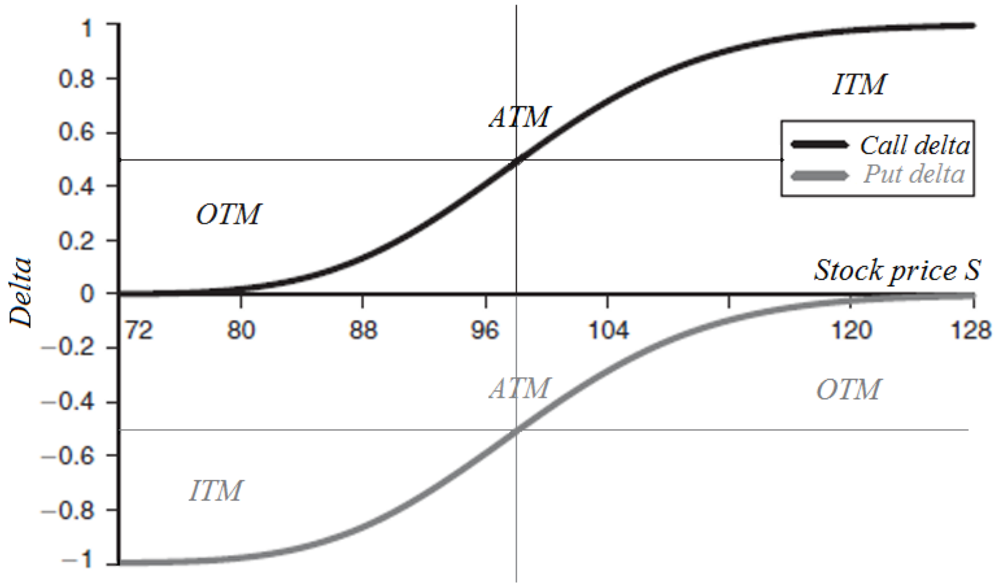
$$(-1\ opzione\ +\ \Delta\ azioni):\ \ \Delta = 0$$

La dimostrazione prevede che il portafoglio così composto abbia Delta nullo, è il rendimento dovrà essere uguale al tasso Risk Free.

Il delta ha un intervallo che va da -1 a +1. Quello corrispondente ad una posizione lunga su un'opzione Call è tra 0 e 1.

Il delta corrispondente ad una posizione lunga su un'opzione Put è un numero compreso tra –1 e 0.

Tavola 11



La misura del delta è utilizzato anche ai fini della determinazione della probabilità di scadenza dell'opzione ITM, per le opzioni Call si attesterà nell'intorno del valore +0,5 e per le Put -0,5

In caso di portafogli con numero di posizioni maggiori di uno e con medesimo sottostante, si calcolano i singoli delta delle singole posizioni si sommano moltiplicandoli per il peso delle singole posizioni.

$$\Delta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \, \Delta_i$$

dove:

- w_i per $i = 1, \ldots, n$, indica il peso del derivato della posizione i all'interno del portafoglio
- Δ_i per $i = 1, \ldots, n$, indica il valore di delta della posizione i all'interno del portafoglio.

Il fine del delta hedging è l'eliminazione delle oscillazioni del valore di portafoglio. Nel caso limite in cui si riuscisse a mantenere la strategia "delta neutral" $\Delta_p = 0$ si vedrebbe il guadagno sulla posizione in azioni che compensa esattamente la perdita sulla posizione in opzioni.

2.5.2 THETA E TEMPO

Def.: Il theta (Θ) è un Indicatore che esprime il valore della derivata prima del prezzo di un'opzione rispetto al tempo (vita residua).

Il Theta in termini matematici è definito come segue:

$$\Theta = \frac{\partial f}{\partial t}$$

dove:

f = valore dell'opzione

t = tempo

e misura la variazione del valore delle opzioni conseguentemente al trascorrere di un istante di tempo (time decay)

La formula generica per il Theta di portafoglio è definita in caso di medesimi sottostanti come:

$$\Theta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \, \Theta_i$$

dove:

- w_i per $i = 1, \ldots, n$, indica il peso del derivato della posizione i all'interno del portafoglio
- Θ_i per $i = 1, \ldots, n$, indica il valore di Theta della posizione i all'interno del portafoglio.

Il theta è solitamente positivo per le opzioni vendute (sia Call sia Put), e negativo per le opzioni comprate. Questa relazione esiste in quanto il valore dell'opzione *ceteris paribus* è determinato anche da quanto tempo rimane per l'esercizio, più passano istanti di tempo t, minore sarà il valore del contratto. I venditori sono avvantaggiati in quanto il trascorrere del tempo ne aumenta i profitti, tuttavia si nota un'eccezione per il caso di opzioni Put profondamente ITM.

Il Theta è una descrizione dell'esposizione di un portafoglio al trascorrere del tempo, ma non essendoci incertezza, a causa del tempo che scorre uniformemente, non si esegue hedging sul Theta.

2.5.3 Gamma e sensibilità

Def.: Il Gamma (Γ) è l'indicatore che esprime la derivata prima del delta di un'opzione rispetto alla variazione del prezzo dell'attività sottostante.

Il Gamma in termini matematici è definito come segue:

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$$

dove:

Δ = greca Delta

S = Prezzo sottostante

in termini di f invece risulta:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$$

dove:

f = Valore opzione

S = Prezzo sottostante

Il Gamma fornisce l'indicazione di quanto al variare del prezzo del sottostante varia il Delta, più il valore è alto in termini assoluti, maggiore sarà la sensibilità di Delta rispetto al sottostante, il segno (+/-) determinerà la positività o la negatività della sensibilità.

Solitamente Gamma è grande per le opzioni con bassa vita residua, ciò è spiegabile dal fatto che le posizioni sono più sensibili ai cambi di prezzo, e quindi al delta, perchè verranno chiuse al tempo. Il Gamma è influenzato anche dallo stato di esercizio delle opzioni, infatti assume valori più grandi per le opzioni At the money e diminuisce negli stati In the money e Out of the money.

La formula generica per il Gamma di portafoglio è definita in caso di medesimi sottostanti come:

$$\Gamma_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \, \Gamma_i$$

dove:

- w_i per i = 1, ..., n, indica il peso del derivato della posizione i all'interno del portafoglio
- Γ_i per i = 1, ..., n, indica il valore di Gamma della posizione i all'interno del portafoglio.

In caso di strategie di copertura ai fini di minimizzare la variazione di valore di una posizione o di un portafoglio, risulta efficace effettuare il Gamma hedging oltre ad effettuare il delta hedging.

Il portafoglio "neutralizzato" avrà: $\Delta_p = 0$; $\Gamma_p = 0$.

L'efficacia della copertura sarà migliorata, così facendo si comprende un più ampio intervallo di movimenti di prezzo del sottostante.

2.5.4 VEGA E VOLATILITÀ

Def.: Il Vega è un indicatore che esprime la derivata del prezzo di un'opzione al variare della volatilità del prezzo dell'attività sottostante.

Def.: La volatilità è un indicatore che esprime lo scostamento dei prezzi delle attività finanziarie dal proprio valore medio in un certo intervallo di tempo.

Il Vega in termini matematici è definito come segue:

$$\nu = \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$

dove:

f = Valore dell'opzione

σ = deviazione standard del sottostante

La dev std. (sigma σ) è definita come:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_n - (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i))^2}{n-1}}$$

dove:

x= rendimenti sottostante (giornalieri)

n= numero dei rendimenti presi in considerazione

Il Vega viene solitamente espresso come la variazione del valore dell'opzione (+/-) al variare del prezzo del sottostante in funzione della variazione della volatilità.

Se il Vega assume valori elevati allora le opzioni saranno estremamente sensibili, in termini di prezzo, a variazioni di volatilità. Al contrario, in caso di Vega vicino a zero le opzioni saranno poco sensibili alla volatilità.

Il Vega tende ad assumere valori grandi in termini assoluti, quando la volatilità dei mercati si alza.

La volatilità di fatto misura la quantità di incertezza che domina i mercati in un determinato periodo. A fronte di una variazione importante dei prezzi la volatilità assume valori elevati, la volatilità è indicativa del rischio di mercato.

La formula generica per il Vega di portafoglio è definita in caso di medesimi sottostanti come:

$$\nu_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \, \nu_i$$

dove:

- w_i per $i = 1,\dots,n$, indica il peso del derivato della posizione i all'interno del portafoglio
- ν_i per $i = 1,\dots,n$, indica il valore di Vega della posizione i all'interno del portafoglio.

E comune notare che la volatilità elevata si ripercuote sulle opzioni aumentandone i prezzi: gli acquirenti di opzioni tenderanno ad "assicurarsi" maggiormente per evitare i cambi repentini di prezzo dei sottostanti, mentre i venditori di opzioni notando l'aumento di rischiosità richiederanno un extra rendimento per poter offrire il diritto alla controparte.

2.5.5 Rho e tassi d'interesse

Def.: Il Rho (ρ) è l'indicatore che esprime la derivata prima del valore di un'opzione rispetto alla variazione del tasso risk-free.

Def.: Il tasso risk-free (i) è il tasso di interesse associato all'investimento in un'attività priva di rischio, con rendimento certo.

Il Rho in termini matematici è definito come segue:

$$\rho = \frac{\partial f}{\partial i}$$

dove:

f = valore dell'opzione

i = tasso risk free

Il Rho viene solitamente espresso come la variazione del valore dell'opzione (+/-) al variare del prezzo del sottostante in funzione della variazione del tasso risk-free.

Il tasso risk-free è utilizzato nel pricing di opzioni e degli altri derivati per attualizzare le somme di denaro al fine di mantenere la condizione di assenza di arbitraggio. Il tasso i è una variabile decisamente più stabile rispetto alle variabili delle altre greche, fa variare in maniera risibile il valore delle opzioni, per questo viene poco utilizzata operativamente.

La formula generica per il Rho di portafoglio è definita in caso di medesimi sottostanti come:

$$\rho_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \, \rho_i$$

dove:

- w_i per i = 1, ..., n, indica il peso del derivato della posizione i all'interno del portafoglio
- p_i per i = 1, ..., n, indica il valore di Rho della posizione i all'interno del portafoglio.

2.5.6 Greche di second'ordine

Le greche di second'ordine più utilizzate sono Charm, Vanna e Vomma.

Sono funzionali al miglioramento delle strategie di copertura e per comprendere come reagiscono le variabili dei sottostanti sull' andamento delle greche viste precedentemente.

Def.: Il Charm è la derivata del delta, rispetto alla vita residua (time decay).

Di fatto mostra come la curva del delta varia all'avvicinarsi al tempo T. Graficamente maggiore sarà il tempo tra t_0 e T più la delta curve tenderà ad una retta, invece all'avvicinarsi della scadenza al tempo T avrà la classica forma ad "S"

Il Charm in termini matematici è definito come segue:

$$Ch = \frac{\partial \Delta}{\partial t}$$

dove:

Δ = Greca delta

t = Tempo

Questa greca può aiutare a stimare i delta futuri (ceteris paribus) eliminando la variabilità derivante dal trascorrere del tempo, il che può fornire delta hedging migliori col passare tempo, soprattutto in caso di bassa volatilità.

Def.: Il Vanna è la derivata al secondo ordine del valore dell'opzione, rispetto al prezzo spot sottostante e alla rispettiva volatilità. Quindi è la derivata del delta rispetto alla volatilità del sottostante

Il Vanna in termini matematici è definito come segue:

$$Vn = \frac{\partial \Delta}{\partial \sigma}$$

dove:

Δ = Greca delta

σ = Volatilità sottostante (dev. std.)

Il Vanna può essere uno strumento al fine di prevedere il valore di delta al variare della volatilità implicita. Questo aumenta l'efficacia del delta hedging in caso di brusche oscillazioni di mercato.

Il Vanna può anche essere definito per il valore, Vega infatti se:

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S} \ ; \nu = \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$

allora:

$$Vn = \frac{\partial \nu}{\partial S}$$

Il Vanna può essere uno strumento funzionale al prevedere il valore di Vega al variare della variazione del prezzo spot del sottostante (S).

Def.: Il Vomma è la derivata al secondo ordine del valore dell'opzione rispetto alla volatilità, quindi è la derivata del delta rispetto alla volatilità del sottostante.

L'utilità di Vomma è la stima di Vega al variare della volatilità implicita.

Il Vomma in termini matematici è definito come segue:

$$Vm = \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial v}{\partial \sigma}$$

dove:

Δ = Greca delta

ν = Greca Vega

σ = Volatilità sottostante (dev. std.)

Il Vega misura di quanto varia il valore della posizione in opzioni al variare di un punto percentuale della volatilità, il Vomma misura la variabilità (+/-) del Vega al variare della volatilità.

Il Vomma è un ottimo strumento per le strategie di hedging in caso di forti variazioni della volatilità implicita del mercato. Di fatto può ottimizzare il risultato "aggiustando" il Vega il quale perde di funzionalità in caso di forti fluttuazioni avvenute nel breve termine.

Un valore positivo per Vomma indica che un aumento della volatilità si tradurrà in un aumento del Vega della posizione sull'opzione e perciò in un aumento del valore dell'opzione.

CAPITOLO 3

IL PRICING

I metodi di pricing sono operazioni effettuate per ottenere un valore di un contratto derivato, col passare del tempo si sono sempre più evoluti e tuttora non si è a conoscenza del metodo definitivo e perfetto. Le innumerevoli variabili e le loro distribuzioni "casuali" in tempo continuo rendono il pricing una sfida molto complessa.

Le metodologie di pricing hanno alcune condizioni fondamentali comuni:

- il sottostante varia in funzione di processi stocastici
- assenza di opportunità di arbitraggio
- valutazione neutrale verso il rischio degli agenti

L'idea alla base della valutazione di opzioni su azioni è la costruzione dell' albero binomiale, che parte dal tempo t_0 e prezzo S_0, è formato da numerosi "rami e nodi", che espandendosi nello spazio rappresentano la variazione del valore azionario ad un preciso punto del tempo (t). L'ipotesi fondamentale sottostante è il random walk, ossia un processo mediante il quale oggetti che si muovono in modo casuale si allontanano dal punto di partenza.

Il modello binomiale si basa sulla probabilità del rialzo o ribasso di prezzo attraverso il movimento del "ramo", in corrispondenza del "nodo", conoscendo il valore del sottostante e quindi dell'opzione si calcola il payoff.

L'approccio del binomial tree è alla base del modello Cox, Ross e Rubinstein e converge al modello Black-Scholes-Merton con la diminuzione della lunghezza degli intervalli di tempo.

3.1 Fondamenti matematici del comportamento del sottostante e FTAP

La materia dell'asset pricing si basa su due teoremi fondamentali, che di fatto pongono delle condizioni di base che rappresentano i mercati finanziari, e sono chiamati: Fundamental theorems of asset pricing (FTAP).

I ritorni azionari seguono l'andamento di un moto Browniano, hanno quindi un'unica misura neutrale al rischio. Presupponendo che il processo di prezzi azionari (da t=0 a T) segua una semi-martingala (Funzione càdlàg) si fortifica la condizione di non arbitraggio in No Free Lunch With Vanishing Risk (NFLVR).

Le NFLVR sono strategie che iniziano senza esborso iniziale ma finiscono con ricchezza positiva con probabilità maggiore di zero (Free Lunch), la probabilità di ritrovarsi con una ricchezza negativa tende a zero (Vanishing Risk).

Definiremo i due FTAP nei mercati in tempo continuo.

Definizione del sottostante:

Dato $S = (S_t)$ con $t \geq 0$ una semimartingala di n dimensioni, di fatto un paniere azionario, definiamo B come l'attività priva di rischio, bond risk-free con uno spazio probabilistico definito come Ω=Risultati, $\mathcal{F}$=Eventi, P=Probabilità eventi $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Inoltre, chiamiamo Q una martingala locale equivalente se $Q \approx P$ e se le martingala definite localmente Q sono derivanti dal processo $(\frac{S_t^i}{B_t})_t$.

I due FTAP:

1° teorema fondamentale dell'asset pricing: Assumiamo che S sia delimitato localmente. S soddisfa la condizione NFLVR se e solo se esiste una misura martingala locale equivalente.

2° teorema fondamentale dell'asset pricing: Assumiamo che esista una misura martingala equivalente chiamata Q, ed S è un mercato completo se e solo se Q è l'unica misura a martingala locale.

Di fatto i due teoremi sanciscono la nozione di martingala e di esistenza, e la nozione di unicità della misura a martingala equivalente. Possono essere sintetizzati in modo informale con la condizione di non arbitraggio e completezza di mercato.

Altri fondamenti importanti dei mercati da citare sono:

La proprietà di Markov, secondo la quale i rendimenti azionari futuri seguono un processo stocastico con dipendenza esclusiva dallo stato della variabile casuale presente (prezzo all'istante t).

La nozione dell'efficienza di mercato di Fama et al; il mercato è efficiente poiché tutte le informazioni conosciute al tempo t dagli agenti di mercato sono sfruttate e quindi prezzate dal mercato.

3.1.1 Processo stocastico

Un processo stocastico dal punto di vista informale è un metodo di come viene rappresentata una grandezza aleatoria (variabile) con distribuzione casuale che varia su base temporale. Empiricamente ripetendo il processo molteplici volte, chiamate osservazioni, si otterrà un certo numero di prove che per ogni istante di tempo permetteranno l'osservazione della variabile aleatoria. Nel caso la grandezza presa in considerazione sia distribuita normalmente e siano stati effettuati un grande numero di osservazioni (teoria dei grandi numeri), si noterà come in ogni istante di tempo la media dei valori osservati tenderà a coincidere con il valore centrale della campana di distribuzione della variabile presa in considerazione (teorema del limite centrale TCL).

Prima di definire formalmente un processo stocastico è bene conoscere e definire brevemente cos'è una variabile casuale, anche detta variabile stocastica o aleatoria.

Consideriamo una variabile casuale come una funzione che può assumere valori diversi a fenomeni di natura casuale (aleatori). Tra gli esempi pratici più semplici possiamo ricordare l'estrazione delle carte da gioco, il lancio di una moneta o di un dado, altri esempi più elaborati possono essere l'esito di un gioco sportivo o per rimanere in ambito economico il rendimento futuro di un titolo.

Def.: Una variabile casuale è una funzione a valori reali, definita in uno spazio campionario mediante una misura di probabilità. Ogni valore x (evento singolo) di X(variabile casuale) è associato ad un evento elementare e ha una sua misura di probabilità. Tale misura di probabilità viene chiamata funzione di densità di probabilità $f(x)$ di X.

Formalmente risulta che:

$$\{X(t), t \in T \subseteq \Re_+\}$$

Una variabile casuale X è una funzione misurabile con spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dove Ω è lo spazio campionario, $\mathcal{F}$ è un sottoinsieme di Ω e P è una misura di probabilità. La funzione misurabile di X è $X: \Omega \to E$ da uno spazio campione Ω come insieme di possibili risultati in uno spazio misurabile E.

A questo punto, un processo stocastico può essere visto come funzione di due variabili, definito come $X(t, \xi)$ dove $t \in T$ indica il sottoinsieme t appartenente all'insieme dei tempi $T \subseteq \Re_+$ e $\xi \in \Xi$ indica l'esperimento nello spazio campione. Se fissiamo il processo stocastico al tempo $t \in T$ otterremo il valore della variabile casuale facente parte del processo invece l'intera realizzazione del processo stocastico avviene nell'insieme T. Il processo stocastico viene spesso indicato come $X(t)$ con riferimento per ogni istante temporale tale che $t \in T$.

La notazione di uso comune di un processo stocastico può avvenire mediante la lettera maiuscola X ma spesso si possono trovare altre lettere maiuscole come Y, Z, W, B

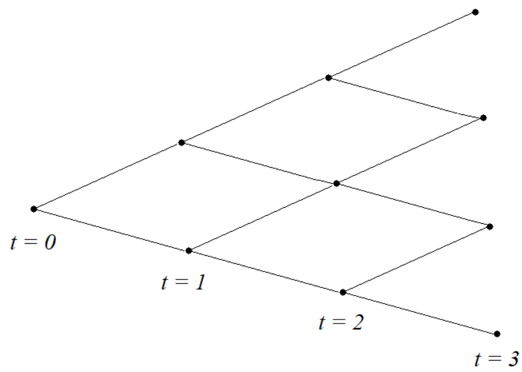
La differenza tra un processo stocastico discreto e continuo sussiste nella sua granularità, quando gli intervalli di tempo tra un'osservazione e la sua successiva tendono a 0 (limite per $\Delta_t \to 0$) siamo di fronte ad un processo con tempo continuo.

Il processo ad alberi binomiali risulta essere a tempo discreto, una sua versione con granularità infinitesimale come il modello BSM è in tempo continuo.

I processi stocastici vengono suddivisi a seconda della tipologia dell'insieme dei tempi utilizzati e quindi del Δ_t.

- Tempo discreto, l'insieme T sarà discreto $T = Z_+$, si includeranno quindi solo i numeri interi positivi ex. X_t $dove$ $\{ t = 1,2,3, \dots \}$

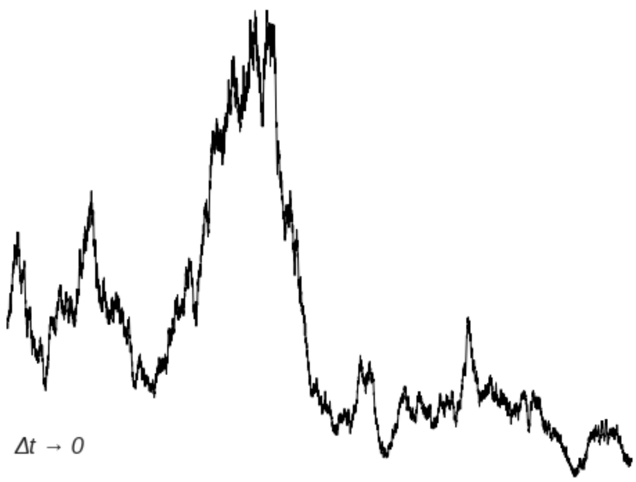
Tavola 12



Esempio di albero binomiale in tempo discreto t = {0, 1, 2, 3}

- Tempo continuo, l'insieme T sarà continuo $T = \Re_+$, si includeranno quindi i numeri reali positivi.

Tavola 13



Esempio di *Random Walk in tempo continuo* $\Delta_t \rightarrow 0$, incrementi di tempo di grandezza infinitesimale

Processi stocastici generici e IID

Un processo stocastico viene caratterizzato dalle variabili casuali che lo compongono, quindi se una variabile casuale X è caratterizzata probabilisticamente dalla sua funzione di densità di probabilità (FDP o PDF) è naturale pensare che un PS sia caratterizzato dalla congiunzione di tutte le FDP delle variabili casuali che lo compongono.

Generalmente i PS con n variabili casuali $X(t_1), X(t_2), .., (t_n)\ con\ (t_1, t_2, ..., t_n) \in T^n$ sono quindi definiti con una FDP di ordine n.

Diversamente avviene per quanto riguarda il caso particolare di processi stocastici indipendenti e identicamente distribuiti, i quali devono necessariamente avere variabili aleatorie indipendenti e avere distribuzione identica $X(t) \sim f(\cdot)$. Un PS IID avrà quindi un'unica PDF similmente a quanto accade ad una variabile casuale con $f(\cdot)$.

Sono definiti momenti di un processo stocastico alcune grandezze fornite da stimatori statistici che definiscono alcune caratteristiche dei PS.

- Media → $\mu_t = E[X_t]$
- Varianza → $\sigma_t^2 = Var(X_t)$
- Autocovarianza → $\gamma(t, t+k) = \gamma(k) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)]$

Processo stocastico stazionario:

Un caso particolare di PS è il processo stocastico stazionario, è così definito quando al verificarsi di traslazioni temporali la distribuzione di probabilità congiunta non varia, quindi risulta che sia la media sia la varianza non cambiano nel tempo.

La definizione di stazionarietà di un PS è rappresentata formalmente come segue:

Def.: Un processo stocastico $\{X(t), t \in T\}$ si dice *stazionario in senso stretto* o *fortemente stazionario* se la sua distribuzione di probabilità congiunta non varia al variare dell'origine del tempo. In altre parole, per ogni insieme finito di indici di tempo $t_1, t_2, ..., tn$ e per ogni $\tau \in T$, la distribuzione congiunta di:

$X(t_1), X(t_2), ..., X(tn)$

è identica alla distribuzione congiunta di:

$X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), ..., X(tn + \tau)$

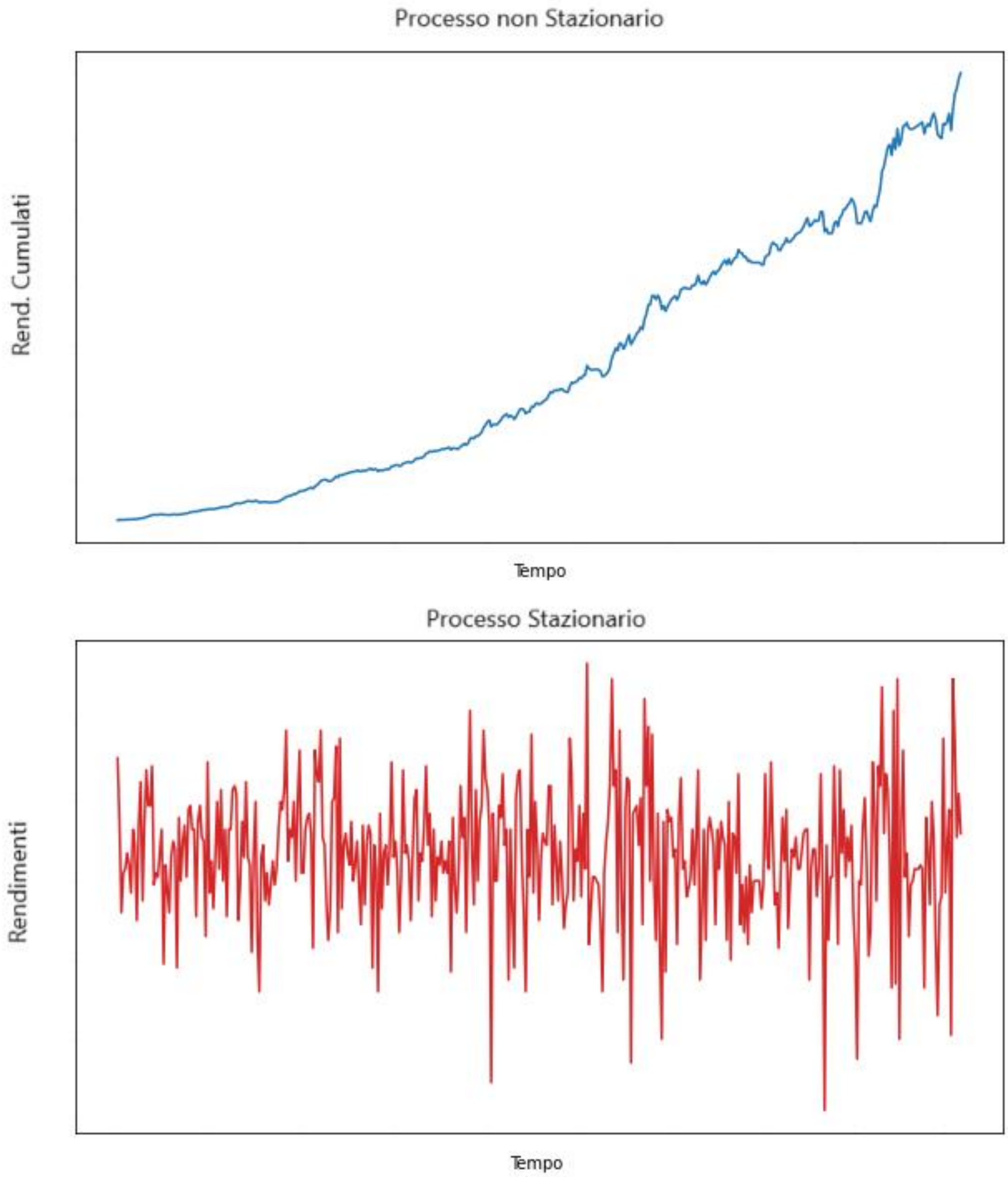
Si può anche definire un PS stazionario di secondo ordine (stazionarietà debole) in questo caso sono sufficienti le condizioni di esistenza e invarianza temporale dei momenti.

i. $\mu_t = E[X_t] = \mu \quad \forall t$

ii. $\sigma_t^2 = Var(X_t) = E[X_t - \mu_t]^2 = \sigma^2 \quad \forall t$

iii. $\gamma(t, t+k) = \gamma(k) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)]$

Tavola 14



Esemplificando graficamente ciò che si è detto precedentemente, sono presentati due grafici. Il grafico dei rendimenti cumulati rappresenta un processo non stazionario, in questo caso l'andamento tipico di una serie storica con i prezzi di un asset. Invece Il grafico dei rendimenti mostra una serie storica di un processo stazionario con la rilevazione dei rendimenti di un asset.

Come si può evincere, visivamente, in questo caso il processo non stazionario è un random walk, con media dipendente dal trascorrere del tempo e con un "trend" visibile. Per quanto riguarda il processo stazionario siamo di fronte ad un grafico di rendimenti finanziari che hanno valore atteso nell'intorno di zero, visivamente simile ad un "white noise".

3.1.2 PROCESSI DI MARKOV

Il processo di Markov (Markov chain) è un processo stocastico di cui la componente aleatoria che consente il passaggio dello stato di sistema è "senza memoria". La probabilità di transizione, allo stato di sistema successivo deriva esclusivamente da quello precedente, senza considerare quanto avvenuto in passato.

Esistono quattro tipi di catene di Markov (nomenclatura che si riferisce alla generalità di questi processi) queste variano specificando i parametri di spazio e tempo degli stati di sistema. Di seguito verranno presentati per vederne le caratteristiche e ordinarne la terminologia anche se non esiste un accordo comunemente riconosciuto in letteratura scientifica.

- Tempo discreto ($T = Z_+$)

Sono comunemente chiamati *Markov chain*, sono catene di Markov in tempo discreto (DTMC). Vengono anche suddivisi in base allo spazio degli stati.

  - Spazio degli stati finito:

Catena di Markov in spazio di stati numerabile o finito con tempo discreto (Markov chain, subshift of finite type, drunkard's walk).

  - Spazio degli stati continuo (generalità):

Catena di Markov su uno spazio di stati misurabile (Harris chain).

● Tempo continuo ($\Delta_t \rightarrow 0$)

Sono comunemente chiamati *Markov process*, sono catene di Markov in tempo continuo (CTMC). Vengono anche suddivisi in base allo spazio degli stati.

○ Spazio degli stati finito:

Processo di Markov in tempo continuo (Markov jump process).

○ Spazio degli stati continuo (o generalità):

Definizione generale nella quale rientrano tutti i processi stocastici con proprietà di Markov in tempo continuo (Processi di Wiener).

Il cambio di stato di sistema è chiamato transizione, il processo o catena di Markov è caratterizzato dallo spazio di stati definito da una matrice di transizione, la quale descrive probabilità e stati.

Di seguito verranno mostrate alcune definizioni formali di catene di Markov a tempo discreto (DTMC) e continuo (CTMC).

Catena di Markov a tempo discreto (DTMC)

Def.: Una catena di Markov a tempo discreto {X(t), t ∈ T} è un processo stocastico che soddisfa la seguente proprietà di Markov:

Proprietà di Markov: La probabilità condizionale che il processo assuma uno stato particolare al tempo t+1, dato lo stato a tutti i tempi precedenti, dipende solo dallo stato al tempo t. Formalmente:

P[X(t+1) = x | X(t) = x_t, X(t-1) = x_{t-1}, ..., X(0) = x_0] = P[X(t+1) = x | X(t) = x_t]

dove:

- X(t) rappresenta lo stato del sistema al tempo t.
- T è l'insieme degli indici di tempo (tipicamente i numeri naturali).
- P[A|B] denota la probabilità condizionata dell'evento A dato B.

***Catena di Markov a tempo continuo** (CTMC)*

Def.: Una catena di Markov a tempo continuo $\{X(t), t \geq 0\}$ è un processo stocastico che soddisfa la seguente proprietà di Markov:

Proprietà di Markov: La probabilità condizionale che il processo assuma uno stato particolare al tempo t+s, dato lo stato a tutti i tempi precedenti t, dipende solo dallo stato al tempo t. Formalmente:

$$P[X(t+s) = j \mid X(t) = i, X(u) = x_u \text{ per } 0 \leq u < t] = P[X(t+s) = j \mid X(t) = i]$$

dove:

- $X(t)$ rappresenta lo stato del sistema al tempo t.
- $t, s \geq 0$ sono istanti di tempo.
- i e j sono stati del processo.

3.2.3 Moto Browniano e Processo di Wiener

Il moto browniano, caratterizzato da fluttuazioni casuali di particelle sospese in un fluido, fu inizialmente osservato da Robert Brown nel 1827. Questa scoperta empirica trovò una solida fondazione teorica grazie ai lavori di Albert Einstein, che ne fornì una spiegazione rigorosa basata sulla teoria cinetica dei gas. L'estensione di questo concetto al dominio della finanza è attribuibile a Louis Bachelier, che, nella sua tesi del 1900, "Théorie de la spéculation", ipotizzò che i movimenti dei prezzi sui mercati finanziari potessero essere modellati come un processo stocastico simile al moto browniano. Questa intuizione, pionieristica per l'epoca, è stata successivamente confermata e sviluppata, ponendo le basi per la moderna teoria matematica della finanza.

Il processo di Wiener è un processo stocastico in tempo continuo formato da valori reali, di fatto è la spiegazione matematica data da Norbert Wiener, riguardo alle proprietà del moto Browniano unidimensionale.

Il contributo di Wiener diede origine al campo di studi riguardante le martingale a tempo continuo e il calcolo stocastico, concetti di fondamentale importanza nello sviluppo del Lemma di Itō e del modello di BSM.

La definizione formale di un processo di Wiener è la seguente:

Def.: Un processo stocastico $\{W(t), t \geq 0\}$ è un processo di Wiener se

- $W(0) = 0$ quasi sicuramente.
- Per $0 \leq s < t$, $W(t) - W(s) \sim N(0, t\text{-}s)$.
- Per ogni $0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$, gli incrementi $W(t_1) - W(s_1)$ e $W(t_2) - W(s_2)$ sono indipendenti.

Seguentemente verranno illustrate le proprietà

- Funzione di densità con t noto:

$$fw_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)}.$$

- Il valore atteso:

$$E[W_t] = 0.$$

- La varianza del processo [0,T]:

$$Var(W_t) = T.$$

- Distribuzione:

$$W_t = W_t - W_0 \sim N(0, T).$$

- Covarianza (con $s \leq t$):

$$cov(W_s, W_t) = s.$$

- Correlazione (con $s \leq t$):

$$corr(W_s, W_t) = \frac{cov(W_s, W_t)}{\sigma_{W_s}\sigma_{W_t}} = \frac{s}{\sqrt{st}} = \sqrt{\frac{s}{t}}.$$

Finora i processi di Wiener illustrati avevano un tasso di deriva pari a 0 e tasso di varianza pari a 1, di fatto il valore atteso futuro era pari a quello attuale e la varianza era pari a $1t$ dove t è la lunghezza temporale, il processo è quindi definito da $\{W_t\}$.

Un processo di Wiener generalizzato per una variabile x, invece, ha due termini; la variazione attesa (drift) e la componente stocastica. E' definito in termini di dz come:

$$dx = a\, dt + b\, dz$$

dove a e b sono costanti.

Il primo termine $(a\, dt)$ è la variazione attesa di x per ogni istante t, il secondo $(b\, dz)$ è un processo di Wiener che aggiunge "rumore" al processo di Wiener generalizzato.

Eliminando la componente stocastica risulta:

$$dx = a\, dt$$

da cui

$$\frac{dx}{dt} = a$$

e integrando rispetto al tempo:

$$x = x_0 + a\, t$$

Escludendo il processo di Wiener il valore x viene trovato attraverso x al tempo 0 e sommando la componente di drift in relazione al tempo.

La variazione di x in un intervallo T usando il processo di Wiener generalizzato ha distribuzione normale:

Media della variazione di $x = a\, T$

varianza della variazione di $x = b^2\, T$

Deviazione standard della variazione di $x = b\, \sqrt{T}$

Avendo descritto il modello ora vedremo nel dettaglio le varie applicazioni che si sono susseguite in finanza nel corso del XX secolo. Si noterà come i modelli presentati saranno un susseguirsi di piccoli incrementi migliorativi dello stesso concetto iniziale, scoperto da Brown ed ampliato in finanza da Bachelier.

Il primo tentativo storico è il modello proposto da Bachelier nel 1900. Si tratta di un processo stocastico, più precisamente un moto Browniano con drift. L'intuizione di Bachelier è quella che un continuo input di "micro"-informazioni, conosciute dagli agenti di mercato hanno conseguenze, ma sono variabili casuali, indipendenti e identicamente distribuite, che tenderanno ad avere distribuzione normale (TCL) e con il passare del tempo aumentano il grado di incertezza. Graficamente si noterà un trend derivante della stima del valore atteso futuro (retta), ma con un grado di incertezza (maggiore al crescere di t) dovuto alla sommatoria dei piccoli scostamenti di prezzo dovuti alle micro-informazioni del processo di Wiener.

Il moto Browniano con drift definito da Bachelier risulta essere un processo di Wiener, con le medesime proprietà, e soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica:

$$dS_t = \mu \, dt + \sigma \, dW_t$$

risolvendo

$$\int_0^T dS_t \; = \int_0^T \mu \, dt + \int_0^T \sigma \, dW_t$$

$$\int_0^T dS_t = \mu \int_0^T dt + \sigma \int_0^T dW_t$$

$S_T - S_0 = \mu \,(T - 0) + \sigma \,(W_T \text{-} W_0)$

e la soluzione risulta:

$S_T = S_0 + \mu \, T + \sigma \, W_T$

dove

T = Tempo

S_0 = Valore iniziale

μ = Coefficiente di drift

σ = Deviazione standard (volatilità)

W_t = Processo di Wiener

Il modello proposto da Bachelier è conosciuto precisamente come moto Browniano aritmetico (ABM) a causa della possibilità di negatività del prezzo (S_T). In questo caso μ è il rendimento atteso azionario (positivo), la retta derivante dal drift è quindi positiva, tuttavia, a causa della componente casuale W_t e del suo coefficiente σ, parametrizzato dalla volatilità azionaria, non permette di avere $S_t > 0$ per ogni istante t.

Un processo stocastico seguito da un titolo che non paga dividendi sarà:

$$dS = \mu\, S\, dt + \sigma\, S\, d\mathrm{W}$$

da cui la variazione di S

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt + \sigma\, dW$$

con μ (tasso rendimento atteso) e σ (volatilità).

In caso di volatilità nulla si eliminerà il processo di Wiener all'interno del Moto Browniano risultando:

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt$$

e poiché la variazione di S dipende esclusivamente da μ e t, S_T risulterà:

$$S_T = S_0\, e^{\mu T}$$

Successivamente nel 1966 Samuelson "aggiornò" il modello antecedente includendo la non negatività di S_t. Utilizzò il medesimo moto Browniano con drift, soddisfando la nota SDE, ma per simulare meglio le caratteristiche del comportamento dei mercati azionari aggiunse la componente esponenziale. Questo modello prende il nome di moto Browniano geometrico con drift (GBM) o moto Browniano esponenziale.

Un moto Browniano geometrico con drift è tale se soddisfa la seguente SDE:

$$dS_t = \mu\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, dW_t$$

Risolvendo si ottiene:

$$S_T = S_0\, exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})\, t + \sigma\, W_T).$$

Il modello di Samuelson risolve quindi il fattore della negatività dei prezzi del modello di Bachelier eliminando tale possibilità, tuttavia nella storia recente, precisamente l'8 aprile 2020, in una nota ufficiale intitolata "*CME Clearing Plan to Address the Potential of a Negative Underlying in Certain Energy Options Contract*", il Chicago Mercantile Exchange & Chicago Board of Trade (CME group Inc.), scrive che a causa dei continui ribassi del valore dei futures delle materie prime energetiche, la sezione Clearing CME che si occupa di pricing e margining di opzioni cambierà la metodologia di pricing, passerà da un modello esponenziale (non comprendendo prezzi negativi), al modello di Bachelier permettendo di varcare il "floor" dello zero. La clearing house annuncia quindi che se i prezzi dei contratti scenderanno sotto una certa soglia utilizzeranno un modello con moto Browniano aritmetico, già usato in alcune opzioni con sottostanti che possono "regolarmente" avere prezzi minori di zero.

Il modello di Bachelier risulta ancora utile ai giorni nostri, il 20 aprile 2020 i futures sul petrolio hanno raggiunto valori di prezzo negativi per la prima volta nella storia.

3.1.4 Processo e Lemma di Ito

Il calcolo di Itō prende il nome dal suo inventore Kiyosi Itō, il quale estese il metodo del calcolo infinitesimale ai processi stocastici come i processi di Wiener.

Il concetto è basato su un integrale di due processi stocastici:

$$Y_t = \int_0^t H_s\, dX_s$$

H è una funzione a quadrato sommabile, comprende valori complessi o reali in spazio misurabile e la sua variabile integrata al quadrato in valore assoluto risulta finita. Ai fini della determinazione del processo Y_t, H_s viene adattata alla filtrazione di X_s, che rappresenta un processo Browniano.

L'applicazione in finanza del calcolo di Itō avviene mediante l'identità chiamata lemma di Itō o formula di Itō, che permette di conoscere l'andamento di un processo stocastico tempo-dipendente(t)

Data la solita equazione differenziale stocastica:

$$dX_t = \mu_t \, dt + \sigma_t \, dW_t$$

ai fini di ottenere la soluzione X_t possiamo scrivere l'EDS formalmente come una soluzione integrale:

$$X_t = \int_0^t \mu \; ds + \int_0^t \sigma_s \, dW_s$$

La media di X_t è quindi:

$$E[X_t] = \int_0^t \mu_s \, ds$$

Cioè è l'integrale da 0 a t del drift (μ_s) di ogni variazione di s, mentre la varianza di X_t è

$$Var[X_t] = \int_0^t \delta_s^2 \, ds$$

cioè l'integrale da 0 a t della volatilità al quadrato (δ_s^2) di ogni variazione di s.

Il calcolo di Itō è indispensabile per modellare processi più complessi, caratterizzati da un'evoluzione aleatoria nel tempo. A differenza dei modelli deterministici tradizionali, in questi casi i fattori μ_t e δ_t sono variabili stocastiche, ovvero soggetti a fluttuazioni casuali.

3.2 MODELLO BSM

Il modello Black-Scholes-Merton (B-S-M) rappresenta un punto di riferimento nella finanza matematica, rivoluzionando la valutazione delle opzioni e la gestione dei rischi. Le sue origini risalgono agli anni '50 con i lavori pionieristici di Robert Merton e Paul Samuelson, che posero le basi per la teoria dei prezzi delle opzioni.

Tuttavia, la svolta decisiva arrivò nel 1973 con la pubblicazione del lavoro di Fischer Black e Myron Scholes e Robert Merton. Il modello valuta nel tempo il prezzo di strumenti finanziari, in particolare le opzioni. La formula derivante dal modello fornisce il prezzo di non arbitraggio di un'opzione call o put di tipo europeo scritta su un titolo azionario. Questo modello divenne da subito influente e preso in considerazione dai trader per le valutazioni e l'hedging con opzioni.

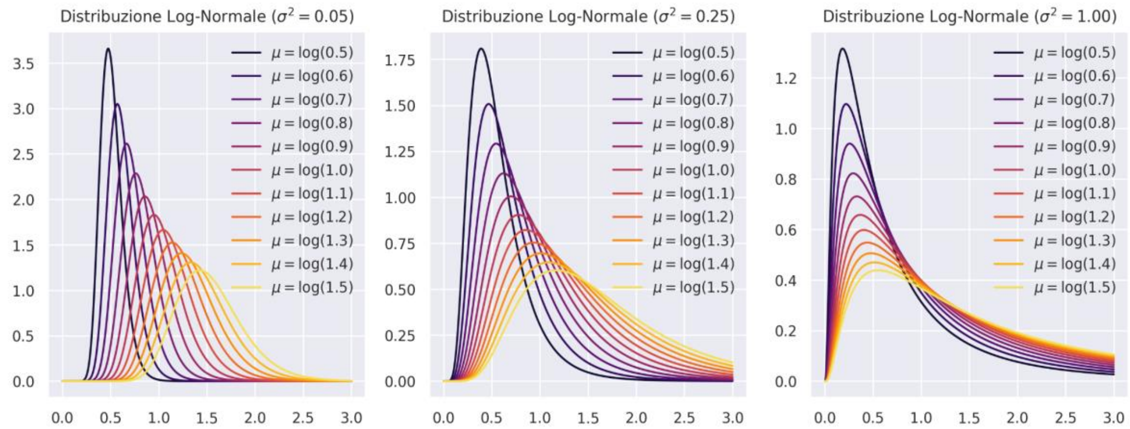
Nel 1997, il modello ottenne un riconoscimento importante grazie al conferimento del Premio Nobel a Fischer Black e Myron Scholes.

Al tempo le ipotesi alla base della determinazione dei payoff delle opzioni erano già conosciute, ma la difficoltà era conoscere il corretto fattore di attualizzazione da applicare per ottenere il prezzo. L'intuizione fondamentale di Black-Scholes fu l'utilizzo del CAPM per collegare il tasso richiesto dal mercato per investire nell'opzione e il rispettivo per l'azione sottostante, il tasso risulta essere dipendente da prezzo azionario e tempo, e viene utilizzato per attualizzare il payoff. Merton invece sviluppa un'altra dimostrazione più generale e che non utilizza il modello CAPM. La sua dimostrazione si basa su un portafoglio, costituito dall'opzione e dall'azione sottostante, con pesi variabili dinamicamente in modo da mantenere un portafoglio privo di rischio nel tempo. Il prezzo di un'opzione al tempo 0 quindi deve replicare il payoff dell'opzione alla scadenza utilizzando un fattore di attualizzazione che permetta la condizione di assenza di arbitraggio.

3.2.1 LOG-NORMALITÀ

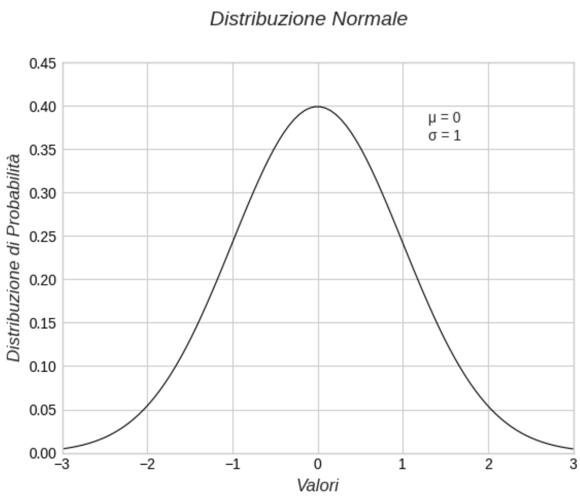
Il modello idealizzato da Black-Scholes-Merton ipotizza che il tasso di variazione istantaneo del prezzo azionario sia distribuito in modo normale e che S_T sia distribuito in modo log-normale. La distribuzione log-normale è una distribuzione di probabilità continua di una variabile casuale il cui logaritmo è distribuito normalmente. Una variabile casuale così distribuita assume solo valori reali positivi, il comportamento tipico della variabile aleatoria rappresentata dai prezzi azionari al tempo T.

Tavola 15



Simulazioni visive di distribuzioni log-normali con caratteristiche simili al comportamento di S_T (come assunto dal modello)

Tavola 16



Simulazione visiva di distribuzione normale ($\mu = 0$, $\sigma = 1$) con caratteristiche simili al comportamento di ΔS nell'intervallo Δ_t (come assunto dal modello)

La variazione percentuale del prezzo di un'azione in un intervallo di tempo Δ_t ha media $\mu\, \Delta_t$ e volatilità $\sigma\, \Delta_t$:

μ : tasso di rendimento atteso

σ : volatilità

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \varphi(\mu \Delta_t, \sigma^2 \Delta_t)$$

dove ΔS è la variazione del prezzo dell'azione nell'intervallo Δ_t e $\varphi(\mu, \sigma^2)$ indica una distribuzione normale con media μ e varianza σ^2. il modello implica che:

$$ln(S_T) - ln(S_0) \sim \varphi[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T]$$

Ne segue che

$$ln(\frac{S_T}{S_0}) \sim \varphi[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T]$$

e

$$ln(S_T) \sim \varphi[ln(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T, \sigma^2 T]$$

dove S_T,è il prezzo dell'azione al tempo T e S_0 è il prezzo dell'azione al tempo 0. L'Equazione mostra che In(S_T) è normale, per cui S_T è log-normale. La media di In(S_T) è $ln(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T$ e la deviazione standard è $\sigma\sqrt{T}$.

La distribuzione log-normale è una distribuzione di probabilità continua di una variabile casuale il cui logaritmo è distribuito normalmente Una variabile casuale così distribuita assume solo valori reali positivi, il comportamento tipico dei prezzi azionari al tempo T.

3.2.2 CONDIZIONI AL CONTORNO

L'analisi di Black-Scholes-Merton presenta una stretta analogia con il metodo Cox-Ross-Rubinstein per la valutazione di opzioni in un contesto di dinamica binomiale del prezzo dell'azione. La metodologia B-S-M si basa sulla costruzione di un portafoglio privo di rischio, composto da azioni sottostanti e opzioni correlate. In assenza di opportunità di arbitraggio, il rendimento di questo portafoglio deve necessariamente coincidere con il tasso d'interesse privo di rischio (r).

La fattibilità della creazione di un portafoglio privo di rischio deriva dalla relazione stocastica tra il prezzo dell'azione e il prezzo delle opzioni. In quanto strumenti finanziari derivati, le opzioni vedono il loro valore muoversi in direzione opposta rispetto al prezzo del sottostante: le opzioni Call aumentano di valore quando il titolo sottostante apprezza, mentre le opzioni Put si deprezzano. Sfruttando questa correlazione inversa, è possibile combinare azioni e opzioni in modo da compensare reciprocamente le fluttuazioni di prezzo, garantendo un rendimento stabile e privo di rischio per un breve intervallo di tempo.

Tuttavia, è fondamentale sottolineare che l'assenza di rischio è una caratteristica temporanea del portafoglio B-S-M. Per mantenere questa proprietà nel lungo periodo, è necessario procedere a un ribilanciamento periodico del portafoglio, ovvero a un riadeguamento della composizione di azioni e opzioni in base all'evolversi delle condizioni di mercato.

Un aspetto cruciale del modello Black-Scholes-Merton è la determinazione del tasso di rendimento di un portafoglio privo di rischio. In ogni istante di tempo, questo tasso deve necessariamente coincidere con il tasso d'interesse privo di rischio (r). Questa condizione rappresenta la base fondamentale su cui si poggiano le formule di valutazione delle opzioni derivate da BSM.

Il modello BSM si basa su un insieme di ipotesi che ne definiscono il campo di applicabilità e i limiti di validità. Le 7 ipotesi chiave sono:

1. **Movimento stocastico del prezzo dell'azione:** Il prezzo del titolo sottostante segue un processo di diffusione di Ito con volatilità costante nel tempo

2. **Possibilità di vendite allo scoperto:** Le vendite allo scoperto sono consentite e non vi sono restrizioni all'utilizzo dei proventi derivanti da tali operazioni.

3. **Assenza di costi di transazione e tasse:** Si ipotizza che non vi siano costi di transazione o tasse associate all'acquisto o alla vendita di azioni e opzioni. I titoli sono inoltre considerati perfettamente divisibili.

4. **Nessun pagamento di dividendi:** Durante la vita dell'opzione, il titolo sottostante non distribuisce dividendi.

5. **Assenza di arbitraggio senza rischio:** Non esistono opportunità di profitto prive di rischio sfruttando discrepanze di prezzo tra titoli e opzioni.

6. **Negoziazione continua del titolo sottostante:** Il titolo sottostante è negoziato continuamente sul mercato, con prezzi sempre disponibili.

7. **Tasso d'interesse privo di rischio costante:** Il tasso d'interesse privo di rischio (r) è costante per tutte le scadenze.

8.

Alcune delle ipotesi del modello BSM possono essere allentate o mitigate in contesti specifici, ad esempio:

- La volatilità (σ) non è necessariamente costante nel tempo, ma può essere una funzione nota del tempo (σ(t)).

- I tassi d'interesse (r) possono essere stocastici, ovvero variabili nel tempo, a patto che la distribuzione del prezzo dell'azione alla scadenza dell'opzione rimanga log-normale.

- Inclusione di aspetti fiscali e/o costi di transazione.

- inclusione di politiche di dividendi adottate dalle imprese e quindi dal titolo sottostante all'opzione.

L'analisi di queste ipotesi e delle relative mitigazioni estende il campo di applicazione a scenari finanziari più complessi.

Supponiamo che il prezzo spot, S, dell'azione segua il processo che abbiamo presentato nelle sezioni precedenti

$$dS = \mu\, S\, dt + \sigma\, S\, dz$$

Sia f il prezzo di una call o di un altro derivato che dipende da S. La variabile f deve essere una certa funzione di S e t. Pertanto, in base all'Equazione di Ito si ha

$$df = (\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\, dz.$$

Le versioni discrete delle Equazioni sono

1. $$\Delta S = \mu\, S\, \Delta t + \sigma\, S\, \Delta z$$

E

2. $$\Delta f = (\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\, \Delta z$$

dove ΔS e Δf sono le variazioni di S e f in un piccolo intervallo di tempo, Δt.

Richiamando il lemma di Itō, possiamo evidenziare che le Equazioni (1.), (2.) descrivono una dinamica influenzata da processi di Wiener identici per S e f. In altre parole, i termini Δz ($= \varepsilon\sqrt{\Delta t}$) in entrambe le equazioni rappresentano lo stesso processo di Wiener.

Questa proprietà permette di eliminare il processo di Wiener, scegliendo un portafoglio che combina l'azione sottostante con il suo derivato

Il portafoglio appropriato è così composto:

- -1 : derivato
- $+\frac{\partial f}{\partial S}$: azione.

Il possessore di questo portafoglio è corto di un derivato e lungo di una quantità di azioni pari a $\frac{\partial f}{\partial S}$. Sia Π il valore del portafoglio, per definizione si ha:

3. $$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S}S\,.$$

La variazione $\Delta\Pi$ del valore del portafoglio nell'intervallo di tempo Δt è data da

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S.$$

Sostituendo le Equazioni (1.) e (2.) nell' equazione (3.), si ottiene

$$\Delta\Pi = (-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)\Delta t$$

Dato che in questa equazione non figura il termine Δz , il portafoglio deve essere privo di rischio durante l'intervallo di tempo Δt.

In base alle ipotesi formulate precedentemente, il portafoglio deve conseguire un rendimento, nel prossimo intervallo di tempo, equivalente a quello offerto dai titoli a breve privi di rischio. Tale vincolo deriva dall'opportunità di arbitraggio che sorgerebbe se il portafoglio generasse un rendimento significativamente diverso da quello dei titoli a breve termine.

Se così non fosse gli investitori sfrutterebbero le inefficienze del mercato per generare profitti senza rischio. In questo scenario, se il portafoglio offrisse un rendimento superiore ai titoli a breve privi di rischio, gli arbitraggisti potrebbero:

- Vendere titoli a breve privi di rischio (incassando un capitale certo).
- Acquistare il portafoglio, ottenendo un rendimento superiore.

Ottenendo un profitto derivante dalla differenza tra il rendimento del portafoglio e il rendimento dei titoli a breve privi di rischio.

Ne segue che

$$5. \qquad \Delta\Pi = r\ \Pi\ \Delta t$$

dove r è il tasso d'interesse privo di rischio. Sostituendo nella (5.) i valori di $\prod$ e $\Delta\Pi$r riportati nelle Equazioni (3.) e (4.), si ottiene

$$(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)\Delta t = r(f - \frac{\partial f}{\partial S}S)\Delta t$$

cosicché

$$6. \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf.$$

L'equazione (6.), nota come equazione di Black-Scholes-Merton, descrive l'evoluzione del prezzo di un'opzione finanziaria nel tempo. Essa possiede diverse soluzioni, ognuna relativa a un tipo specifico di opzione e dipendente dalle "condizioni al contorno", che definiscono il valore dell'opzione in determinate circostanze. Ammette diverse soluzioni, ognuna relativa a un tipo specifico di opzione finanziaria (ad esempio, call o put). La soluzione specifica dipende dalle caratteristiche dell'opzione in esame. Queste condizioni definiscono il valore del derivato per valori estremi di S e t.

Nel caso di una call europea, la principale condizione al contorno è

$f = max(S - K, 0)$ quando $t = T$.

Nel caso di una put europea è

$f = max(K - S, 0)$ quando $t = T$.

Un punto che va sottolineato, circa il portafoglio utilizzato per ricavare l'Equazione (6.), è che questo portafoglio non è sempre privo di rischio. Lo è solo per un periodo di tempo infinitesimo. Quando S e t cambiano, anche $\frac{\partial f}{\partial S}$ cambia. Pertanto, per mantenere il portafoglio privo di rischio, è necessario aggiustare continuamente le quote del portafoglio rappresentate dal derivato e dall'azione sottostante.

Come già introdotto nel Capitolo in relazione al modello binomiale, la valutazione neutrale al rischio rappresenta uno strumento di fondamentale importanza nell'analisi dei derivati. Tale principio si basa su una proprietà cruciale dell'equazione di Black-Scholes-Merton: l'assenza di variabili influenzate dalla propensione al rischio degli investitori.

L'equazione, infatti, include unicamente il prezzo corrente dell'azione, il tempo residuo, la volatilità dell'azione e il tasso d'interesse privo di rischio. Tutte queste variabili non risentono dell'avversione al rischio degli investitori.

Un elemento chiave è che l'equazione di Black-Scholes-Merton sarebbe dipendente dalla propensione al rischio se contenesse il tasso di rendimento atteso (μ) dell'azione. Il livello di μ, infatti, varia in base alla tolleranza al rischio: maggiore è l'avversione al rischio, maggiore sarà il tasso di rendimento atteso per ogni titolo. Fortunatamente, nella derivazione dell'equazione, i termini in μ si elidono a vicenda.

L'indipendenza dell'equazione di Black-Scholes-Merton dalla propensione al rischio permette di utilizzare un'argomentazione intuitiva: se la propensione al rischio non influenza l'equazione, non può influenzare nemmeno la soluzione. Di conseguenza, per determinare il valore corrente (f) di un derivato, possiamo assumere qualsiasi ipotesi sulla propensione al rischio degli investitori. In particolare, possiamo ipotizzare che tutti gli investitori siano neutrali al rischio.

In un mondo di investitori neutrali al rischio, il tasso di rendimento atteso di tutti i titoli coincide con il tasso d'interesse privo di rischio (r). Gli investitori, in questo scenario, non richiedono alcun premio per assumersi dei rischi. Inoltre, il valore attuale di ogni flusso di cassa futuro viene calcolato attualizzandone il valore atteso al tasso d'interesse privo di rischio. L'ipotesi di neutralità al rischio semplifica notevolmente l'analisi dei derivati.

Consideriamo un derivato con un determinato payoff al tempo T. Applicando il principio della valutazione neutrale al rischio, possiamo valutarlo come segue:

1. **Ipotesi di rendimento atteso:** Assumiamo che il tasso di rendimento atteso dell'attività sottostante sia pari al tasso d'interesse privo di rischio (r), ovvero $\mu = r$.

2. **Calcolo del valore atteso del derivato:** Determiniamo il valore atteso del payoff del derivato al tempo T.

3. **Attualizzazione del valore atteso:** Attualizziamo il valore atteso calcolato al punto 2 utilizzando il tasso d'interesse privo di rischio.

L'ipotesi di neutralità al rischio rappresenta un espediente tecnico per ottenere le soluzioni dell'equazione di Black-Scholes-Merton. Tuttavia, le soluzioni ottenute sono valide in generale, non solo nel caso di investitori neutrali al rischio.

Quando si passa da un mondo di neutralità al rischio a un mondo di avversione al rischio, si verificano due cambiamenti:

1. **Modifica del valore atteso dei derivati:** Il valore atteso dei derivati varia in base all'avversione al rischio degli investitori.

2. **Aggiornamento del tasso di attualizzazione:** Il tasso d'interesse utilizzato per attualizzare il valore atteso viene modificato per tenere conto dell'avversione al rischio.

Tuttavia, questi due effetti si compensano esattamente tra di loro, lasciando invariato il valore del derivato.

La valutazione neutrale al rischio si configura come un metodo efficace per la determinazione del valore dei derivati. Nonostante si basi su un'ipotesi semplificativa, la sua validità rimane intatta anche in presenza di avversione al rischio, grazie all'effetto compensativo tra modifiche del valore atteso e del tasso di attualizzazione.

Formule Black-Scholes-Merton

Le formule Black-Scholes-Merton per la valutazione del prezzo di opzioni calls e puts sono le seguenti:

- Opzioni europee
- Titoli che non pagano dividendi

$$7. \qquad c = S_0\, N(d_1) - Ke^{-rt}\, N(d_2)$$

$$8. \qquad p = \; Ke^{-rt}\, N(-d_2) - S_0\, N(-d_1)$$

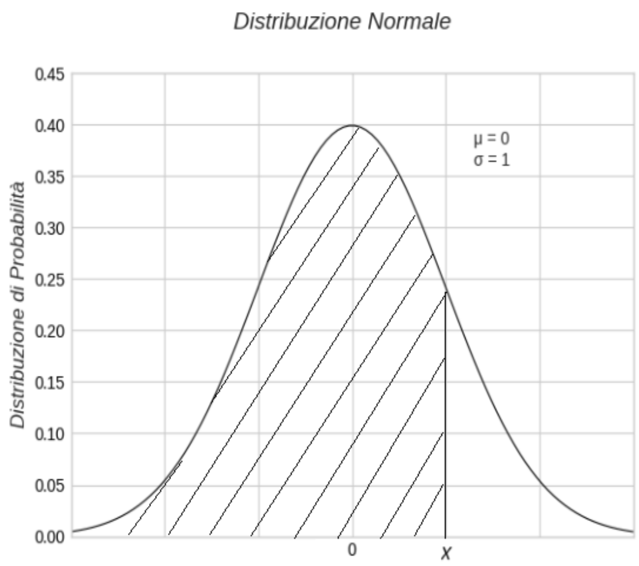
dove

$$d_1 = \frac{ln(s_0/k) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{ln(s_0/k)+(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

L'espressione $N(X)$ indica la funzione di distribuzione di una variabile normale ($\mu = 0$; $\sigma = 1$) con media nulla e deviazione standard pari a l, ossia la probabilità che una variabile normale standardizzata assuma un valore inferiore a x.

Tavola 17



Componenti delle formule c, p, d_1 e d_2:

- S_0 è il prezzo dell'azione al tempo zero
- K è il prezzo d'esercizio
- e^{-rt} è il coefficiente di attualizzazione composto continuo
- r è il tasso d'interesse privo di rischio
- σ è la volatilità del prezzo dell'azione
- T è la vita residua dell'opzione.

Un primo approccio per determinare le formule di Black, Scholes e Merton consiste nella risoluzione analitica dell'equazione differenziale di Black-Scholes (6), soggetta alle condizioni al contorno di parità put-call e di valore nullo dell'opzione alla scadenza. In alternativa, è possibile adottare un approccio probabilistico basato sul principio della valutazione neutrale al rischio.

Si consideri una call europea. In un mondo neutrale verso il rischio il valore atteso della *call* è

$$\hat{E}\,[max(S_T - K, 0)]$$

dove, come prima, Ê indica il valore atteso in un mondo neutrale verso il rischio

In base al principio della valutazione neutrale verso il rischio, il valore corrente c della *call* si ottiene attualizzando il valore atteso in base al tasso privo di rischio

$c = e^{-rt}\hat{E}\,[max(S_T - K, 0)].$

Da questa equazione si ricava l'Equazione (7.)

Nel caso in cui il sottostante non pagasse dividendi la formula di c risulta coincidere sia per il caso delle opzioni europee sia per quelle americane. Questa analogia non è presente per quanto riguarda la formula del valore p poiché il prezzo delle opzioni put europee e americane varia anche nel caso l'azione sottostante non distribuisse dividendi.

Significato di $N(d_1)$ *e* $N(d_2)$

L'espressione $N(d_2)$ nell'Equazione (7.) ha un significato molto semplice. Rappresenta la probabilità di esercizio di un'opzione call (in un mondo neutrale verso il rischio) L'espressione

N(d_1) non è altrettanto semplice da interpretare. Il termine $S_0\, N(d_1)e^{rt}$ è il valore atteso (in un mondo neutrale verso il rischio) di una variabile che è pari a S_t se S_t>K e che è pari a zero altrimenti (S_t<K o K>S_t). Lo strike K viene pagato solo se S_t>K e, come si è appena visto, la probabilità che ciò accada è pari a N(d_2).

Pertanto, il valore atteso della call in un mondo neutrale verso il rischio è pari a

$S_0\, N(d_1)e^{rt} - K\, N(d_2)$.

Attualizzando il valore atteso in base al tasso d'interesse privo di rischio, si ottiene la formula Black-Scholes-Merton per il valore corrente della call:

$$c = S_0\, N(d_1) - Ke^{-rt}\, N(d_2)$$

Capitolo 4

Applicazione

Applichiamo le formule e i concetti visti finora in codice python. Di seguito verrà mostrato lo sviluppo del codice effettuato con Google Colab, è stata implementata la formula BSM generica che permette di prezzare le opzioni europee, sempre tenendo in considerazione i 7 vincoli visti nel precedente capitolo.

4.1 Scrittura codice

Codice Python:

```python
import numpy as np
from scipy.stats import norm

class ModelloBSM:

    #Modello di valutazione delle opzioni di Black-Scholes-Merton.

    #Attributi:
        #S: Prezzo iniziale dell'asset sottostante
        #K: Prezzo di esercizio dell'opzione
        #T: Tempo fino alla scadenza
        #r: Tasso di interesse privo di rischio
        #vol: Volatilità dell'asset sottostante
        #q: Dividendo continuo


    def __init__(self, S, K, T, r, vol, q=0):
        self.S = S
        self.K = K
        self.T = T
        self.r = r
        self.vol = vol
        self.q = q
```

All'inizio vengono importate le librerie *numpy* e *scipy*, che consentono di effettuare calcoli in maniera agevole e di utilizzare il calcolo statistico, utile nel calcolo della distribuzione di una variabile normale come il caso di *d1* e *d2*.

Successivamente viene sviluppato il programma in metodo *Object-oriented programming (OOP)*, il quale consente tramite la definizione della funzione *__init__()* e *self.* di inserire autonomamente i dati nelle funzioni della classe *ModelloBSM* che verranno viste successivamente.

```
@staticmethod
def N(x):
    #Funzione di distribuzione cumulativa della normale standard.
    return norm.cdf(x)

def d1(self):
    #Calcola il parametro d1.
    return (np.log(self.S / self.K) + (self.r - self.q + self.vol**2 / 2) * self.T) / (
        self.vol * np.sqrt(self.T)
    )

def d2(self):
    #Calcola il parametro d2.
    return self.d1() - self.vol * np.sqrt(self.T)
```

Viene definita la funzione *N()* che permette di restituire la funzione cumulativa di una variabile distribuita normalmente.

Di seguito si definiscono i parametri *d1* e *d2* della formula definendo le due funzioni. Tramite l'utilizzo di *self.* vengono automaticamente richiamate le variabili della formula BSM.

```
def call_value(self):
    #Calcola il valore dell'opzione call.
    d1 = self.d1()
    d2 = self.d2()
    return self.S * np.exp(-self.q * self.T) * self.N(d1) - self.K * np.exp(-self.r * self.T) * self.N(d2)

def put_value(self):
    #Calcola il valore dell'opzione put.
    d1 = self.d1()
    d2 = self.d2()
    return self.K * np.exp(-self.r * self.T) * self.N(-d2) - self.S * np.exp(-self.q * self.T) * self.N(-d1)

def price(self, option_type='C'):
   #Calcola il prezzo dell'opzione.
        #option_type: 'C' per call, 'P' per put, 'B' per entrambi.
        #Prezzo dell'opzione o dizionario con i prezzi di call e put.

    if option_type == 'C':
        return self.call_value()
    elif option_type == 'P':
        return self.put_value()
    elif option_type == 'CP':
        return {'call': self.call_value(), 'put': self.put_value()}
    else:
        raise ValueError('Inserimento errato tipologia opzioni')
```

Avendo precedentemente calcolato i parametri *d1* e *d2* vengono richiamati e utilizzati per il calcolo delle funzioni *call_value()* e *put_value()* che forniranno in output i prezzi delle rispettive opzioni. Ovviamente le formule utilizzate sono quelle viste nel capitolo precedente.

Viene definita la funzione *price()* che funge da selettore per la scelta del calcolo della call e/o della put *("C", "P")*. Viene inserito l'output *error* nel terminale in caso si digiti un errato valore del tipo di opzione *(option_type)*.

```
        #Greche
    def delta(self, option_type='C'):
        """Calcola il delta dell'opzione."""
        d1 = self.d1()
        if option_type == 'C':
            return np.exp(-self.q * self.T) * self.N(d1)
        elif option_type == 'P':
            return -np.exp(-self.q * self.T) * self.N(-d1)
        else:
            raise ValueError('Inserimento errato tipologia opzioni')

    def gamma(self):
        #Calcola il gamma dell'opzione.
        d1 = self.d1()
        return np.exp(-self.q * self.T) * norm.pdf(d1) / (self.S * self.vol * np.sqrt(self.T))

    def vega(self):
        #Calcola il vega dell'opzione."
        d1 = self.d1()
        return self.S * np.exp(-self.q * self.T) * norm.pdf(d1) * np.sqrt(self.T)


    def theta(self, option_type='C'):
        #Calcola il theta dell'opzione.
        d1 = self.d1()
        d2 = self.d2()
        if option_type == 'C':
            return -self.S * np.exp(-self.q * self.T) * norm.pdf(d1) * self.vol / (2 * np.sqrt(self.T)) \
                   - self.r * self.K * np.exp(-self.r * self.T) * self.N(d2) \
                   + self.q * self.S * np.exp(-self.q * self.T) * self.N(d1)
        elif option_type == 'P':
            return -self.S * np.exp(-self.q * self.T) * norm.pdf(d1) * self.vol / (2 * np.sqrt(self.T)) \
                   + self.r * self.K * np.exp(-self.r * self.T) * self.N(-d2) \
                   - self.q * self.S * np.exp(-self.q * self.T) * self.N(-d1)
        else:
            raise ValueError('Inserimento errato tipologia opzioni')

    def rho(self, option_type='C'):
        #Calcola il rho dell'opzione.
        d2 = self.d2()
        if option_type == 'C':
            return self.K * self.T * np.exp(-self.r * self.T) * self.N(d2)
        elif option_type == 'P':
            return -self.K * self.T * np.exp(-self.r * self.T) * self.N(-d2)
        else:
            raise ValueError('Inserimento errato tipologia opzioni')
```

Successivamente vengono definite le greche che permettono di fare valutazioni su hedging e derivare il movimento del prezzo delle opzioni in base al cambiamento di valore delle variabili.

Le funzioni definite sono: *delta()*, *gamma()*, *vega()*, *theta() e rho()*, viene utilizzato sempre *self* come variabile in input in modo tale da utilizzare tutte le variabili senza specificarle. Si utilizza la variabile *option_type* per identificare quale greca calcolare in base all'opzione scelta.

```
if __name__ == '__main__':
    K = 100
    r = 0.05
    T = 1
    vol = 0.2
    S = 100
    print("-----PREZZO OPZIONI-----")
    print(" ")
    print("     Call:",ModelloBSM(S, K, T, r, vol).price('C'),"     Put:",ModelloBSM(S, K, T, r, vol).price('P'))
    print(" ")
    print("-----VALORE GRECHE-----")
    print(" ")
    print("-Valore Delta:")
    print("     Call:",ModelloBSM(S, K, T, r, vol).delta('C'),"     Put:",ModelloBSM(S, K, T, r, vol).delta('P'))
    print(" ")
    print("-Valore Gamma:")
    print("     ",ModelloBSM(S, K, T, r, vol).gamma())
    print(" ")
    print("-Valore Vega:")
    print("     ",ModelloBSM(S, K, T, r, vol).vega())
    print(" ")
    print("-Valore Theta:")
    print("     ","Call:",ModelloBSM(S, K, T, r, vol).theta('C'),"     Put:",ModelloBSM(S, K, T, r, vol).theta('P'))
    print(" ")
    print("-Valore Rho:")
    print("     ","Call:",ModelloBSM(S, K, T, r, vol).rho('C'),"     Put:",ModelloBSM(S, K, T, r, vol).rho('P'))
```

Inserimento dei dati in input *K*, *r*, *T*, *vol* e *S* e stampa in output in maniera leggibile dei risultati ottenuti dal modello. Verrà visualizzato il prezzo della call e put e il valore di delta, gamma, vega, theta e rho, richiamando il *ModelloBSM()* con gli input di variabili e la funzione *.greca()*.

```
-----PREZZO OPZIONI-----

     Call: 10.450583572185565     Put: 5.573526022256971

-----VALORE GRECHE-----

-Valore Delta:
     Call: 0.6368306511756191     Put: -0.3631693488243809

-Valore Gamma:
      0.018762017345846895

-Valore Vega:
      37.52403469169379

-Valore Theta:
      Call: -6.414027546438197     Put: -1.657880423934626

-Valore Rho:
      Call: 53.232481545376345     Put: -41.89046090469506
```

I valori ottenuti dal modello di Black-Scholes-Merton, sono stati calcolati considerando un'azione sottostante con le seguenti caratteristiche:

```
K = 100
r = 0.05
T = 1
vol = 0.2
S = 100
```

con

K = Strike Price (100)

r = Tasso risk-free (5%)

T = Tempo di scadenza dell'opzione, da t_0 a T (1 Anno)

vol = Volatilità annuale dell'azione sottostante (20%)

S = Prezzo azione sottostante al tempo t_0 (100)

4.2 RISULTATI E TEST

Utilizzerò il codice scritto per valutare le opzioni in stile europeo più scambiate in borsa italiana in modo da testare l'algoritmo e verificare quanto sia preciso il calcolo del prezzo. Le fonti dei dati delle opzioni, prezzi e variabili azionarie sono Borsa italiana e teleborsa.

Verranno valutate in data 31/07/2024 le opzioni call e put in scadenza a settembre 2024 e dicembre 2024 delle seguenti azioni:

- Assicurazioni Generali (BIT: G)
- Intesa Sanpaolo (BIT: ISP)
- Enel (BIT: ENEL)

Calcolo opzioni Settembre 2024

Il codice viene implementato con il valore delle variabili corrette di input, la fonte della volatilità stimata ad 1 anno è MilanoFinanza.

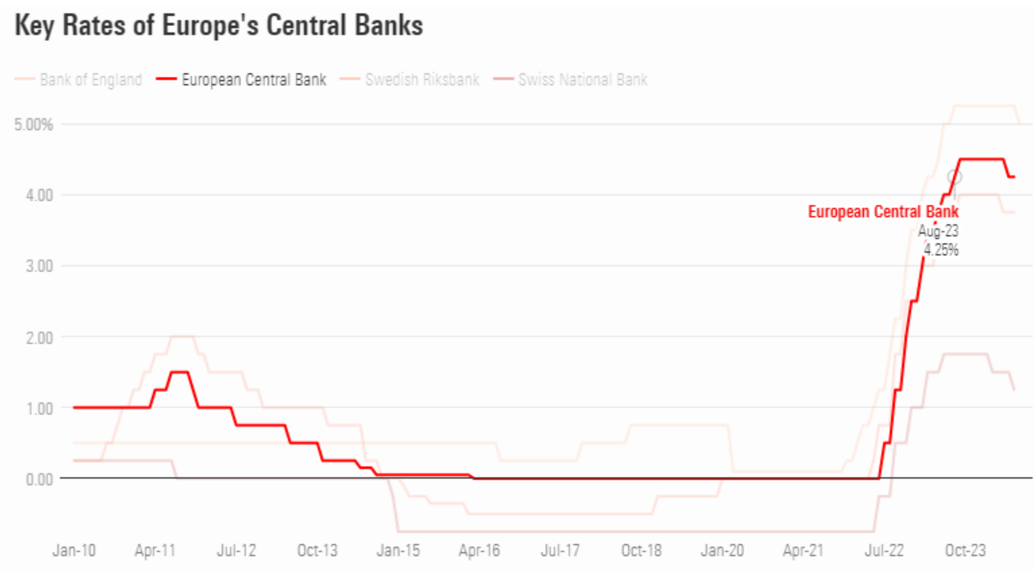
Tavola 18

Pz. medio sem.	19,576
Min 52 Sett.	18,145
Max 52 sett.	25
Var % iniz. anno	30,86
Volatilità %	17,3

```
if __name__ == '__main__':
    K = 13.5
    r = 0.0425
    T = 1/12
    vol = 0.173
    S = 23.99
```

Il tasso r risk-free considerato è il tasso di rifinanziamento della BCE, il quale viene usato come base per il calcolo di molte metriche riguardo a mutui e prestiti concessi dalle banche.

Tavola 19



Il tasso di riferimento si attesta intorno al 4,25% ad agosto 2023, prosegue con un successivo rialzo a 4,50% per poi riassestarsi ad agosto 2024 a 4.25%. Il grafico mostra l'andamento dal 2010 ad oggi; A partire da luglio 2022, si è assistito a un significativo inasprimento della politica monetaria da parte della BCE, in risposta all'elevata inflazione che ha caratterizzato l'economia europea a partire dal 2021 e che persiste ancora oggi. Questa stretta monetaria ha determinato un marcato rialzo dei tassi d'interesse.

```python
# Definisco il range degli strike price
strike_prices = np.arange(13.5, 35, 0.5)

# Creo dizionario vuoto
results_dict = {}

# Ciclo for di calcolo del modello per ogni K
for K in strike_prices:
    model = ModelloBSM(S, K, T, r, vol)

    # Calcola prezzo Call e Put
    call_price = model.price('C')
    put_price = model.price('P')

    # Aggiungo risultati al dizionario
    results_dict[K] = {'Call Price': call_price, 'Put Price': put_price}

# Print del dizionario
print(results_dict)
```

Viene definita una variabile *strike_price* con funzione(K) che va da 13.5 a 35, con intervallo di 0.5. Successivamente viene creato un dizionario results_dict dove verranno salvati i dati.

Si implementa un ciclo for per reiterare il calcolo del modello per l'intervallo di K, vengono calcolati i prezzi e inseriti nelle rispettive variabili *call_price e put_price,* vengono poi inserite nel dizionario results_dic*t[K]* con indice *K.*

```
    # Plot
    call_prices = []
    put_prices = []
    for K, values in results_dict.items():
        call_prices.append(values['Call Price'])
        put_prices.append(values['Put Price'])

    # Crea i 2 plot vicini
    fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(12, 6))

    # Plot della Call
    ax1.plot(strike_prices, call_prices)
    ax1.set_xlabel('Prezzo di esercizio (K)')
    ax1.set_ylabel('Prezzo Call')
    ax1.set_title('Prezzo Call in funzione di K')

    # Plot della Put
    ax2.plot(strike_prices, put_prices)
    ax2.set_xlabel('Prezzo di esercizio (K)')
    ax2.set_ylabel('Prezzo Put')
    ax2.set_title('Prezzo Put in funzione di K')

    plt.show()

# Esporto i dati in xlsx
df = pd.DataFrame.from_dict(results_dict, orient='index')
df.to_excel('risultati.xlsx', index=True)
```

Successivamente vengono plottati i grafici dei prezzi delle opzioni di Assicurazioni Generali, il ciclo for consente di trasferire i dati dal dizionario ad un elenco.

Il comando *plts.subplots* utilizzato in fig consente di unire i grafici in un'unica figura, viene eseguito il grafico inserendo le variabili da rappresentare e definite le label per ogni grafico (*ax1. ax2.*). Infine viene mostrato in console il grafico ottenuto.

Eseguo l'esportazione dei dati contenuti all'interno di un dizionario, inserendoli in un DataFrame chiamato *df* e creando il file *xlsx* con il comando *df.to_excel.*

Di seguito verranno mostrati gli output e il confronto con i prezzi di acquisto e di vendita ottenuti da Borsa Italiana.

Tavola 20

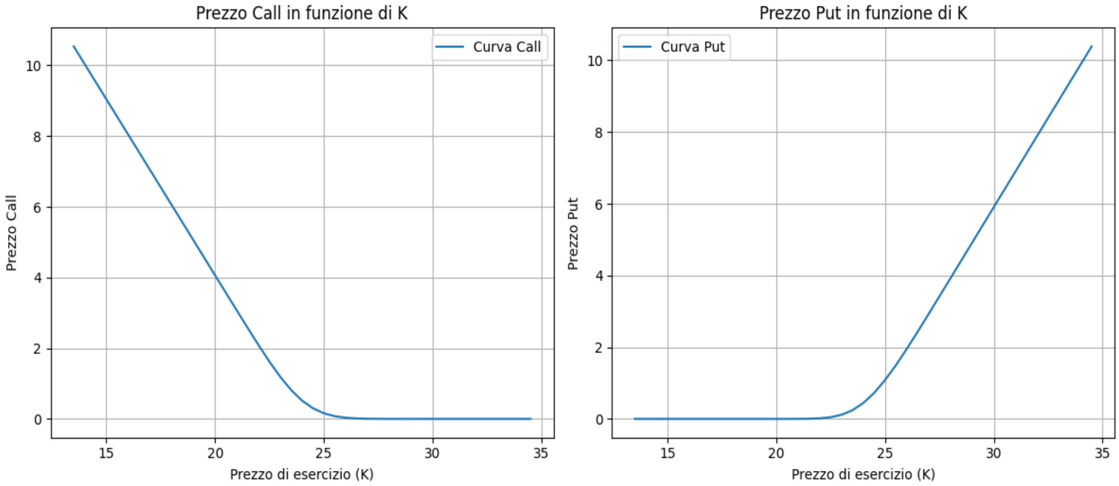


Grafico che mostra l'andamento dei prezzi teorici delle opzioni, calcolati utilizzando il modello di BSM.

Tavola 21

	Call Price	Put Price
13,5	10,53773	1,91E-32
14	10,0395	7,79E-29
14,5	9,541263	1,45E-25
15	9,043031	1,32E-22
15,5	8,544799	6,24E-20
16	8,046566	1,63E-17
16,5	7,548334	2,45E-15
17	7,050102	2,24E-13
17,5	6,55187	1,29E-11
18	6,053637	4,87E-10
18,5	5,555405	1,24E-08
19	5,057173	2,22E-07
19,5	4,558943	2,84E-06
20	4,060735	2,68E-05
21	3,065296	0,001052
22	2,083926	0,016147
23	1,185749	0,114435
24	0,515528	0,440678
25	0,158776	1,080391
26	0,033266	1,951346
27	0,004701	2,919245
28	0,000453	3,911462
29	3,05E-05	4,907504
30	1,47E-06	5,903939
31	5,2E-08	6,900403
32	1,39E-09	7,896867
33	2,88E-11	8,893332
34	4,74E-13	9,889796

Dati ottenuti mediante il BSM Model esportati in excel.

Tavola 22

31/07/2024	**BSM Model**		**Prezzo BIT**						**Calcolo scostamento**	
	Call Price	**Put Price**	**Call Price**		**Put Price**		**Call Price**	**Put Price**	**Diff Call**	**Diff Put**
K			*Buy*	*Sell*	*Buy*	*Sell*	*Media B/S*	*Media B/S*	*(BSM - Media)/Media*	*(BSM - Media)/Media*
13,5	10,53773	1,91E-32	10,0000	11,0000	0,0000	0,2000	10,5000	0,1000	0,36%	-100,00%
14	10,0395	7,79E-29	9,5000	10,5000	0,0000	0,2000	10,0000	0,1000	0,39%	-100,00%
14,5	9,541263	1,45E-25	9,0000	10,0000	0,0000	0,2000	9,5000	0,1000	0,43%	-100,00%
15	9,043031	1,32E-22	8,5000	9,5000	0,0000	0,2000	9,0000	0,1000	0,48%	-100,00%
15,5	8,544799	6,24E-20	8,0000	9,0000	0,0000	0,2000	8,5000	0,1000	0,53%	-100,00%
16	8,046566	1,63E-17	7,7500	8,5000	0,0000	0,2000	8,1250	0,1000	-0,97%	-100,00%
16,5	7,548334	2,45E-15	7,3000	8,0000	0,0001	0,1480	7,6500	0,0741	-1,33%	-100,00%
17	7,050102	2,24E-13	6,8000	7,5500	0,0001	0,1500	7,1750	0,0751	-1,74%	-100,00%
17,5	6,55187	1,29E-11	6,3000	7,0500	0,0001	0,1550	6,6750	0,0776	-1,84%	-100,00%
18	6,053637	4,87E-10	5,8000	6,5500	0,0041	0,1600	6,1750	0,0821	-1,97%	-100,00%
18,5	5,555405	1,24E-08	5,3000	6,0500	0,0080	0,1650	5,6750	0,0865	-2,11%	-100,00%
19	5,057173	2,22E-07	4,8300	5,5000	0,0150	0,1750	5,1650	0,0950	-2,09%	-100,00%
19,5	4,558943	2,84E-06	4,3700	4,9900	0,0210	0,1800	4,6800	0,1005	-2,59%	-100,00%
20	4,060735	2,68E-05	3,9100	4,4500	0,0300	0,1900	4,1800	0,1100	-2,85%	-99,98%
21	3,065296	0,001052	3,0000	3,2300	0,0530	0,1450	3,1150	0,0990	-1,60%	-98,94%
22	2,083926	0,016147	2,0800	2,2800	0,0950	0,1950	2,1800	0,1450	-4,41%	-88,86%
23	1,185749	0,114435	1,2700	1,4100	0,2250	0,3250	1,3400	0,2750	-11,51%	-58,39%
24	0,515528	0,440678	0,5900	0,6950	0,5300	0,6350	0,6425	0,5825	-19,76%	-24,35%
25	0,158776	1,080391	0,1950	0,3100	1,1300	1,2700	0,2525	1,2000	-37,12%	-9,97%
26	0,033266	1,951346	0,0470	0,1440	1,9400	2,1200	0,0955	2,0300	-65,17%	-3,87%
27	0,004701	2,919245	0,0050	0,1550	2,8300	3,2200	0,0800	3,0250	-94,12%	-3,50%
28	0,000453	3,911462	0,0000	0,2000	3,5800	4,2900	0,1000	3,9350	-99,55%	-0,60%
29	3,05E-05	4,907504	0,0000	0,2000	4,4600	5,3500	0,1000	4,9050	-99,97%	0,05%
30	1,47E-06	5,903939	0,0000	0,2000	5,4000	6,4000	0,1000	5,9000	-100,00%	0,07%
31	5,2E-08	6,900403	0,0000	0,2000	6,4000	7,4000	0,1000	6,9000	-100,00%	0,01%
32	1,39E-09	7,896867	0,0000	0,2000	7,4000	8,4000	0,1000	7,9000	-100,00%	-0,04%
33	2,88E-11	8,893332	0,0000	0,2000	8,4000	9,4000	0,1000	8,9000	-100,00%	-0,07%
34	4,74E-13	9,889796	0,0000	0,2000	9,4000	10,4000	0,1000	9,9000	-100,00%	-0,10%
								Mean scos	-33,87%	-60,30%

Confronto dei prezzi calcolati e reali in Borsa Italiana e calcolo dello scostamento dal prezzo teorico al prezzo reale.

Si nota subito come i prezzi ottenuti (Teorici) e reali siano molto simili per le call In The Money (Esercitate) e per le Put In The Money (Esercitate).

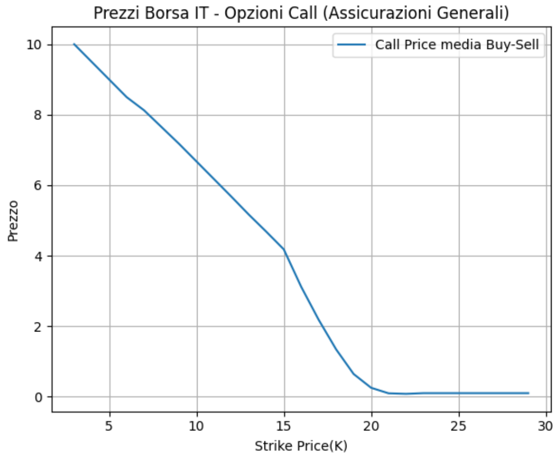
Per il confronto viene fatta una media tra i prezzi delle Call in posizione Buy e Sell in modo da mediare lo spread, la stessa operazione viene effettuata per quanto riguarda i prezzi delle Put.

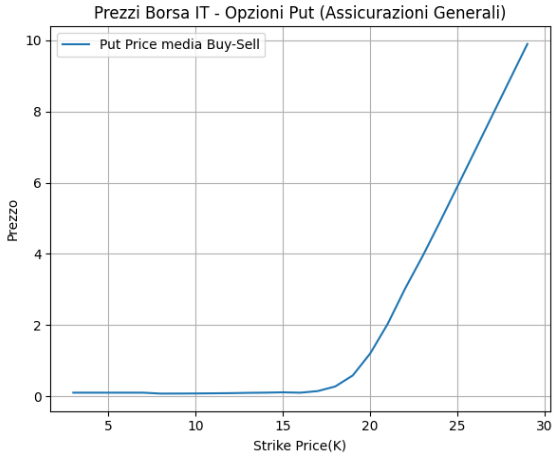
La valutazione teorica delle opzioni OTM, basata su modelli come Black-Scholes, tende a sottostimare il prezzo di mercato. Tale discrepanza è attribuibile a fattori quali gli *spread di bid-ask*, che sono particolarmente rilevanti per strumenti finanziari con bassa liquidità, come le opzioni OTM. In particolare, lo spread di vendita, che rappresenta il premio richiesto per assumere una posizione short, contribuisce in modo significativo all'aumento del prezzo effettivo.

```python
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

# Carica il file Excel
df = pd.read_excel("risultati.xlsx")

# Converti le colonne 8 e 9 in numerico (se necessario)
df.iloc[:, 7] = pd.to_numeric(df.iloc[:, 7], errors='coerce')
df.iloc[:, 8] = pd.to_numeric(df.iloc[:, 8], errors='coerce')

# Crea una figura con due sottografi disposti in orizzontale
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(12, 5))

# 1 grafico: Colonna 8 a partire dalla riga 4
ax1.plot(df.iloc[3:, 7], label='Call Price media Buy-Sell')
ax1.set_xlabel('Strike Price(K)')
ax1.set_ylabel('Prezzo')
ax1.set_title('Prezzi Borsa IT - Opzioni Call (Assicurazioni Generali)')
ax1.legend()
ax1.grid(True)

# 2 grafico: Colonna 9 a partire dalla riga 4
ax2.plot(df.iloc[3:, 8], label='Put Price media Buy-Sell')
ax2.set_xlabel('Strike Price(K)')
ax2.set_ylabel('Prezzo')
ax2.set_title('Prezzi Borsa IT - Opzioni Put (Assicurazioni Generali)')
ax2.legend()
ax2.grid(True)

plt.tight_layout()
plt.show()
```

I dati relativi ai prezzi reali delle opzioni, contenuti nel file Excel, vengono importati in un *DataFrame*. In particolare, le colonne 7 e 8, contenenti i valori numerici dei prezzi, vengono estratte e convertite in formato numerico qualora fossero inizialmente codificate come stringhe. Successivamente, viene generata una figura composta da due grafici (subplot) per visualizzare i dati in modo comparativo.

Tavola 23





I due grafici rappresentano i prezzi call e put contrattati in borsa italiana. Come si può vedere in corrispondenza dei valori dello strike price che rendono Out of The Money le opzioni i prezzi reali, a differenza di quelli teorici, tendono a zero ma senza raggiungerlo. Questo è dovuto dagli spread esercitati sui compratori e venditori.

Si nota anche nelle opzioni call come la curva aumenti di pendenza in corrispondenza dell'intervallo di K compreso tra 15 e 20. Nel secondo grafico, quello corrispondente alle opzioni put, non si notano fenomeni simili, infatti risulta di forma e pendenza simile a quello teorico.

Calcolo prezzi opzioni scadenza Dicembre 2024

```
if __name__ == '__main__':
    K = 13.5
    r = 0.0425
    T = 4/12
    vol = 0.2973
    S = 23.99
```

Il codice viene implementato col valore delle variabili corrette di input, l'unica variabile con valore diverso rispetto al codice precedente è T.

Tavola 24

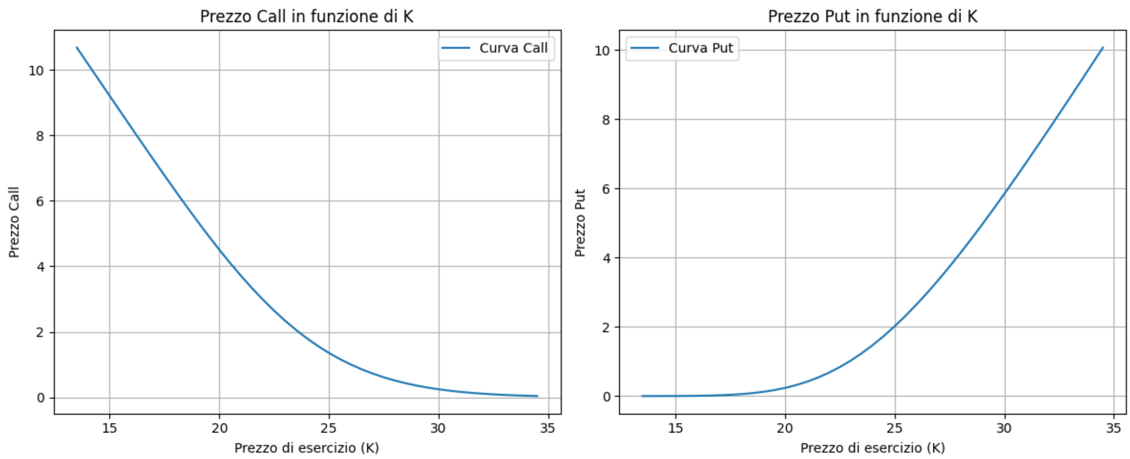


Grafico che mostra l'andamento dei prezzi teorici delle opzioni, calcolati utilizzando il modello di BSM.

Tavola 25

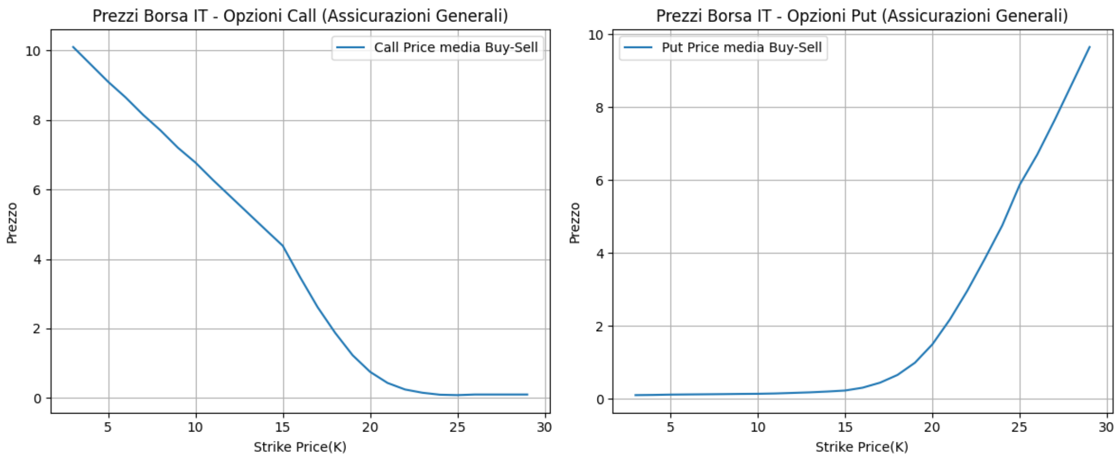
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	*31/07/2024*	**BSM Model**		**Prezzo BIT**						**Calcolo scostamento**	
2		**Call Price**	**Put Price**	**Call Price**		**Put Price**		**Call Price**	**Put Price**	**Diff Call**	**Diff Put**
3	**K**			*Buy*	*Sell*	*Buy*	*Sell*	*Media B/S*	*Media B/S*	*(BSM - Media)/Media*	*(BSM - Media)/Media*
4	**13,5**	10,68014	0,000234	10,6500	11,4500	0,0150	0,1750	11,0500	0,0950	-3,35%	-99,75%
5	**14**	10,18747	0,000535	9,7000	10,5000	0,0270	0,1850	10,1000	0,1060	0,87%	-99,50%
6	**14,5**	9,695113	0,001145	9,2000	10,0000	0,0330	0,1900	9,6000	0,1115	0,99%	-98,97%
7	**15**	9,203308	0,002306	8,7000	9,5000	0,0410	0,2000	9,1000	0,1205	1,14%	-98,09%
8	**15,5**	8,712431	0,004396	8,2500	9,0500	0,0500	0,2000	8,6500	0,1250	0,72%	-96,48%
9	**16**	8,223035	0,007966	7,7500	8,5500	0,0580	0,2000	8,1500	0,1290	0,90%	-93,82%
10	**16,5**	7,735888	0,013786	7,3000	8,1000	0,0670	0,2000	7,7000	0,1335	0,47%	-89,67%
11	**17**	7,252009	0,022874	6,8000	7,6000	0,0780	0,2000	7,2000	0,1390	0,72%	-83,54%
12	**17,5**	6,772684	0,036515	6,6000	6,9500	0,0900	0,1950	6,7750	0,1425	-0,03%	-74,38%
13	**18**	6,299464	0,056262	6,1000	6,4500	0,1030	0,2000	6,2750	0,1515	0,39%	-62,86%
14	**18,5**	5,83415	0,083914	5,6500	5,9500	0,1180	0,2150	5,8000	0,1665	0,59%	-49,60%
15	**19**	5,37874	0,121471	5,1500	5,5000	0,1350	0,2300	5,3250	0,1825	1,01%	-33,44%
16	**19,5**	4,93537	0,171067	4,7000	5,0000	0,1550	0,2550	4,8500	0,2050	1,76%	-16,55%
17	**20**	4,506229	0,234893	4,2300	4,5300	0,1800	0,2850	4,3800	0,2325	2,88%	1,03%
18	**21**	3,69912	0,413717	3,3200	3,6200	0,2500	0,3700	3,4700	0,3100	6,60%	33,46%
19	**22**	2,972615	0,673146	2,4700	2,7500	0,3850	0,5100	2,6100	0,4475	13,89%	50,42%
20	**23**	2,33747	1,023934	1,7800	1,9700	0,6050	0,7150	1,8750	0,6600	24,67%	55,14%
21	**24**	1,798559	1,470956	1,1800	1,2800	0,9400	1,0500	1,2300	0,9950	46,22%	47,83%
22	**25**	1,354687	2,013017	0,7050	0,8000	1,4200	1,5800	0,7525	1,5000	80,02%	34,20%
23	**26**	0,999494	2,643757	0,3700	0,4950	2,0800	2,2800	0,4325	2,1800	131,10%	21,27%
24	**27**	0,722986	3,353183	0,1700	0,3200	2,8500	3,0900	0,2450	2,9700	195,10%	12,90%
25	**28**	0,513254	4,129384	0,0810	0,2200	3,7200	3,9700	0,1505	3,8450	241,03%	7,40%
26	**29**	0,357987	4,96005	0,0280	0,1600	4,6300	4,8900	0,0940	4,7600	280,84%	4,20%
27	**30**	0,245601	5,833597	0,0041	0,1600	5,5500	6,2000	0,0821	5,8750	199,33%	-0,70%
28	**31**	0,165928	6,739857	0,0000	0,2000	6,2000	7,2000	0,1000	6,7000	65,93%	0,59%
29	**32**	0,110516	7,670379	0,0000	0,2000	7,1500	8,1500	0,1000	7,6500	10,52%	0,27%
30	**33**	0,072648	8,618444	0,0000	0,2000	8,1500	9,1500	0,1000	8,6500	-27,35%	-0,36%
31	**34**	0,047181	9,57891	0,0000	0,2000	9,1500	10,1500	0,1000	9,6500	-52,82%	-0,74%
32									**Mean scos**	43,72%	-26,06%

Confronto dei prezzi calcolati e reali in Borsa Italiana e calcolo dello scostamento dal prezzo teorico al prezzo reale.

Anche in questo caso si nota subito come i prezzi ottenuti (Teorici) e reali siano molto simili per le call In The Money (Esercitate) e per le Put In The Money (Esercitate).

Per il confronto viene fatta una media tra i prezzi delle Call in posizione Buy e Sell in modo da mediare lo spread, la stessa operazione viene effettuata per quanto riguarda i prezzi delle Put.

Tavola 26



I due grafici rappresentano i prezzi call e put contrattati in Borsa Italiana. Come si può vedere in corrispondenza dei valori dello strike price che rendono Out of The Money le opzioni, i prezzi reali, a differenza di quelli teorici, tendono a zero ma senza raggiungerlo. Questo è dovuto agli spread esercitati sui compratori e venditori.

Si nota anche nelle opzioni call come la curva aumenti di pendenza in corrispondenza dell'intervallo di K compreso tra 15 e 25. Nel secondo grafico, quello corrispondente alle opzioni put, si notano fenomeni simili ma con differenziali minori tra pendenze, risulta di forma simile a quello teorico.

Calcolo prezzi opzioni scadenza settembre 2024

```
if __name__ == '__main__':
    K = 10
    r = 0.0425
    T = 1/12
    vol = 0.229
    S = 3.75
```

Il codice viene implementato col valore delle variabili corrette di input, i prezzi e i dati della volatilità sono di fonte: MilanoFinanza e BIT.

Tavola 27

Pz. medio sem.	2,6194
Min 52 Sett.	2,344
Max 52 sett.	3,7975
Var % iniz. anno	42,05
Volatilità %	22,9

Tavola 28

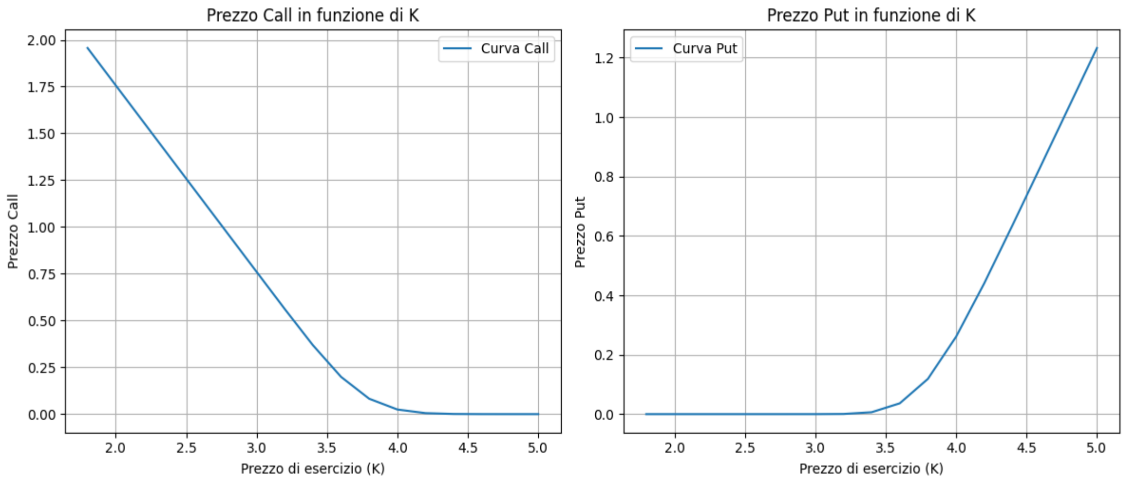


Grafico che mostra l'andamento dei prezzi teorici delle opzioni, calcolati utilizzando il modello di BSM.

Tavola 29

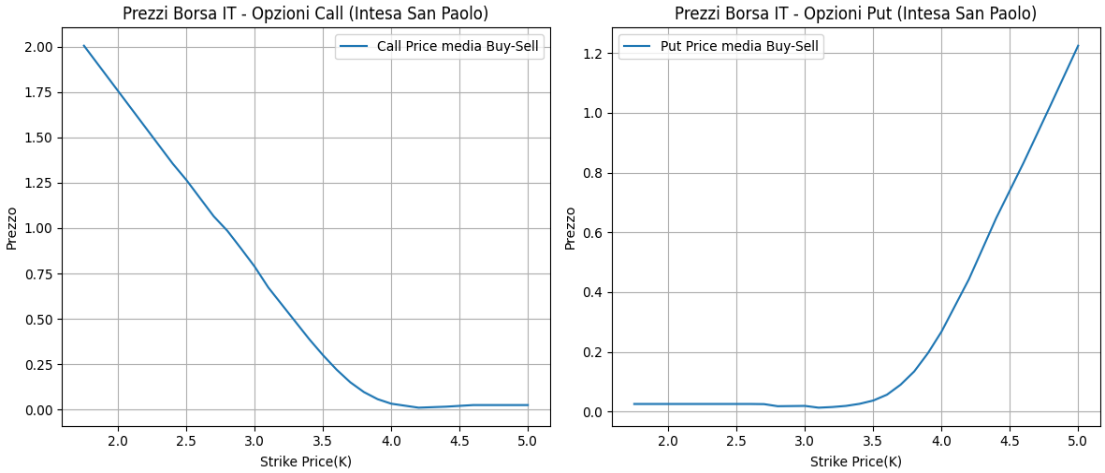
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	*31/07/2024*	**BSM Model**		**Prezzo BIT**						**Calcolo scostamento**	
2		**Call Price**	**Put Price**	**Call Price**		**Put Price**		**Call Price**	**Put Price**	**Diff Call**	**Diff Put**
3	**K**			*Buy*	*Sell*	*Buy*	*Sell*	*Media B/S*	*Media B/S*	*(BSM - Media)/Media*	*(BSM - Media)/Media*
4	**1,7**	2,05601	1,9E-35	1,9200	2,1900	0,0000	0,0500	2,0550	0,0250	0,05%	-100,00%
5	**1,75**	2,00619	3,6E-33	1,8700	2,1400	0,0000	0,0500	2,0050	0,0250	0,06%	-100,00%
6	**1,8**	1,95636	5E-31	1,8200	2,0900	0,0000	0,0500	1,9550	0,0250	0,07%	-100,00%
7	**1,85**	1,90654	5,1E-29	1,7700	2,0400	0,0000	0,0500	1,9050	0,0250	0,08%	-100,00%
8	**1,9**	1,85672	3,9E-27	1,7200	1,9900	0,0000	0,0500	1,8550	0,0250	0,09%	-100,00%
9	**1,95**	1,80689	2,3E-25	1,6700	1,9400	0,0000	0,0500	1,8050	0,0250	0,10%	-100,00%
10	**2**	1,75707	1,1E-23	1,6200	1,8900	0,0000	0,0500	1,7550	0,0250	0,12%	-100,00%
11	**2,1**	1,65742	1,1E-20	1,5200	1,7900	0,0000	0,0500	1,6550	0,0250	0,15%	-100,00%
12	**2,2**	1,55778	5,2E-18	1,4200	1,6900	0,0000	0,0500	1,5550	0,0250	0,18%	-100,00%
13	**2,3**	1,45813	1,2E-15	1,3200	1,5900	0,0000	0,0500	1,4550	0,0250	0,22%	-100,00%
14	**2,4**	1,35848	1,4E-13	1,2200	1,4900	0,0000	0,0500	1,3550	0,0250	0,26%	-100,00%
15	**2,5**	1,25884	9,5E-12	1,1300	1,4000	0,0000	0,0500	1,2650	0,0250	-0,49%	-100,00%
16	**2,6**	1,15919	3,9E-10	1,0300	1,3000	0,0000	0,0500	1,1650	0,0250	-0,50%	-100,00%
17	**2,7**	1,05955	9,9E-09	0,9300	1,2000	0,0000	0,0490	1,0650	0,0245	-0,51%	-100,00%
18	**2,8**	0,9599	1,7E-07	0,8900	1,0800	0,0010	0,0340	0,9850	0,0175	-2,55%	-100,00%
19	**2,9**	0,86025	2E-06	0,7950	0,9800	0,0010	0,0350	0,8875	0,0180	-3,07%	-99,99%
20	**3**	0,76062	1,7E-05	0,7050	0,8700	0,0010	0,0360	0,7875	0,0185	-3,41%	-99,91%
21	**3,1**	0,66107	0,00011	0,6500	0,6950	0,0011	0,0240	0,6725	0,0126	-1,70%	-99,13%
22	**3,2**	0,56184	0,00053	0,5550	0,6000	0,0025	0,0270	0,5775	0,0148	-2,71%	-96,41%
23	**3,3**	0,4637	0,00204	0,4600	0,5050	0,0050	0,0320	0,4825	0,0185	-3,90%	-88,98%
24	**3,4**	0,36838	0,00636	0,3650	0,4100	0,0120	0,0390	0,3875	0,0255	-4,93%	-75,06%
25	**3,5**	0,27886	0,01649	0,2800	0,3200	0,0230	0,0500	0,3000	0,0365	-7,05%	-54,83%
26	**3,6**	0,19909	0,03636	0,2050	0,2350	0,0430	0,0690	0,2200	0,0560	-9,51%	-35,07%
27	**3,7**	0,1328	0,06972	0,1360	0,1650	0,0800	0,0990	0,1505	0,0895	-11,76%	-22,10%
28	**3,8**	0,08215	0,11871	0,0840	0,1090	0,1230	0,1450	0,0965	0,1340	-14,87%	-11,41%
29	**3,9**	0,04688	0,18309	0,0450	0,0700	0,1800	0,2100	0,0575	0,1950	-18,47%	-6,11%
30	**4**	0,02461	0,26047	0,0190	0,0460	0,2500	0,2850	0,0325	0,2675	-24,28%	-2,63%
31	**4,2**	0,00526	0,44042	0,0001	0,0210	0,4200	0,4650	0,0106	0,4425	-50,10%	-0,47%
32	**4,4**	0,00081	0,63526	0,0001	0,0320	0,5850	0,7100	0,0161	0,6475	-94,95%	-1,89%
33	**4,6**	9,2E-05	0,83383	0,0000	0,0500	0,7250	0,9400	0,0250	0,8325	-99,63%	0,16%
34	**4,8**	7,9E-06	1,03304	0,0000	0,0500	0,8950	1,1600	0,0250	1,0275	-99,97%	0,54%
35	**5**	5,2E-07	1,23232	0,0000	0,0500	1,0900	1,3600	0,0250	1,2250	-100,00%	0,60%
36									**mean scons**	-17,28%	-68,52%

Confronto dei prezzi calcolati e reali in Borsa Italiana e calcolo dello scostamento dal prezzo teorico al prezzo reale.

Anche in questo caso si nota subito come i prezzi ottenuti (Teorici) e reali siano molto simili per le call In The Money (Esercitate) e per le Put In The Money (Esercitate).

Per il confronto viene fatta una media tra i prezzi delle Call in posizione Buy e Sell in modo da mediare lo spread, la stessa operazione viene effettuata per quanto riguarda i prezzi delle Put.

Tavola 30



I due grafici rappresentano i prezzi call e put contrattati in Borsa Italiana. Come si può vedere in corrispondenza dei valori dello strike price che rendono Out of The Money le opzioni, i prezzi reali, a differenza di quelli teorici, tendono a zero ma senza raggiungerlo. Questo è dovuto agli spread esercitati sui compratori e venditori.

Calcolo prezzi opzioni scadenza dicembre 2024

```
if __name__ == '__main__':
    K = 10
    r = 0.0425
    T = 4/12
    vol = 0.229
    S = 3.75
```

Il codice viene implementato col valore delle variabili corrette di input, i prezzi e i dati della volatilità sono di fonte: MilanoFinanza e BIT.

Tavola 31

Pz. medio sem.	2,6194
Min 52 Sett.	2,344
Max 52 sett.	3,7975
Var % iniz. anno	42,05
Volatilità %	22,9

Tavola 32

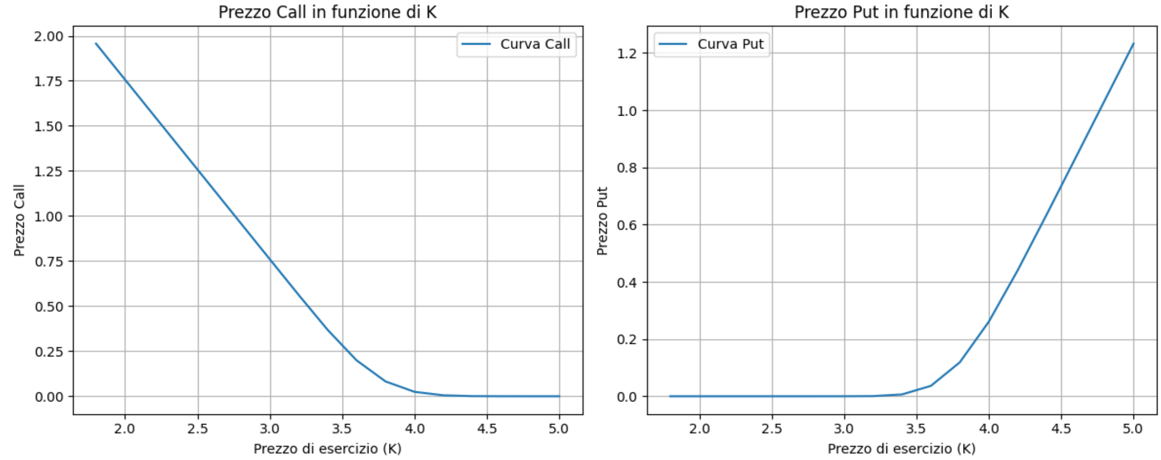


Grafico che mostra l'andamento dei prezzi teorici delle opzioni, calcolati utilizzando il modello di Black-Scholes-Merton.

Tavola 33

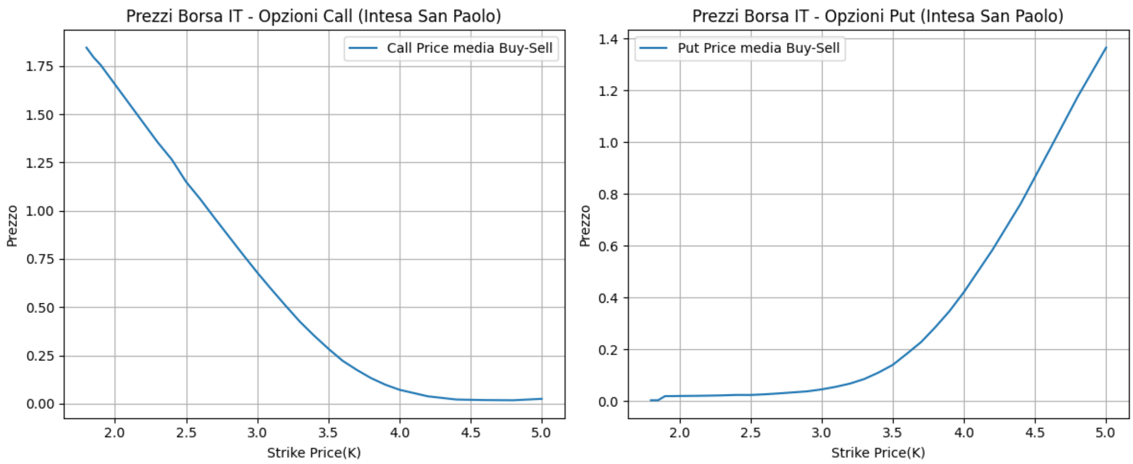
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	*31/07/2024*	**BSM Model**		**Prezzo BIT**						**Calcolo scostamento**	
2		**Call Price**	**Put Price**	**Call Price**		**Put Price**		**Call Price**	**Put Price**	**Diff Call**	**Diff Put**
3	**K**			*Buy*	*Sell*	*Buy*	*Sell*	*Media B/S*	*Media B/S*	*(BSM - Media)/Media*	*(BSM - Media)/Media*
4	**1,7**	2,07391	2,9E-11	1,8400	2,0500	0,0000	0,0050	1,9450	0,0025	6,63%	-100,00%
5	**1,8**	1,97532	4,3E-10	1,7400	1,9500	0,0000	0,0050	1,8450	0,0025	7,06%	-100,00%
6	**1,85**	1,92602	1,5E-09	1,6900	1,9000	0,0000	0,0050	1,7950	0,0025	7,30%	-100,00%
7	**1,9**	1,87673	4,8E-09	1,6500	1,8600	0,0001	0,0370	1,7550	0,0186	6,94%	-100,00%
8	**1,95**	1,82743	1,4E-08	1,6000	1,8100	0,0001	0,0370	1,7050	0,0186	7,18%	-100,00%
9	**2**	1,77813	4E-08	1,5500	1,7600	0,0001	0,0380	1,6550	0,0191	7,44%	-100,00%
10	**2,1**	1,67954	2,6E-07	1,4500	1,6600	0,0001	0,0390	1,5550	0,0196	8,01%	-100,00%
11	**2,2**	1,58095	1,4E-06	1,3500	1,5600	0,0006	0,0400	1,4550	0,0203	8,66%	-99,99%
12	**2,3**	1,48236	6,4E-06	1,2500	1,4600	0,0018	0,0410	1,3550	0,0214	9,40%	-99,97%
13	**2,4**	1,38378	2,5E-05	1,1600	1,3700	0,0033	0,0430	1,2650	0,0232	9,39%	-99,89%
14	**2,5**	1,28525	8,2E-05	1,1200	1,1800	0,0060	0,0400	1,1500	0,0230	11,76%	-99,64%
15	**2,6**	1,18681	0,00024	1,0300	1,0900	0,0080	0,0430	1,0600	0,0255	11,96%	-99,06%
16	**2,7**	1,08861	0,00063	0,9350	0,9900	0,0110	0,0470	0,9625	0,0290	13,10%	-97,84%
17	**2,8**	0,99087	0,00148	0,8400	0,8950	0,0150	0,0510	0,8675	0,0330	14,22%	-95,51%
18	**2,9**	0,89399	0,00319	0,7450	0,8000	0,0180	0,0560	0,7725	0,0370	15,73%	-91,37%
19	**3**	0,79856	0,00636	0,6500	0,7100	0,0260	0,0630	0,6800	0,0445	17,43%	-85,72%
20	**3,1**	0,70537	0,01176	0,5650	0,6200	0,0360	0,0730	0,5925	0,0545	19,05%	-78,42%
21	**3,2**	0,61539	0,02038	0,4800	0,5350	0,0490	0,0850	0,5075	0,0670	21,26%	-69,59%
22	**3,3**	0,52972	0,0333	0,4000	0,4500	0,0680	0,1010	0,4250	0,0845	24,64%	-60,59%
23	**3,4**	0,44947	0,05165	0,3300	0,3750	0,0930	0,1260	0,3525	0,1095	27,51%	-52,83%
24	**3,5**	0,37565	0,07642	0,2650	0,3050	0,1230	0,1550	0,2850	0,1390	31,81%	-45,02%
25	**3,6**	0,30906	0,10842	0,2050	0,2400	0,1700	0,1950	0,2225	0,1825	38,90%	-40,59%
26	**3,7**	0,25021	0,14816	0,1600	0,1900	0,2100	0,2450	0,1750	0,2275	42,98%	-34,87%
27	**3,8**	0,19929	0,19584	0,1160	0,1490	0,2650	0,3050	0,1325	0,2850	50,41%	-31,28%
28	**3,9**	0,15617	0,25131	0,0810	0,1160	0,3250	0,3700	0,0985	0,3475	58,54%	-27,68%
29	**4**	0,12041	0,31414	0,0550	0,0890	0,3950	0,4450	0,0720	0,4200	67,23%	-25,21%
30	**4,2**	0,06825	0,45917	0,0210	0,0550	0,5550	0,6100	0,0380	0,5825	79,61%	-21,17%
31	**4,4**	0,0364	0,62451	0,0038	0,0390	0,7350	0,7900	0,0214	0,7625	70,12%	-18,10%
32	**4,6**	0,01835	0,80364	0,0001	0,0370	0,8650	1,0700	0,0186	0,9675	-1,10%	-16,94%
33	**4,8**	0,00877	0,99125	0,0001	0,0350	1,0700	1,2800	0,0176	1,1750	-50,01%	-15,64%
34	**5**	0,004	1,18367	0,0000	0,0500	1,2600	1,4700	0,0250	1,3650	-84,00%	-13,28%
35									**mean scons**	18,04%	-68,39%

Confronto dei prezzi calcolati e reali in Borsa Italiana e calcolo dello scostamento dal prezzo teorico al prezzo reale.

Anche in questo caso si nota subito come i prezzi ottenuti (Teorici) e reali siano molto simili per le call In The Money (Esercitate) e per le Put In The Money (Esercitate).

Per il confronto viene fatta una media tra i prezzi delle Call in posizione Buy e Sell in modo da mediare lo spread, la stessa operazione viene effettuata per quanto riguarda i prezzi delle Put.

Tavola 34



I due grafici rappresentano i prezzi call e put contrattati in Borsa Italiana. Come si può vedere in corrispondenza dei valori dello strike price che rendono Out of The Money le opzioni, i prezzi reali, a differenza di quelli teorici, tendono a zero ma senza raggiungerlo. Questo è dovuto agli spread esercitati sui compratori e venditori.

<u>*Calcolo prezzi opzioni scadenza Settembre 2024*</u>

```python
if __name__ == '__main__':
    K = 10
    r = 0.0425
    T = 1/12
    vol = 0.211
    S = 6.59
```

Il codice viene implementato col valore delle variabili corrette di input, i prezzi e i dati della volatilità sono di fonte: MilanoFinanza e BIT.

Tavola 35

Pz. medio sem.	6,2035
Min 52 Sett.	5,517
Max 52 sett.	7,118
Var % iniz. anno	5,77
Volatilità %	21,1

Tavola 36

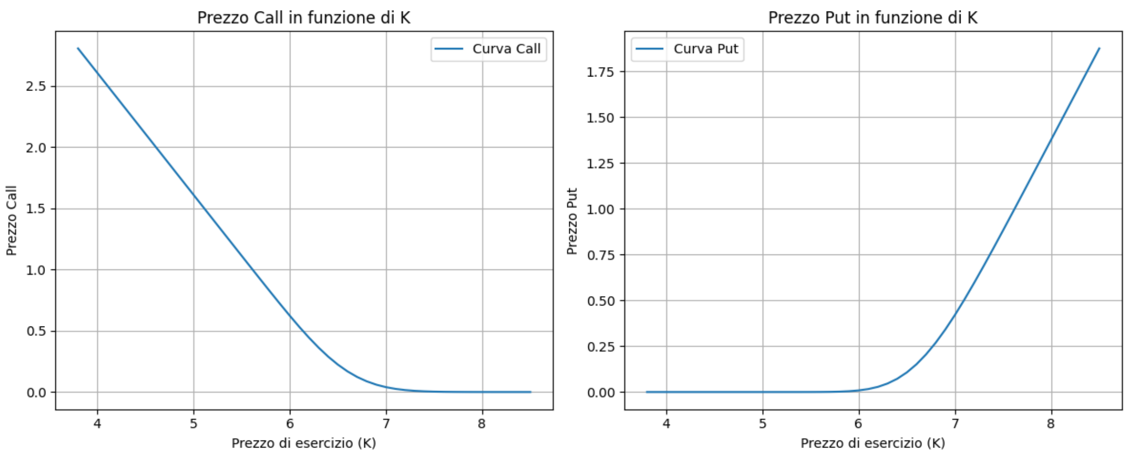


Grafico che mostra l'andamento dei prezzi teorici delle opzioni, calcolati utilizzando il modello di Black-Scholes-Merton.

Tavola 37

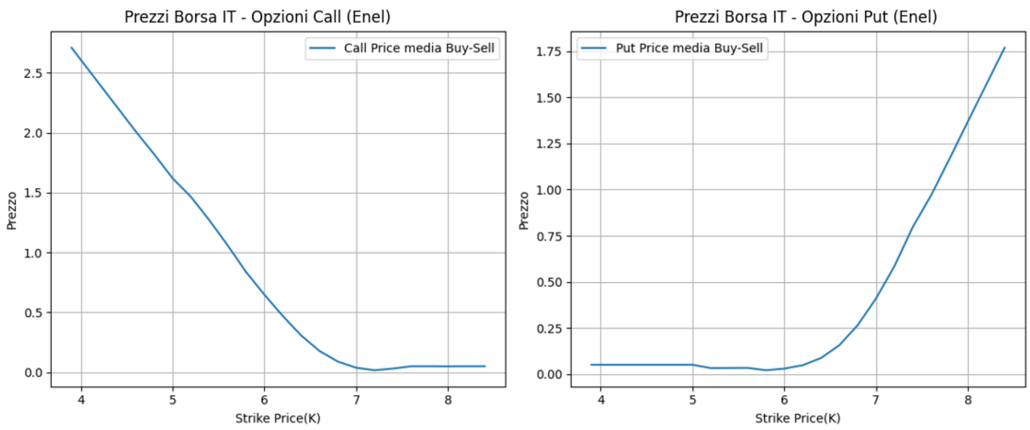
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	*31/07/2024*	**BSM Model**		**Prezzo BIT**						**Calcolo scostamento**	
2		**Call Price**	**Put Price**	**Call Price**		**Put Price**		**Call Price**	**Put Price**	**Diff Call**	**Diff Put**
3	**K**			*Buy*	*Sell*	*Buy*	*Sell*	*Media B/S*	*Media B/S*	*BSM - Media)/Media*	*(BSM - Media)/Media*
4	**3,8**	2,80743	1,4E-21	2,6100	3,0100	0,0000	0,1000	2,8100	0,0500	-0,09%	-100,00%
5	**3,9**	2,70779	6,8E-20	2,5100	2,9100	0,0000	0,1000	2,7100	0,0500	-0,08%	-100,00%
6	**4**	2,60814	2,6E-18	2,4100	2,8100	0,0000	0,1000	2,6100	0,0500	-0,07%	-100,00%
7	**4,2**	2,40885	1,7E-15	2,2100	2,6100	0,0000	0,1000	2,4100	0,0500	-0,05%	-100,00%
8	**4,4**	2,20956	4,9E-13	2,0100	2,4100	0,0000	0,1000	2,2100	0,0500	-0,02%	-100,00%
9	**4,6**	2,01026	6,3E-11	1,8100	2,2100	0,0000	0,1000	2,0100	0,0500	0,01%	-100,00%
10	**4,8**	1,81097	4,1E-09	1,6200	2,0200	0,0000	0,1000	1,8200	0,0500	-0,50%	-100,00%
11	**5**	1,61168	1,5E-07	1,4200	1,8200	0,0010	0,0990	1,6200	0,0500	-0,51%	-100,00%
12	**5,2**	1,41239	3,1E-06	1,3100	1,6200	0,0010	0,0630	1,4650	0,0320	-3,59%	-99,99%
13	**5,4**	1,21313	4E-05	1,1100	1,4300	0,0010	0,0640	1,2700	0,0325	-4,48%	-99,88%
14	**5,6**	1,01414	0,00034	0,9200	1,2000	0,0010	0,0650	1,0600	0,0330	-4,33%	-98,96%
15	**5,8**	0,81654	0,00203	0,8050	0,8700	0,0025	0,0380	0,8375	0,0203	-2,50%	-89,97%
16	**6**	0,62393	0,00872	0,6150	0,6800	0,0100	0,0480	0,6475	0,0290	-3,64%	-69,93%
17	**6,2**	0,44423	0,02831	0,4400	0,5000	0,0280	0,0670	0,4700	0,0475	-5,48%	-40,40%
18	**6,4**	0,289	0,07237	0,2800	0,3350	0,0680	0,1050	0,3075	0,0865	-6,02%	-16,33%
19	**6,6**	0,16881	0,15148	0,1550	0,2000	0,1370	0,1750	0,1775	0,1560	-4,89%	-2,90%
20	**6,8**	0,08739	0,26935	0,0710	0,1070	0,2400	0,2900	0,0890	0,2650	-1,81%	1,64%
21	**7**	0,03977	0,42102	0,0180	0,0570	0,3800	0,4400	0,0375	0,4100	6,05%	2,69%
22	**7,2**	0,01586	0,59641	0,0011	0,0320	0,5550	0,6150	0,0166	0,5850	-4,16%	1,95%
23	**7,4**	0,00555	0,78538	0,0010	0,0600	0,6900	0,9050	0,0305	0,7975	-81,82%	-1,52%
24	**7,6**	0,0017	0,98084	0,0010	0,0990	0,8100	1,1300	0,0500	0,9700	-96,59%	1,12%
25	**7,8**	0,00046	1,17889	0,0010	0,0990	0,9750	1,3600	0,0500	1,1675	-99,07%	0,98%
26	**8**	0,00011	1,37783	0,0001	0,0980	1,1700	1,5700	0,0491	1,3700	-99,77%	0,57%
27	**8,2**	2,4E-05	1,57703	0,0000	0,1000	1,3700	1,7700	0,0500	1,5700	-99,95%	0,45%
28	**8,4**	4,7E-06	1,77631	0,0000	0,1000	1,5700	1,9700	0,0500	1,7700	-99,99%	0,36%
29									**mean scons**	-24,53%	-52,41%

Confronto dei prezzi calcolati e reali in Borsa Italiana e calcolo dello scostamento dal prezzo teorico al prezzo reale.

Anche in questo caso si nota subito come i prezzi ottenuti (Teorici) e reali siano molto simili per le call In The Money (Esercitate) e per le Put In The Money (Esercitate).

Per il confronto viene fatta una media tra i prezzi delle Call in posizione Buy e Sell in modo da mediare lo spread, la stessa operazione viene effettuata per quanto riguarda i prezzi delle Put.

Tavola 38



I due grafici rappresentano i prezzi call e put contrattati in Borsa Italiana. Come si può vedere in corrispondenza dei valori dello strike price che rendono Out of The Money le opzioni, i prezzi reali, a differenza di quelli teorici, tendono a zero ma senza raggiungerlo. Questo è dovuto agli spread esercitati sui compratori e venditori.

Calcolo prezzi opzioni scadenza Dicembre 2024

```
if __name__ == '__main__':
    K = 10
    r = 0.0425
    T = 4/12
    vol = 0.211
    S = 6.594
```

Il codice viene implementato col valore delle variabili corrette di input, i prezzi e i dati della volatilità sono di fonte: MilanoFinanza e BIT.

Tavola 39

Pz. medio sem.	6,2035
Min 52 Sett.	5,517
Max 52 sett.	7,118
Var % iniz. anno	5,77
Volatilità %	21,1

Tavola 40

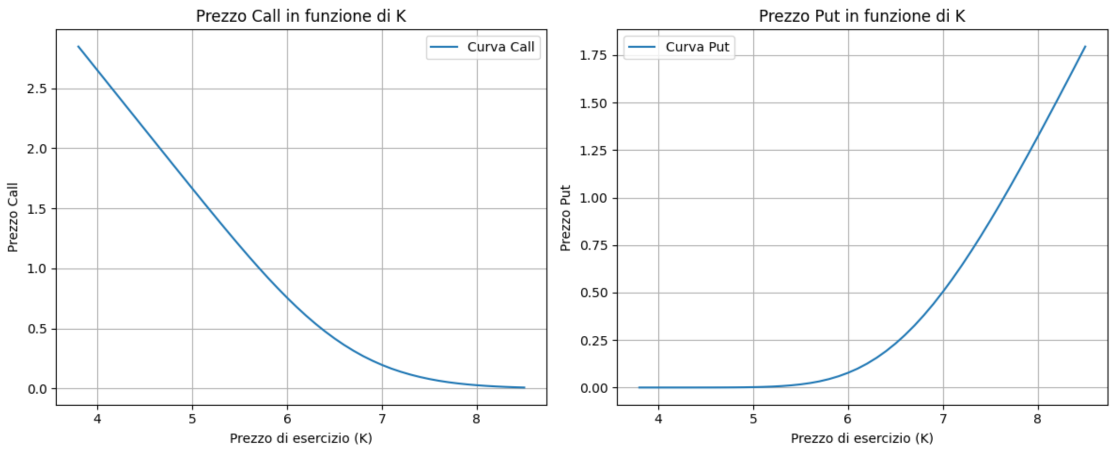


Grafico che mostra l'andamento dei prezzi teorici delle opzioni, calcolati utilizzando il modello di Black-Scholes-Merton.

Tavola 41

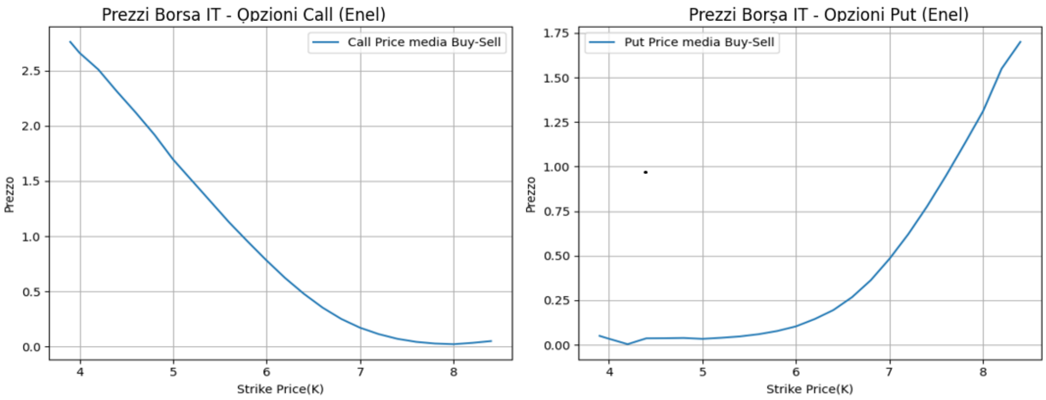
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	***31/07/2024***	**BSM Model**		**Prezzo BIT**						**Calcolo scostamento**	
2		**Call Price**	**Put Price**	**Call Price**		**Put Price**		**Call Price**	**Put Price**	**Diff Call**	**Diff Put**
3	**K**			*Buy*	*Sell*	*Buy*	*Sell*	*Media B/S*	*Media B/S*	*(BSM - Media)/Media*	*(BSM - Media)/Media*
4	**3,8**	2,84745	2,09E-07	2,6600	3,0600	0,0000	0,1000	2,8600	0,0500	-0,44%	-100,00%
5	**3,9**	2,74886	6,05E-07	2,5600	2,9600	0,0000	0,1000	2,7600	0,0500	-0,40%	-100,00%
6	**4**	2,65027	1,64E-06	2,4600	2,8600	0,0001	0,0680	2,6600	0,0341	-0,37%	-100,00%
7	**4,2**	2,45309	1E-05	2,3500	2,6700	0,0001	0,0070	2,5100	0,0036	-2,27%	-99,72%
8	**4,4**	2,25594	4,9E-05	2,1500	2,4700	0,0010	0,0720	2,3100	0,0365	-2,34%	-99,87%
9	**4,6**	2,0589	0,0002	1,9600	2,2800	0,0010	0,0730	2,1200	0,0370	-2,88%	-99,47%
10	**4,8**	1,86219	0,00067	1,7600	2,0800	0,0010	0,0760	1,9200	0,0385	-3,01%	-98,26%
11	**5**	1,66629	0,00196	1,6500	1,7400	0,0060	0,0610	1,6950	0,0335	-1,69%	-94,16%
12	**5,2**	1,47217	0,00502	1,4600	1,5500	0,0110	0,0680	1,5050	0,0395	-2,18%	-87,28%
13	**5,4**	1,28144	0,01148	1,2700	1,3600	0,0170	0,0770	1,3150	0,0470	-2,55%	-75,57%
14	**5,6**	1,09646	0,02368	1,0800	1,1700	0,0290	0,0900	1,1250	0,0595	-2,54%	-60,20%
15	**5,8**	0,92019	0,04461	0,9100	0,9900	0,0470	0,1080	0,9500	0,0775	-3,14%	-42,44%
16	**6**	0,75596	0,07756	0,7400	0,8200	0,0730	0,1340	0,7800	0,1035	-3,08%	-25,06%
17	**6,2**	0,60693	0,12572	0,5850	0,6550	0,1140	0,1750	0,6200	0,1445	-2,11%	-13,00%
18	**6,4**	0,4756	0,19157	0,4450	0,5100	0,1700	0,2200	0,4775	0,1950	-0,40%	-1,76%
19	**6,6**	0,36346	0,27662	0,3250	0,3800	0,2400	0,2950	0,3525	0,2675	3,11%	3,41%
20	**6,8**	0,27076	0,38111	0,2250	0,2750	0,3350	0,3900	0,2500	0,3625	8,30%	5,13%
21	**7**	0,19662	0,50415	0,1470	0,1950	0,4500	0,5150	0,1710	0,4825	14,98%	4,49%
22	**7,2**	0,13921	0,64392	0,0850	0,1410	0,5850	0,6550	0,1130	0,6200	23,19%	3,86%
23	**7,4**	0,09614	0,79805	0,0400	0,1010	0,7350	0,8150	0,0705	0,7750	36,37%	2,97%
24	**7,6**	0,06482	0,96391	0,0120	0,0740	0,9050	0,9850	0,0430	0,9450	50,75%	2,00%
25	**7,8**	0,0427	1,13898	0,0011	0,0550	1,0800	1,1700	0,0281	1,1250	52,22%	1,24%
26	**8**	0,0275	1,32097	0,0011	0,0430	1,2700	1,3500	0,0221	1,3100	24,74%	0,84%
27	**8,2**	0,01734	1,508	0,0001	0,0680	1,3900	1,7100	0,0341	1,5500	-49,07%	-2,71%
28	**8,4**	0,01072	1,69856	0,0000	0,1000	1,5000	1,9000	0,0500	1,7000	-78,57%	-0,08%
29									**mean scons**	2,27%	-43,03%

Confronto dei prezzi calcolati e reali in Borsa Italiana e calcolo dello scostamento dal prezzo teorico al prezzo reale.

Anche in questo caso si nota subito come i prezzi ottenuti (Teorici) e reali siano molto simili per le call In The Money (Esercitate) e per le Put In The Money (Esercitate).

Per il confronto viene fatta una media tra i prezzi delle Call in posizione Buy e Sell in modo da mediare lo spread, la stessa operazione viene effettuata per quanto riguarda i prezzi delle Put.

Tavola 42



I due grafici rappresentano i prezzi call e put contrattati in Borsa Italiana. Come si può vedere in corrispondenza dei valori dello strike price che rendono Out of The Money le opzioni, i prezzi reali, a differenza di quelli teorici, tendono a zero ma senza raggiungerlo. Questo è dovuto agli spread esercitati sui compratori e venditori.

CAPITOLO 5

CONCLUSIONI

Questo ultimo capitolo verterà sulla spiegazione dei risultati ottenuti dal metodo BSM, valutandone i limiti e citando brevemente alcuni possibili modelli alternativi più recenti ed evoluti.

Come qualsiasi modello, il modello di Black-Scholes ha alcune limitazioni, a volte significative, che ne riducono la capacità previsionale in alcune circostanze. Innanzitutto, le assunzioni alla base del modello sono molto convenienti da un punto di vista analitico ma spesso non corrispondono alla realtà dei mercati finanziari. L'ipotesi di log-normalità dei rendimenti, ad esempio, non è sempre osservata in pratica, specialmente durante periodi di elevata volatilità o eventi di coda. L'ipotesi di tasso d'interesse costante e volatilità deterministica, su cui si fonda il modello di Black-Scholes-Merton, risulta in contraddizione con la natura stocastica dei mercati finanziari. Dal punto di vista matematico, la risoluzione analitica dell'equazione differenziale associata è limitata a casi altamente specializzati. Pertanto, qualsiasi estensione del modello per includere dinamiche di mercato più realistiche richiede l'adozione di metodi numerici. D'altro lato, il modello può sovrastimare e sottostimare il prezzo di un'opzione e essere molto sensibile alle piccole variazioni sui prezzi di input. Nel corso di molti anni sono state proposte numerose versioni modificate ed estensive del modello per mitigare questa limitazione. I modelli di volatilità stocastica, i modelli di salto e i modelli con effetto leva ed effetti di coda ne sono l'esempio. Tuttavia, nessuno di essi risolve completamente i problemi del modello originale.

In questa sezione esploreremo in dettaglio le principali critiche rivolte al modello di Black-Scholes, analizzandone le implicazioni sia teoriche che pratiche. Discuteremo inoltre le principali alternative proposte in letteratura e valuteremo i loro pregi e difetti. Si mira a sviluppare una capacità critica di valutare il modello di Black-Scholes alla luce delle sue ipotesi semplificative e di identificare i modelli alternativi più adatti a catturare la complessità dei mercati finanziari e a valutare correttamente strumenti derivati.

5.1 Limiti del modello BSM

Il modello di Black-Scholes, pur essendo uno strumento fondamentale nella valutazione delle opzioni, poggia su una serie di assunzioni che, anche se semplificano notevolmente l'analisi, possono allontanarsi dalla realtà dei mercati finanziari. Vediamo nel dettaglio quali sono queste assunzioni e quali sono le loro implicazioni in caso di violazione.

1. Mercato Perfetto ed Efficiente

- **Assunzione:** Il mercato è privo di arbitraggio, le informazioni sono diffuse istantaneamente e i costi di transazione sono nulli.
- **Implicazioni di una violazione:**
  - **Arbitraggio:** Se esistono opportunità di arbitraggio il modello non è più valido, in quanto i prezzi delle opzioni non rifletterebbero più il loro valore intrinseco.
  - **Informazioni asimmetriche:** In presenza di informazioni asimmetriche, alcuni operatori potrebbero avere un vantaggio rispetto ad altri, distorcendo così i prezzi di mercato.
  - **Costi di transazione:** I costi di transazione possono influenzare significativamente la strategia di copertura di un'opzione e, di conseguenza, il suo prezzo.

2. Tasso di Interesse Costante

- **Assunzione:** Il tasso di interesse privo di rischio è costante nel tempo.
- **Implicazioni di una violazione:**
  - **Variazioni dei tassi:** Le variazioni dei tassi di interesse possono influenzare significativamente il valore delle opzioni, in particolare quelle a lunga scadenza.
  - **Curva dei rendimenti:** La curva dei rendimenti non è piatta, ma presenta generalmente una pendenza positiva. Questa caratteristica può introdurre errori nella valutazione delle opzioni.

3. Volatilità Costante

- **Assunzione:** La volatilità del sottostante è costante nel tempo.
- **Implicazioni di una violazione:**
    - **Volatilità stocastica:** La volatilità è in realtà una variabile stocastica che varia nel tempo. La sottovalutazione o la sovrastima della volatilità può portare a significativi errori di valutazione.
    - **Volatilità a sorriso:** La volatilità implicita, ricavata dai prezzi di mercato delle opzioni, non è costante al variare del prezzo di esercizio, ma presenta una forma a sorriso.

4. Log-normalità dei Rendimenti

- **Assunzione:** I rendimenti del sottostante seguono una distribuzione log-normale.
- **Implicazioni di una violazione:**
    - **Code grasse:** Le distribuzioni dei rendimenti reali presentano spesso code più grasse rispetto alla distribuzione log-normale, indicando una maggiore probabilità di eventi estremi.
    - **Asimmetria:** La distribuzione dei rendimenti può essere asimmetrica, con una maggiore probabilità di grandi perdite rispetto a grandi guadagni.

5. Dividendi Continui e Conosciuti

- **Assunzione:** I dividendi vengono pagati in modo continuo a un tasso noto.
- **Implicazioni di una violazione:**
    - **Dividendi discreti:** I dividendi vengono pagati a date precise e in importi discreti.
    - **Dividendi incerti:** L'ammontare dei dividendi futuri è incerto e può influenzare il prezzo del sottostante.

Conseguenze delle Violazioni

La violazione di queste assunzioni può portare a una serie di conseguenze, tra cui:

- **Sottostima o sovrastima del prezzo dell'opzione:** Il prezzo calcolato con il modello di Black-Scholes può essere significativamente diverso dal prezzo di mercato.

- **Errori nella gestione del rischio:** Una valutazione errata del prezzo dell'opzione può portare a una sottovalutazione o a una sovrastima del rischio associato a una posizione.

- **Decisioni di investimento subottimali:** Gli investitori possono prendere decisioni di investimento errate sulla base di valutazioni errate del prezzo delle opzioni.

5.2 MODELLI ALTERNATIVI

Estensioni del Modello di Black-Scholes

Le estensioni del modello di Black-Scholes cercano di rilassare alcune delle assunzioni più restrittive del modello originale, come la costanza della volatilità e la log-normalità dei rendimenti.

- **Modelli a Volatilità Stocastica:**
  - **Vantaggi:** Consentono di catturare la dinamica stocastica della volatilità, che è una caratteristica fondamentale dei mercati finanziari.
  - **Svantaggi:** Introducono una maggiore complessità nel modello e richiedono la stima di ulteriori parametri.
  - **Esempi:** Modello di Heston, modello di SABR.
- **Modelli a Salti:**
  - **Vantaggi:** Consentono di modellare eventi discreti e improvvisi, come le notizie economiche, che possono avere un impatto significativo sui prezzi dei titoli.
  - **Svantaggi:** Introducono una maggiore complessità nel modello e richiedono la stima di ulteriori parametri.
  - **Esempi:** Modello di Merton, modello di Kou.

- **Modelli a Fattori Multipli:**
  - **Vantaggi:** Consentono di considerare l'influenza di più fattori sul prezzo del sottostante, come i tassi di interesse, le curve dei rendimenti e i fattori macroeconomici.
  - **Svantaggi:** Aumentano la dimensionalità del problema e richiedono la stima di un numero maggiore di parametri.

Modelli Alternativi

Oltre alle estensioni del modello di Black-Scholes, esistono anche modelli completamente alternativi, che si basano su approcci diversi.

- **Modelli a Lattice Binomiale:**
  - **Vantaggi:** Sono relativamente semplici da implementare e consentono di valutare opzioni americane.
  - **Svantaggi:** Possono essere computazionalmente intensi per opzioni a lunga scadenza o con molti passi temporali.
- **Modelli Monte Carlo:**
  - **Vantaggi:** Sono molto flessibili e consentono di modellare una vasta gamma di processi stocastici.
  - **Svantaggi:** Possono essere computazionalmente costosi, soprattutto per opzioni a bassa probabilità di esercizio.
- **Modelli Non Parametrici:**
  - **Vantaggi:** Non fanno assunzioni sulla forma funzionale della distribuzione dei rendimenti.
  - **Svantaggi:** Richiedono grandi quantità di dati e possono essere soggetti a overfitting.

Caratteristica	Black-Scholes	Estensioni	Modelli Alternativi
Volatilità	Costante	Stocastica	Stocastica, salti
Rendimenti	Log-normali	Log-normali o altre	Qualsiasi distribuzione
Tempo	Continuo	Continuo o discreto	Continuo o discreto
Flessibilità	Bassa	Media	Alta
Complessità	Bassa	Media-alta	Alta

Scelta del Modello

La scelta del modello più appropriato dipende da diversi fattori, tra cui:

- **Caratteristiche del sottostante:** La volatilità del sottostante, la presenza di dividendi e la natura degli eventi che possono influenzarne il prezzo.
- **Tipo di opzione:** Opzioni europee, americane, asiatiche, barriere.
- **Disponibilità di dati:** La quantità e la qualità dei dati storici disponibili per la stima dei parametri del modello.
- **Scopo dell'analisi:** Valutazione, copertura, gestione del rischio.

5.3 Conclusioni e valutazioni finali

L'analisi condotta ha permesso di valutare l'applicabilità del modello di Black-Scholes alla valutazione delle opzioni, mettendo in luce sia i suoi punti di forza che le sue limitazioni intrinseche.

Punti di Forza del Modello

- **Semplicità e Efficienza:** Il modello di Black-Scholes offre una formula analitica elegante e relativamente semplice da implementare, consentendo una rapida valutazione delle opzioni.

- **Fondamento Teorico Solido:** Il modello si basa su principi finanziari solidi, come l'assenza di arbitraggio e la replicazione del portafoglio, fornendo una base teorica robusta per la valutazione delle opzioni.

- **Ampia Diffusione:** Il modello è ampiamente utilizzato nell'industria finanziaria e rappresenta un punto di riferimento per la valutazione delle opzioni.

Limitazioni e Discrepanze

Nonostante i suoi pregi, l'analisi ha evidenziato diverse discrepanze tra i prezzi teorici e quelli di mercato, in particolare per le opzioni out-of-the-money. Queste discrepanze sono attribuibili alle seguenti limitazioni del modello:

- **Assunzioni Semplificative:** Le assunzioni del modello, come la costanza della volatilità e la log-normalità dei rendimenti, sono spesso in contrasto con la realtà dei mercati finanziari.

- **Mancanza di Flessibilità:** Il modello non è in grado di catturare alcune caratteristiche importanti dei mercati, come la volatilità a sorriso, gli effetti di leva e le code grasse delle distribuzioni dei rendimenti.

- **Sensibilità ai Parametri:** I risultati del modello sono molto sensibili alle variazioni dei parametri di input, in particolare alla volatilità implicita.

- **Spread applicato dagli Intermediari:** Il modello non è costruito per inserire e modellizzare gli Spread Buy/Sell imposti non calcolandone le ripercussioni sul risultato finale.

Interpretazione dei Risultati

Il modello di Black-Scholes, nonostante le sue semplificazioni, è riuscito a fornire una stima ragionevole dei prezzi delle opzioni ITM. Questo indica che il modello è in grado di catturare il valore intrinseco delle opzioni, ovvero il valore che l'opzione avrebbe se venisse esercitata immediatamente.

Osservazioni dai Dati:

- **Opzioni In The Money:** Per le opzioni ITM (sia call che put) il modello di Black-Scholes sembra fornire una stima ragionevolmente accurata del prezzo di mercato. Lo scostamento percentuale tra il prezzo teorico e quello di mercato è generalmente contenuto, suggerendo che il modello cattura abbastanza bene il valore intrinseco di queste opzioni.

- **Opzioni Out of The Money:** Per le opzioni OTM, lo scostamento tra il prezzo teorico e quello di mercato diventa significativamente più elevato, soprattutto per le opzioni deep out-of-the-money. Questo è coerente con le limitazioni del modello, che tende a sottostimare il valore delle opzioni OTM, in particolare quando la volatilità implicita presenta una forma a sorriso e gli Spread applicati dall'intermediario risultano rilevanti in termini di percentuale sul prezzo teorico.

BIBLIOGRAFIA

FONTI ACCADEMICHE

- Bachelier, L. (1900). *Théorie de la spéculation*. (Original work in French)
- Brockwell, P. J., & Davis, R. A. (1991). *Time series: theory and methods*. Springer.
- Durrett, R. (2010). *Probability: theory and examples*. Cambridge University Press.
- Grimmett, G. R., & Stirzaker, D. R. (2001). *Probability and random processes*. Oxford University Press.
- Hamilton, J. D. (1994). *Time series analysis*. Princeton University Press.
- Hull, J. C. (2009). *Options, futures, and other derivatives*. Pearson Education.
- Karatzas, I., & Shreve, S. E. (1991). *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer.
- Liu, Q. Options Pricing with Arithmetic Brownian Motion and its Implication for Risk-Neutral Valuation.
- Øksendal, B. (2003). *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer.
- Ross, S. M. (2014). *Introduction to probability models*. Academic Press.
- Ross, S. M. (2014). *Variations on Brownian Motion* (Chapter in Introduction to Probability Models, p. 612). Academic Press.
- Shumway, R. H., & Stoffer, D. S. (2011). *Time series analysis and its applications: with R examples*. Springer.

Conferenze

- Sgarra, C. *Beyond black and scholes…* (Conference presentation, Politecnico di Milano)

Sitografia

- Bank for International Settlements (BIS). https://www.bis.org/
- Commissione Nazionale per le Società e la Borsa (Consob). https://www.consob.it/
- lavoce.info (Website of Nicola Borri, PhD). https://lavoce.info/
- Wikipedia.en Brownian motion. https://en.wikipedia.org/wiki/Brownian_motion
- Borsa Italiana (BIT). https://www.borsaitaliana.it/

Industry Publications

- CME Group. CME Clearing Plan to Address the Potential of a Negative Underlying in Certain Energy Options Contracts. (Industry publication)

Link Codice Python

https://github.com/RiccardoLessio/Pr/blob/main/Progetti/BSMMofdel.ipynb

https://github.com/RiccardoLessio/Pr/blob/main/Progetti/distlognorm.ipynb

https://github.com/RiccardoLessio/Pr/tree/main/Matplot%20grafici%20tesi

https://github.com/RiccardoLessio/Pr/blob/main/Progetti/Grafici_opzioni_BIT.ipynb

RINGRAZIAMENTI

Vorrei dedicare questi ringraziamenti a tutte le persone che hanno reso possibile il raggiungimento di questo traguardo, un punto di arrivo che racchiude in sé non solo anni di studio e dedizione, ma anche il sostegno e la vicinanza di chi ha creduto in me lungo questo percorso.

Un sentito grazie ai professori e ai relatori che merito delle loro competenze e conoscenze mi hanno guidato con professionalità e passione, spronandomi a dare sempre il meglio e a sviluppare un pensiero critico e consapevole. Il vostro insegnamento è stato per me un faro, capace di illuminare e orientare i miei passi verso una conoscenza sempre più profonda e strutturata.

Un ringraziamento speciale va a tutta la mia famiglia, ai miei genitori, mia sorella, ai nonni e agli zii, che non solo hanno sempre creduto in me, ma mi hanno sostenuto concretamente e moralmente, permettendomi di affrontare con serenità la vita universitaria. La vostra fiducia e il vostro amore sono stati il carburante che ha alimentato la mia determinazione, anche nei momenti più complessi.

Ai miei amici, che hanno riempito questi anni di momenti di leggerezza e divertimento, creando un equilibrio prezioso tra lo studio e il tempo spensierato passato insieme: la vostra presenza ha reso indimenticabili questi anni universitari, donandomi il sorriso nei momenti di fatica.

Alla mia ragazza che ha saputo supportarmi e sopportarmi. Il tuo sostegno e la tua fiducia in me sono stati, e sono, una fonte di grande forza e motivazione. Grazie per il tuo amore e per aver creduto in me, sei diventata una presenza importante e significativa nella mia vita. Sono grato di averti al mio fianco in questo momento così importante.

Infine, un ringraziamento va ai miei colleghi di studio. Confrontarmi con voi è stato uno stimolo costante per crescere e migliorare, e insieme abbiamo costruito non solo conoscenze, ma anche una rete di condivisione e supporto che ha arricchito il mio percorso formativo.

A tutti voi, il mio più profondo e sincero grazie.