Calcolo Numerico, V Esercitazione

CdL Informatica

Esercizi svolti a lezione

1) Scrivere una function che, assegnato un vettore $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, costruisca la matrice di Vandermonde

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dal prompt dei comandi, calcolare la matrice di Vandermonde V ed il suo numero di condizionamento $k(V) = \|V\|_2 \|V^{-1}\|_2$ per $x = (1,2,3,4,5)^T$, $x = (1,2,3,\ldots,8)^T$, $x = (1,2,3,\ldots,10)^T$. Che cosa si può dire del condizionamento di V all'aumentare del numero dei punti?

2) Dato un polinomio

$$P(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1},$$

scrivere una function che, presi in input un punto x_1 e i coefficienti del polinomio, calcoli il valore del polinomio in x_1. Modificare inoltre la function in modo che, dato in ingresso un vettore $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$, sia restituito il vettore $p = (P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_m))^T$. Confrontare i risultati ottenuti con i risultati forniti dalla funzione nativa `polyval`.

3) Dato $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sia $P_{n-1}(x) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1}$ il polinomio di grado al più $n-1$ interpolante gli n punti (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$ con $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$. Scrivere una function che calcola i coefficienti del polinomio interpolante P_{n-1}. In particolare, la function deve:

- prendere in ingresso il vettore delle ascisse $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ ed il vettore delle ordinate $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$;
- risolvere il sistema lineare $Va = y$, dove $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ è il vettore dei coefficienti del polinomio interpolante; il sistema viene risolto usando l'operatore backslash \;
- restituire in uscita il vettore a.

Scrivere uno script che calcola i coefficienti del polinomio interpolante i punti $(1,3)$, $(2,5)$, $(3,6)$, $(4,4)$ mediante la function sopra definita, lo valuta nel punto $z = 3.5$ e stampa a video il risultato. Lo script valuta inoltre il polinomio su una griglia di nodi equispaziati in $[1,4]$ e lo rappresenta graficamente con una linea continua, evidenziando i punti interpolati con una 'x' (vedi l'help dei comandi `plot` e `hold on`). Mostrare nuovamente il grafico usando l'interfaccia `Basic Fitting`.

4) Si consideri la funzione di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Per $n = 5, 8, 11$, creare il vettore $x = (x_1, \ldots, x_n)$ contenente n punti equidistanti in $[-1, 1]$ e il vettore $y = (f(x_1), \ldots, f(x_n))$; aprire una finestra grafica e visualizzare i punti $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, \ldots, n$, il grafico del polinomio interpolante e quello della funzione f. Che cosa si può dire dell'accuratezza del polinomio all'aumentare di n?
Ripetere l'esercizio utilizzando come nodi di interpolazione i punti $x_1, \ldots, x_n$ definiti come

$$x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n} \cdot \pi\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Che cosa si osserva all'aumentare di n in questo caso?

5) Dati i punti (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$ con $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$, il polinomio interpolante nella forma di Lagrange si scrive come

$$P_{n-1}(v) = \sum_{j=1}^{n} y_j l_j(v),$$

dove i polinomi fondamentali di Lagrange $l_j(v)$ sono definiti come

$$l_j(v) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{v - x_i}{x_j - x_i}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Scrivere una function che, dati i punti (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$ ed un'ascissa $v \in \mathbb{R}$, calcoli il valore $P_{n-1}(v)$ usando la rappresentazione di Lagrange. Modificare in seguito la function in modo che prenda in ingresso un vettore $v = (v_1, \ldots, v_m)$ e restituisca in uscita il vettore $p = (P_{n-1}(v_1), \ldots, P_{n-1}(v_m))$.
Eseguire la function con punti di interpolazione $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 6)$, $(4, 4)$ e $v = 2.8$ e rappresentare graficamente il polinomio nell'intervallo $[1, 4]$.

6) La velocità v di un corpo è nota per i seguenti istanti t dell'intervallo temporale $[0, 4.5]$:

t	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4	4.5
v	1.0	1.8	2.9	3.9	5.7	8.1	9.0	6.1	5.5	4.3

Aprire una finestra grafica e visualizzare i punti (t_i, v_i) con una 'x'. Usando l'interfaccia `Basic Fitting`, disegnare il grafico del polinomio interpolante e della spline cubica interpolante con condizioni "not-a-knot". Commentare i risultati ottenuti.
In seguito, considerare il seguente sottoinsieme dei dati

t	0.0	0.5	1.0	2.0	3.0	3.5	4	4.5
v	1.0	1.8	2.9	5.7	9.0	6.1	5.5	4.3

Disegnare il grafico del polinomio interpolante e della spline cubica interpolante con condizioni "not-a-knot", calcolare il valore nei punti $t = 1.5$, $t = 2.5$ e confrontare i risultati ottenuti con i dati nella prima tabella (utilizzare l'errore relativo).

7) Nella seguente tabella, è riportato il numero di milioni di abitanti y degli Stati Uniti dal 1900 al 1990, con l'anno di misurazione t che varia ad intervalli regolari di 10 anni.

t	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
y	76	92	105.7	122.8	131.7	150.7	179	205	226.5	248.7

Scrivere uno script in cui si rappresenta graficamente il polinomio interpolante i punti (t_i, y_i), $i = 1, \ldots, 10$ utilizzando due metodi diversi: i) risoluzione del sistema lineare associato alla matrice di Vandermonde; (ii) calcolo del polinomio di Lagrange. Come ascisse del grafico, usare una griglia di 100 nodi equispaziati in $[1900, 1990]$. Ripetere inoltre l'esercizio usando il `Basic Fitting`. Commentare i risultati ottenuti.
Usando la rappresentazione di Lagrange, calcolare la stima del numero degli abitanti nell'anno $t = 1955$ fornita dal polinomio interpolante. Sapendo che nel 1955 gli abitanti erano 165.9 milioni, calcolare l'errore relativo sul numero di abitanti stimato ed interpretarne il risultato.

8) Si consideri la funzione di Runge

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Per $n = 5, 8, 11$, creare il vettore $x = (x_1, \ldots, x_n)$ contenente n punti equidistanti in $[-1, 1]$ e il vettore $y = (f(x_1), \ldots, f(x_n))$; aprire una finestra grafica e visualizzare i punti $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, \ldots, n$, il grafico della spline cubica interpolante con condizioni "not-a-knot" con `Basic Fitting` e quello della funzione f. Che cosa si può dire dell'accuratezza della spline all'aumentare di n?

Esercizi suggeriti per casa

1) La distanza d percorsa da un corpo, che si muove di moto rettilineo, nell'intervallo di tempo t di estremi 0 e 5, è nota per i valori riportati in tabella:

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
d	0.2	4.5	1.7	3.2	4.5	3.1	1.9	5.2	6.7	5.8	3.0

Aprire una finestra grafica, visualizzare i punti (t_i, d_i) con una 'x' e, usando l'interfaccia `Basic Fitting`, disegnare il polinomio interpolante i punti dati. In seguito, disegnare il grafico interpolante il sottoinsieme di dati ottenuto rimuovendo i punti $(2, 4.5)$ e $(3.5, 5.2)$, se ne calcoli il valore nei punti $t = 2$, $t = 3.5$ e si confrontino i risultati ottenuti con i dati nella tabella.

2) Nella seguente tabella, è riportato il numero di centinaia di migliaia di laureati in Italia dal 2010 al 2018 (ogni 2 anni), secondo quanto riportato alla pagina ufficiale del MIUR.

t	2010	2012	2014	2016	2018
n	285.303	302.177	307.293	311.460	326.332

Usando `Basic Fitting`, rappresentare il polinomio interpolante i dati sul numero dei laureati e calcolare il valore del polinomio in corrispondenza dell'anno $t = 2017$. Sapendo che il numero esatto dei laureati nel 2017 è pari a 317.802 migliaia, stabilire se la stima fornita dal polinomio interpolante può essere considerata una buona approssimazione (usare l'errore relativo).

3) Dati i punti $(1200.5, 3)$, $(1201.5, 1.5)$, $(1202.5, 1.5)$, $(1203, 1)$, $(1204, 1)$, $(1205, 0)$, rappresentare graficamente il polinomio interpolante i punti dati nell'intervallo $[1200.5, 1205]$ utilizzando `Basic Fitting`. Il risultato è soddisfacente? Perché? Come è possibile migliorarlo?

4) Si considerino le seguenti funzioni definite nell'intervallo $[-1, 1]$:

$$f(x) = e^{-30x^2}$$
$$f(x) = x^3 + \sin(2\pi x)$$
$$f(x) = |x|.$$

Per ogni funzione, fissare $n = 5, 8, 11, 20$, considerare n nodi $x_1, \ldots, x_n$ equispaziati in $[-1, 1]$ e rappresentare graficamente il polinomio interpolante f nei punti $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, \ldots, n$. Per quali funzioni l'accuratezza dell'interpolazione migliora all'aumentare di n? Per quali peggiora? Ripetere l'esercizio usando i nodi di Chebychev:

$$x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n} \cdot \pi\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

5) Nella seguente tabella, è riportato il numero di milioni di abitanti della popolazione mondiale per alcuni anni selezionati dal 1750 al 2009:

t	1750	1800	1850	1900	1950	1990	2000	2009
y	791	980	1260	1650	2520	5270	6060	6800

Aprire una finestra grafica, visualizzare i punti (t_i, y_i) con una 'x' e, usando l'interfaccia `Basic Fitting`, disegnare il polinomio interpolante e la spline cubica interpolante con condizioni "not-a-knot". Calcolare le stime del numero di milioni di abitanti nell'anno $t = 1770$ fornite dalle due curve interpolanti appena rappresentate. Quali delle due stime ti sembra più affidabile?