Algoritmi e Strutture Dati **Anno Accademico 2022–2023**

Esercizi: Master Theorem

Manuela Montangero

1 Esercizi

Riportiamo il Master Theorem (o Teorema dell'esperto) per comodità:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n \leq n_0 \\ aT(n/b) + O(n^d) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $a \geq 1, b > 1, d \geq 0$ sono costanti (cioè non dipendono da n), e $\frac{n}{b}$ può stare sia per $\lceil \frac{n}{b} \rceil$ che per $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$, è

$$T(n) \in \begin{cases} O(n^d) & \text{se } \log_b a < d \\ O(n^d \log n) & \text{se } \log_b a = d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{se } \log_b a > d \end{cases}$$

N.B.: nel testo della prova d'esame NON viene riportato l'enunciato del teorema (dovete saperlo voi).

Esercizio 1 [Prima parte] *Nelle seguenti equazioni di ricorrenza, dare un upper bound a $T(n)$ utilizzando il Master Theorem, assumendo che $T(1) \in \Theta(1)$.*

1. $T(n) = 7T(n/4) + n$
2. $T(n) = 2T(n/2) + n^2$
3. $T(n) = 4T(n/2) + n$
4. $T(n) = 4T(n/2) + n^3$
5. $T(n) = 4T(n/3) + n^2$
6. $T(n) = 2T(n/3) + \sqrt{n}$
7. $T(n) = 16T(n/4) + n^2$

Esercizio 2 [Prima parte] *Per ognuno dei casi seguenti, usando il Master Theorem, determinare il valore di α opportuno o dichiarare che non esiste.*

ATTENZIONE: *l'esercizio chiede di trovare α tale che l'applicazione* **diretta** *del teorema porti al risultato richiesto. Ovvero, sostituendo ad α il valore trovato e applicando il teorema si trova* **esattamente** *l'O-grande indicato nella traccia.*

1. *Data l'equazione di ricorrenza*

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & se\ n \leq 1 \\ 8T(n/\alpha) + O(n^{2.5}) & altrimenti \end{cases}$$

si dica se, ed eventualmente per quali valori del parametro $\alpha \geq 0$*, è possibile che risulti* $T(n) \in O(n^{2.5} \log n)$.

2. *Data l'equazione di ricorrenza*

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & se\ n \leq 1 \\ 4T(n/4) + O(n^{\alpha+1}) & altrimenti \end{cases}$$

si dica se, ed eventualmente per quali valori del parametro $\alpha \geq 0$*, è possibile che risulti* $T(n) \in O(n^2)$.

3. *Data l'equazione di ricorrenza*

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & se\ n \leq 1 \\ 7T(n/\alpha) + O(n) & altrimenti \end{cases}$$

si dica se, ed eventualmente per quali valori del parametro $\alpha \geq 0$*, è possibile che risulti* $T(n) \in O(n \log n)$.

4. *Data l'equazione di ricorrenza*

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & se\ n \leq 1 \\ 2T(n/3) + O(n^{\alpha+\frac{1}{2}}) & altrimenti \end{cases}$$

si dica se, ed eventualmente per quali valori del parametro $\alpha \geq 0$*, è possibile che risulti* $T(n) \in O(n)$.

5. *Data l'equazione di ricorrenza*

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & se\ n \leq 1 \\ 2T(n/3) + O(n^{\alpha+1}) & altrimenti \end{cases}$$

si dica se, ed eventualmente per quali valori del parametro $\alpha \geq 0$*, è possibile che risulti* $T(n) \in O(n \log n)$.

6. *Data l'equazione di ricorrenza*

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 1 \\ 3T\left(n/\alpha\right) + n^{2.5} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

si dica se, ed eventualmente per quali valori del parametro reale $\alpha \geq 0$*, è possibile che risulti* $T(n) = O(n^{2.5} \log n)$.

7. *Data l'equazione di ricorrenza*

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 1 \\ \alpha T\left(n/2\right) + n & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

si dica se, ed eventualmente per quali valori del parametro reale $\alpha \geq 0$*, è possibile che risulti* $T(n) = O(n \log n)$.

8. *Data l'equazione di ricorrenza*

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 1 \\ 9T\left(n/\alpha\right) + n^{2.5} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

si dica se, ed eventualmente per quali valori del parametro reale $\alpha \geq 0$*, è possibile che risulti* $T(n) = O(n^3)$.

9. *Data l'equazione di ricorrenza*

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 1 \\ 8T\left(n/5\right) + n^{\alpha} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

si dica se, ed eventualmente per quali valori del parametro reale $\alpha \geq 0$, *è possibile che risulti* $T(n) = O(n \log n)$.

10. *Data l'equazione di ricorrenza*

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 1 \\ 4T\left(n/\alpha\right) + n^{3} & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

si dica se, ed eventualmente per quali valori del parametro reale $\alpha \geq 0$, *è possibile che risulti* $T(n) = O(n^3 \log n)$.