Algoritmi e Strutture Dati **Anno Accademico 2022–2023**

Esercizi: Notazione Asintotica e Costo Computazionale

Maneula Montangero

1. *Esercizio.* Per ognuna delle seguenti funzioni determinare la notazione Θ appropriata.
   (a) $6n + 1$
   (b) $6n^3 + 12n^2 + 1$
   (c) $2 \log n + 4n + 3n \log n$
   (d) $3n^2 + 2n \log n$
   (e) $(6n + 1)^2$
   (f) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^n$

2. *Esercizio.* Sia $f(n) = n + 2n^3 - 3n^3 + 4n^4$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false. Giustificare le risposte.
   (a) $f(n) \in \Omega(n \log n)$
   (b) $f(n) \in \Theta(n^5)$
   (c) $f(n) \in O(n^{10})$
   (d) $f(n) \in \Omega(n^4)$

3. *Esercizio.* Sia $f(n) = n \log n + 2n^3 - 3n^2$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false. Provare le affermazioni che si ritengono vere.
   (a) $f(n) \in \Omega(n \log n)$
   (b) $f(n) \in \Theta(n^3)$
   (c) $f(n) \in O(n^4)$
   (d) $f(n) \in \Omega(n^2)$
   (e) $f(n) \in \Omega(n^5)$

4. *Esercizio.* Selezionare la notazione Θ opportuna tra $\Theta(1), \Theta(\log n), \Theta(n), \Theta(n \log n), \Theta(n^2), \Theta(n^3), \Theta(2^n), \Theta(n!)$ per indicare il numero di volte in cui l'istruzione $x := x + 1$ viene eseguita.
   (a)
   ```
   for i = 1 to 2n
     x := x + 1
   ```
   (b)
   ```
   for i = 1 to 2n
     for j = 1 to n
       x := x + 1
   ```
   (c)
   ```
   for i = 1 to 2n
     for j = 1 to i
       for k = 1 to i
         x := x + 1
   ```

(d) for $i = 1$ to $2n$
    for $j = 1$ to i
        for $k = 1$ to j
            $x := x + 1$

(e) $i := n$
    while $i \geq 1$
        $x := x + 1$
        $i := i/2$

(f) $j := n$
    while $j \geq 1$
        for $i = 1$ to j
            $x := x + 1$
        $j := j/2$

5. **[Esercizio tipo scritto (prima parte)]** Dire quale valori stampano i seguenti frammenti di codici.

   N.B.: Nell'istruzione `for` lo `step` indica l'incremento della variabile di controllo del ciclo ad ogni iterazione. Di default è uno, ma può essere modificato. Per esempio se abbiamo "`for i=1 to n step 2`" la variabile i assumerà i valori 1, 3, 5, 7, 9 e così via fino ad arrivare a n nel caso in cui n sia dispari o n-1 nel caso in cui n sia pari.

   Per risolvere alcuni degli esercizi potrebbero essere utili i seguenti risultati **GENERALI**:

   - *Somma dei primi n numeri naturali:*
   $$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \in \Theta(n^2).$$
   - *Somma dei primi n quadrati:*
   $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \in \Theta(n^3).$$
   - *Somma parziale n-esima della serie geometrica:* per $x \neq 1$ abbiamo che
   $$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$
     - Quando $0 < x < 1$ abbiamo che
     $$1 = x^0 \leq \sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \leq \frac{1}{1 - x} \text{ e quindi } \sum_{i=0}^{n} x^i \in \Theta(1).$$
     La disuguaglianza di sinistra vale perchè la somma parziale è non più piccola del suo primo termine (quello con $i = 0$). La disuguaglianza di destra vale perchè $1 - x^{n+1} \leq 1$. Il valore $1/(1 - x)$ è una costante perchè non dipende da n.
     - Quando $x = 2$ abbiamo
     $$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} = 2^{n+1} - 1 \in \Theta(2^n).$$

– Quando $x > 1$ abbiamo

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{x - 1}\left(x^{n+1} - 1\right) \in \Theta(x^n).$$

(a) $c := 0$
for $i = 2$ to 24 step 2
  for $j = 1$ to 24 step 2
    $c := c + 1$
print c

(b) $c := 0$
for $i = 2$ to 27 step 1
  for $j = i + 1$ to 28
    $c := c + 1$
print c

(c) $c := 0$
for $i = 0$ to 25 step 1
  for $j = i + 1$ to 25 step 1
    $c := c + 1$
print c

(d) $c := 0$
for $i = 0$ to 26 step 2
  for $j = i$ to 26 step 2
    $c := c + 1$
print c

(e) $c \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 0$ to 20 step 1 do
    $j \leftarrow 0$
    while $i + j \leq 21$ do
        $j \leftarrow j + 1$
        $c \leftarrow c + 1$
print c

(f) $c \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 0$ to 26 step 1 do
    $j \leftarrow 0$
    while $i + j \leq 27$ do
        $j \leftarrow j + 1$
        $c \leftarrow c + 1$
print c

(g) $c \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 0$ to 27 step 2 do
    $j \leftarrow 0$
    while $i + j \leq 28$ do
        $j \leftarrow j + 1$
        $c \leftarrow c + 1$
print c

(h) $c \leftarrow 0$

for $i \leftarrow 0$ to 28 step 1 do

  $j \leftarrow 0$

  while $i + j \leq 28$ do

    $j \leftarrow j + 1$

    $c \leftarrow c + 1$

print c