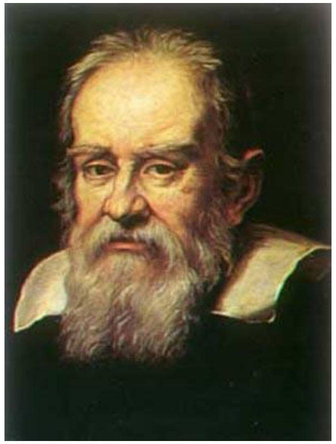
UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche



MECCANICA

Introduzione alla Cinematica

Sommario

- Vettori e operazioni tra vettori
- Posizione e spostamento di un corpo puntiforme
- Velocità media e istantanea
- Accelerazione media e istantanea

Vettori e scalari

Un **vettore** è una grandezza definita attraverso una intensità e una direzione orientata. La forza è un esempio di grandezza vettoriale.

Uno **scalare** è una grandezza definita da un numero. La massa di un oggetto è un esempio di grandezza scalare.

Vettori: notazione

Vettore: $\mathbf{F}$ or $\vec{F}$

Intensità o modulo di un vettore: F or $|\mathbf{F}|$ or $|\vec{\mathrm{F}}|$.

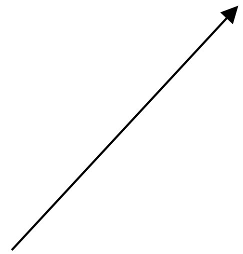
Direzione orientata di un vettore:

ad esempio “20° rispetto all’asse x”.

Scalare: m (non in grassetto nessuna freccia)

Vettori: notazione

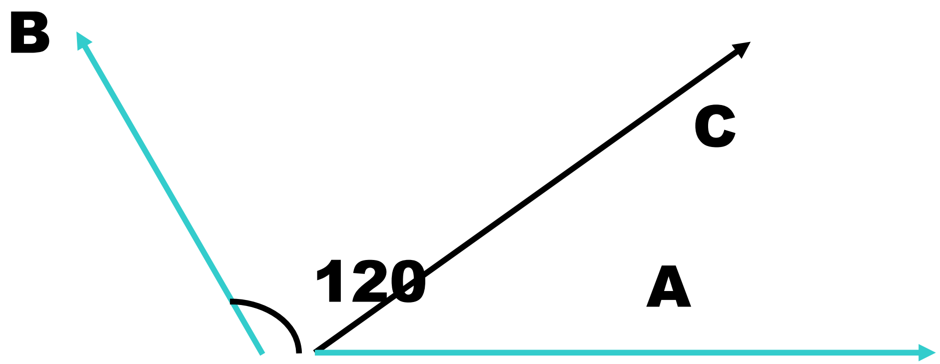
Rappresentazione grafica di un vettore:



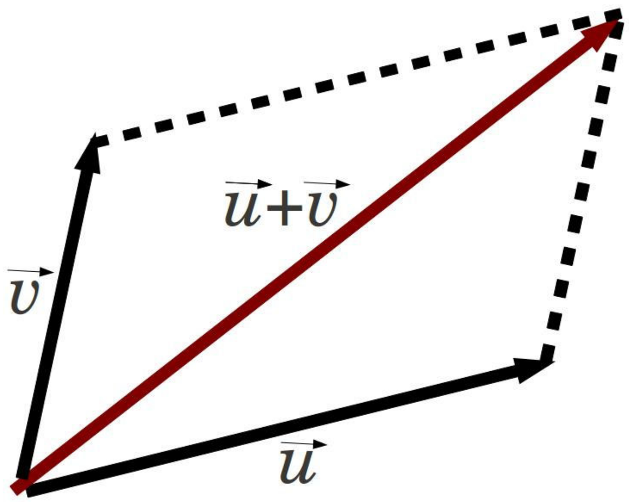
La lunghezza del segmento indica l’intensità del vettore.

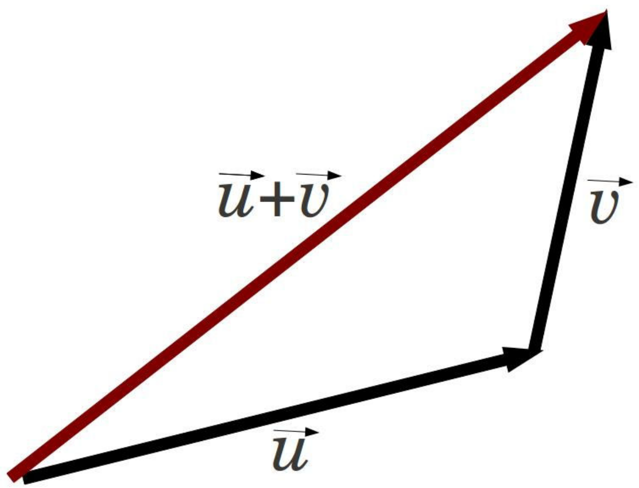
Somma di due vettori

Per sommare graficamente due vettori **A** e **B** bisogna disegnarli collocandoli "punta-coda" (ved. figura, nel ridisegnare un vettore a partire da un altro punto di applicazione dovete traslare il vettore senza ruotarlo e senza cambiare la sua lunghezza). Il risultato della somma **A+B** è un vettore che punta dalla coda del primo vettore alla punta del secondo vettore.



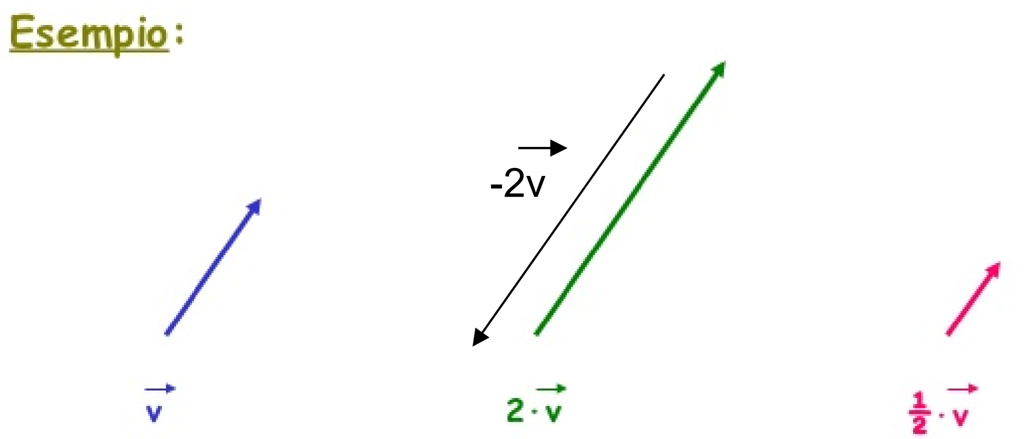
Regola del parallelogramma



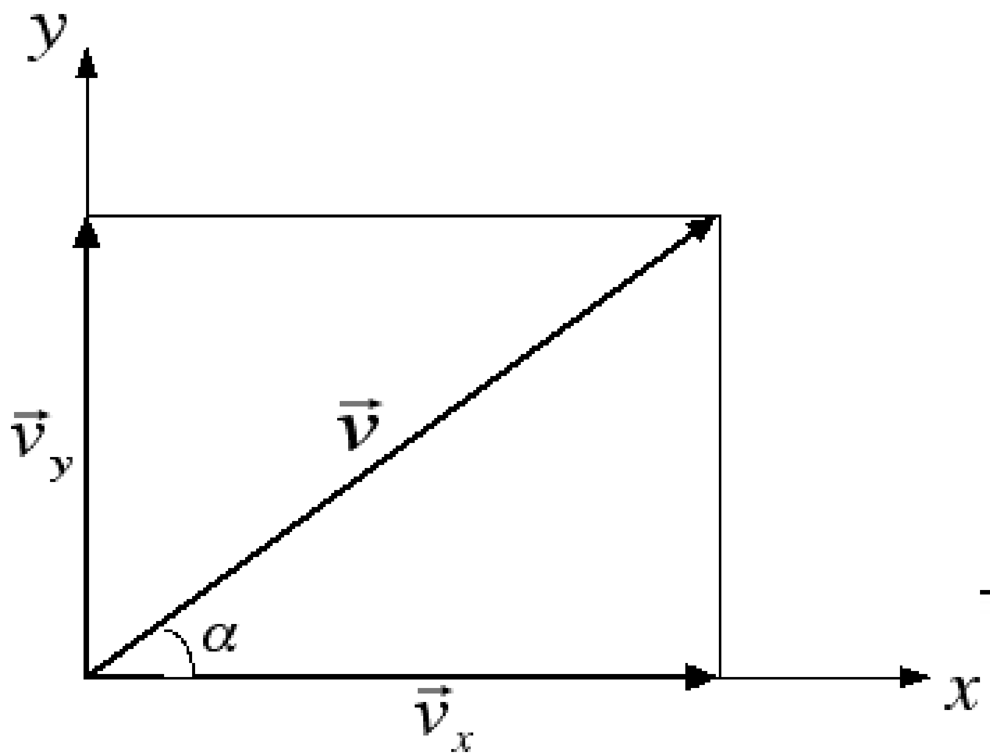


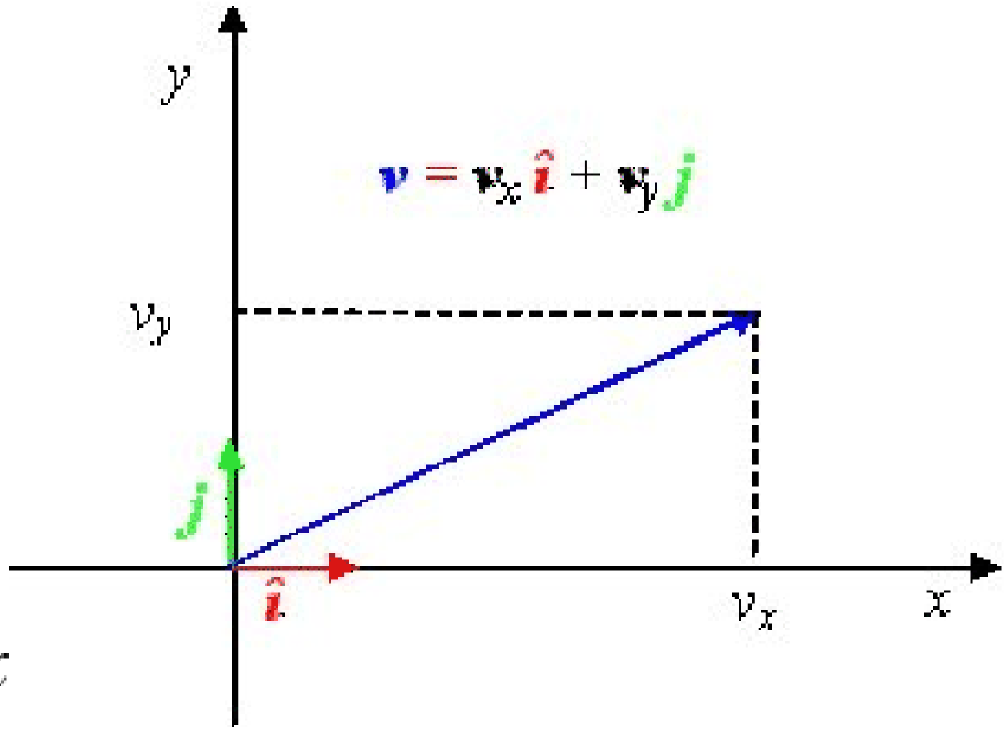
Prodotto di uno scalare per un vettore

Moltiplicare o dividere un vettore per uno scalare equivale a moltiplicare o dividere il modulo del vettore per il valore assoluto dello scalare, lasciando invariata la direzione e il verso se lo scalare è positivo, invertendo il verso se lo scalare è negativo.

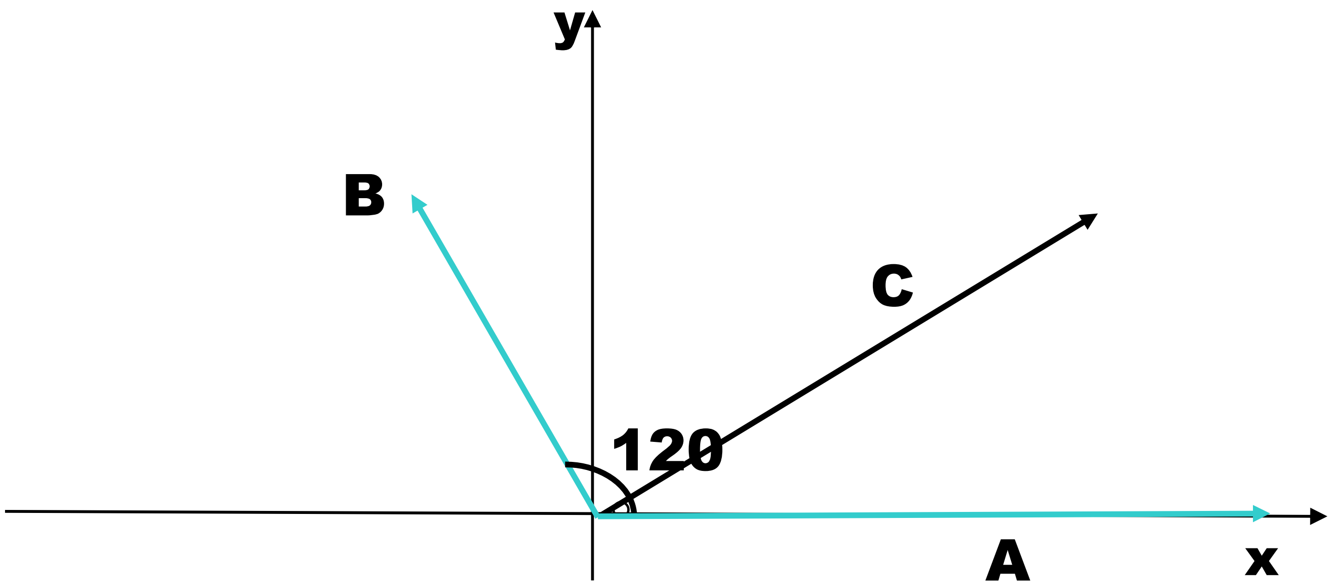


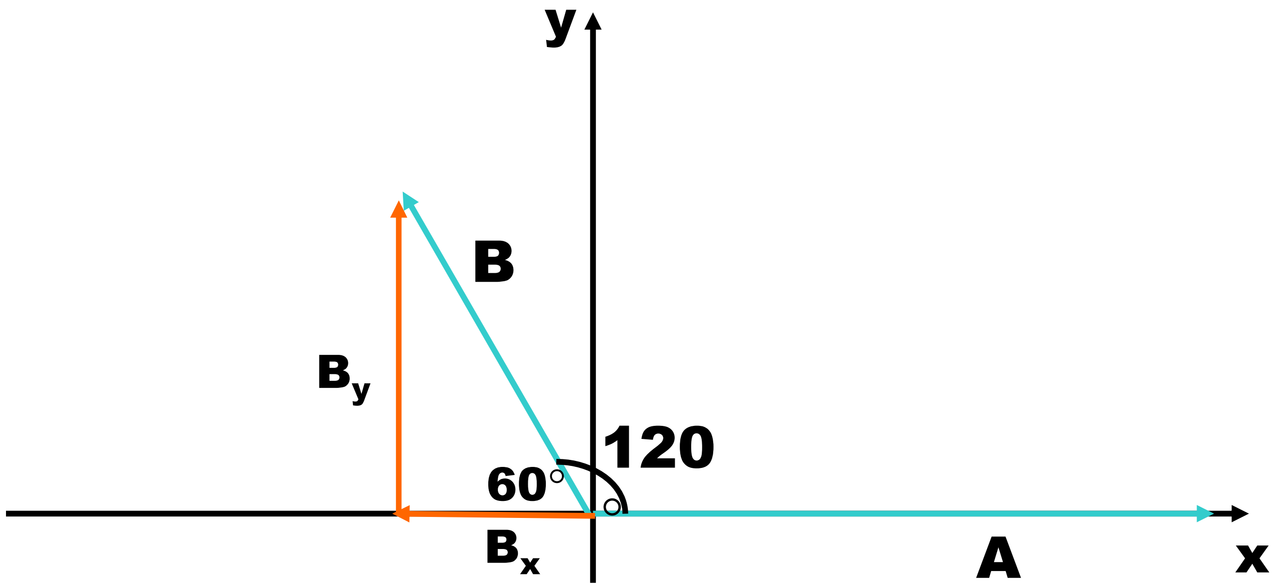
Scomposizione di un vettore nelle sue componenti cartesiane





Il vettore **A** ha modulo 5.00 m e ha direzione orientata coincidente con quella dell'asse x del riferimento cartesiano in figura. Il vettore **B** ha modulo 3.00 m e forma un angolo di 120° con l'asse +x. Calcolare **C=A+B**.





$$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

$$\sin 60° = \frac{B_y}{B} \Rightarrow B_y = B\sin 60° = (3.00\,\text{m})\sin 60° = 2.60\ \text{m}$$

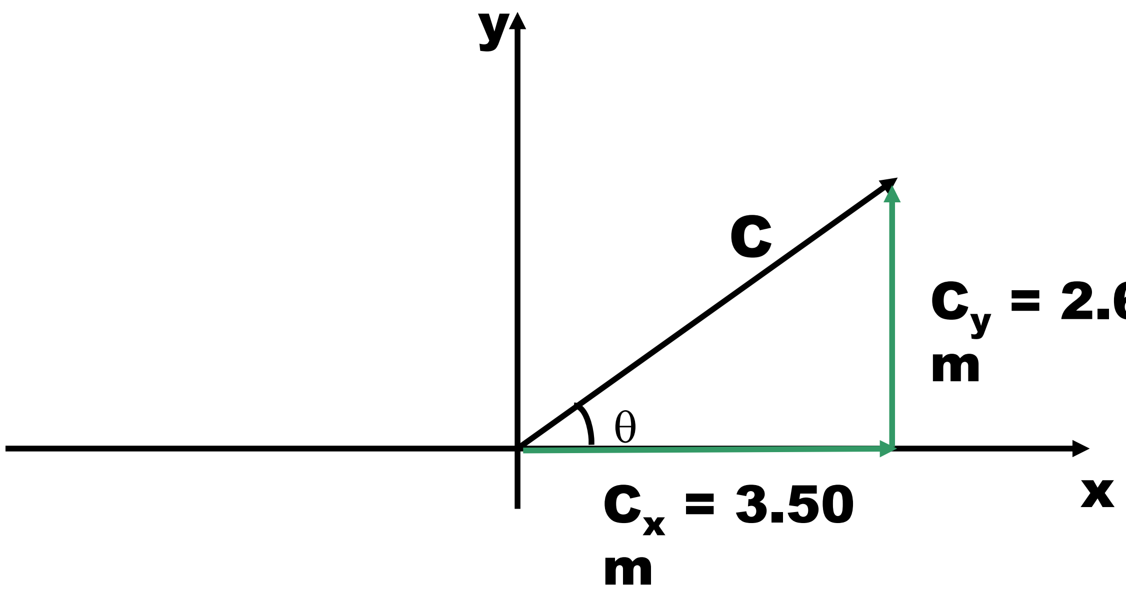
$$\cos 60° = \frac{-B_x}{B} \Rightarrow B_x = -B\cos 60° = -(3.00\,\text{m})\cos 60° = -1.50\ \text{m}$$

and A_x = 5.00 m and A_y = 0.00 m

Le componenti di C:

$$C_x = A_x + B_x = 5.00\ \mathrm{m} + -1.50\ \mathrm{m} = 3.50\ \mathrm{m}$$

$$C_y = A_y + B_y = 0.00\ \mathrm{m} + 2.60\ \mathrm{m} = 2.60\ \mathrm{m}$$



Il modulo di C:

$$C = |\mathbf{C}| = \sqrt{C_x{}^2 + C_y{}^2}$$
$$= \sqrt{(3.50\ \mathrm{m})^2 + (2.60\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 4.36\ \mathrm{m}$$

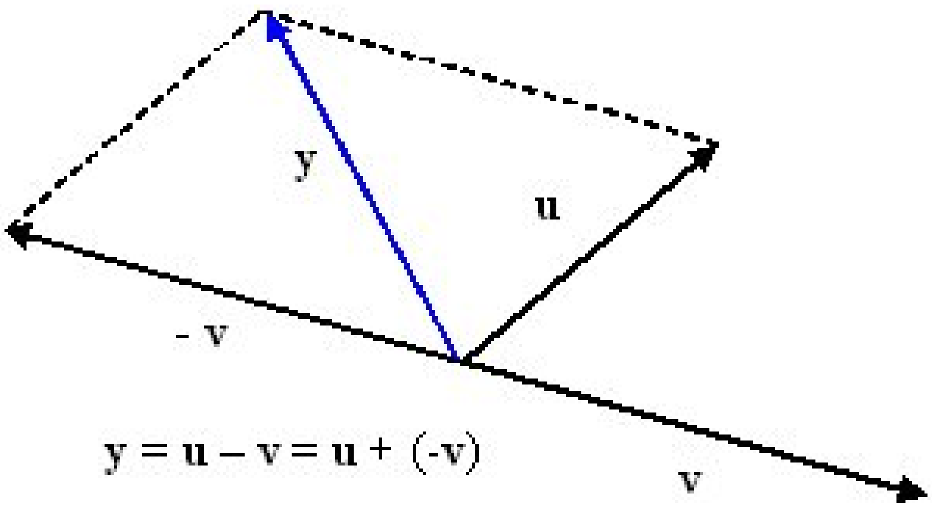
La direzione di C:

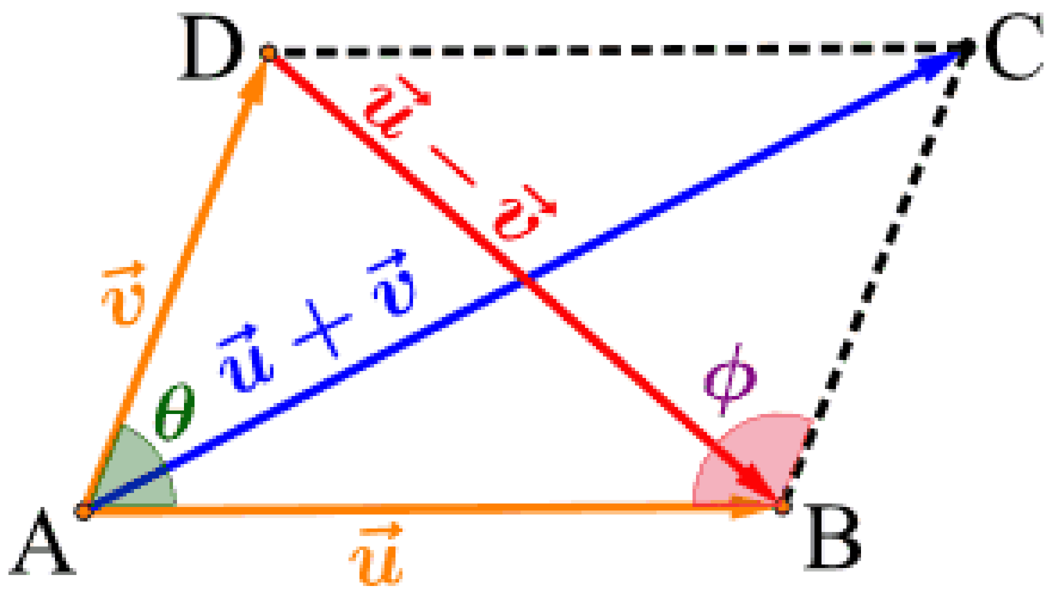
$$\tan\theta = \frac{C_y}{C_x} = \frac{2.60\ \mathrm{m}}{3.50\ \mathrm{m}} = 0.7429$$

$$\theta = \tan^{-1}(0.7429) = 36.6°$$

Rispetto all'asse +x

Differenza di vettori





La notazione di Leibniz per le derivate e gli integrali

E’ la più antica notazione di derivata tutt’ora in uso sia in matematica che in fisica.

Fu introdotta da Leibniz nel 1635 e utilizza il concetto di «infinitesimo», oggi chiamato «differenziale» (da cui il nome «calcolo infinitesimale» per l’analisi matematica).

Sia y=f(x) una funzione reale dell’incognita reale x. Chiamiamo derivata prima della f(x) la funzione:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Nella notazione di Leibniz la derivata si denota così:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$$

La notazione di Leibniz per le derivate e gli integrali

Per le derivate di ordine successivo:

$$f'' = f^{(2)} = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$$

$$f''' = f^{(3)} = \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}$$

$$\vdots$$

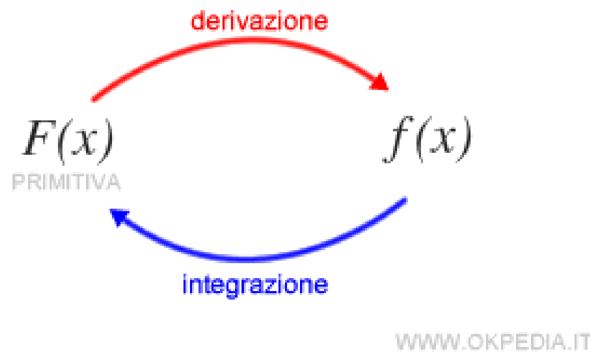
$$f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$$

La notazione di Leibniz per le derivate e gli integrali

Il concetto di differenziale e la notazione di Leibniz vengono ripresi nella definizione matematica di integrale. Se y=f(x) è una funzione reale definita nell'intervallo (a,b) della variabile indipendente x e suddiviso questo intervallo in n suddivisioni di ampiezza δ:

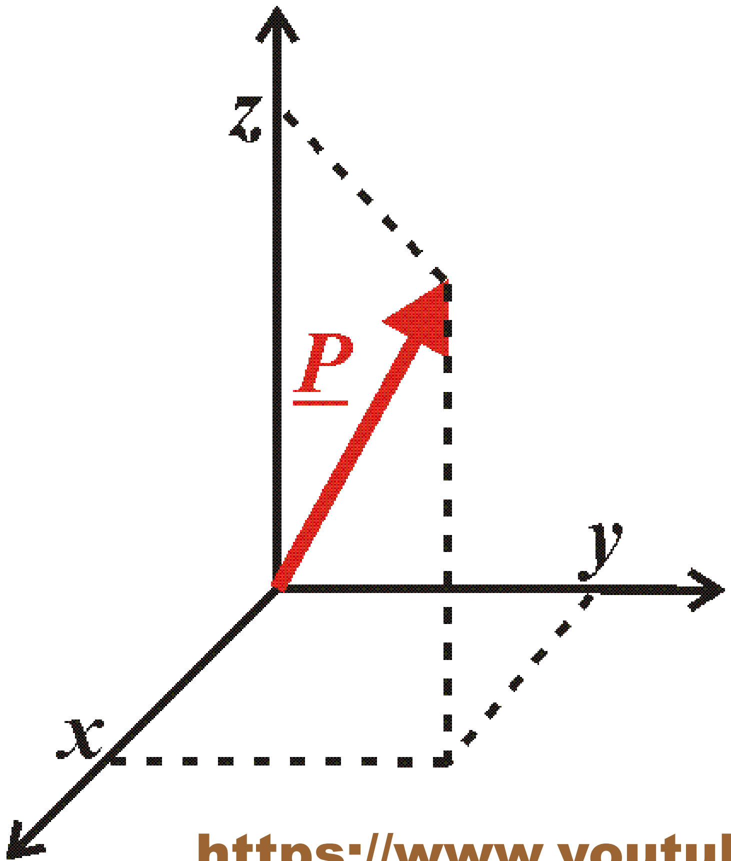
$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,(x_{i+1}-x_i)=\int_a^b f(x)dx$$

$$=F(b)-F(a) \text{ con } dF/dx=f(x)$$



$$\int \frac{d\,F(x)}{dx}dx=\int d\,F(x)= F(x)+costante$$

Il sistema di riferimento della meccanica classica



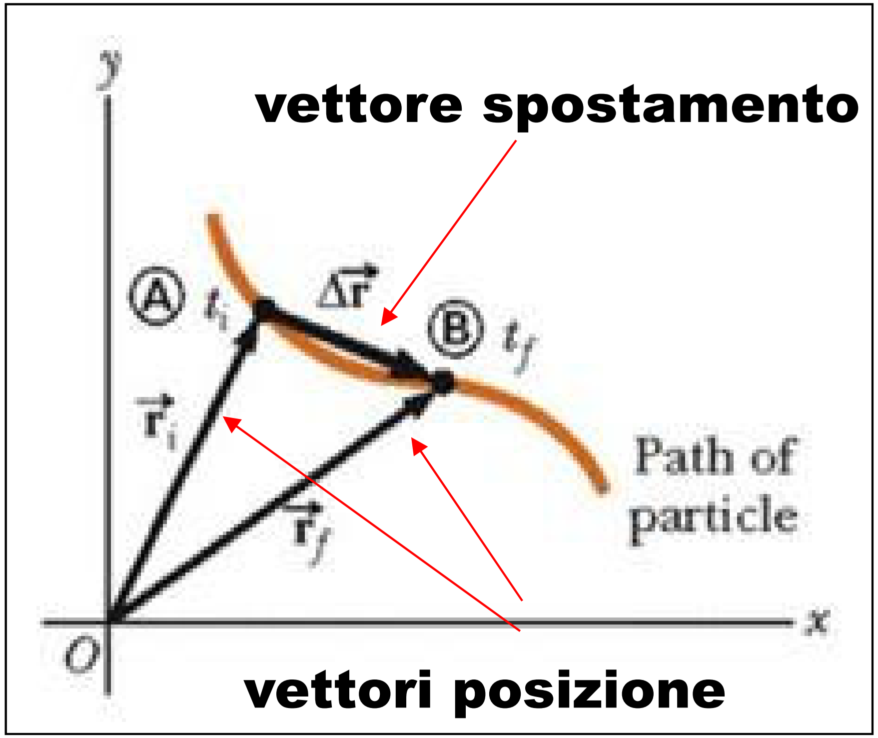
(min.0,44-9,45)

https://www.youtube.com/watch?v=7QbYE3o5qPE

Posizione & Spostamento

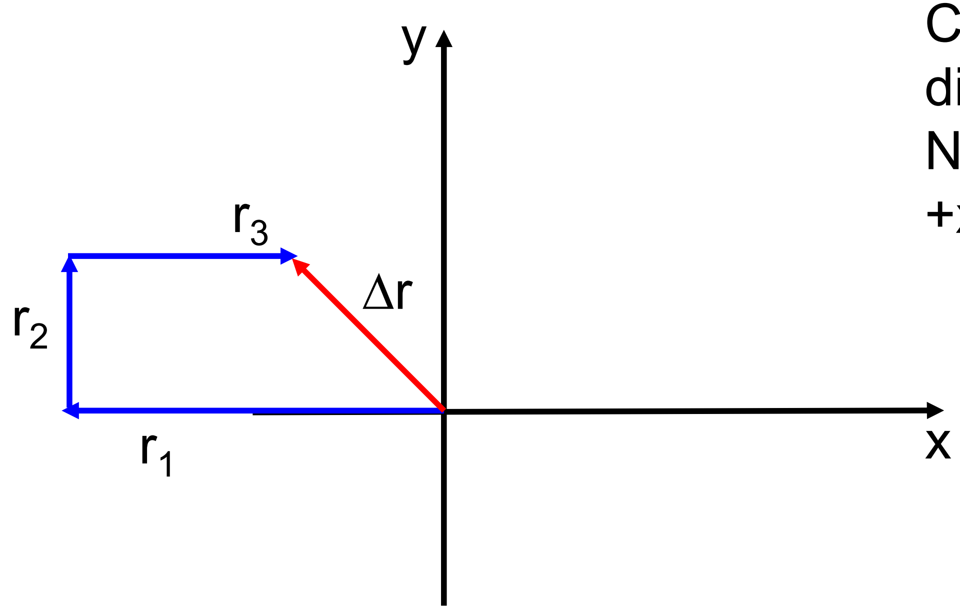
La **posizione r** di un oggetto puntiforme descrive la sua collocazione rispetto ad un punto di riferimento (origine).

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$$



Lo **spostamento** rappresenta la variazione della posizione di un oggetto puntiforme. Dipende soltanto dalle posizioni iniziale e finale.

Una persona cammina verso un negozio secondo il seguente cammino: 0,500 miglia ovest, 0,200 miglia nord, 0,300 miglia est. Qual è lo spostamento totale (modulo, direzione e verso)?

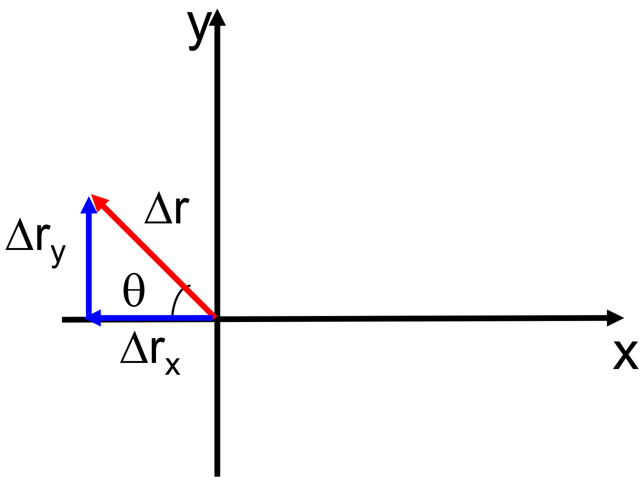


Consideriamo la direzione +y come NORD e la direzione +x come EST.

continua:

Lo spostamento è $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$. La posizione iniziale è l'origine; qual è $\mathbf{r}_f$?

La posizione finale sarà $\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$. Le componenti sono $r_{fx} = -r_1 + r_3 = -0.2$ miglia e $r_{fy} = +r_2 = +0.2$ miglia.



Dalla figura, il modulo e la direzione dello spostamento sono:

$$|\Delta\mathbf{r}| = \sqrt{\Delta r_x^2 + \Delta r_y^2} = 0.283 \text{ miles}$$

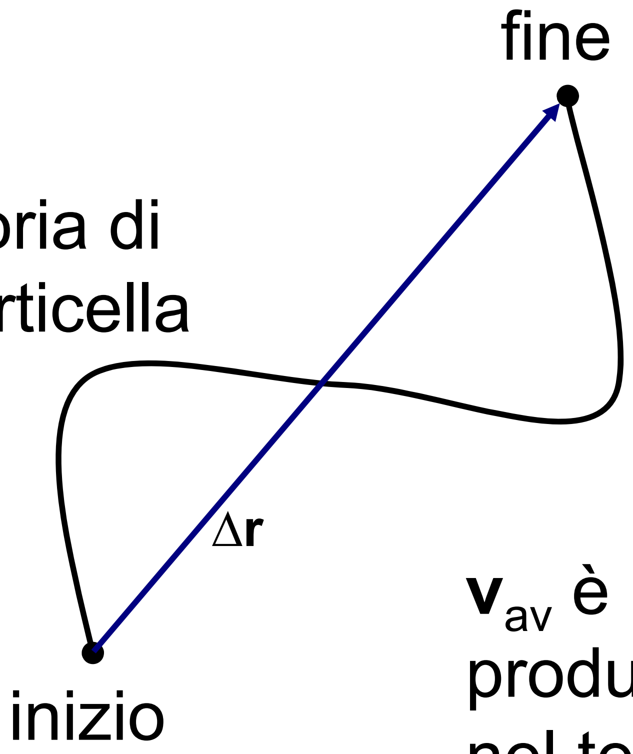
$$\tan\theta = \frac{|\Delta r_y|}{|\Delta r_x|} = 1 \text{ and } \theta = 45° \quad \text{N of W.}$$

Velocità

La **velocità** è un vettore che misura quanto rapidamente e in quale direzione orientata un oggetto puntiforme si muove.

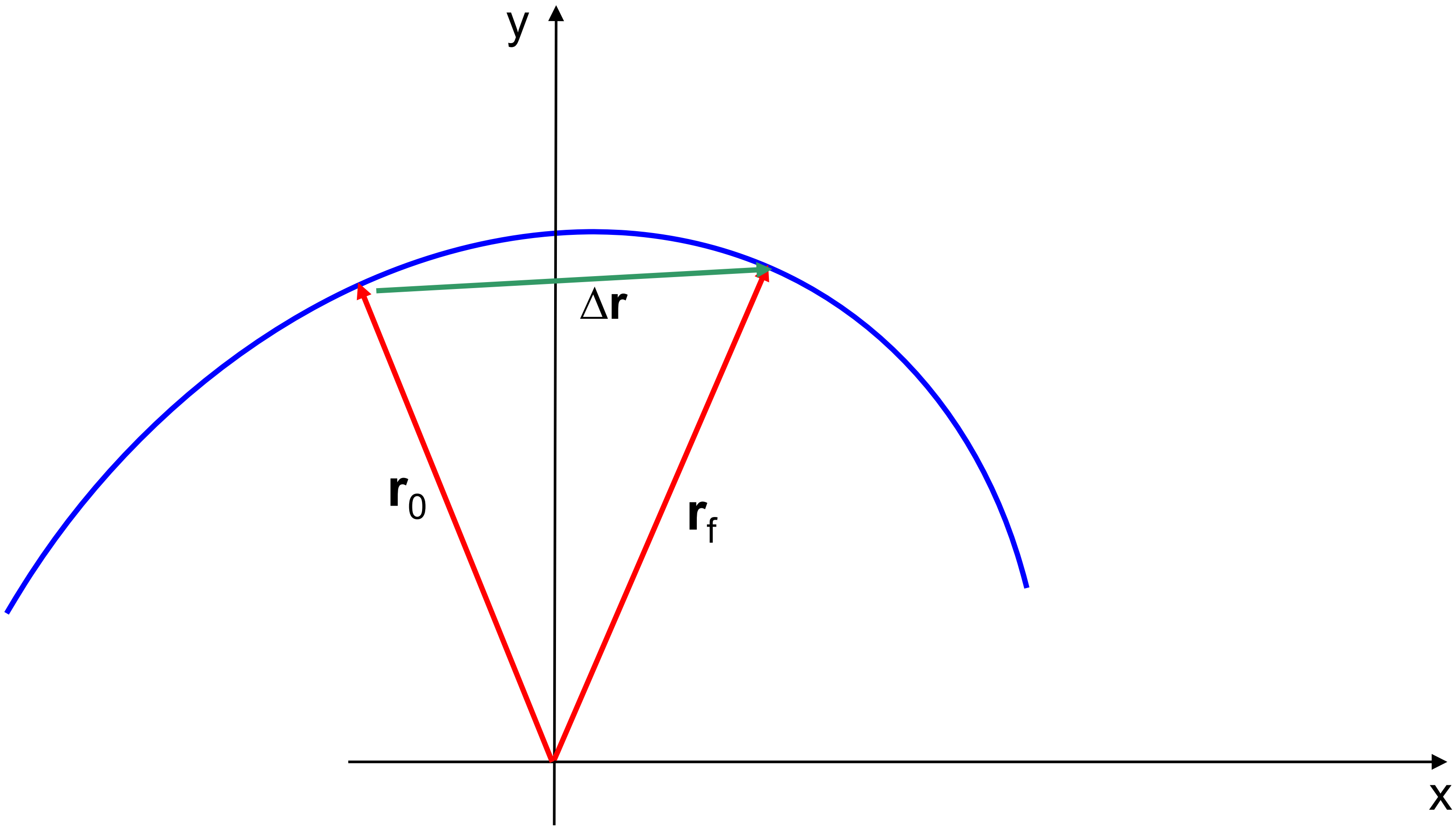
$$\text{Average velocity} = \mathbf{v}_{av} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad \left(\text{The x - component would be}: v_{av,x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)$$

Traiettoria di una particella



$\mathbf{v}_{av}$ è la velocità costante che produce lo spostamento $\Delta \mathbf{r}$ nel tempo Δt .

Una particella si muove lungo la traiettoria blu. Al tempo t_1 la sua posizione è $\mathbf{r}_0$; al tempo t_2 la sua posizione è $\mathbf{r}_f$.

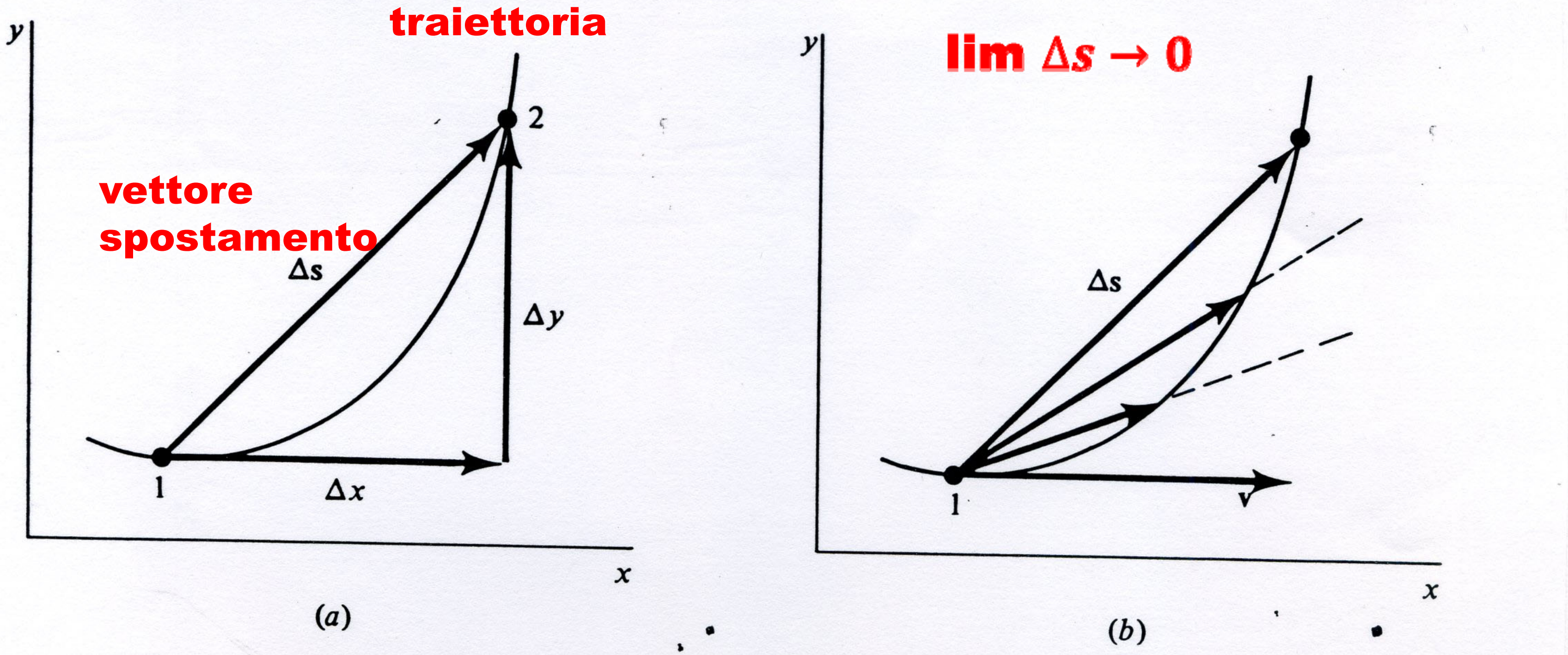


$$\mathbf{v}_{av} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

Punta nella direzione orientata di $\Delta\mathbf{r}$

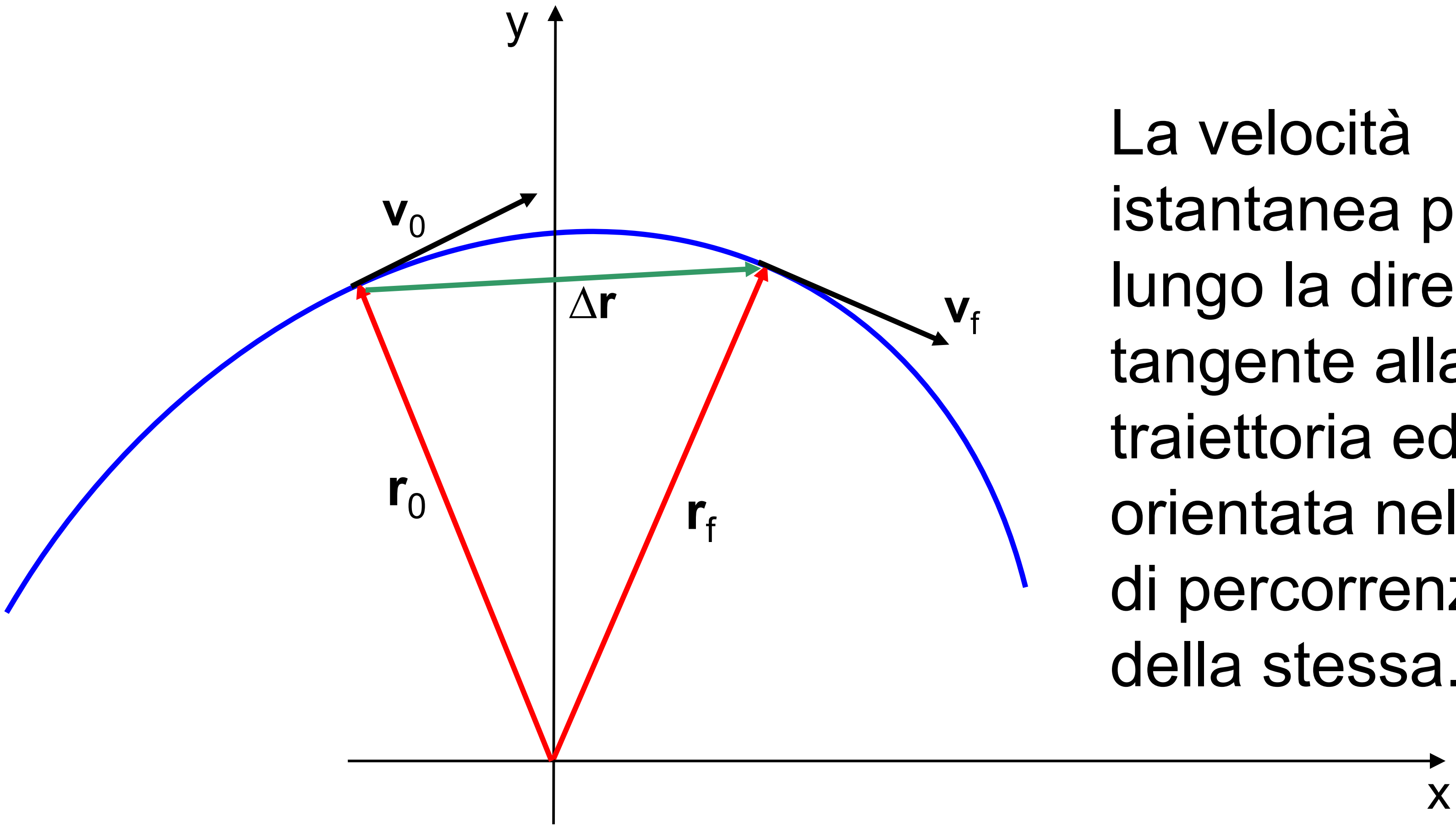
UNIMORE

Velocità in due dimensioni



(*a*) Un oggetto si muove lungo una traiettoria su un piano. Al tempo t_1 esso si trova nel punto 1 e al tempo t_2 si trova nel punto 2. La velocità media risulta parallela a Δs. (*b*) Mano a mano che l'intervallo di tempo $t_2 - t_1$ diventa più piccolo, anche lo spostamento Δs diminuisce. La velocità media $\bar{v} = \Delta s/\Delta t$ si approssima alla velocità istantanea **v** al tempo t_1, che è un vettore tangente alla traiettoria nel punto 1.

Una particella si muove lungo la traiettoria blu. Al tempo t_1 la sua posizione è $\mathbf{r}_0$; al tempo t_2 la sua posizione è $\mathbf{r}_f$.



La velocità istantanea punta lungo la direzione tangente alla traiettoria ed è orientata nel verso di percorrenza della stessa.

Velocità istantanea = derivata temporale dello spostamento

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

$$\vec{S} = \int \vec{v} dt$$

Velocità istantanea in coordinate cartesiane

La velocità istantanea è definita partendo dalla velocità media e considerandone il limite per $\Delta t \rightarrow 0$:

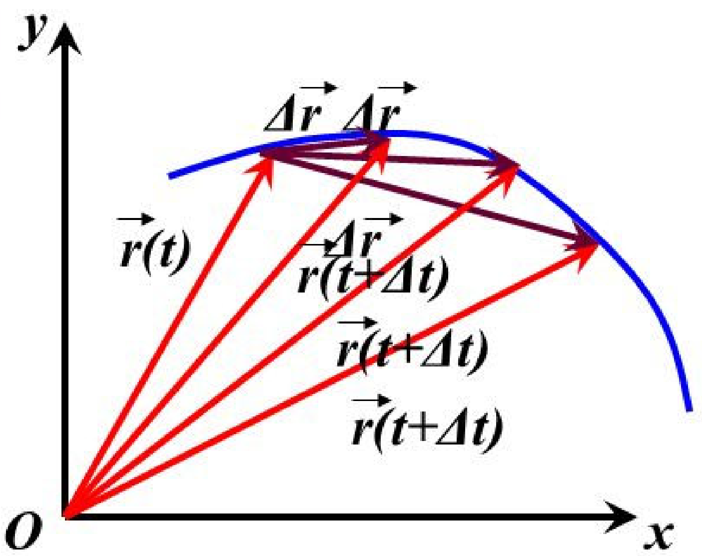
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

Le componenti del vettore velocità sono dunque:

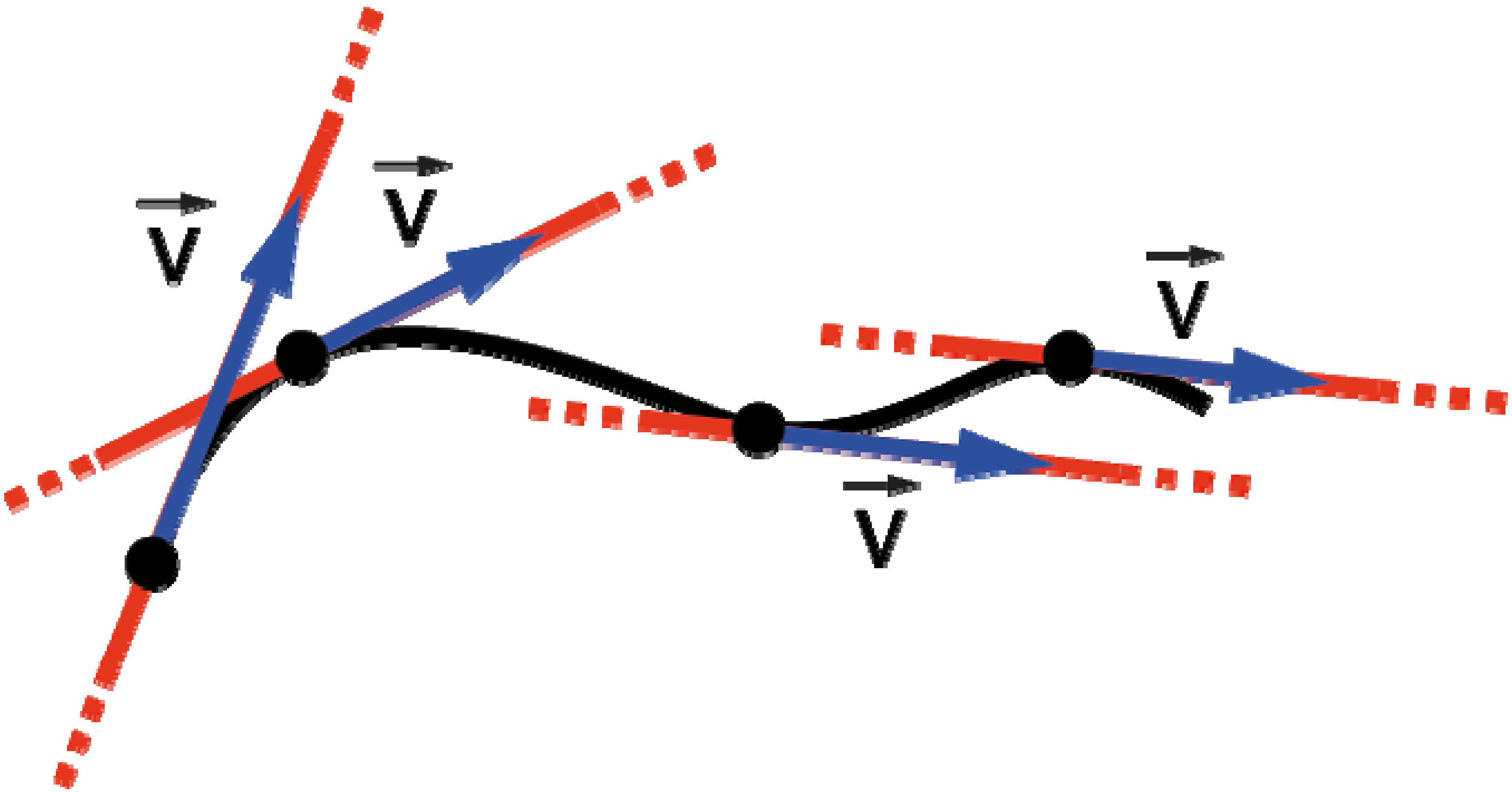
$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Per $\Delta t \rightarrow 0$ la direzione dello spostamento tende ad essere tangente alla traiettoria

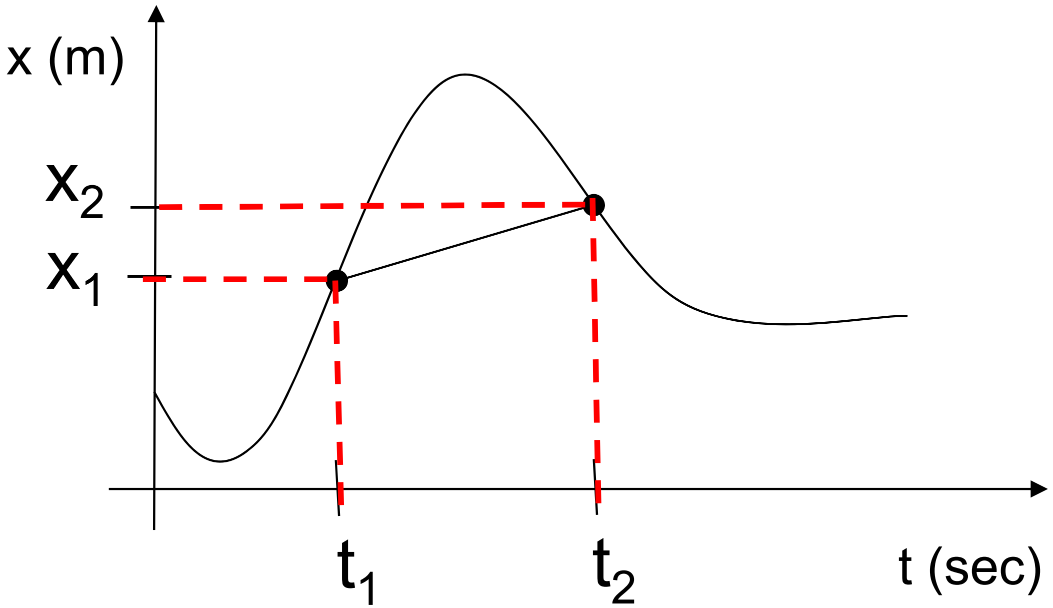
Il vettore velocità istantanea è tangente alla traiettoria



Interpretazione geometrica del vettore velocità

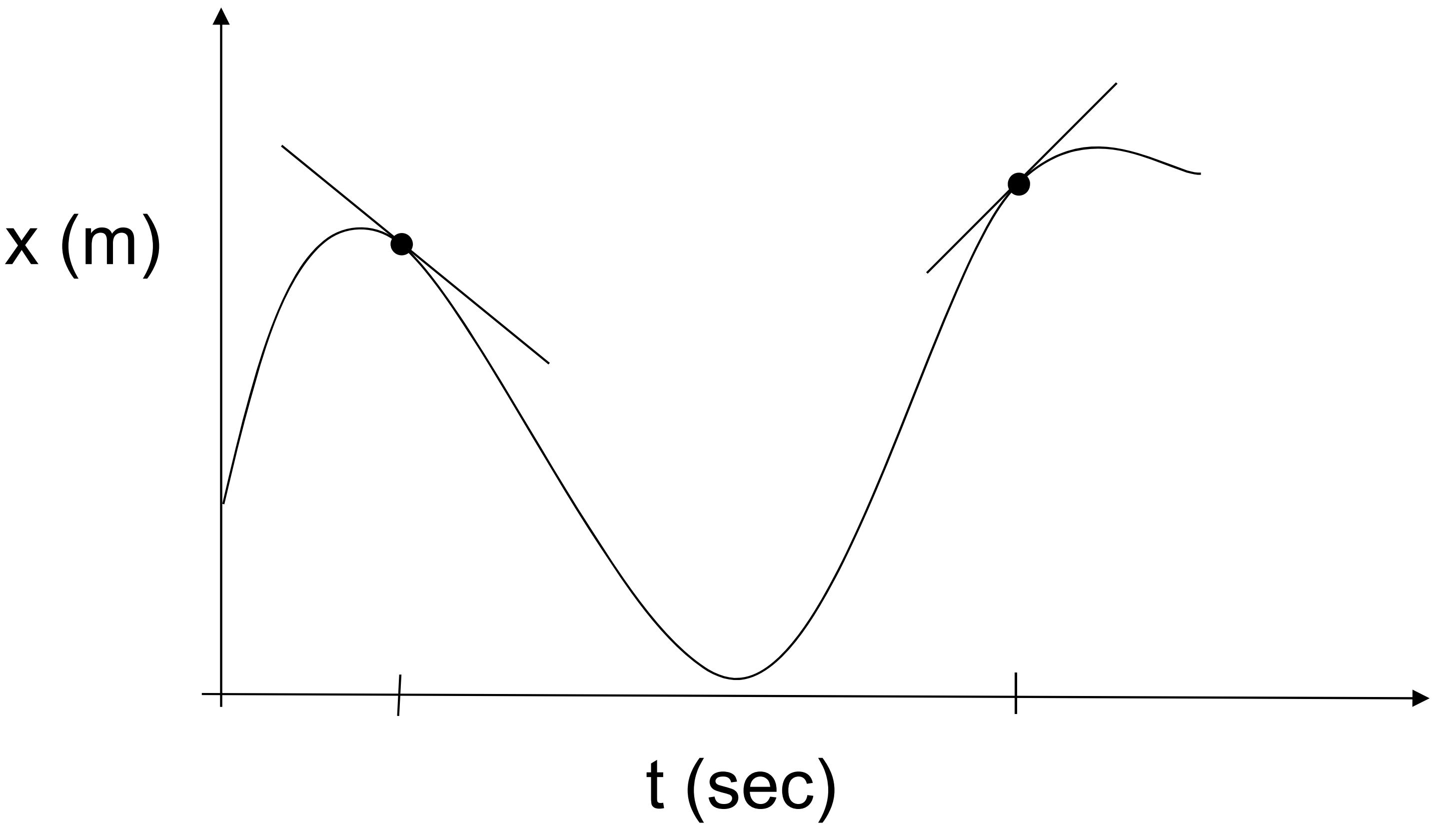


In un grafico di posizione vs tempo la velocità media è rappresentata dalla pendenza della corda:



$$\text{Average velocity} = v_{av,x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

In un grafico di posizione vs tempo la velocità istantanea è rappresentata dalla pendenza della tangente alla curva x(t) all'istante considerato .



Accelerazione media e istantanea

Se la velocità cambia nel tempo nasce una accelerazione diversa da zero che cambia lo stato di moto del corpo che si muove.

Accelerazione media $= \vec{\mathbf{a}}_{av} = \dfrac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t}$ (interpretazione simile a $\mathbf{v}_{av}$ e $\mathbf{v}$).

Accelerazione istantanea

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}$$

Accelerazione in coordinate cartesiane

Siano $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ le velocità del punto materiale agli istanti di tempo t_1 e $t_2=t_1+\Delta t$

Accelerazione media: $\vec{a}_M = \dfrac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

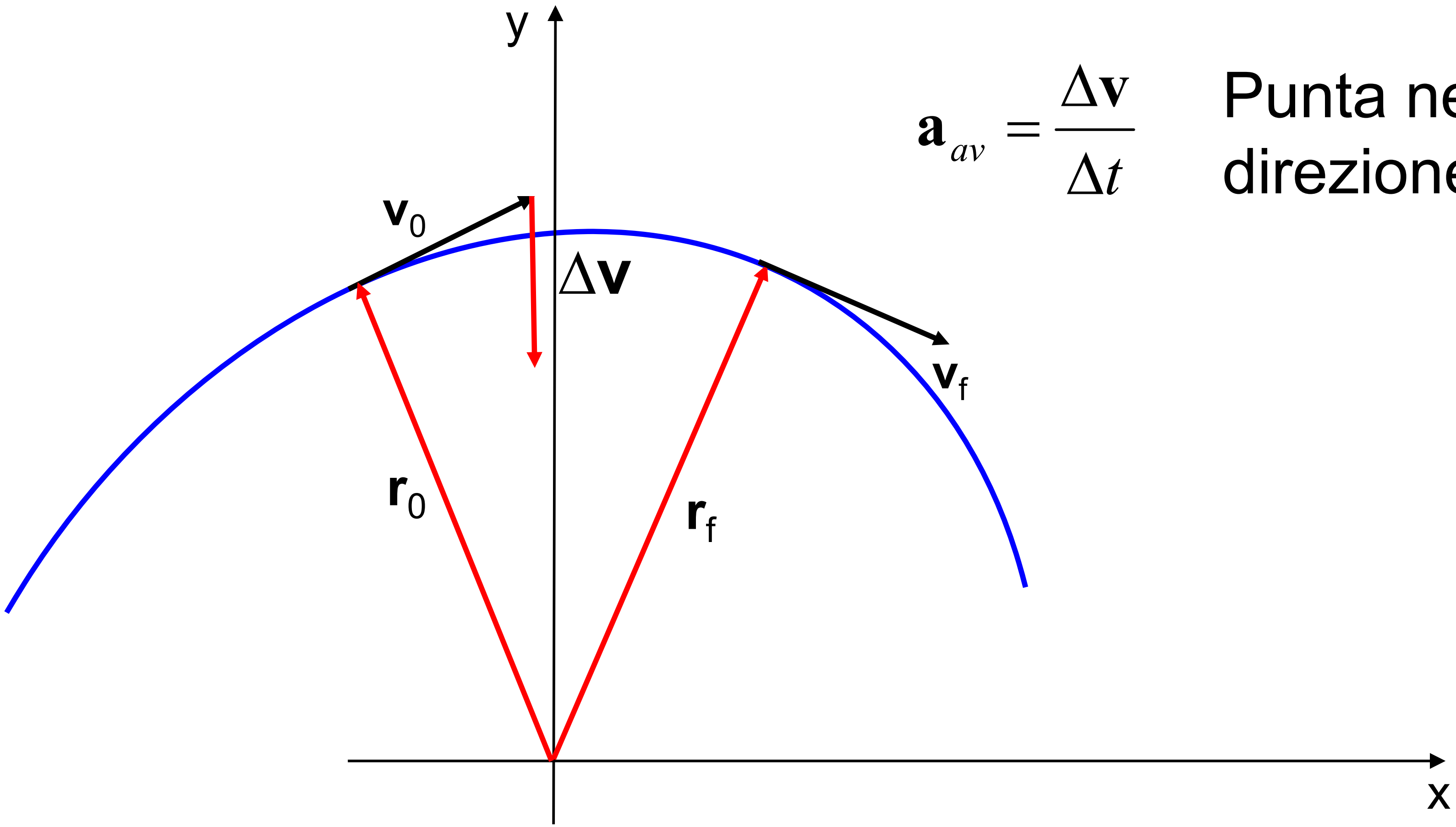
Accelerazione istantanea:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

In generale il vettore $\vec{a}$ avrà una componente parallela alla traiettoria (accelerazione tangenziale) ed una componente perpendicolare alla traiettoria (accelerazione normale)

Una particella si muove lungo la traiettoria blu. Al tempo t_1 la sua posizione è $\mathbf{r}_0$; al tempo t_2 la sua posizione è $\mathbf{r}_f$.



$$\mathbf{a}_{av} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

Punta nella direzione di $\Delta\mathbf{v}$.

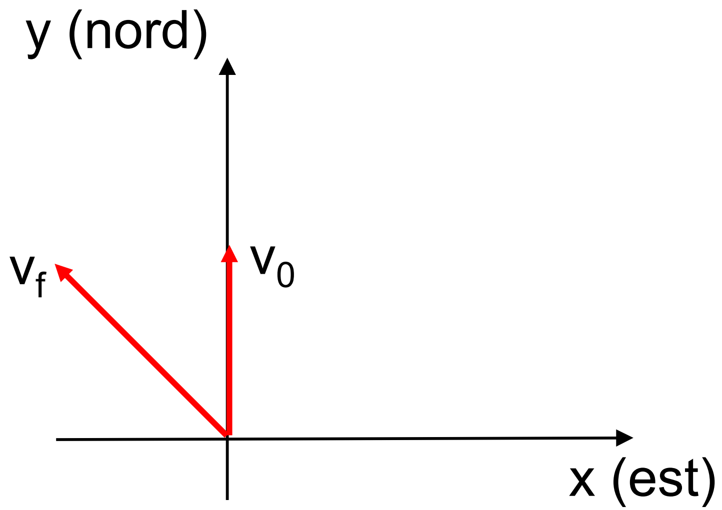
Un'auto che viaggia a 28 m/s viene decelerata fino ad un completo arresto in 4 s. Trovare la decelerazione media durante la frenata.

Dati $v_i = +28$ m/s, $v_f = 0$ m/s, e $\Delta t = 4.0$ s.

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 28\ \mathrm{m/s}}{4.0\ \mathrm{s}} = -7.0\ \mathrm{m/s^2}$$

All'inizio di un viaggio di 3 ore stai viaggiando verso nord a 192 km/h. Alla fine viaggi a 240 km/h a 45°a ovest della direzione nord. (a) Disegnare i vettori velocità iniziale e finale. (b) Trovare il vettore Δv. (c) Qual è l'accelerazione media durante il viaggio?

(a) Disegna i vettori velocità iniziale e finale.



continua:

(b) Trova $\Delta\mathbf{v}$.

Le componenti sono

$$\Delta v_x = v_{fx} - v_{ox} = -v_f \sin 45° - 0 = -170 \text{ km/hr}$$

$$\Delta v_y = v_{fy} - v_{oy} = +v_f \cos 45° - v_0 = -22.3 \text{ km/hr}$$

$$|\Delta\mathbf{v}| = \sqrt{\Delta v_x^{\;2} + \Delta v_y^{\;2}} = 171 \text{ km/hr}$$

$$\tan\varphi = \frac{|\Delta v_y|}{|\Delta v_x|} = 0.1312 \Rightarrow \phi = \tan^{-1}(0.1312) = 7.5°$$

Sud-ovest

continua:

(c) Qual è $\mathbf{a}_{av}$ durante il viaggio ?

$$\mathbf{a}_{av} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

$$a_{x,\text{av}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{-170\ \text{km/hr}}{3\ \text{hr}} = -56.7\ \text{km/hr}^2$$

$$a_{y,\text{av}} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{-22.3\ \text{km/hr}}{3\ \text{hr}} = -7.43\ \text{km/hr}^2$$

Il modulo e la direzione sono:

$$|\mathbf{a}_{\text{av}}| = \sqrt{a_{x,\text{av}}^2 + a_{y,\text{av}}^2} = 57.2\ \text{km/hr}^2$$

$$\tan\phi = \frac{|a_{y,\text{av}}|}{|a_{x,\text{av}}|} = 0.1310 \Rightarrow \phi = \tan^{-1}(0.1310) = 7.5^\circ$$ Sud ovest