1) TEOREMA DI MINKOWSKI-WEYL

<u>Enunciato</u>: Qualunque punto di un politopo può essere rappresentato come combinazione convessa dei suoi vertici.

$$x^1, x^2, x^3, \dots, x^k \longrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x^i \lambda^i \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda^i = 1 \end{cases}, \quad \lambda^i \geq 0$$

2) TEOREMA DI VERTICE DEI POLITOPI

<u>Enunciato</u>: Dato un problema PLC $\min\{c^T x : x \in P\}$, dove P è un politopo finito, allora c'è almeno un vertice di P che dà soluz. ottima

<u>Dimostrazione</u>: Siano $x^1, \dots, x^k$ vertici di P
Sia y un generico punto di P

Sia $z^* := \min\{c^T x^i : i = 1, \dots, k\}$ (sol. migliore dei vertici)

Siccome $y \in P \Rightarrow \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 : y = \sum_{i=1}^{k} x^i \lambda_i$ [M-W]

$$c^T y = c^T \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (c^T x^i) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z^* = z^* \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = z^*$$

$\Rightarrow c^T y \geq z^*$] Soluzione di un p.to qualsiasi di P è peggiore della migliore soluzione dei vertici (È UN PROB. DI MIN!)

3) LEMMA DI FARKAS

<u>Enunciato</u>: una disequazione lineare $c_0 \leq c^T x$ è verificata da tutti i punti di un poliedro non vuoto $\underbrace{P = \{Ax = b,\ x \geq 0\}}_{\text{problema di PLC in forma STANDARD}}$ s.s.e esiste $u \in \mathbb{R}^m$ tale che: (m = numero di vincoli)

1) $c^T \geq u^T A$ [VINCOLI PROBLEMA DUALE]

2) $c_0 \leq u^T b$

<u>Dimostrazione</u>.

$\Rightarrow$) Se 1 e 2 $\Rightarrow c_0 \leq c^T x$

$$x \cdot \underbrace{c^T \geq u^T A}_{①} \cdot x \longrightarrow c^T x \geq u^T A x \overset{\text{def. di } P}{=} u^T b \geq c_0$$

perché $x \geq 0$

Allora: $c^T x \geq c_0$ ✓

$\Leftarrow$) Se $c_0 \leq c^T x \Rightarrow$ 1 e 2

Considero $\min\{c^T x : x \in P\}$. Esso ha un ottimo finito poiché:

$$c_0 \leq c^T x \Rightarrow c_0 \leq \min\{c^T x : x \in P\}$$

Pongo x^* soluzione ottima del problema e B base corrispondente.
Pongo $u^T = c_B^T B^{-1}$. Allora:

1) $\underbrace{\bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1} A \geq 0}_{\text{def. di costi ridotti}} \Rightarrow c^T \geq c_B^T B^{-1} A = u^T A$ ✓

2) $c_0 \le c^T x^* = c_B^T x_B^* = c_B^T B^{-1} b = u^T b$

FINE DIMOSTRAZIONE.

Grazie al lemma di Farkas, posso allora dire che:

$P = \{ Ax = b,\ x \geq 0 \}$

$\min\{ c^T x : Ax = b,\ x \geq 0 \} = \max\{ c_0 : c_0 \le c^T x,\ x \in P \} =$

$= \max\{ c_0 : \underbrace{c_0 \le u^T b}_{}, c^T \geq u^T A \}$

all'ottimo
posso sostituire
$\le$ con $=$

⊕ TEOREMA DI DUALITÀ FORTE

<u>Enunciato</u>: se $\min\{ c^T x : Ax = b,\ x \geq 0 \}$ ha soluzione finita,

allora:

$$\min\{ c^T x : Ax = b,\ x \geq 0 \} = \max\{ u^T b : c^T \geq u^T A \}$$

⊕ TEOREMA DI DUALITÀ DEBOLE

<u>Enunciato</u>: $P = \{ c^T x : Ax \geq b,\ x \geq 0 \} \neq \emptyset$

$D = \{ u^T b : u^T A \le c^T,\ u^T \geq 0 \} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall \tilde{x} \in P,\ \forall \tilde{u} \in D$ soluzioni risulta:

$$\tilde{u}^T b \le c^T \tilde{x}$$

Dimostrazione. $A\tilde{x} \geq b \Rightarrow u^T A\tilde{x} \geq u^T b$

Ma, sapendo che: $c^T \geq u^T A$

$$c^T\tilde{x} \geq u^T A\tilde{x} \geq u^T b \checkmark$$

4) GOMORY'S CUT

Enunciato: Considero il rilassamento continuo di un problema PLI. B è la base ottima e $x_B = B^{-1}b$, $x_F = 0$, $\bar{A} = B^{-1}A$, $\bar{b} = B^{-1}b$

$$x_t + \sum_{j\in F} \bar{a}_{tj} x_j = \bar{b}_t \quad (1)$$

$$x_t + \sum_{j\in F} \lfloor \bar{a}_{tj} \rfloor x_j \leq \bar{b}_t \quad (2)$$

Una soluz. ottima del problema PLI ha valori interi, quindi:

$$x_t + \sum_{j\in F} \lfloor \bar{a}_{tj} \rfloor x_j \leq \lfloor \bar{b}_t \rfloor \quad (3)$$

Sottraggo (3) e (1):

$$\cancel{x_t} + \sum_{j\in F} \bar{a}_{tj} x_j - \cancel{x_t} - \sum_{j\in F} \lfloor a_{tj} \rfloor x_j \geq \bar{b}_t - \lfloor \bar{b}_t \rfloor$$

$$\sum_{j\in F} (\bar{a}_{tj} - \lfloor \bar{a}_{tj} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_t - \lfloor \bar{b}_t \rfloor$$

(+) TEOREMA DI VALIDITÀ

Enunciato: un taglio di Gomory $\sum_{j\in F} (\bar{a}_{tj} - \lfloor \bar{a}_{tj} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_t - \lfloor \bar{b}_t \rfloor$ è un taglio VALIDO

Dimostrazione:

1) Non elimino soluzioni intere PER COSTRUZIONE

2) La attuale soluzione FRAZIONARIA non è valida:

a) $\bar{b}_t - \lfloor \bar{b}_t \rfloor >$ poiché $\bar{b}_t$ frazionario

b) $x_j = 0, \forall j \in F \longrightarrow 0 \geq \bar{b}_t - \lfloor \bar{b}_t \rfloor$ IMP!

5) ALGORITMO DI DIJKSTRA

Enunciato: Sia L_i il costo del percorso più breve da s a i, $\forall i \in S \subset V$, $s \in S$. Sia: $(v, h) = \arg\min \{ L_i + c_{ij} : (i,j) \in \delta^+(S) \}$

Allora: $L_v + c_{vh}$ è il costo del percorso più breve da s a h.

Dimostrazione: andremo a dimostrare per assurdo.

Suppongo che il percorso più breve per arrivare a h sia P diverso.

Sia $(i,j) \in P \cap \delta^+(S)$ il primo arco di P uscente da S.

Sia $P_1 \cup \{(i,j)\} \cup P_2 = P$. Risulta

$$C(P) = \underbrace{c(P_1)}_{\geq L_i} + c_{ij} + \underbrace{c(P_2)}_{\geq 0} \geq L_i + c_{ij} \geq L_v + c_{vh}$$

$\Rightarrow L_v + c_{vh}$ è il minimo costo