

# ALGORITMI E STRUTTURE DATI

**Prof. Manuela Montangero**

A.A. 2022/23

Programmazione Dinamica

Problema dello zaino senza ripetizione

"E' vietata la copia e la riproduzione dei contenuti e immagini in qualsiasi forma.

E' inoltre vietata la redistribuzione e la pubblicazione dei contenuti e immagini non autorizzata espressamente dall'autore o dall'Università di Modena e Reggio Emilia."



**UNIMORE**  
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI  
MODENA E REGGIO EMILIA

# Problema dello zaino

## SENZA RIPETIZIONE

Nei sottoproblemi si deve tenere conto degli item già scelti

Un sottoproblema ha:

- una ridotta capacità dello zaino
- una ridotta scelta di item

## SOTTOPROBLEMA:

Per ogni  $w \in N$  tale che  $w \leq W$  e per ogni  $j = 1, 2, \dots, n$  definiamo

$K(w, j)$  = massimo valore ottenibile con zaino di capacità  $w \leq W$   
potendo scegliere solo tra gli oggetti  $1, 2, \dots, j$

# Problema dello zaino

**SENZA RIPETIZIONE**

**SOTTOPROBLEMA:**

Per ogni  $w \in N$  tale che  $w \leq W$  e per ogni  $j = 1, 2, \dots, n$  definiamo

$K(w, j)$  = massimo valore ottenibile con zaino di capacità  $w \leq W$   
potendo scegliere solo tra gli oggetti  $1, 2, \dots, j$

SE  $j$  NON sta nella soluzione ottima per  $K(w, j)$

$$K(w, j) = K(w, j - 1)$$

massimo valore ottenibile con zaino di  
capacità  $w$ ,  
potendo scegliere tra gli item **1, 2, ..., j**

massimo valore ottenibile con zaino di  
capacità  $w$ ,  
potendo scegliere tra gli item **1, 2, ..., j-1**

# Problema dello zaino

**SENZA RIPETIZIONE**

**SOTTOPROBLEMA:**

Per ogni  $w \in N$  tale che  $w \leq W$  e per ogni  $j = 1, 2, \dots, n$  definiamo

$K(w, j)$  = massimo valore ottenibile con zaino di capacità  $w \leq W$   
potendo scegliere solo tra gli oggetti  $1, 2, \dots, j$

SE  $j$  sta nella soluzione ottima per  $K(w, j)$ , allora  $w_j \leq w$  e

$$K(w, j) = v_j + K(w - w_j, j - 1)$$

massimo valore ottenibile con zaino di  
capacità  $w$ ,  
potendo scegliere tra gli item **1,2,...,j**

Valore  
dell'item  $j$

massimo valore ottenibile con zaino di  
capacità  $w - w_j$ ,  
potendo scegliere tra gli item **1,2,...,j-1**

# Problema dello zaino

**SENZA RIPETIZIONE**

**SOTTOPROBLEMA:**

Per ogni  $w \in N$  tale che  $w \leq W$  e per ogni  $j = 1, 2, \dots, n$  definiamo

$K(w, j)$  = massimo valore ottenibile con zaino di capacità  $w \leq W$   
potendo scegliere solo tra gli oggetti  $1, 2, \dots, j$

SE non sappiamo se  $j$  sta o no nella soluzione ottima per  $K(w, j)$ ,  
proviamo entrambe le alternative e teniamo la migliore

$$K(w, j) = \max \begin{cases} K(w, j - 1) \\ v_j + K(w - w_j, j - 1) \text{ se } w_j \leq w \end{cases}$$

# Problema dello zaino

SENZA RIPETIZIONE

$$K(w, j) = \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \text{ se } w_j \leq w \end{cases}$$

$$w = 0, 1, 2, \dots, W$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, n$$

Abbiamo  
bisogno di  
una matrice  
(W+1)x(n+1)

w\j	0	1	...	...	...	n
0						
1						
2						
...						
...						
...						
W-1						
W						

# Problema dello zaino

SENZA RIPETIZIONE

$$K(w, j) = \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \text{ se } w_j \leq w \end{cases}$$

Per calcolare  $K(w, j)$  abbiamo bisogno di valori che si trovano:

- nella colonna precedente ( $j-1$ )
- nelle righe precedenti ( $w - w_j$ )

Riempiamo la matrice colonna per colonna, sinistra verso destra, e per ogni colonna, dall'alto verso il basso

w\j	0	...	j-1	j	...	n
0						
1						
...						
w-w_j						
...						
w						
...						
W-1						
W						

# Problema dello zaino

SENZA RIPETIZIONE

$$K(w, j) = \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \text{ se } w_j \leq w \end{cases}$$

Abbiamo bisogno di inizializzare la prima riga e la prima colonna

## CASI BASE:

- $K(0, j) = 0 \quad \forall j = 0, 1, \dots, n$
- $K(w, 0) = 0 \quad \forall w = 0, 1, \dots, W$

Massimo valore ottenibile con  
uno zaino di capacità zero

Massimo valore ottenibile con  
una selezione vuota di item

w\j	0	...	j-1	j	...	n
0	0	0	0	0	0	0
1	0					
...	0					
w-w_j	0					
...	0					
w	0					
...	0					
W-1	0					
W	0					



# Problema dello zaino

SENZA RIPETIZIONE

$$K(w, j) = \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \text{ se } w_j \leq w \end{cases}$$

Abbiamo bisogno di inizializzare la prima riga e la prima colonna

Dove troviamo nella matrice la soluzione al problema originale?

**Soluzione:**  $K(W, n)$

Massimo valore ottenibile con  
uno zaino di capacità  $W$  e  
selezione tra gli oggetti  $1, 2, \dots, n$

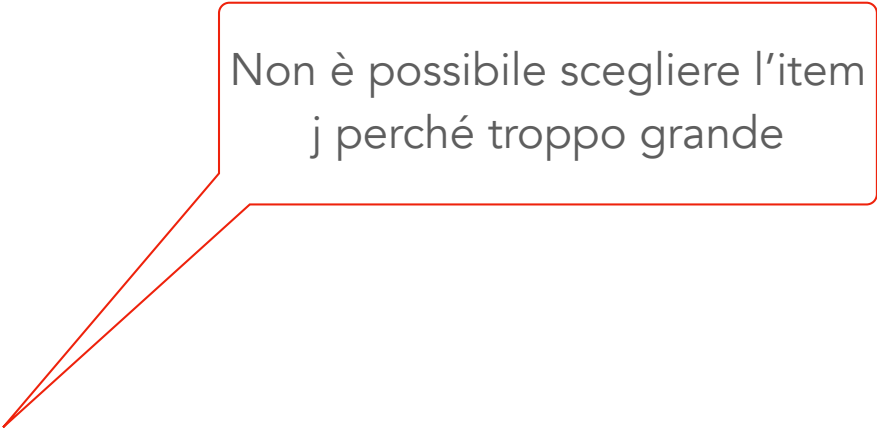
$w \backslash j$	0	...	$j-1$	$j$	...	$n$
0	0	0	0	0	0	0
1	0					
...	0					
$w - w_j$	0					
...	0					
$w$	0					
...	0					
$W-1$	0					
$W$	0					

# Problema dello zaino

## SENZA RIPETIZIONE

Per calcolare il valore della soluzione ottima di tutti i sottoproblemi

```
Max_val_zaino( $n, w_1, \dots, w_n, v_1, \dots, v_n$ )  
for  $j = 0$  to  $n$  do  
     $K[0, j] := 0$   
for  $w = 0$  to  $W$  do  
     $K[w, 0] := 0$   
for  $j = 1$  to  $n$  do  
    for  $w = 1$  to  $W$  do  
        if  $w_j > w$   
            then  $K[w, j] := K[w, j-1]$   
            else  $K[w, j] := \max\{K[w, j-1], v_j + K[w-w_j, j-1]\}$   
return  $K[W, n]$ 
```



Non è possibile scegliere l'item  $j$  perché troppo grande

Costo computazionale  $O(W \cdot n)$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

wj	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0				
2	0				
3	0				
4	0				
5	0				
6	0				
7	0				
8	0				
9	0				
10	0				

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j - 1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j - 1) \\ v_j + K(w - w_j, j - 1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0			
2	0	0			
3	0	0			
4	0	0			
5	0	0			
6	0				
7	0				
8	0				
9	0				
10	0				

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 1, w_1 = 6, v_1 = 30$$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0			
2	0	0			
3	0	0			
4	0	0			
5	0	0			
6	0	30			
7	0				
8	0				
9	0				
10	0				

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 1, w_1 = 6, v_1 = 30$$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0			
2	0	0			
3	0	0			
4	0	0			
5	0	0			
6	0	30			
7	0	30			
8	0	30			
9	0	30			
10	0	30			

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 1, w_1 = 6, v_1 = 30$$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0		
2	0	0	0		
3	0	0			
4	0	0			
5	0	0			
6	0	30			
7	0	30			
8	0	30			
9	0	30			
10	0	30			

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 2, w_2 = 3, v_2 = 14$$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0		
2	0	0	0		
3	0	0	14		
4	0	0			
5	0	0			
6	0	30			
7	0	30			
8	0	30			
9	0	30			
10	0	30			

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 2, w_2 = 3, v_2 = 14$$



# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0		
2	0	0	0		
3	0	0	14		
4	0	0	14		
5	0	0	14		
6	0	30			
7	0	30			
8	0	30			
9	0	30			
10	0	30			

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 2, w_2 = 3, v_2 = 14$$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0		
2	0	0	0		
3	0	0	14		
4	0	0	14		
5	0	0	14		
6	0	30	30		
7	0	30			
8	0	30			
9	0	30			
10	0	30			

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 2, w_2 = 3, v_2 = 14$$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0		
2	0	0	0		
3	0	0	14		
4	0	0	14		
5	0	0	14		
6	0	30	30		
7	0	30	30		
8	0	30	30		
9	0	30			
10	0	30			

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 2, w_2 = 3, v_2 = 14$$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0		
2	0	0	0		
3	0	0	14		
4	0	0	14		
5	0	0	14		
6	0	30	30		
7	0	30	30		
8	0	30	30		
9	0	30	44		
10	0	30	44		

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 2, w_2 = 3, v_2 = 14$$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	
2	0	0	0	0	
3	0	0	14	14	
4	0	0	14		
5	0	0	14		
6	0	30	30		
7	0	30	30		
8	0	30	30		
9	0	30	44		
10	0	30	44		

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 3, w_3 = 4, v_3 = 16$$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	
2	0	0	0	0	
3	0	0	14	14	
4	0	0	14	16	
5	0	0	14		
6	0	30	30		
7	0	30	30		
8	0	30	30		
9	0	30	44		
10	0	30	44		

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 3, w_3 = 4, v_3 = 16$$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	
2	0	0	0	0	
3	0	0	14	14	
4	0	0	14	16	
5	0	0	14	16	
6	0	30	30		
7	0	30	30		
8	0	30	30		
9	0	30	44		
10	0	30	44		

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 3, w_3 = 4, v_3 = 16$$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	
2	0	0	0	0	
3	0	0	14	14	
4	0	0	14	16	
5	0	0	14	16	
6	0	30	30	30	
7	0	30	30		
8	0	30	30		
9	0	30	44		
10	0	30	44		

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 3, w_3 = 4, v_3 = 16$$



# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

$w \backslash j$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	
2	0	0	0	0	
3	0	0	14	14	
4	0	0	14	16	
5	0	0	14	16	
6	0	30	30	30	
7	0	30	30	30	
8	0	30	30		
9	0	30	44		
10	0	30	44		

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 3, w_3 = 4, v_3 = 16$$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	
2	0	0	0	0	
3	0	0	14	14	
4	0	0	14	16	
5	0	0	14	16	
6	0	30	30	30	
7	0	30	30	30	
8	0	30	30	30	
9	0	30	44		
10	0	30	44		

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 3, w_3 = 4, v_3 = 16$$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	
2	0	0	0	0	
3	0	0	14	14	
4	0	0	14	16	
5	0	0	14	16	
6	0	30	30	30	
7	0	30	30	30	
8	0	30	30	30	
9	0	30	44	44	
10	0	30	44	44	

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 3, w_3 = 4, v_3 = 16$$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	
2	0	0	0	0	
3	0	0	14	14	
4	0	0	14	16	
5	0	0	14	16	
6	0	30	30	30	
7	0	30	30	30	
8	0	30	30	30	
9	0	30	44	44	
10	0	30	44	46	

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 3, w_3 = 4, v_3 = 16$$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	9
3	0	0	14	14	14
4	0	0	14	16	
5	0	0	14	16	
6	0	30	30	30	
7	0	30	30	30	
8	0	30	30	30	
9	0	30	44	44	
10	0	30	44	46	

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 4, w_4 = 2, v_4 = 9$$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	9
3	0	0	14	14	14
4	0	0	14	16	16
5	0	0	14	16	
6	0	30	30	30	
7	0	30	30	30	
8	0	30	30	30	
9	0	30	44	44	
10	0	30	44	46	

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 4, w_4 = 2, v_4 = 9$$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	9
3	0	0	14	14	14
4	0	0	14	16	16
5	0	0	14	16	23
6	0	30	30	30	
7	0	30	30	30	
8	0	30	30	30	
9	0	30	44	44	
10	0	30	44	46	

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 4, w_4 = 2, v_4 = 9$$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	9
3	0	0	14	14	14
4	0	0	14	16	16
5	0	0	14	16	23
6	0	30	30	30	30
7	0	30	30	30	30
8	0	30	30	30	
9	0	30	44	44	
10	0	30	44	46	

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 4, w_4 = 2, v_4 = 9$$



# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	9
3	0	0	14	14	14
4	0	0	14	16	16
5	0	0	14	16	23
6	0	30	30	30	30
7	0	30	30	30	30
8	0	30	30	30	39
9	0	30	44	44	
10	0	30	44	46	

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 4, w_4 = 2, v_4 = 9$$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	9
3	0	0	14	14	14
4	0	0	14	16	16
5	0	0	14	16	23
6	0	30	30	30	30
7	0	30	30	30	30
8	0	30	30	30	39
9	0	30	44	44	44
10	0	30	44	46	

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 4, w_4 = 2, v_4 = 9$$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	9
3	0	0	14	14	14
4	0	0	14	16	16
5	0	0	14	16	23
6	0	30	30	30	30
7	0	30	30	30	30
8	0	30	30	30	39
9	0	30	44	44	44
10	0	30	44	46	46

$$K(w, j) = \begin{cases} K(w, j-1) & \text{se } w_j > w \\ \max \begin{cases} K(w, j-1) \\ v_j + K(w - w_j, j-1) \end{cases} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$j = 4, w_4 = 2, v_4 = 9$$

# Problema dello zaino

ESEMPIO

SENZA RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

SI

NO

SI

NO

w\j	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	9
3	0	0	14	14	14
4	0	0	14	16	16
5	0	0	14	16	23
6	0	30	30	30	30
7	0	30	30	30	30
8	0	30	30	30	39
9	0	30	44	44	44
10	0	30	44	46	46

Valore massimo ottenibile = 46

con quali oggetti?

1 e 3  $\rightarrow$  peso 10

# Problema dello zaino

## PROBLEMA:

**INPUT:** Zaino di capacità  $W \geq 0$

$n$  item (oggetti)  $i_1, i_2, \dots, i_n$

PESI item  $w_1, w_2, \dots, w_n \in N$

VALORE item  $v_1, v_2, \dots, v_n \in N$

**OUTPUT:** selezione degli oggetti che abbia peso totale minore o uguale a  $W$  e che massimizzi il valore totale degli oggetti selezionati



### 0/1 o INTERO

un oggetto o non viene selezionato,  
o viene selezionato per intero

### FRAZIONARIO

un oggetto può essere frazionato in  
parti più piccole e solo  
una parte può essere selezionata

Si risolve in tempo  
polinomiale con un  
algoritmo greedy