PLC

Dato un problema PLC P in forma di minimizzazione, con i primi 2 vincoli con segno '≥' e il terzo vincolo con '=', e 5 variabili, considera il problema duale D:

1) D ha 3 variabili e 5 vincoli; ✅
2) D ha 5 variabili e 3 vincoli; ❌
3) la prima variabile di D deve essere non negativo; ✅
4) la terza variabile di D non ha restrizioni di segno; ✅
5) la seconda variabile di D deve essere non positivo. ❌

Motivazioni:
il numero di vincoli e variabili tra primale e duale si scambiano;
Il segno dei vincoli del primale min è uguale al segno della corrispondente variabile nel duale, quindi se il primo vincolo è ≥ anche la prima variabile del duale sarà ≥, se invece il vincolo è un'equazione allora la corrispondente variabile non ha restrizioni.
Commenti:
L'ordine dei vincoli è importante, se non viene specificato allora non si può dire con certezza quali siano le restrizioni delle variabili del duale

Considera il problema scritto nella sua forma primale $P = min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$, e duale$D = max\{u^T b : u^T A \leq c^T\}$
allora

1) una soluzione ammissibile di P dà un limite inferiore al valore ottimo di D; ❌
2) una soluzione ammissibile di D dà un limite inferiore al valore ottimo di P; ✅
3) una coppia di soluzioni x e u con x ammissibile per P e u ammissibile per D sono ottimali se $c^T - c^T{}_B B^{-1} A \geq 0$ ✅
4) una coppia di soluzioni x e u tali che $(u^T A - c^T)x = 0$ sono ottimi se x ≥ 0; ✅ (**Slackness conditions**)
5) una coppia di soluzioni x e u sono ottimali se x ≥ 0 e u ≥ 0. ❌

Motivazioni:
1) e 2): per il teorema della dualità debole il valore di una qualsiasi soluzione ammissibile del problema primale (se è di min) è sempre maggiore o uguale ad una qualsiasi soluzione ammissibile del problema duale.
3) se ho una soluzione x ammissibile i cui costi ridotti (cioè l'equazione scritta nella risposta) sono non negativi allora x è ottima (se il problema è di min)
4)Per le Slackness conditions
5) Non ha senso

Dato un problema plc primale di minimizzazione e il suo duale: (1,4,5)

1) se il primale ha soluzione finita, allora il duale ha soluzione finita ✅
2) se il primale è vuoto, il duale è vuoto ❌
3) se il primale è illimitato, allora il duale è illimitato ❌
4) una soluzione duale ammissibile può avere un valore inferiore a quello della soluzione primale ottima ✅
5) qualsiasi soluzione ammissibile del primale ha un valore maggiore o uguale a una qualsiasi soluzione ammissibile del duale ✅

Motivazioni:
1) 2) e 3)

Primale → / Duale ↓	Soluzione Finita	Vuoto	Illimitato
Soluzione Finita	X		
Vuoto		X	X
Illimitato		X	

4) e 5) sono uguali alla domanda precedente
Commenti: La domanda 4) è ambigua perché la soluzione del duale *è SEMPRE* inferiore al primale

Dato un problema di minimizzazione usiamo l'algoritmo dual simplex, allora:

1) ad ogni passo il valore della soluzione corrente è un limite superiore al valore ottimale ❌

2) ad ogni passo il valore della soluzione corrente è un limite inferiore al valore ottimale ✅

3) l'operazione di pivot viene eseguita sugli elementi a_{ij}> 0 ❌

4) l'operazione di pivot viene eseguita sugli elementi a_{ij}< 0 ✅

5) i costi ridotti $\underline{c^T}$ diventano non negativi nell'ultima iterazione, dando la soluzione ottimale ❌

Motivazioni:
1) e 2) ad ogni passo del dual simplex la funzione obiettivo assume un valore che è più che ottimo ma la soluzione che troviamo non è ammissibile perché c'è sempre almeno una variabile negativa, tranne nell'ultima iterazione dove infatti trovo la soluzione ottima e ammissibile. Anche se la soluzione non è ammissibile sappiamo che il valore della funzione obiettivo ad ogni passo è un limite inferiore perché facendo il pivot andiamo a farla aumentare (l'elemento su cui faccio il pivot è negativo, i costi ridotti sono positivi, quindi facendo il pivot vado a sommare le due righe, il termine noto è negativo quindi il numero in alto a destra diminuisce ma siccome è l'opposto del valore della funzione obiettivo in realtà sta crescendo; detto a parole non si capisce niente ma basta guardare un esempio per capire che la funzione obiettivo cresce ad ogni iterazione).
3) e 4) Il pivot viene eseguito sempre solo sugli elementi negativi
5) i costi ridotti devono essere fin da subito tutti positivi altrimenti non posso neanche iniziare l'algoritmo del simplesso duale

Una soluzione di base di un problema di PLC si chiama degenere quando:

1) ci sono più variabili rispetto ai vincoli; ❌

2) il numero di variabili di base con valore zero è uguale al numero di vincoli; ❔

3) il numero di variabili di base con valore zero è uguale alla differenza di numero di colonne e righe (n - m); ❔

4) il numero di variabili di base con valore diverso da zero è uguale al numero di righe nella matrice dei vincoli; ❌

5) la matrice di base è invertibile. ❌

Motivazioni:

Per definizione una soluzione di base è detta degenere quando c'è almeno un variabile che ha valore 0. Se la domanda da intendere come "dammi la definizione di soluzione degenere" allora sono tutte sbagliate, se invece è da intendere come "dimmi quale delle seguenti soluzioni è degenere" allora sia la 2) che la 3) sono corrette perché hanno almeno una variabile con valore 0, anche se la 3) in particolare è molta ambigua perché il numero (n-m) è a caso, nel senso che potrebbe essere negativo(quando ho più vincoli che variabili).
Commenti:
Ad una prova di esame era capitata la risposta: il numero di variabili di base con valore diverso da zero è inferiore al numero di righe della matrice dei vincoli, che è vera perché il numero di variabili di base è esattamente il numero di righe della matrice dei vincoli.

Dato un problema di PLC, l'analisi di sensibilità di un termine noto b:

1) definisce un limite superiore sul valore della soluzione ottimale;

2) definisce il valore minimo e massimo di b che non modifica la base ottimale;

3) definisce il valore minimo e massimo di b che non cambia il valore della soluzione ottima;

4) definisce l'intervallo di valori di b che non modifica i costi ridotti;

5) definisce l'intervallo di valori di b che non lo fa modificare le doppie variabili; (cosa cazzo significa?)

Motivazioni:
L'analisi di sensitività dei termini noti ci dice come posso variare i termini noti b senza variare la base ottima.
Se la soluzione è ottima avrò che deve essere ammissibile e i costi ridotti devono essere non negativi:

$$x_B = B^{-1}b \ \geq \ 0$$
$$c^T - c^T{}_B \ B^{-1}A \ \geq \ 0$$

Se cambia b i costi ridotti rimangono uguali ma la soluzione di base potrebbe essere non più ammissibile. Perché lo sia basta sostituire a b = b + Δb e studiare il sistema che viene fuori, che ci indica di quanto può variare ciascun termine noto b affinché la base ottima, che rimane sempre la stessa, sia ammissibile.
Invece la funzione obiettivo, che è
$z = c_B x = c_b B^{-1} b$,
varia sempre al variare di b.
Quindi:
1) falsa perché non c'entra niente, 2) vera per definizione, 3) falsa perché la funzione obiettivo varia sempre al variare di b, 4) falsa perché i costi ridotti non variano al variare di b, 5) ????

Dato un problema PLC P in forma standard con n variabili e m vincoli, si consideri il metodo delle due fasi. Il problema artificiale utilizzato per risolvere la prima fase:

1) ha m variabili e n vincoli;
2) ha al massimo n + m variabili e m vincoli;
3) ha una funzione oggetto in forma di massimizzazione;
4) fornisce una base ammissibile per il problema P, se la sua soluzione ottima ha valore zero;
5) fornisce una soluzione ammissibile e ottima per il problema P se la sua soluzione ha un valore negativo;

Motivazioni:
1) significherebbe scambiare vincoli e variabili, non ha senso 2) si perché se non ho nessuna colonna con solo un 1 nel problema originale al massimo devo aggiungerne m in quello artificiale, mentre il numero di vincoli rimangono uguali, 3) è sempre in forma di MIN, 4) vera per come funzione il metodo delle due fasi, 5) falsa perché la soluzione deve essere 0 e poi non è detto che fornisca anche la soluzione ottima al problema iniziale.

Commenti: se la soluzione del problema artificiale è maggiore o uguale a 0 il problema originale non ha soluzione

Il costo ridotto di una variabile di base x_j , in un tableau in forma base

1) è sempre nullo; ✅
2) è strettamente positivo se la soluzione attuale è ottima e il problema è in forma di minimizzazione; ❌
3) ha un valore non negativo se la soluzione attuale è ottima e il problema è di minimizzazione; ✅
4) ha un valore non positivo se la soluzione corrente è ottima e il problema è di minimizzazione; ❌
5) rappresentano la variazione della funzione obiettivo quando il termine noto del j-esimo vincolo aumenta di una unità; ❌

Motivazioni:
Per definizione i costi ridotti sono:

$$c^T - c^T{}_B\, B^{-1}A$$

e sono sempre $\geq\ 0$ se la soluzione è ottima quindi:
1) vera perché se la variabile è in base prendo la definizione di costo ridotto in cui ad A sostituisco B e viene sempre zero, 2) strettamente positivo è diverso da non negativo, 3) per definizione di soluzione ottima, 4) come prima, 5) La funzione obiettivo

Dato un problema plc con n variabili e m vincoli, una matrice di base è: (1)

1) nessuna delle risposte precedenti ❌
2) una matrice quadrata m*n con valore 1 sulla diagonale principale ❌
3) una sottomatrice quadrata della matrice dei vincoli, che può essere invertita ✅
4) una raccolta di n-m colonne della matrice dei vincoli ❌
5) una raccolta di m vincoli ❌

Dato il seguente tableau di un problema PLC in forma di minimizzazione:

x1	*x2*	*x3*	*x4*	*x5*	*-z*
0	2	0	**a**	-3	-5
1	0	0	**d**	-2	**b**
0	1	1	-1	2	8

1) se a> 0, il tableau rappresenta una soluzione ottimale ❌
2) se a = d = 0, la colonna di x1 e x4 fornisce una soluzione ammissibile ❌
3) se b> = 0 il problema non è vuoto ❌
4) il problema è illimitato, indipendentemente dai valori di a e d ❌

5) se a = 0, b> 0, le colonne di x1 e x2 danno una soluzione ammissibile primaria ❌

Dato PLC di minimizzazione, il costo ridotto di una variabile non in base x_j, in un tableau in forma base:

1) È strettamente positivo se la soluzione attuale è ottima ❌
2) È la variazione della funzione obiettivo quando il termine noto del j-esimo vincolo aumenta di una unità (e tutte le variabili non di base rimangono uguale a zero) ❌
3) È la variazione della funzione obiettivo quando la variabile xj cresce di un'unità (e tutte le variabili non di base rimangono uguale a zero) ❌
4) È sempre nullo ❌
5) Ha un valore non negativo se la soluzione corrente è ottimale ✅

Dato un problema al PLC P in forma standard con n variabili ed m vincoli, una base B e il tableau corrispondente, un'operazione di "pivot" viene utilizzata per: (1,5)

1) Trasforma una colonna j che non appartiene a B in una colonna della matrice identità ✅
2) Aggiunge una disuguaglianza valida al tableau corrente ❌
3) Trasforma il tableau corrente in un nuovo tableau associato a una base con cui condivide Bn -1 colonne ❌
4) Trasforma il tableau corrente in un nuovo tableau associato a qualsiasi base ❌
5) Trasforma il tableau corrente in un nuovo tableau associato a una base con cui condivide Bm -1 colonne ✅

Il metodo branch-and-bound: (3 giusta)

1) viene utilizzato per trovare la complessità computazionale di problema ❌
2) può essere applicato a problemi di minimizzazione in forma standard ❔
3) trova la soluzione ottima di un problema NP-completo ✅
4) utilizza sempre come procedura di delimitazione la soluzione del Problema PLC ❔
5) nessuna delle risposte precedenti ❌

Motivazioni:
2) può essere applicato a problemi di minimizzazione PLI non a PLC

4)il B&B “standard ”per risolvere PLI spiegato dal prof usa sempre la soluzione del rilassamento continuo come tecnica di bound, ma sono possibili anche altre tecniche

Il metodo branch-and-bound per problemi knapsack 0-1: (1,4)
1) utilizza un albero decisionale con un numero esponenziale di nodi ✅
2) utilizza la strategia deep first per esplorare l'albero decisionale ✅
3) calcola un upper bound in ogni nodo dell'albero decisionale ❌
4) utilizza un albero decisionale con un numero polinomiale di livelli ✅
5) utilizza un albero decisionale con un numero esponenziale di livelli ❌

Il metodo branch & bound per un problema knapsack 0-1:

1) Ha O(2^n) livelli degli alberi ❌
2) Calcola il limite superiore in tutti i nodi generati da un vincolo del genere xj=1 ❌
3) Usa la prima strategia highest first per esplorare l’albero ❌
4) Calcola il limite superiore solo nei nodi figlio generati aggiungendo un vincolo del genere xj=0 ?
5) Interrompe la ricerca non appena il livello n è raggiunto ❌

Motivazioni:
4) lo calcola anche nel nodo padre

Il metodo dei piani di taglio:

1) viene utilizzato per risolvere problemi di programmazione lineare con variabili continue ❌
2) termina con un numero polinomiale di iterazioni ❌
3) viene utilizzato per risolvere Problemi NP-completi ✅
4) ad ogni iterazione utilizza l'algoritmo simplex per risolvere il sottoproblema corrente ❌
5) utilizza la strategia deep first per esplorare i sottoproblemi ❌

Dato il modello PLI min {c T x: x ∈ P ∩ Z n } con P = {Ax = b, x ≥ 0} e la soluzione ottima x∗ del suo rilassamento continuo, il taglio di Gomory è:

1) una disuguaglianza per P che soddisfa il lemma di Farkas ❌
2) una disuguaglianza α T F x F ≥ α 0 soddisfatto da qualsiasi x ∈ P ❌
3) una disuguaglianza α T F x F ≥ α 0 soddisfatto da qualsiasi x ∈ P ∩ Z n , ma non da x∗ ✅
4) una disuguaglianza α T F x F ≥ α 0 soddisfatto da qualsiasi x ∈ P ma non da x ∗ ❌
5) nessuna delle risposte precedenti ❌

Il metodo branch-and-cut: (2,3)
1) utilizza sempre la strategia più bassa prima per esplorare i sottoproblemi
2) viene utilizzato per risolvere problemi NP-completi ("difficili")
3) ad ogni iterazione utilizza l'algoritmo simplex per risolvere il sottoproblema corrente
4) termina con un numero polinomiale di iterazioni
5) viene utilizzato per risolvere problemi di programmazione lineare con variabili continue

Dato un modello PLI P in forma di minimizzazione, considerare il suo rilassamento continuo e sia z * il valore ottimale del rilassamento:

1) z * è un limite superiore al valore P ottimale ❌
2) z * è un limite inferiore al valore P ottimale ✅
3) (estremo superiore) di z * è un limite inferiore al valore ottimale di P se i coefficienti della funzione obiettivo sono interi
4) (estremo superiore) di z * è un limite superiore al valore ottimale di P
5) (estremo superiore) di z * è un limite inferiore al valore ottimale di P se i coefficienti della funzione obiettivo sono numeri razionali

Un problema NP-completo:

1) può essere risolto esattamente utilizzando algoritmi di tempo polinomiale con un grado elevato ❌

2) non può essere risolto esattamente utilizzando computer all'avanguardia ❌
3) non può essere risolto esattamente in tempo polinomiale ✅
4) ha una complessità computazionale non superiore a O (n ^ 2) ❌
5) nessuna delle risposte precedenti ❌

Qualsiasi problema NP-completo:

1) può essere risolto esattamente usando l'algoritmo del simplesso con un numero di iterazioni non polinomiale ❌
2) Può essere risolto esattamente utilizzando l'algoritmo del simplesso con l'aggiunta di tagli di gomory ❌
3) Può essere risolto esattamente utilizzando l'algoritmo di dijkstra ❌
4) Non può essere risolto esattamente in tempo polinomiale ✅
5) Può essere risolto esattamente usando un albero decisionale binario con n livelli, dove n è il numero di variabili ❌

Un problema NP-completo descritto da un modello di programmazione lineare intera

1) Può essere risolto con il metodo del simplesso duale ❌
2) Può essere risolto con una sequenza di calcoli del percorso più breve ❌
3) Può essere risolto con un metodo branch-and-bound ✅
4) Non può essere risolto con un algoritmo esatto ❌
5) Può essere risolto con il metodo del simplesso rivisto ❌ (Non è nel programma)

Commento: un PLI può essere risolto con il simplesso duale solo se il rilassamento continuo ha come soluzione con valori interi.

L'algoritmo di Dijkstra: (2,4,5)

1) Non può essere applicato a grafi aciclici ❌
2) non può essere utilizzato in un grafico con archi di costo negativo ✅
3) può essere utilizzato per trovare l'albero di copertura del costo minimo ❌ (NON nel programma)
4) può essere utilizzato per trovare il percorso più breve in un grafo diretto, da un nodo sorgente a un nodo destinazione ✅

5) non può essere utilizzato in un grafo con circuiti negativi ✅