Calcolo Numerico, VI Esercitazione

CdL Informatica

Esercizi svolti a lezione

1) Scrivere una function Matlab che risolve il problema ai minimi quadrati

$$\min_{\alpha \in \mathbb{R}^n} \|A\alpha - y\|^2$$

dove $y \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ha rango n, con $n \leq m$. La function deve:

- prendere in ingresso il vettore $y \in \mathbb{R}^m$ e la matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- restituire un messaggio di errore se $n > m$ o se il rango di A è minore di n;
- calcolare la fattorizzazione $A = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$ usando il comando `qr` di MATLAB;
- calcolare $\tilde{y} = Q^T y$;
- risolvere il sistema $R\alpha = \tilde{y}_1$, dove $\tilde{y}_1 \in \mathbb{R}^n$ contiene le prime n componenti di $\tilde{y}$;
- restituire il vettore soluzione α calcolato al punto precedente.

2) La tensione superficiale S in un liquido è una funzione lineare della temperatura T:

$$S = aT + b.$$

Per un particolare liquido, al variare della temperatura, è stato misurato il valore di S ottenendo i risultati riportati nella seguente tabella:

T	0	10	20	30	40	80	90	100
S	68.0	67.1	66.4	65.6	64.6	61.8	61.0	60.0

Si scriva uno script in cui si calcolano i valori a, b usando la function dell'esercizio 1, si rappresenta graficamente la retta di migliore approssimazione nel senso dei minimi quadrati, si stima il valore di S per $T = 50$, $T = 60$, $T = 70$ ed, infine, si disegna il grafico del polinomio interpolante assieme alla retta dei minimi quadrati. Commentare i risultati ottenuti.
Si ripeta l'esercizio usando `Basic Fitting`.

3) La legge oraria di un corpo che si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione a è del tipo

$$s = \frac{1}{2}at^2 + bt + c.$$

Si considerino le seguenti misure sperimentali di s in funzione del tempo t:

t	0	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
s	0	1.2	3.0	3.7	7.9	11.6	15.5	19.8

Disegnare il grafico della parabola di migliore approssimazione, usando la function dell'esercizio 5, e confrontare il suo andamento con i dati assegnati. Stimare inoltre il valore di s per $t = 1.3$, $t = 2.4$, $t = 3.7$. Disegnare infine il grafico del polinomio interpolante e confrontarlo con quello della parabola di migliore approssimazione.
Si ripeta l'esercizio usando `Basic Fitting`.

4) Nella seguente tabella, è riportato il numero di transistor presenti in un circuito integrato di un dispositivo elettronico negli anni successivi al 1975:

t (anni dopo il 1975)	0	3	7	10	14	18	20
y	4500	29000	90000	229000	1200000	3100000	5500000

Secondo la legge di Moore, il numero di transistor segue una legge esponenziale del tipo

$$y = \alpha e^{\beta t} \tag{1}$$

dove α e β sono scalari positivi. Applicando il logaritmo naturale ad ambo i membri, otteniamo

$$\underbrace{\ln(y)}_{z} = \ln(\alpha e^{\beta t}) = \underbrace{\ln(\alpha)}_{=c_1} + \underbrace{\beta}_{=c_2} t.$$

La relazione $z = c_1 + c_2 t$ lineare e i coefficienti c_1, c_2 si possono calcolare usando un approccio ai minimi quadrati. Dunque, i parametri della legge esponenziale sono dati da $\alpha = e^{c_1}$ e $\beta = c_2$.

- Calcolare l'approssimazione ai minimi quadrati dei due parametri incogniti α, β, seguendo l'approccio spiegato sopra e usando la function dell'esercizio 1. Rappresentare graficamente la curva esponenziale (1) con i parametri calcolati.

- Stimare il numero di transistor nel 1987.

5) Nella tabella seguente, è riportato il numero di contagiati totali da Covid-19 in Italia nei 10 giorni successivi al 23 febbraio 2020.

t (giorni dopo il 23 feb)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	229	322	400	650	888	1128	1694	2036	2502	3089

Si suppone che, nella prima fase dell'epidemia, la crescita del numero di contagiati sia stata esponenziale, ovvero

$$y = \alpha e^{\beta t} \tag{2}$$

dove α e β sono scalari positivi.

- Riformulare la legge (2) in modo che il modello considerato diventi di tipo lineare.

- Caricare i dati sopra riportati dal file `dati_covid.txt`, usando il comando `importdata`.

- Calcolare i parametri α, β usando la function dell'esercizio 1. Rappresentare graficamente la curva esponenziale (2) con i parametri calcolati.

- Stimare il numero di contagiati dopo $t = 11$ giorni dal 23 febbraio e confrontare la stima con il valore vero dei contagiati, pari a 3858.

Esercizi suggeriti per casa

1) Un fenomeno biologico evolve nel tempo secondo una legge del tipo $y = \ln(at + b)$, essendo $\ln(x)$, $x > 0$, il logaritmo naturale valutato in x ed a, b scalari positivi incogniti.
Riformulare il problema in modo che il modello considerato sia di tipo lineare. Inoltre, supponendo di disporre delle seguenti misure

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y	0.00	0.67	1.09	1.41	1.50	1.83	1.92	2.05

calcolare l'approssimazione ai minimi quadrati dei due parametri incogniti e raffigurare i risultati di approssimazione ottenuti.

2) Nella seguente tabella, è riportato il numero di milioni di abitanti della popolazione mondiale per alcuni anni selezionati dal 1750 al 2009:

t	1750	1800	1850	1900	1950	1990	2000	2009
y	791	980	1260	1650	2520	5270	6060	6800

- Supponendo che la relazione tra t e y sia del tipo $y = e^{p_1+p_2t+p_3t^2}$, riformulare tale legge in modo che diventi quadratica.
- Calcolare i coefficienti p_1, p_2, p_3 usando la function dell'esercizio 1. Rappresentare graficamente la funzione esponenziale con i coefficienti così calcolati.
- Fornire una stima del numero di abitanti nel 1985, utilizzando la funzione esponenziale con coefficienti calcolati al punto precedente. Ripetere l'esercizio usando la spline cubica interpolante con condizioni "not-a-knot". Sapendo che nel 1985 la popolazione mondiale si attestava sui 4831 milioni di abitanti, quale delle due stime è più accurata?