UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

Dipartimento di Scienze Fisiche, Informatiche e Matematiche

MECCANICA

Lavoro ed Energia

Sommario

•Lavoro di una forza costante

•Lavoro di una forza variabile

•Energia cinetica e teorema dell'energia cinetica

•Forze conservative, energia potenziale

•Conservazione dell'energia meccanica

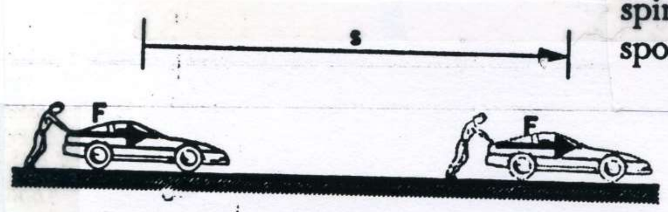
•Potenza

•Esempi

LAVORO

Quando una forza non nulla sposta un corpo viene compiuto LAVORO. Se la forza F è costante e ha la direzione orientate dello spostamento:

$$W = Fs$$



Viene compiuto lavoro nello spingere un'automobile in panne lungo una strada piana orizzontale. In questa situazione, il lavoro compiuto è uguale al prodotto di F, il modulo della forza spingente costante, per s, il modulo dello spostamento dell'automobile.

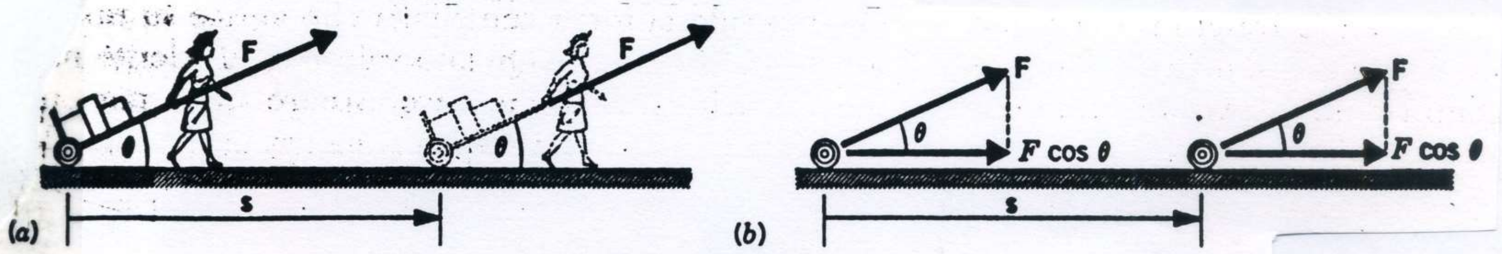
Unità di misura di W è il Joule (J).

1 J = 1 Nm = 1 kg m^2/s^2.

In generale, il lavoro compiuto da una forza costante non parallela allo spostamento è definito come

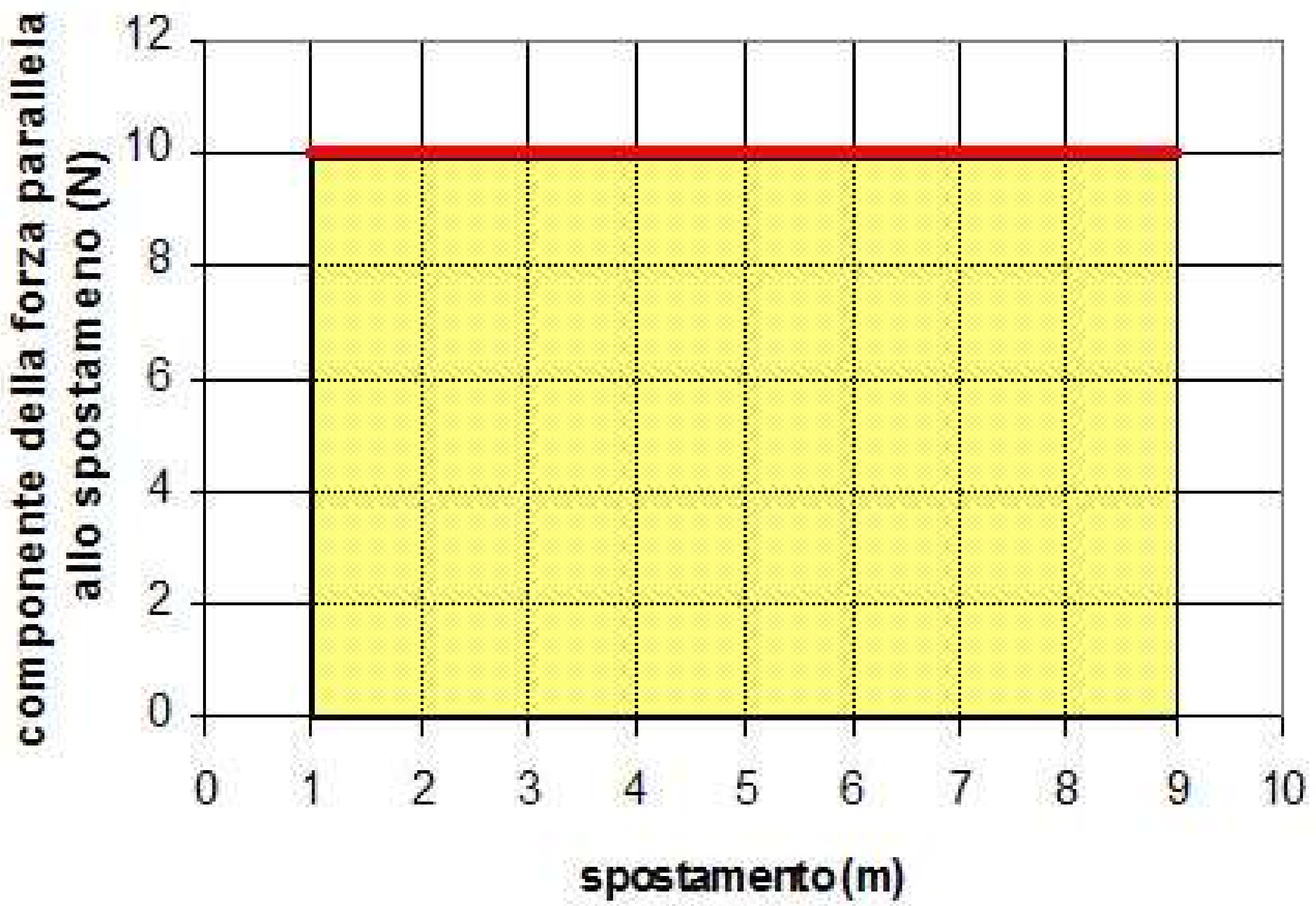
$$W = F\,S\,\cos\theta$$

F è l'intensità della forza, s la lunghezza delo spostamento dell'oggetto, e θ è l'angolo tra **F** e **s** (ved. figura).



(*a*) Può essere compiuto lavoro da una forza **F** la cui direzione orientata forma un angolo θ con la direzione orientata dello spostamento **s**. (*b*) Se la forza è costante, il lavoro è uguale al prodotto di $F \cos\theta$ per s. Il fattore $F\cos\theta$ è il valore algebrico del componente della forza nella direzione dello spostamento (ossia è la componente della forza secondo lo spostamento) e il fattore s è il modulo dello spostamento.

$$W=(F\cos\theta)s$$



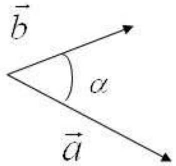
Interpretazione grafica del lavoro

Prodotto scalare tra due vettori

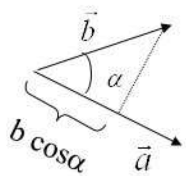
Prodotto scalare

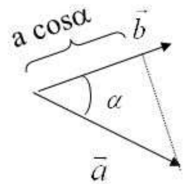
- Il **prodotto scalare** di due vettori **a** e **b** è una grandezza scalare!!

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\alpha}$$



➢Si può ottenere moltiplicando a per la proiezione di **b** nella direzione di **a** oppure, come prodotto di b per la proiezione di **a** su **b**





➢In coordinate cartesiane:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}}$$

Lavoro come prodotto scalare

Sulla base della definizione data nella diapositiva precedente possiamo definire il lavoro come prodotto scalare del vettore forza per il vettore spostamento:

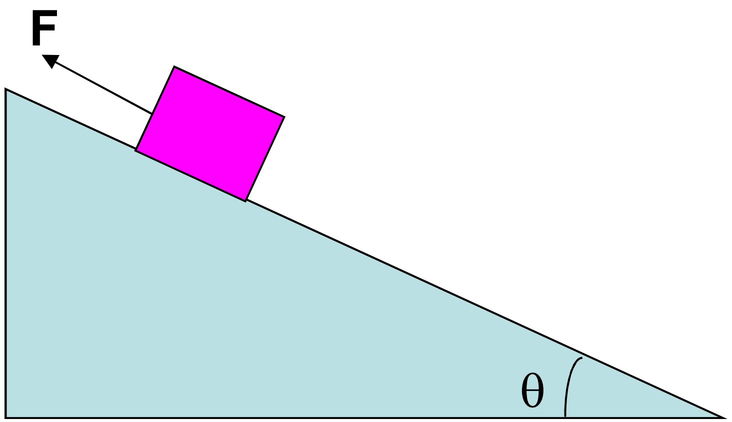
$$W = \mathbf{F} \circ \mathbf{S}$$

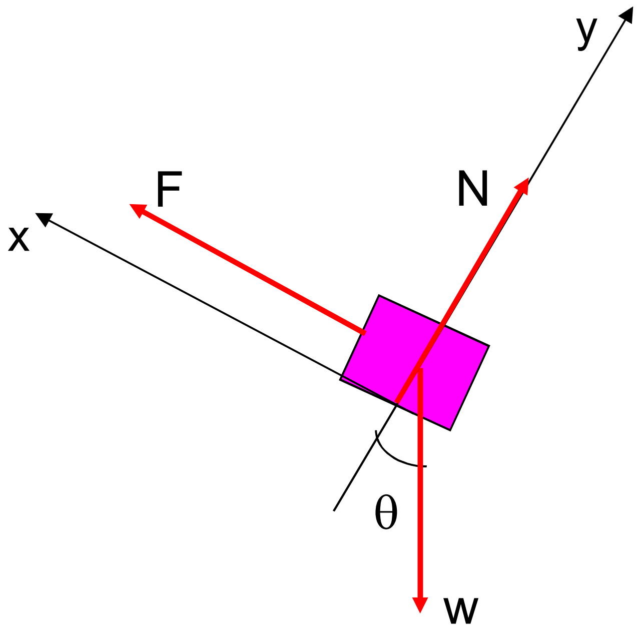
In presenza di più forze ($\mathbf{F}=\mathbf{F_1}+\mathbf{F_2}+\mathbf{F_3}+ \ldots$) il lavoro gode della proprietà di additività:

$$L=L_1+L_2+L_3+\ldots$$

Una scatola di massa m viene trascinata a velocità costante su un piano privo di attrito. La forza applicata F è parallela al piano. Calcolare il lavoro totale compiuto sulla scatola.

NB: Se la velocità è costante, significa che non c'è accelerazione! a = 0





Applico la seconda legge di Newton:

$$\sum F_x = F - w\sin\theta = 0$$

$$\sum F_y = N - w\cos\theta = 0$$

Il modulo di F vale: $F = mg\sin\theta$

Se la scatola percorre lungo la rampa una distanza Δx, il lavoro della forza F è:

$$W_F = F\Delta x\cos 0° = mg\Delta x\sin\theta$$

Il lavoro della gravità è:

$$W_g = w\Delta x\cos(\theta + 90°) = -mg\Delta x\sin\theta$$

Il lavoro della forza normale è:

$$W_N = N\Delta x \cos 90° = 0$$

Il lavoro netto compiuto sulla scatola è:

$$\begin{aligned} W_{\text{net}} &= W_F + W_g + W_N \\ &= mg\Delta x \sin\theta - mg\Delta x \sin\theta + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Qual è il lavoro totale sulla scatola dell'esercizio precedente se la scatola non è tirata a velocità costante?

$$\sum F_x = F - w\sin\theta = ma$$

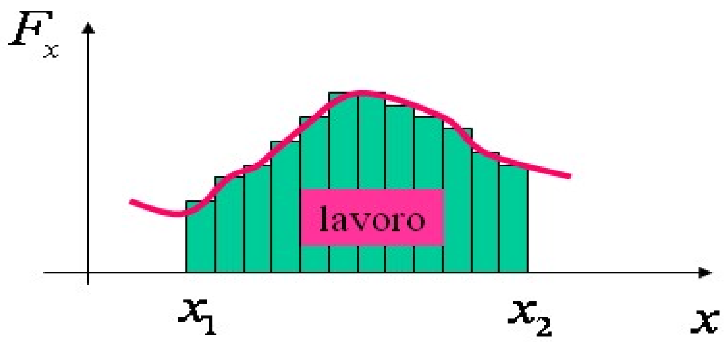
$$\therefore F = ma + w\sin\theta$$

Se la velocità NON è costante, significa che ci sarà una accelerazione non nulla, e quindi anche la risultante delle forze sarà non nulla.

Procedendo come prima:

$$W_{net} = W_F + W_a = (ma\Delta x + mg\sin\theta\Delta x) - mg\sin\theta\Delta x = ma\Delta x$$

Lavoro di una forza variabile



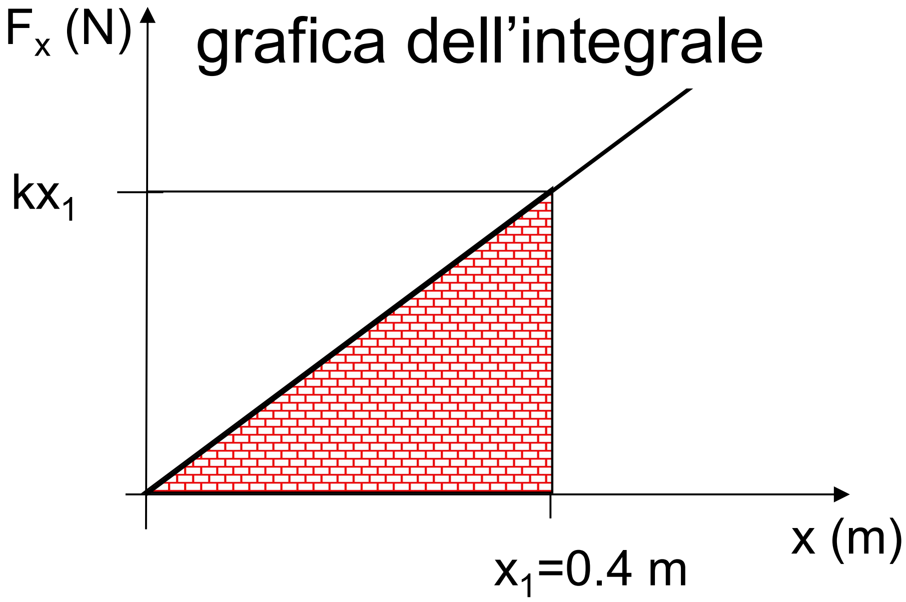
$$\int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{F}(x) \cdot d\boldsymbol{x}$$

Se la forza varia da punto a punto lungo lo spostamento, allora il lavoro deve essere calcolato con l'aiuto dell'analisi matematica

Anche in questo caso il lavoro può essere calcolato determinando l'area delimitate dal grafico della forza applicata in funzione dello spostamento (ved. disegno).

Una molla ideale ha k = 20,0 N/m. Qual'è il lavoro compiuto da un agente esterno per deformare la molla di 0.40 m partendo dalla molla non deformata?

Usiamo l'interpretazione grafica dell'integrale

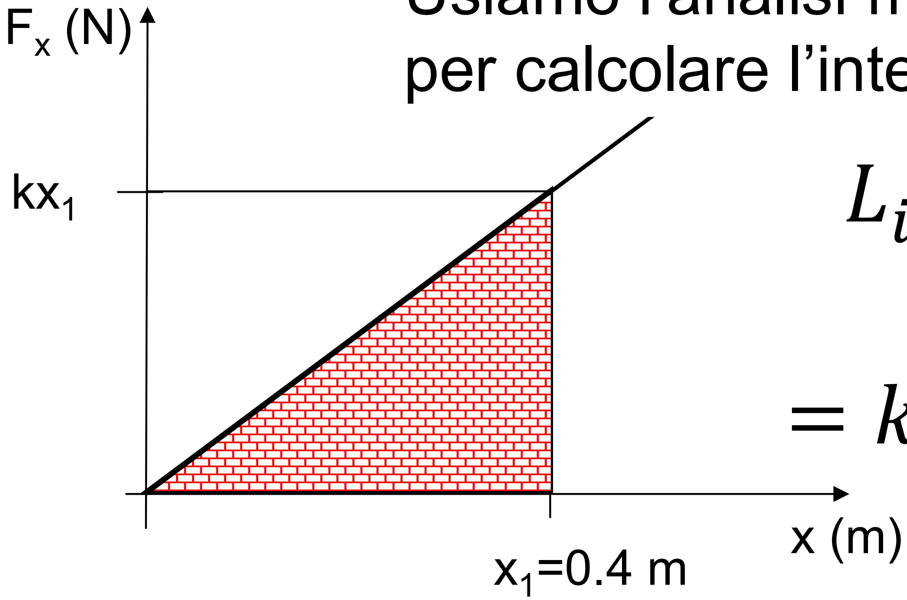


$$W = \text{Area under curve}$$

$$= \frac{1}{2}(kx_1)(x_1) = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}(20.0\ \text{N/m})(0.4\ \text{m})^2 = 1.6\ \text{J}$$

Il lavoro W corrisponde all'area rossa sottesa alla curva nera

Una molla ideale ha k = 20,0 N/m. Qual'è il lavoro compiuto da un agente esterno per deformare la molla di 0.40 m partendo dalla molla non deformata?



Usiamo l'analisi matematica per calcolare l'integrale:

$$L_{i\to f} = \int_0^{x_1} \boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{dx}'$$

$$= k\int_0^{x_1} x'dx' = \frac{1}{2}kx_1^2$$

Energia Cinetica

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

è l'energia cinetica traslazionale di un corpo.

Questa forma di energia è posseduta da un corpo in virtù del suo stato di moto.

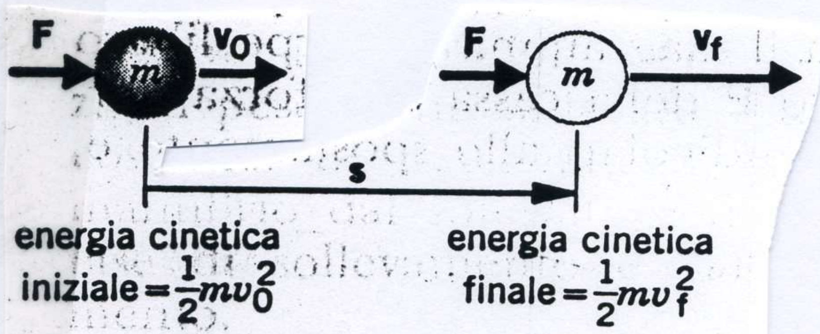
L'estinzione dei dinosauri e della maggioranza delle specie sulla Terra del periodo Cretaceo (65 milioni di anni fa) si imputa ad un asteroide che ha colpito la Terra . Il materiale espulso dopo l'urto ha prodotto un cambiamento climatico globale devastante. Se la massa dell'asteriode era 10^{16} kg (il suo diametro era stimato tra le 4 e le 9 miglia) e aveva una velocità di 30,0 km/sec, qual'era l'energia cinetica dell'asteroide?

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}\left(10^{16}\ \text{kg}\right)\left(30 \times 10^3\ \text{m/s}\right)^2$$

$$= 4.5 \times 10^{24}\ \text{J}$$

Equivalente a ~10^9 Megatons di TNT.

Energia cinetica e Lavoro



Quando una forza risultante costante **F** fa subire uno spostamento **s** al corpo a cui è applicata, la forza compie lavoro sul corpo. Per effetto del lavoro compiuto, l'energia cinetica del corpo aumenta da un valore iniziale $\frac{1}{2}mv_0^2$ a un valore finale $\frac{1}{2}mv_f^2$.

Teorema dell'energia cinetica:

$$W_{i\rightarrow f} = \Delta E_c = E_c^f - E_c^i$$

Teorema dell'energia cinetica - dimostrazione

$$dW = F dx = m\frac{dv}{dt}dx = m\frac{dv}{dt}v dt = m v dv$$

$$W = \int_i^f dW = \int_i^f mvdv = m\int_i^f vdv = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Una sciatrice di 58 Kg sta scendendo senza propulsione lungo un pendio inclinato di 25 gradi rispetto alla direzione orizzontale. Al contatto tra gli sci e la pista si esercita una forza di attrito dinamico di intensità 70 N che si oppone al suo moto. Alla sommità del pendio la velocità della sciatrice è di 3,6 m/s. Trascurando la resistenza dell'aria si determini la velocità della sciatrice in un punto situato a 57 m più a valle del punto di partenza.

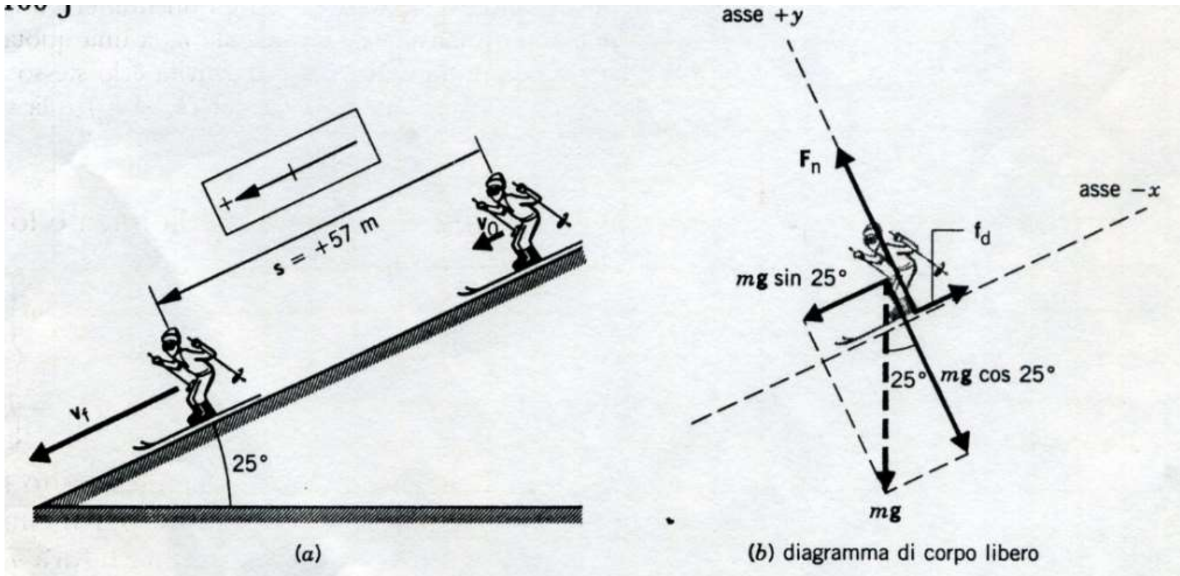


Figura 7.7. (*a*) Una sciatrice, che scende il pendio senza propulsione, subisce uno spostamento **s** = +57 m. (*b*) Il diagramma di corpo libero per la sciatrice.

Una sciatrice di 58 kg sta scendendo senza propulsione lungo un pendio inclinato di 25°, come è illustrato nella figura 7.7*a*. Una forza di attrito dinamico di modulo $f_d = 70$ N si oppone al suo moto. Vicino alla sommità del pendio, la velocità della sciatrice è $v_0 = 3{,}6$ m/s. Trascurando la resistenza dell'aria, si determini la velocità v_f in un punto situato 57 m a valle del punto di partenza.

Risoluzione

La velocità finale della sciatrice si può calcolare per mezzo del teorema dell'energia cinetica, purché si conosca il lavoro compiuto dalla forza risultante che agisce sulla sciatrice. Il diagramma di corpo libero nella parte (*b*) della figura rappresenta tutte le forze che agiscono sulla sciatrice. La forza normale $\mathbf{F}_n$ e il componente del peso della sciatrice secondo la direzione perpendicolare al piano inclinato, di valore algebrico $mg \cos 25°$, non compiono lavoro, essendo perpendicolari allo spostamento s. Compiono lavoro soltanto le forze lungo lo spostamento. La forza risultante lungo lo spostamento è

$$\mathbf{F} = +mg \sin 25° - f_d$$
$$= (58 \text{ kg})(9{,}80 \text{ m/s}^2) \sin 25° - 70 \text{ N}$$
$$= +170 \text{ N}$$

Il lavoro compiuto dalla forza risultante è

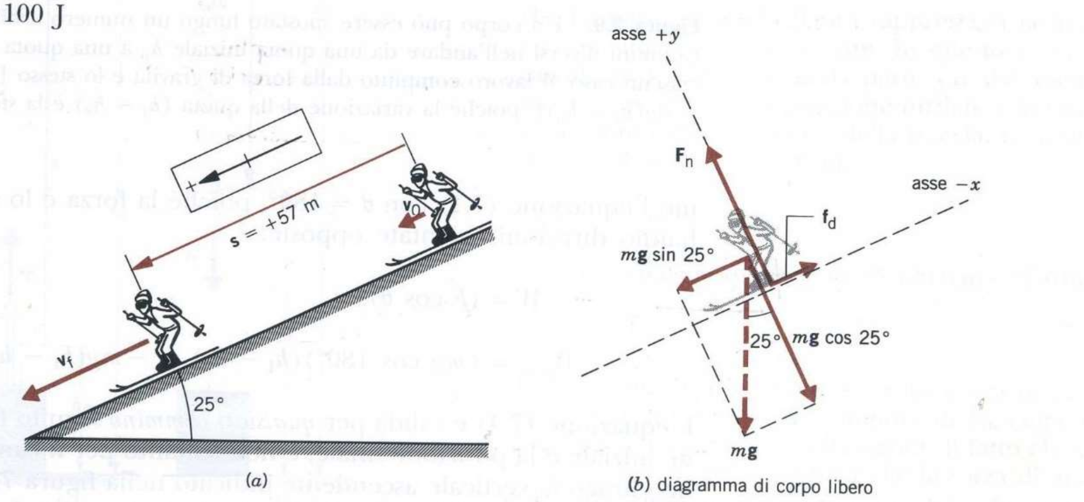
$$W = (F \cos \theta)s = [(170 \text{ N}) \cos 0°](57 \text{ m}) = 9700 \text{ J} \qquad (7.1)$$

Questo lavoro è positivo, poiché la forza risultante e lo spostamento hanno la stessa direzione orientata. Dal teorema dell'energia cinetica ($W = E_{cin,f} - E_{cin,0}$) segue che l'energia cinetica finale della sciatrice è

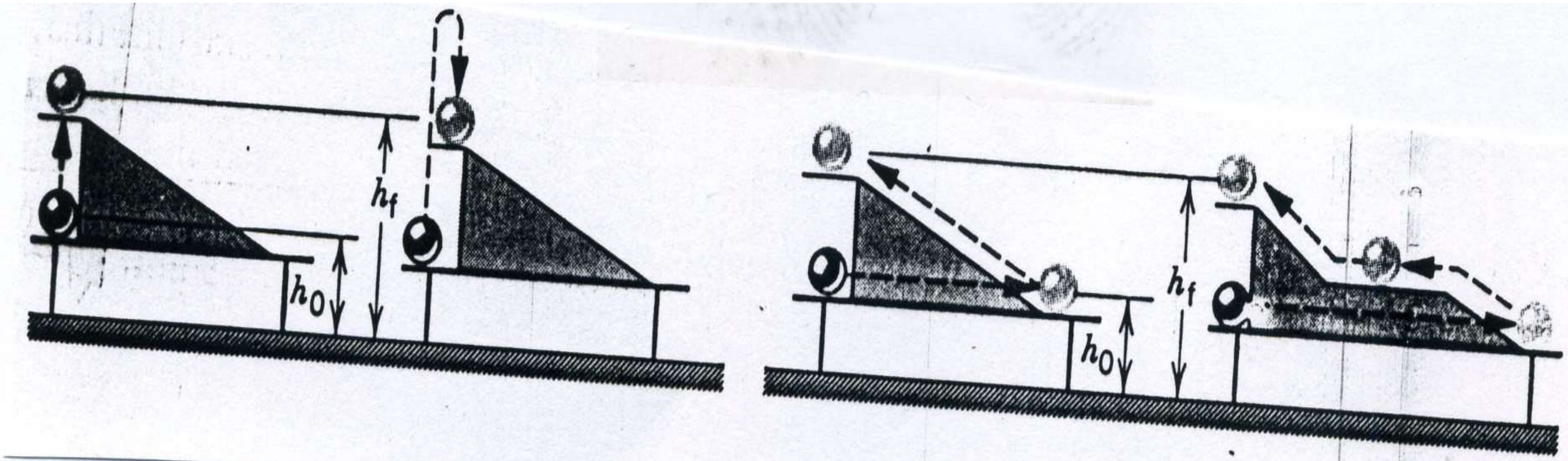
$$E_{cin,f} = W + E_{cin,0} = 9700 \text{ J} + \tfrac{1}{2}(58 \text{ kg})(3{,}6 \text{ m/s})^2 = 10\,100 \text{ J}$$

Poiché l'energia cinetica finale è $E_{cin,f} = \frac{1}{2} m v_f^2$, la velocità finale della sciatrice è

$$v_f = \sqrt{\frac{2(E_{cin,f})}{m}} = \sqrt{\frac{2(10\,100 \text{ J})}{58 \text{ kg}}} = \boxed{19 \text{ m/s}}$$



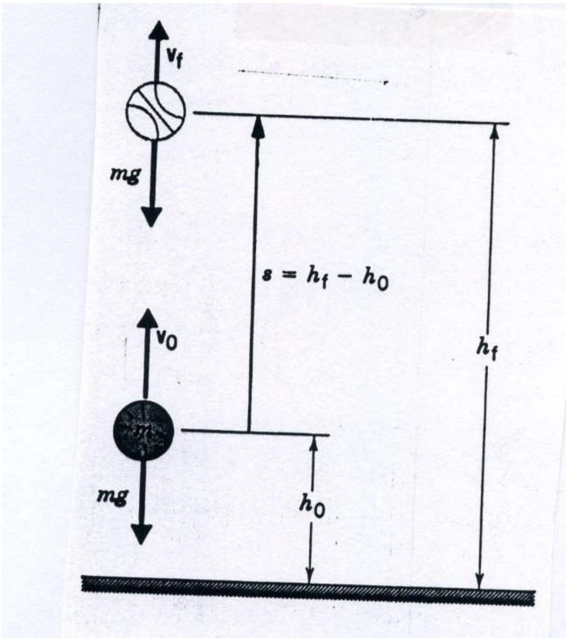
… Lavoro e forza gravitazionale ….



Un corpo può essere spostato lungo un numero arbitrario di cammini diversi nell'andare da una quota iniziale h_0 a una quota finale h_f. In ciascun caso, il lavoro compiuto dalla forza di gravità è lo stesso [$W_{grav} = -mg(h_f - h_0)$], poiché la variazione della quota $(h_f - h_0)$ è la stessa.

$$W = mg \cdot |\Delta h| \cdot \cos\theta = -(mg\, h_f - mg\, h_i)$$

Lavoro ed energia potenziale gravitazionale



Su una palla da baseball di massa m si esercita una forza di gravità di modulo mg. Quando la palla si muove verso l'alto, la forza di gravità compie lavoro negativo sulla palla, poiché la forza e lo spostamento hanno direzioni orientate opposte.

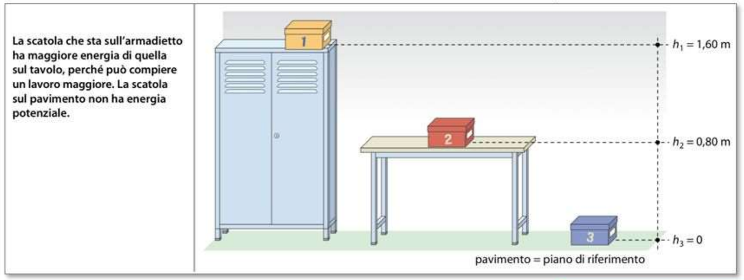
$$\bar{W}_{if} = -(E_{Pf} - E_{Pi})$$

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

m=massa
g=forza di gravità
h=altezza

Energia potenziale gravitazionale di un corpo: **lavoro** che la forza di **gravità** può compiere facendolo **cadere sul piano di riferimento**.

Se l'oggetto ha massa m e si trova a una quota h: $L_{gravità} = m \cdot g \cdot h$



ZANICHELLI

Giuseppe Ruffo, *Fisica: lezioni e problemi* © Zanichelli editore 2010 22

Più in generale…

Una forza è **conservativa** quando il lavoro compiuto NON dipende dal particolare cammino seguito per andare dalla posizione iniziale a quella finale, ma solo dalla posizione iniziale e finale. Per questa categoria di forze

$$W_{\mathrm{cons}} = -\Delta U$$

Ci sono quindi diverse forme di energia potenziale.

I corpi possiedono energia potenziale a motivo della loro posizione o configurazione.

La forza gravitazionale è una forza conservativa. Vicino alla superficie della Terra:

$$\Delta U_g = mg\Delta y$$

dove Δy è la variazione della coordinata verticale del corpo rispetto ad una arbitraria posizione di riferimento.

Lontano dalla superficie della Terra la forza gravitazionale che agisce su una massa M_2 per effetto di una massa M_1 a distanza r è

$$F(r) = -\frac{GM_1M_2}{r^2}$$

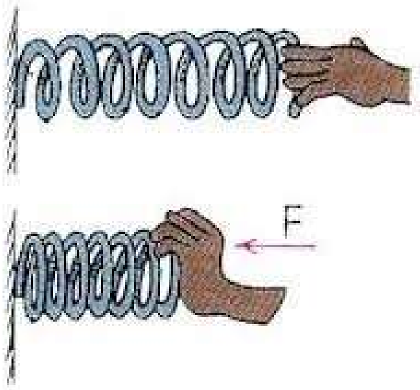
$$L = \int_{r_i}^{r_f} drF(r) = GM_1M_2\int_{r_i}^{r_f} -\frac{1}{r^2}dr = \frac{GM_1M_2}{r_f} - \frac{GM_1M_2}{r_i}$$

Dunque l'espressione più generale per l'energia potenziale gravitazionale della massa M_2 è:

$$U(r) = -\frac{GM_1M_2}{r}$$

$$\text{where } U(r=\infty) = 0$$

La forza elastica è una forza conservativa



Energia potenziale elastica

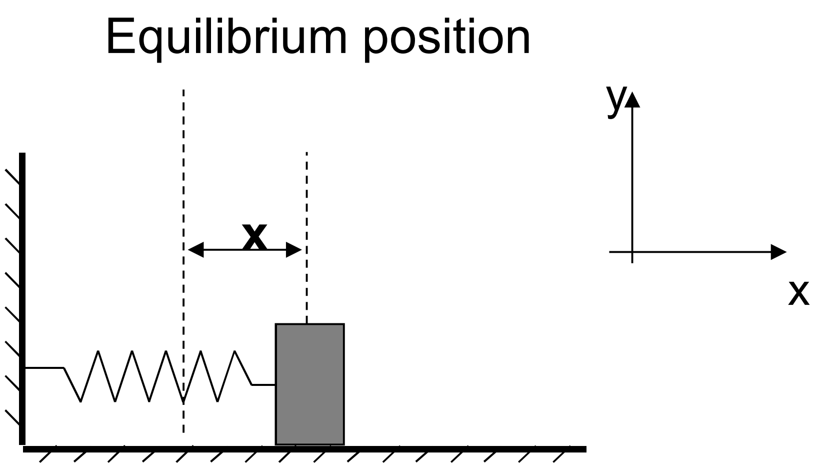
- ***Il lavoro della forza elastica, come quello della forza peso, non dipende dalla traiettoria, ma solo dalla posizione di partenza x_A e da quella di arrivo x_B***
- ***Se il punto materiale percorre una traiettoria chiusa ($A=B$) il lavoro è nullo ($x_A=x_B$ e quindi $L=0$)***
- ***Introducendo la funzione $U(x) = (1/2)kx^2$ il lavoro è dato da:***

$$L = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 = U(A) - U(B) = -\Delta U$$

- ***La funzione $U(x)$ è detta energia potenziale elastica ed è una grandezza scalare associata alla posizione in cui si trova il punto materiale (data da x)***
- ***La funzione $U(x)$ è definita a meno di una costante: se si pone $U(x)= (1/2)kx^2 +c$ vale sempre la relazione $L= -\Delta U$***

Energia potenziale elastica

Il lavoro compiuto per comprimere o dilatare una molla trasferisce alla molla energia potenziale elastica.



$$U_s = \frac{1}{2} k x^2$$

L'energia meccanica di una massa m collegata ad una molla è

$$E(t) = K(t) + U(t) = \frac{1}{2} m v(t)^2 + \frac{1}{2} k x(t)^2$$

Ancora sul teorema dell'en. cinetica

Presenza di forze non conservative

Lavoro di tutte le forze = variazione dell'energia cinetica

$$L_{F.cons.} + L_{F.no.cons.} = \Delta E_{CIN.} \Rightarrow -\Delta U + L_{F.no.cons.} = \Delta E_{CIN.}$$

$$L_{F.no.cons.} = \Delta E_{MECC.}$$

$$E_{MECC} = K + U$$

Lavoro delle forze non conservative = variazione dell'energia meccanica

Esempio:

Forza gravitazionale + Forza di attrito

Quando non ci sono forze di natura non conservativa l'energia meccanica di un sistema fisico si conserva, cioè

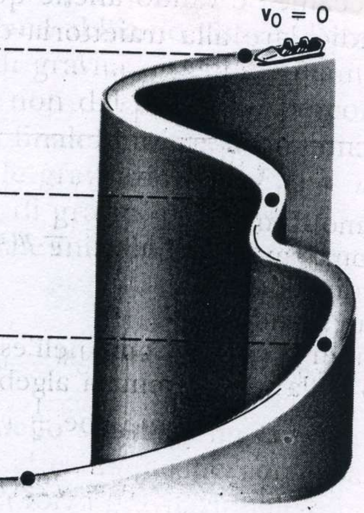
$$E_i = E_f$$

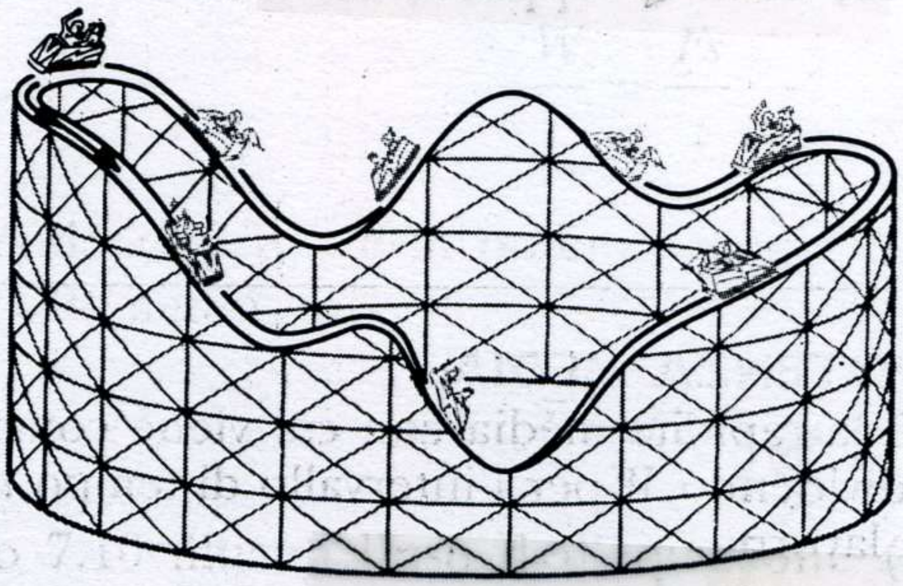
o equivalentemente

$$\Delta K = -\Delta U.$$

Se si trascurano l'attrito e la resistenza dell'aria, la corsa di un bob offre un esempio di come l'energia cinetica e l'energia potenziale si possono convertire l'una nell'altra e viceversa, mentre l'energia meccanica totale rimane costante in ciascun punto lungo il percorso. Il bob parte dalla condizione di quiete alla sommità del percorso, con 600 000 J di energia meccanica, tutta energia potenziale. I 600 000 J di energia meccanica rimangono costanti mentre il bob si muove lungo il percorso.

E_{cin}	E_{pot}	$E = E_{cin} + E_{pot}$
0	600 000 J	600 000 J
200 000 J	400 000 J	600 000 J
400 000 J	200 000 J	600 000 J
600 000 J	0	600 000 J





In assenza di attrito, di resistenza dell'aria e di tutte le altre forze, tranne la forza di gravità e la forza normale esercitata dal binario, un carrello delle montagne russe ritorna al punto di partenza con la stessa velocità che aveva inizialmente.

La legge di conservazione dell'energia non vale solo per fenomeni meccanici

Includendo tutte le forme di energia che conosciamo, l'energia totale dell'Universo si conserva in ogni processo fisico noto.

L'energia posseduta quindi si trasforma da una forma all'altra e si trasferisce tra corpi.

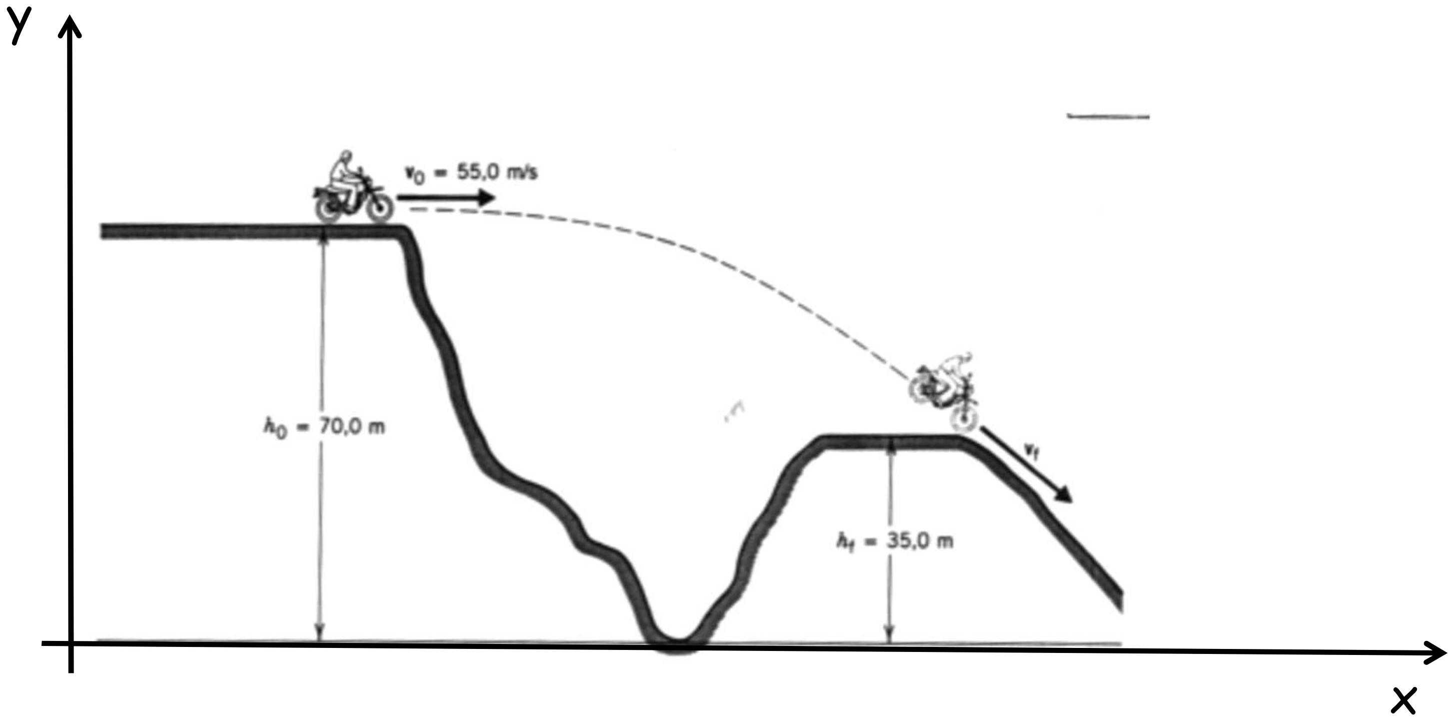
Table 6.1

Some Common Forms of Energy

Form of Energy	Brief Description
Translational kinetic	Energy of translational motion (Chapter 6)
Elastic	Energy stored in a "springy" object or material when it is deformed (Chapter 6)*
Gravitational	Energy of gravitational interactions (Chapter 6)
Rotational kinetic	Energy of rotational motion (Chapter 8)*
Vibrational, acoustic, seismic	Energy of the oscillatory motions of atoms and molecules in a substance caused by a mechanical wave passing through it (Chapters 11 and 12)*
Internal	Energies of motion and interaction of atoms and molecules in solids, liquids, and gases, related to our sensation of temperature (Chapters 14 and 15)*
Electromagnetic	Energy of interaction of electric charges and currents; energy of electromagnetic fields, including electromagnetic waves such as light (Chapters 14, 17–22)
Rest	The total energy of a particle of mass m when it is at rest, given by Einstein's famous equation $E = mc^2$ (Chapters 26, 29, and 30)
Chemical	Energies of motion and interaction of electrons in atoms and molecules (Chapter 28)*
Nuclear	Energies of motion and interaction of protons and neutrons in atomic nuclei (Chapters 29 and 30)

*Not a *fundamental* form of energy; made up of microscopic kinetic and/or electromagnetic energy.

Un motociclista salta al di la di un burrone (vedi figura). Quando abbandona la rupe la motocicletta ha velocità 55m/s. Trascurando la resistenza dell'aria si trovi la velocità a cui la motocicletta tocca il suolo sull'altro fianco del burrone.



RISOLUZIONE/1

Considero il sistema di riferimento illustrato in figura. Applico il principio di conservazione dell'energia.

$$\Delta E_K + \Delta U = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f$$

Secondo il sistema di riferimento scelto le condizioni note sono:

- v_i=55 m/s
- h_f=35 m
- h_i=70 m

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + 2g(h_i - h_f)} = 60.9 m/s$$

Un vagoncino delle montagne russe di massa pari a 1000 *kg* parte da un altezza di 40 *m* e arriva, in risalita, ad un' altezza di 25 *m* prima di fermarsi. Se esso percorre sul binario una distanza di 400 *m*, stimate la forza di attrito media (assumendola costante) sul vagoncino.

RISOLUZIONE/1

Sul sistema agisce la forza d'attrito che è una forza non conservativa.

$$L_{NC}=U_f-U_i=mgh_f-mgh_i=-mg(h_i-h_f)=-147 \text{ kJ}$$

Il lavoro compiuto sul sistema dalla forza di attrito è negativo.

$$L_{NC}=F_a \cdot s \cdot \cos\theta=F_a \cdot s \cdot \cos(\pi)= -F_a \cdot s$$

$$F_a=-L_{NC}/s=367 \text{ N}$$

Conservazione (o non conservazione) dell’energia meccanica

https://www.youtube.com/watch?v=5Lh8i-4uX6Q

Una scatola di massa 0,25 kg scivola lungo un piano orizzontale e privo di attrito alla velocità di 3,0 m/s. La scatola incontra una molla con k = 200 N/m. Di quanto si comprime la molla quando la scatola giunge al completo arresto?

$$E_i = E_f$$

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

$$0 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 + 0$$

$$x = \left(\sqrt{\frac{m}{k}}\right)v = 0.11\,\text{m}$$

Potenza

La potenza è il tasso di trasferimento dell'energia:

Potenza media $$P_{\text{av}} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

Potenza istantanea $$P = Fv\cos\theta$$

Unità di misura e il watt. 1 watt = 1 J/s = 1 W.

Un’auto da corsa di massa 500 kg percorre, su una strada piana, un quarto di miglio (402 m) in 4.2 s partendo da ferma. La sua velocità finale è 125 m/s. Trascurando gli attriti calcolare la potenza media del motore.

$$P_{\text{av}} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta U + \Delta K}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} m v_f^2}{\Delta t} = 9.3 \times 10^5 \text{ watts}$$

Un uomo di 70 Kg utilizza circa 10^7 J/giorno. Quanto vale il suo metabolismo medio? I medici misurano il metabolismo misurando la quantità di ossigeno consumata in un minuto. Sapendo che l'ossigeno consumato libera in media $2,0x10^4$ J/l di ossigeno consumato, calcolare il metabolismo di una persona che su una cyclette consuma 1,45 l/m.

$$1,45 \text{ l/min} \times 2,0 \times 10^4 \text{ J/l} = 2,90 \times 10^4 \text{ J/min} = 483 \text{ J/s} = 483 \text{ W}$$

Riassumendo…

https://www.youtube.com/watch?v=n1xl12od8pE