UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI
MODENA E REGGIO EMILIA

Dipartimento di Scienze Fisiche,
Informatiche e Matematiche

MECCANICA

Studio di moti 1D e 2D

- Moti 1D: moto rettilineo uniforme, moto rettilineo uniformemente accelerato
- Rappresentazione grafica del moti 1D
- Esempi
- Moto armonico semplice
- Cinematica in presenza di attrito
- Moti 2D non rotatori
- Esempi di applicazione della scomposizione di un moto 2D in due moti 1D

Iniziamo ad analizzare i due esempi più semplici di moti 1D partendo dall'esperimento

Visioniamo il filmato

https://www.youtube.com/watch?v=dfQuaFF8d-o

che ci illustra le caratteristiche del moto rettilineo e uniforme (min.0-7.23). Questo è il moto di un corpo puntiforme non soggetto a forze oppure soggetto a forze a risultante nulla

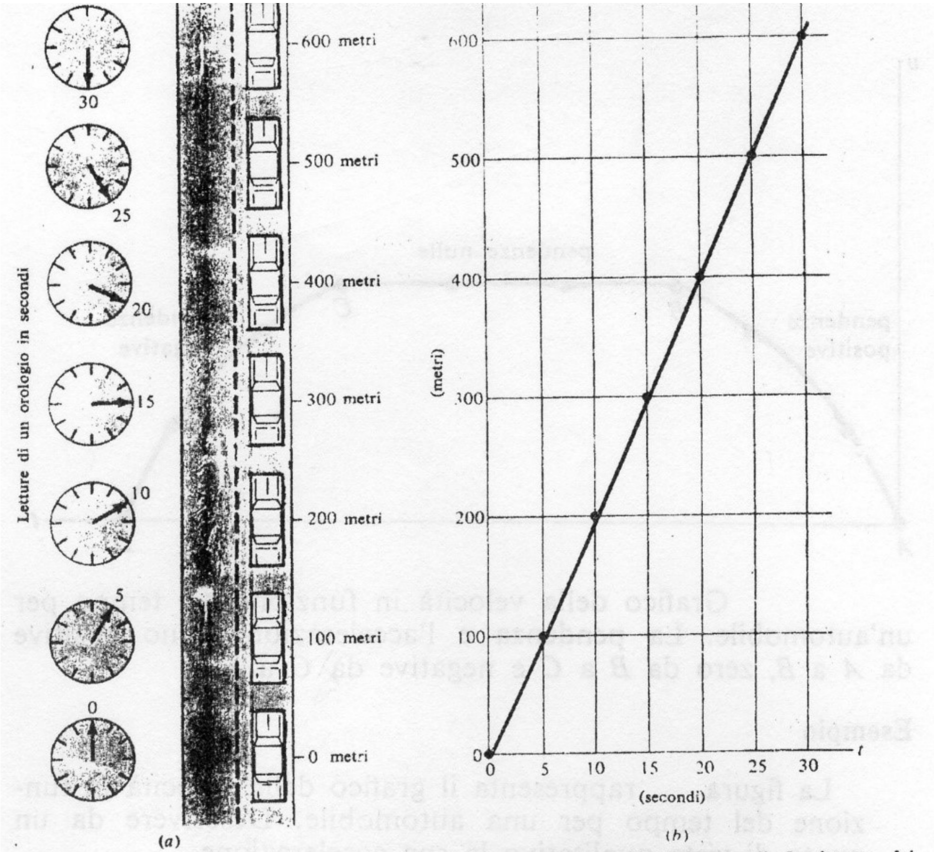
Moto rettilineo e uniforme:
Ricaviamo le formule usando la notazione di Leibniz

- v è costante (quindi $a=0$ ad ogni istante)
- Al tempo $t=0$ il corpo parte dalla posizione x_0: $x(t=0)=x_0$

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad \int_{x_0}^{x} 1\, dx' = v \int_{0}^{t} 1\, dt'$$

$$x - x_0 = v \cdot (t-0) = vt$$

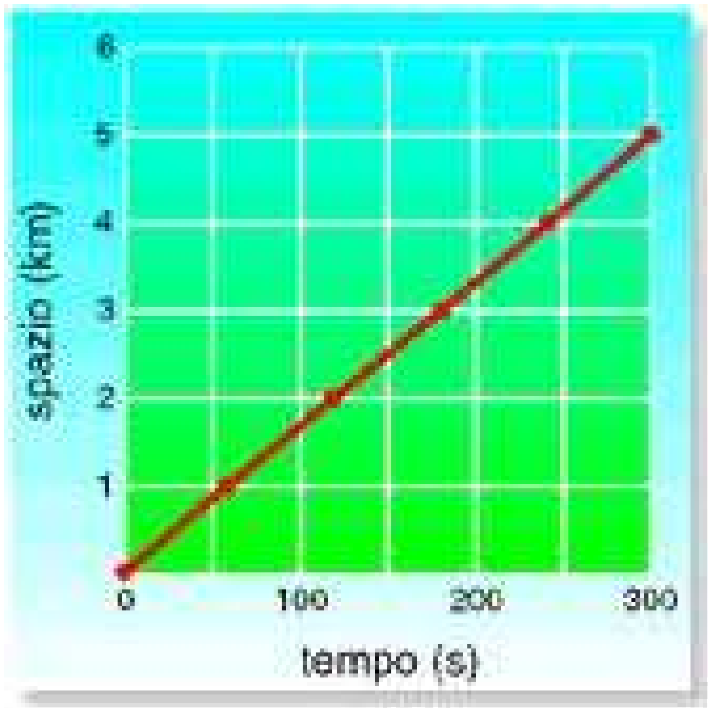
Moto rettilineo con velocità costante (uniforme)



(a) Posizione di un'automobile osservata ad intervalli di 5 secondi. La lettura del tachimetro è costante. (b) Grafico della posizione x in funzione del tempo t.

v=costante

$x=vt+x_0$ $a=0$



Cane contro coniglio

Un cane che corre a 10 m/s è a 30 m dietro un coniglio che si muove a 5m/s.

Quando il cane raggiungerà il coniglio?

Disegnare i diagrammi x-t e v-t per il moto del cane e del coniglio.

$v_{cane} = 10\ m/s$

$x_{0coniglio} - x_{0cane} = 30m$

$v_{coniglio} = 5\ m/s$

0

x_{0cane}

$x_{0coniglio}$

RISOLUZIONE/1.

Sia il moto del cane sia il moto del coniglio sono due moti rettilinei uniformi. Per cui le leggi orarie (spostamento in funzione del tempo) che descrivono i due moti sono dati da:

$$x_{cane} = x_{0cane} + v_{cane}t$$

$$x_{coniglio} = x_{0coniglio} + v_{coniglio}t,$$

dove v_{cane}=10 *m/s* e $v_{coniglio}$=5 *m/s*. All'istante iniziale il cane si trova 30 m dietro il coniglio, ovvero

$$x_{_0cane} = x_{0coniglio} - 30m$$

RISOLUZIONE/2

Quando il cane raggiunge il coniglio

$$x_{cane} = x_{coniglio}$$

$$x_{0cane} + v_{cane}t = x_{0coniglio} + v_{coniglio}t$$ **sapendo che** $$x_{0cane} = x_{0coniglio} - 30m$$

$$x_{0coniglio} - 30m + v_{cane}t = x_{0coniglio} + v_{coniglio}t$$

Risolvendo l'ultima rispetto al tempo si ottiene

$$t = \frac{30m}{v_{cane} - v_{coniglio}} = 6s$$

RISOLUZIONE/3

Diagramma dello spostamento

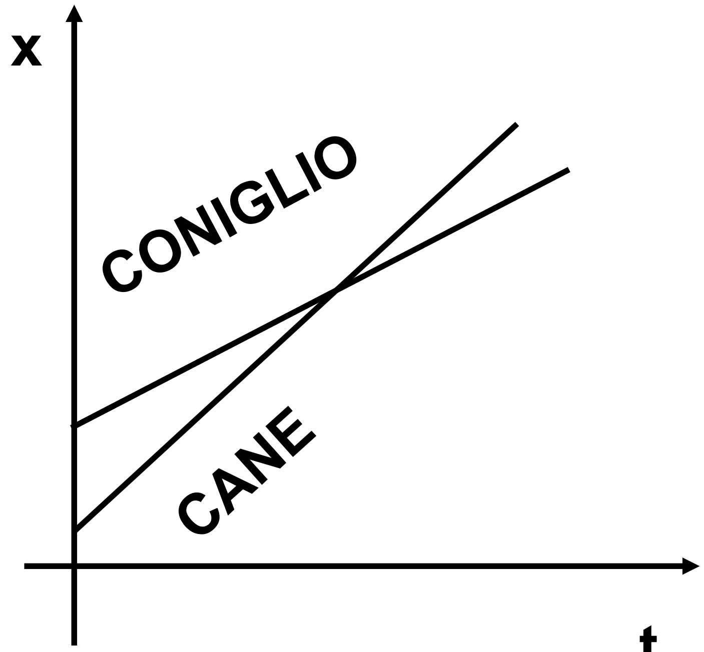
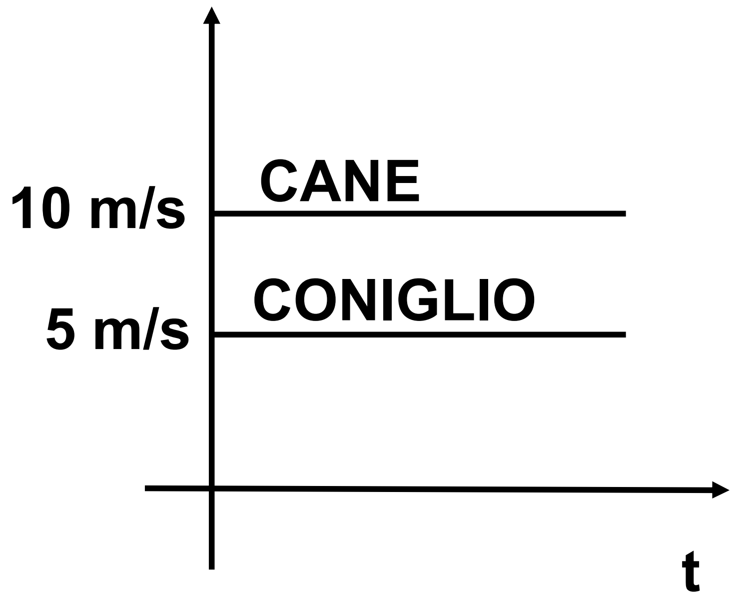


Diagramma della velocità



Visioniamo ora il filmato

https://www.youtube.com/watch?v=dfQuaFF8d-o

dal min 7.23 alla fine che ci mostra attraverso un esperimento le caratteristiche del moto rettilineo uniformemente accelerato. Questo è il moto di un corpo soggetto ad una forza costante.

Moto rettilineo con accelerazione costante

Ricaviamo le formule usando la notazione di Leibniz.

-l'accelerazione a è costante nel tempo

- Sia v_0 la velocità al tempo t=0
- Sia x_0 la posizione del corpo al tempo t=0

$$\mathrm{a} = \frac{dv}{dt} \qquad \mathrm{d}v = \mathrm{adt} \rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} dv' = \int_0^t dt' \, \mathrm{a}$$

$$\rightarrow v(t) - v_0 = \mathrm{a}\cdot(\mathrm{t}-0) \text{ da cui } \mathrm{v(t)} = \mathrm{v}_0 + \mathrm{at}$$

Moto rettilineo con accelerazione costante

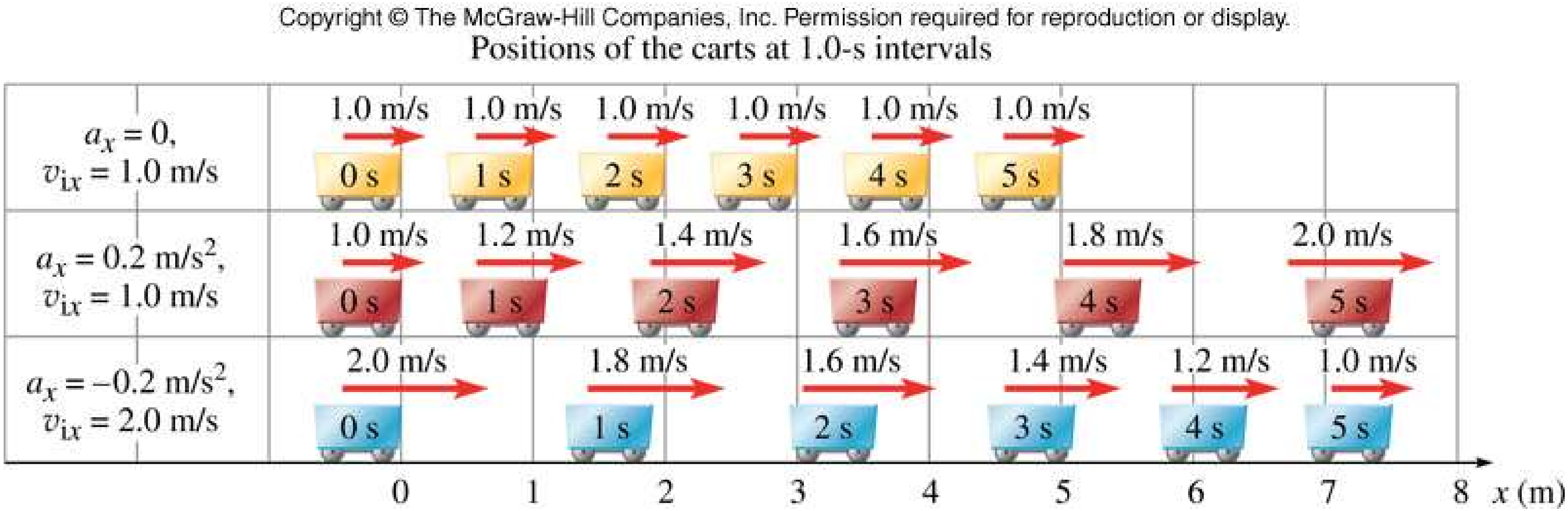
$$\mathrm{v} = \frac{dx}{dt} \qquad \mathrm{d}x = \mathrm{vdt} \rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx' = \int_0^t dt' \,(\mathrm{v}_0 + \mathrm{at}')$$

$$\rightarrow x(t) - x_0 = \int_0^t dt' \,(\mathrm{v}_0 + \mathrm{at}') =$$

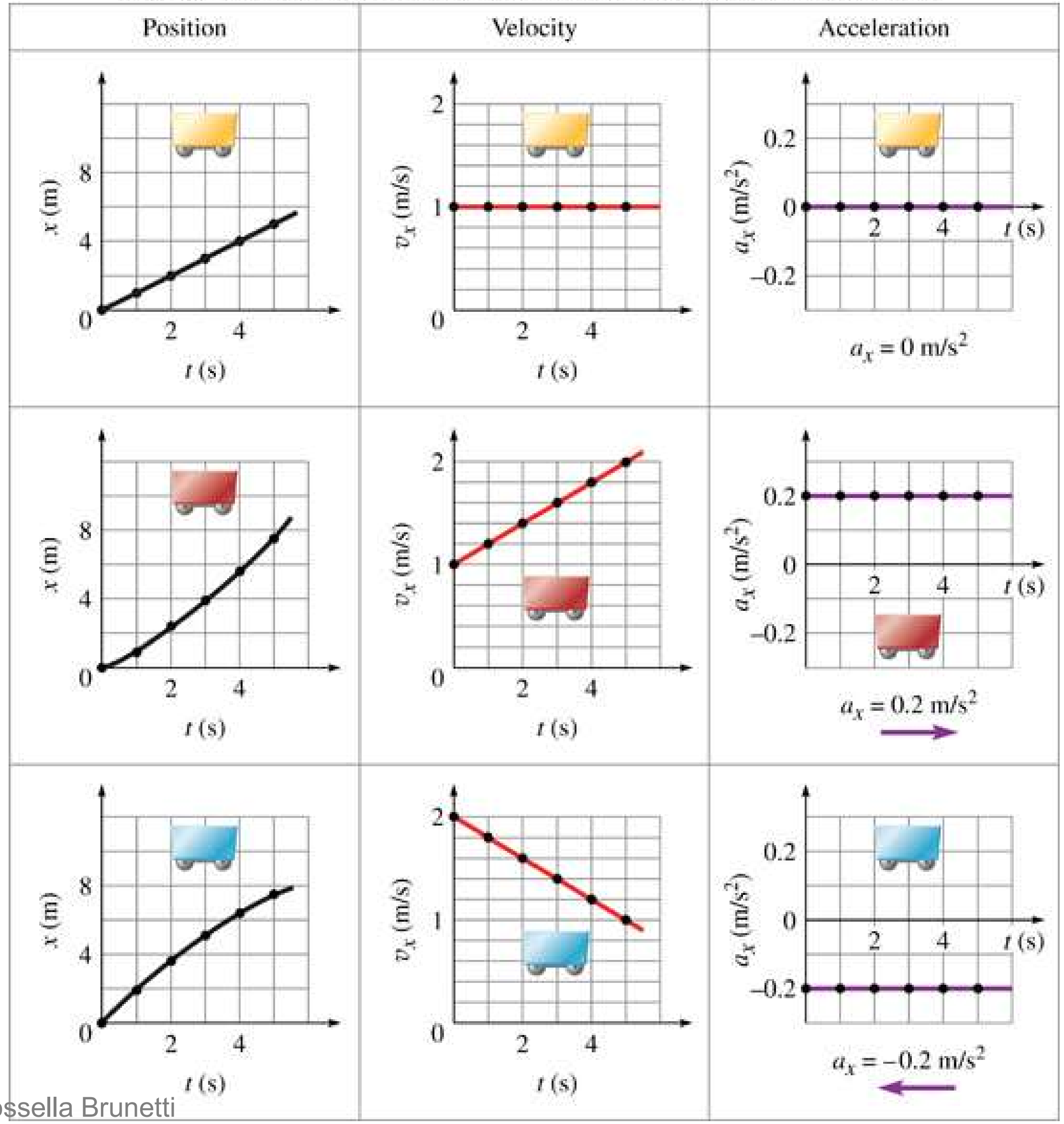
$$\int_0^t dt' \,\mathrm{v}_0 + \mathrm{a}\int_0^t t' \,\mathrm{dt}' =$$

$$\mathrm{v}_0 \mathrm{t} + \frac{1}{2}\mathrm{at}^2$$

Confronto tra moto con velocità costante e moto con accelerazione costante



Grafici di x, v_x, a_x per ciascuno dei tre carrelli



Moto rettilineo con accelerazione costante

Se l'accelerazione è costante le equazioni cinematiche sono:

Caratterizzazione	Accelerazione costante
Velocità	$v = v_i + a(t - t_i)$
Legge oraria	$s = \frac{1}{2}a(t - t_i)^2 + v_i(t - t_i) + s_i$
Velocità con istante iniziale $t_0 = 0$	$v = v_0 + at$
Legge oraria con istante iniziale $t_0 = 0$	$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$
Equazione senza il tempo	$v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)$

Progetta un air bag

Si supponga di dover disegnare un sistema di air-bag che possa proteggere il guidatore nel caso di un urto frontale alla velocità di 100 Km/h. Stimare quanto rapidamente si deve gonfiare l'air-bag per proteggere efficacemente il guidatore. Supporre che, in conseguenza dell'urto, l'auto si accartocci di 1 m.

$$v_i = 100\ km/h = \frac{\cancel{10}^2 \times \cancel{10}^3}{3.6 \times \cancel{10}^3} \frac{m}{s} = 0{,}28 \times 10^2\ m/s$$

$$v_f = 0$$

$$\bar{a} = \frac{v_f - v_i}{\Delta t}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}\bar{a}\,\Delta t^2 + v_i\,\Delta t = 1\ m$$

$$\frac{1}{2}\frac{\Delta v}{\cancel{\Delta t}}\Delta t^{\cancel{2}} + v_i\,\Delta t = 1\ m$$

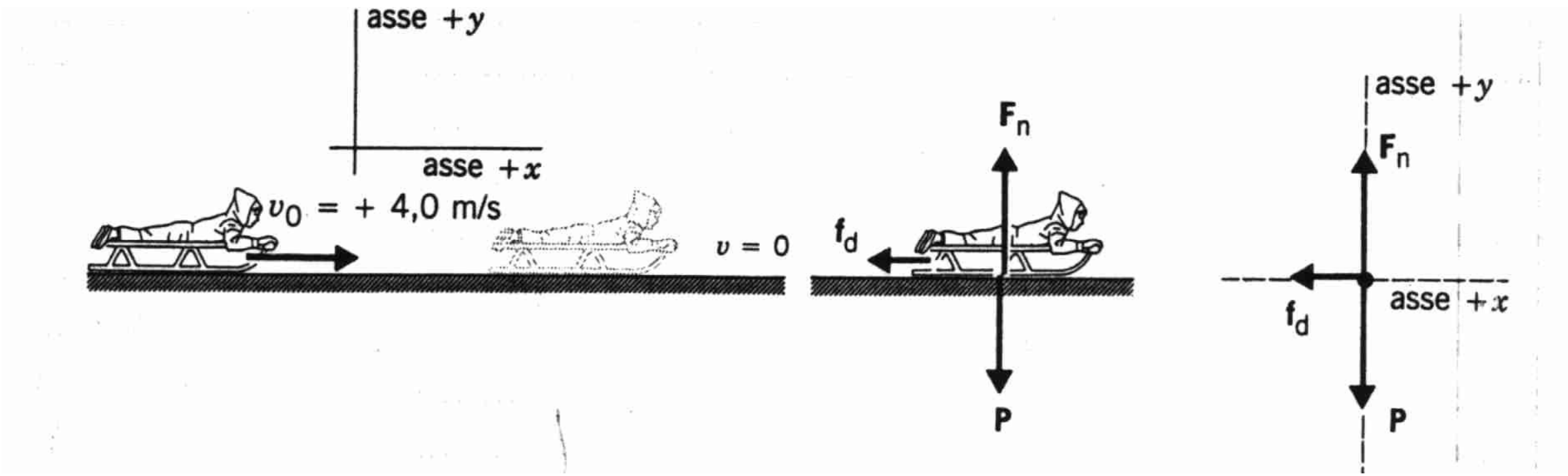
$$\left(\frac{1}{2}\Delta v + v_i\right)\Delta t = 1\ m$$

$$\Delta t = \frac{1\ m}{\frac{1}{2}\Delta v + v_i} = \frac{1\ m}{\frac{1}{2}v_f - \frac{1}{2}v_i + v_i}$$

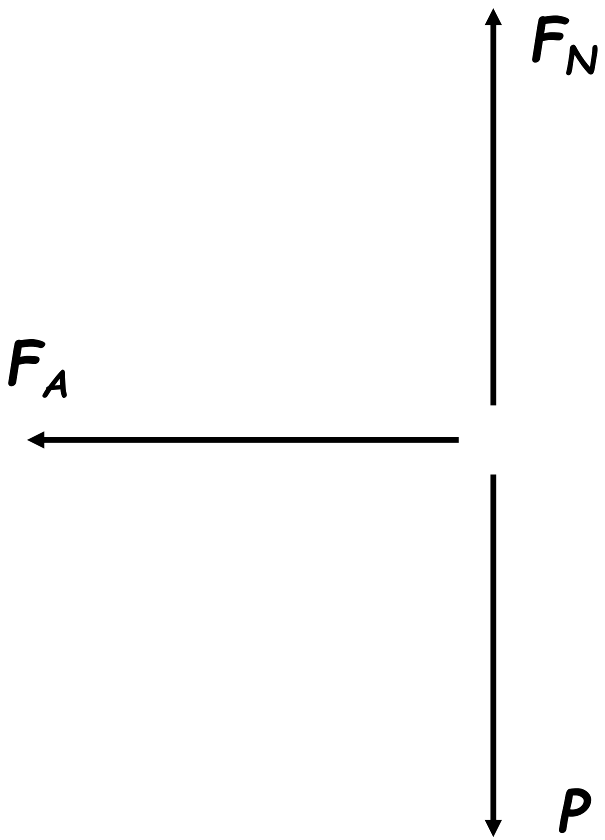
$$= \frac{1\ m}{\frac{1}{2}(v_f + v_i)} = \frac{1\ m}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}_1}\cdot \cancel{0{,}28}^{\,0{,}14} \times 10^2}$$

$$= 7{,}14 \times 10^{-2}\ s = 0{,}07\ s$$

Una slitta che viaggia alla velocità di 4m/s entra in una distesa orizzontale di neve. La slitta assieme al passeggero pesa 356N. Il coefficiente di attrito dinamico è μ_d =0,05 e il coefficiente di attrito statico è μ_s = 0,35. Si determinino la forza di attrito dinamico, lo spazio che la slitta percorre strisciando prima di arrestarsi e la forza necessaria per rimettere in moto la slitta .



Disegniamo il diagramma delle forze di corpo libero della slitta.



P è la forza peso, F_N è la forza normale (che è sempre perpendicolare al piano d'appoggio), mentre la forza di attrito F_a è diretta in verso opposto a quello del moto (asse x) e vale in modulo

$$|F_A| = \mu_D F_N$$

con μ_D il coefficiente di attrito dinamico.

Per ricavare F_N notiamo che il moto avviene lungo l'asse x, mentre lungo l'asse *y* la slitta è in equilibrio. La condizione di equilibrio lungo l'asse *y* si ottiene imponendo che sia nulla la risultante delle forze applicate lungo y. Ovvero

$$F_N - P = 0 \Rightarrow F_N = P = 356\ N$$

Da cui

$$F_A = -(0.05 * 356) N = -17.8\ N$$

Ho messo il segno meno perchè la forza di attrito è orientata nel verso negativo lungo l'asse x

Il moto lungo l'asse *x* sara uniformente accelerato con accelerazione $a_x = F_A / m$.

$$a_x = \frac{F_A}{m} = \frac{F_A}{P} g = -0.48 m / s^2$$

Ho usato che $P=mg$

Le leggi che descrivono spostamento e velocità sono

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad \textbf{1)}$$

$$v = v_0 + a_x t \qquad \textbf{2)}$$

Per determinare lo spazio percorso dalla slitta prima dell'arresto, mi calcolo dalla 2) l'istante di tempo t_f a cui si arresta la slitta (si ricava imponendo *v*=0) e lo vado a sostituire nella 2)

$$t_f = -\frac{v_0}{a_x} = \frac{4}{0.48} s = 8.33s$$

$$x = (4 * 8.33 - 0.5 * 0.48 * 8.33^2)m = 16.7m$$

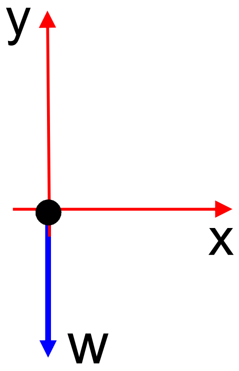
La forza F necessaria per rimettere la slitta in moto dovra essere pari in modo assoluto alla forza di attrito statico. Da cui:

$$F = F_{AS} = (0.35 * 356) N = 125\ N$$

Caduta libera

Un sasso è lanciato dalla cima di una collina. Trascurando la resistenza dell'aria solo la forza di gravità agisce sul sasso. Diciamo che il sasso è in **caduta libera**.

il diagramma di corpo libero del sasso è:



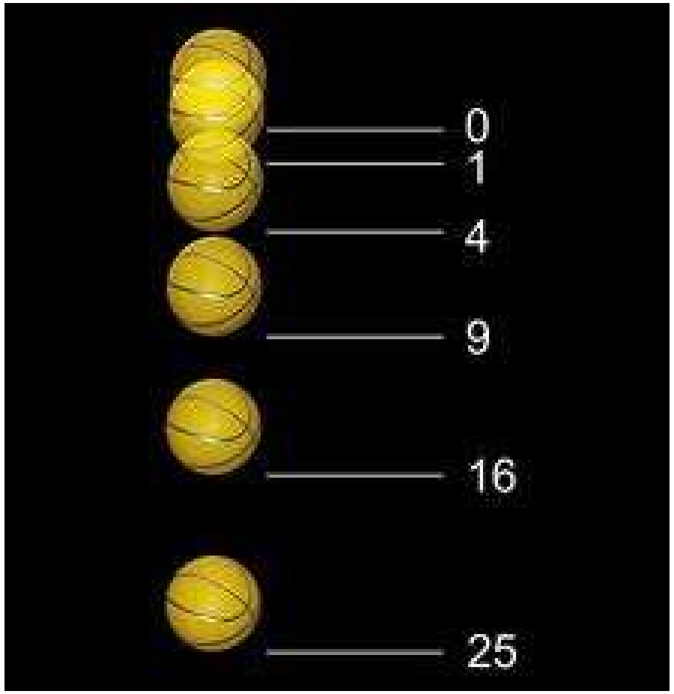
Applicando la seconda legge di Newton

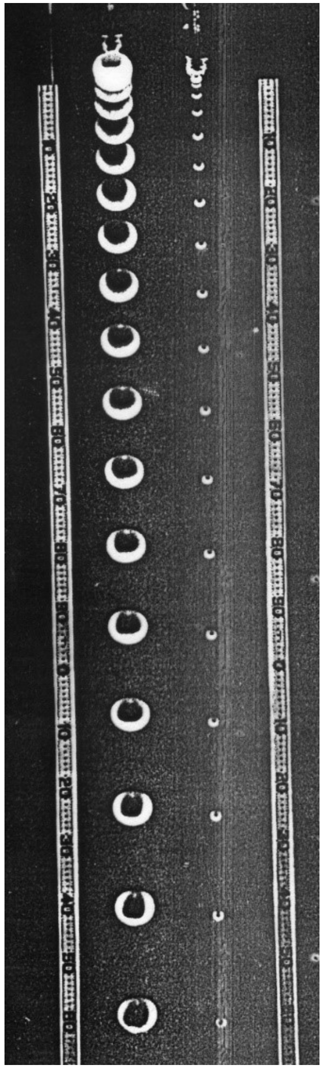
$$\sum F_y = -w = mg = ma$$

$$a = -g = -9.8\ \mathrm{N/kg}$$

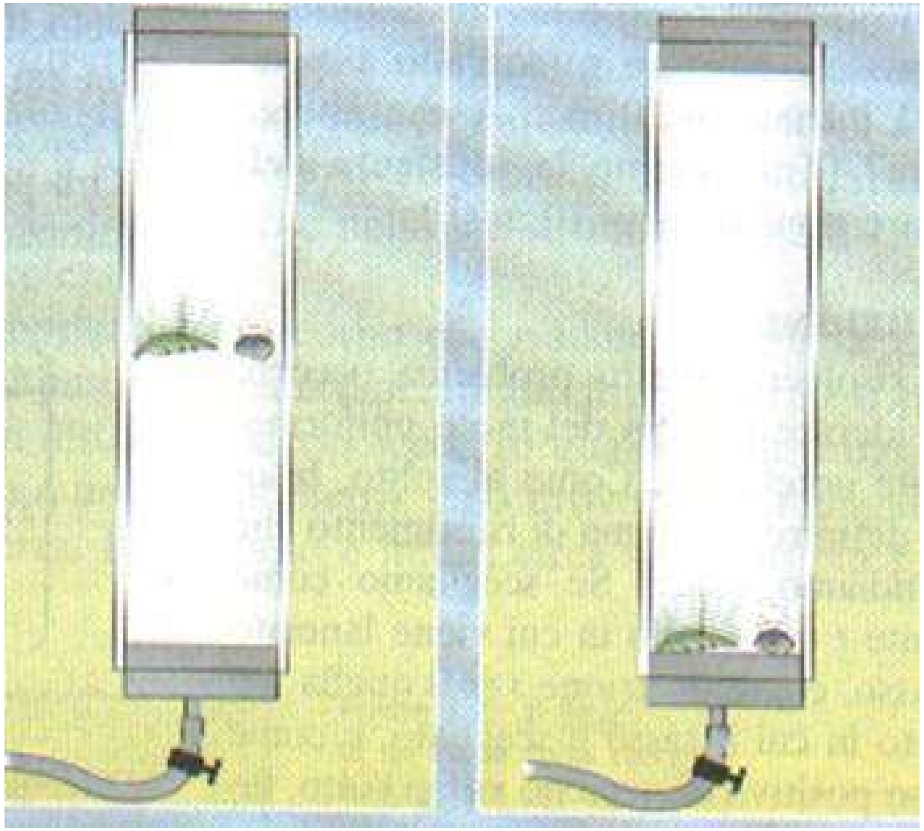
$$= -9.8\ \mathrm{m/s^2}$$

Caduta libera





Il tubo di Newton



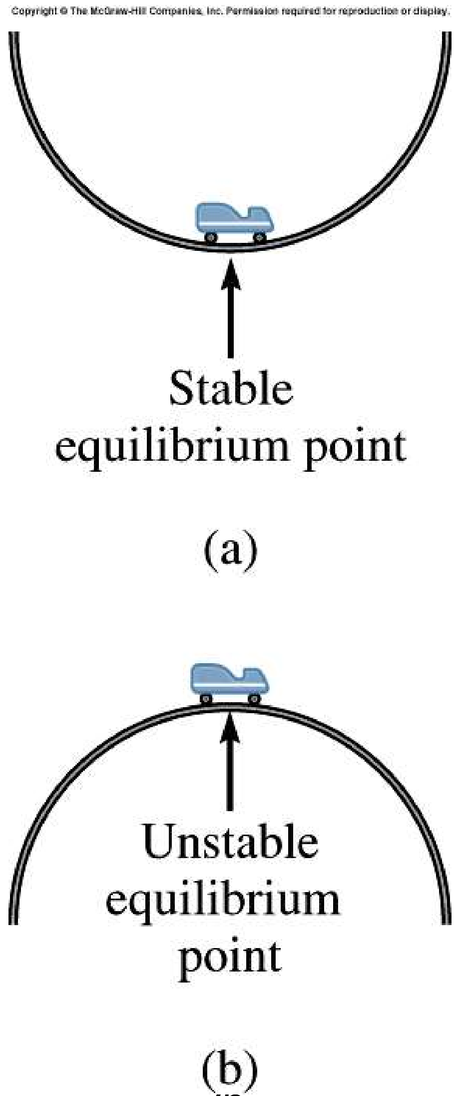
$$g = 9{,}8\ m/s^2$$

https://www.youtube.com/watch?v=9jwGUDrq_tc

Moto armonico semplice

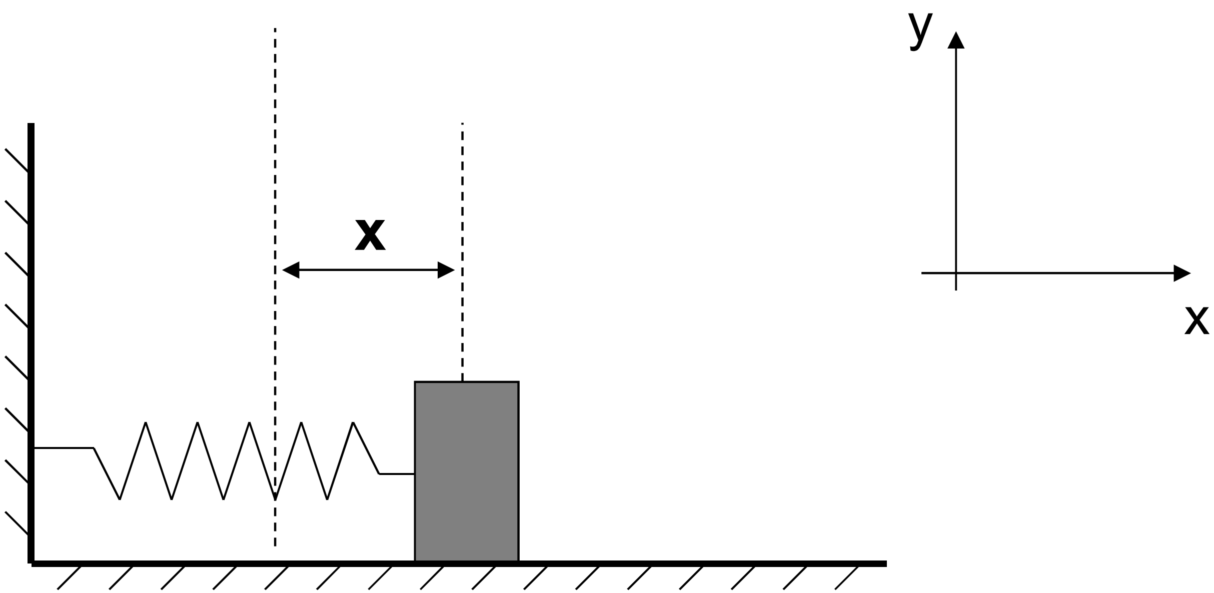
Un corpo si muove di **moto armonico semplice** quando al corpo è applicata

una forza di richiamo, cioè una forza sempre diretta verso un punto di equilibrio stabile, **direttamente proporzionale allo spostamento** del corpo dalla posizione di equilibrio.



Il moto di una massa su un piano orizzontale privo di attrito collegata ad una molla, trascurando la resistenza dell'aria, è un esempio di moto armonico semplice

Posizione di equilibrio



Per una molla ideale il modulo della forza esercitata sull’estremo libero della molla è:

$$F_x = -kx$$

F_x è la forza di richiamo di questo moto.

x è la lunghezza dello spostamento e k è la costante di proporzionalità, detta costante elastica di richiamo; essa è caratteristica della molla e le sue unità sono N/m.

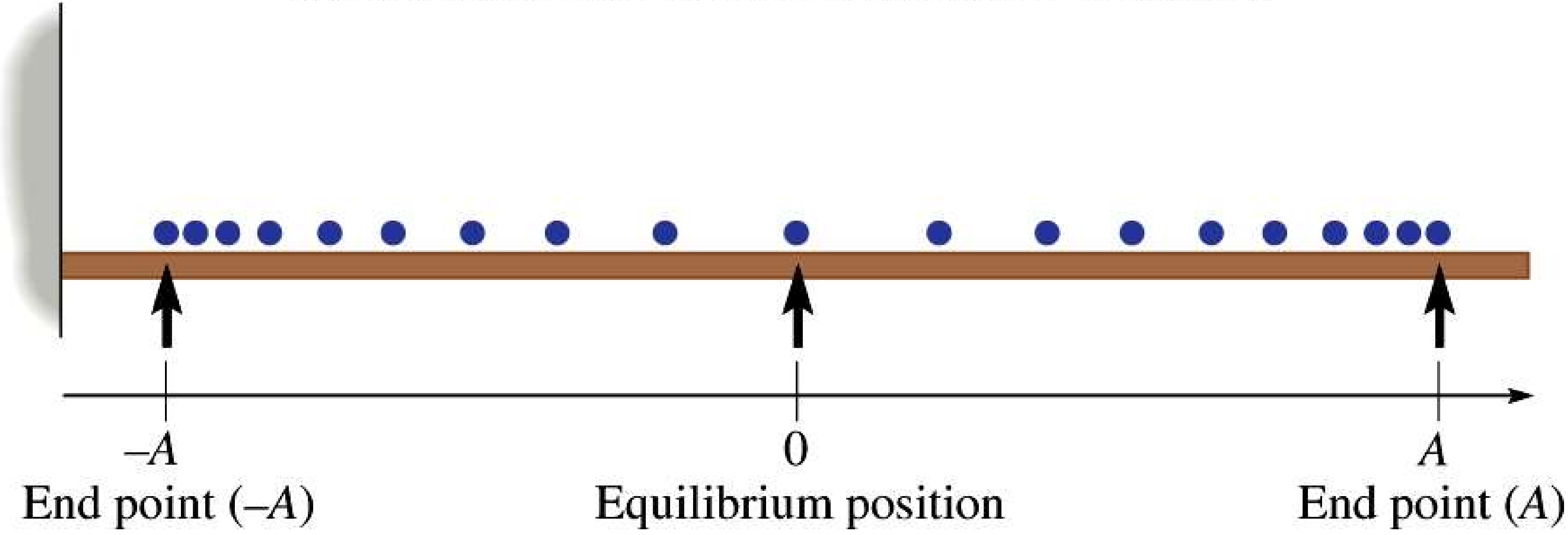
Se la superficie d'appoggio è senza attrito:

$$\sum F_x = -kx = ma_x$$

$$a_x(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

Nel punto di equilibrio x=0 e a=0 .

Quando è massima l'elongazione della molla è massima la forza e quindi anche l'accelerazione.



L'equazione (differenziale) che descrive un moto armonico semplice è:

$$\sum F_x = -kx = ma_x$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = a_x(t) = -\frac{k}{m}x(t)$$

Soluzioni:

$$x(t) = A\cos\omega t$$

$$v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -A\omega\sin\omega t$$

$$a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -A\omega^2\cos\omega t$$

oppure

$$x(t) = A\sin\omega t$$

$$v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = A\omega\cos\omega t$$

$$a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -A\omega^2\sin\omega t$$

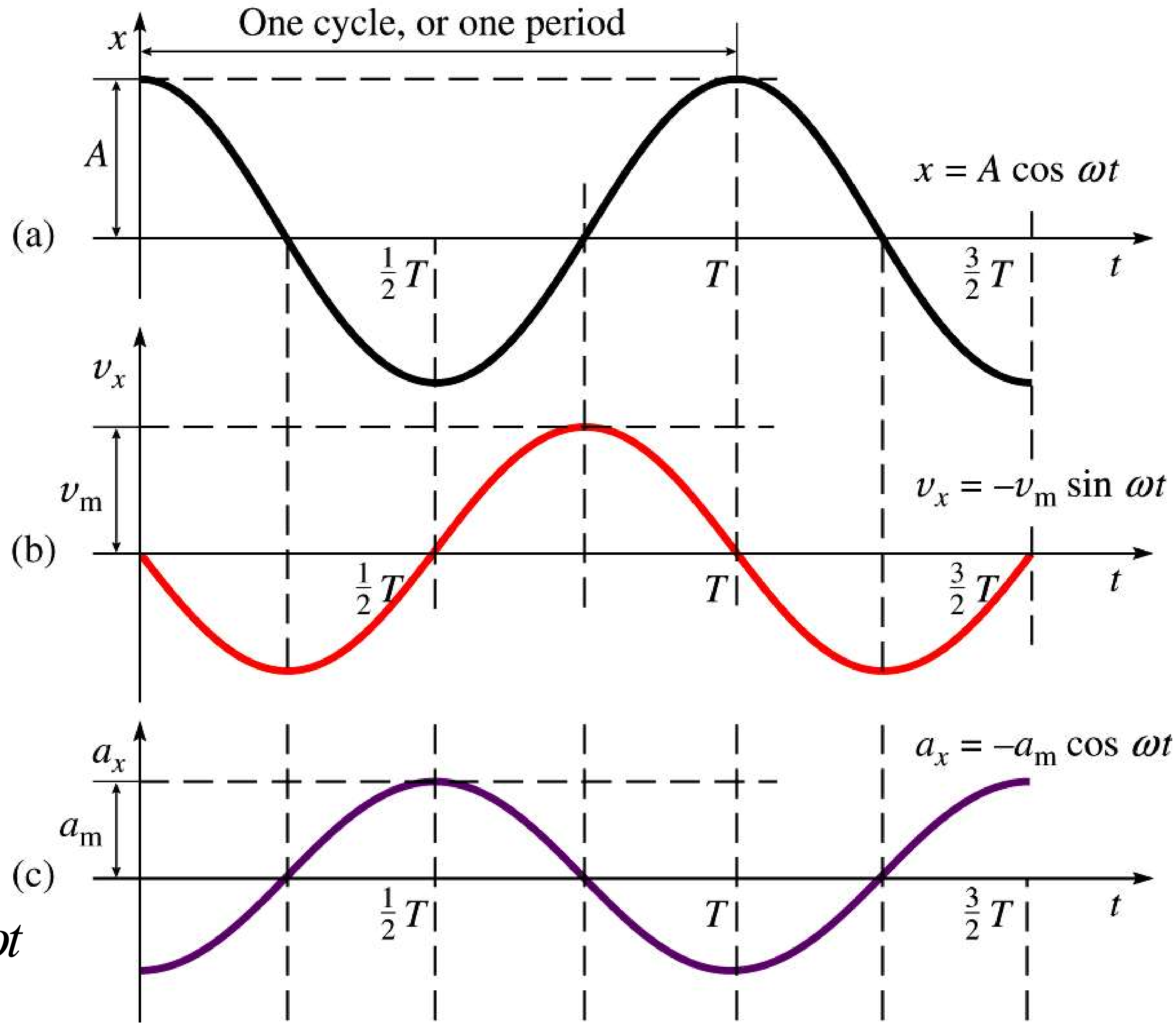
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Rappresentazione grafica del moto armonico semplice

$$x(t) = A\cos\omega t$$

$$v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -A\omega \sin\omega t$$

$$a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -A\omega^2 \cos\omega t$$



Quale significato ha la grandezza $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Se T è il tempo necessario a compiere una oscillazione completa (T=periodo) allora $\omega T = 2\pi$ cioè

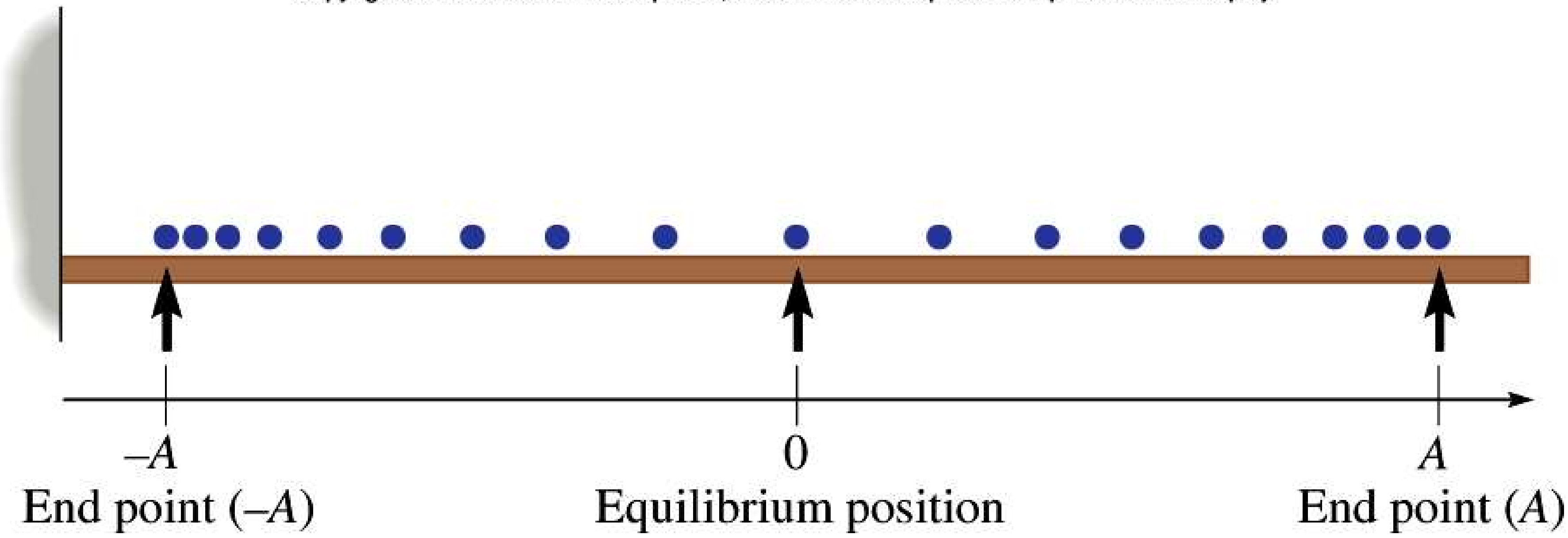
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

ω è la frequenza angolare delle oscillazioni

A è l'ampiezza del moto, cioè il massimo spostamento dalla posizione di equilibrio, . Inoltre $A\omega = v_{max}$, e $A\omega^2 = a_{max}$.

Nel punto di equilibrio x=0 e a=0 .

Quando è massima l'elongazione della molla (x=$\mp$A), anche l'accelerazione è massima.



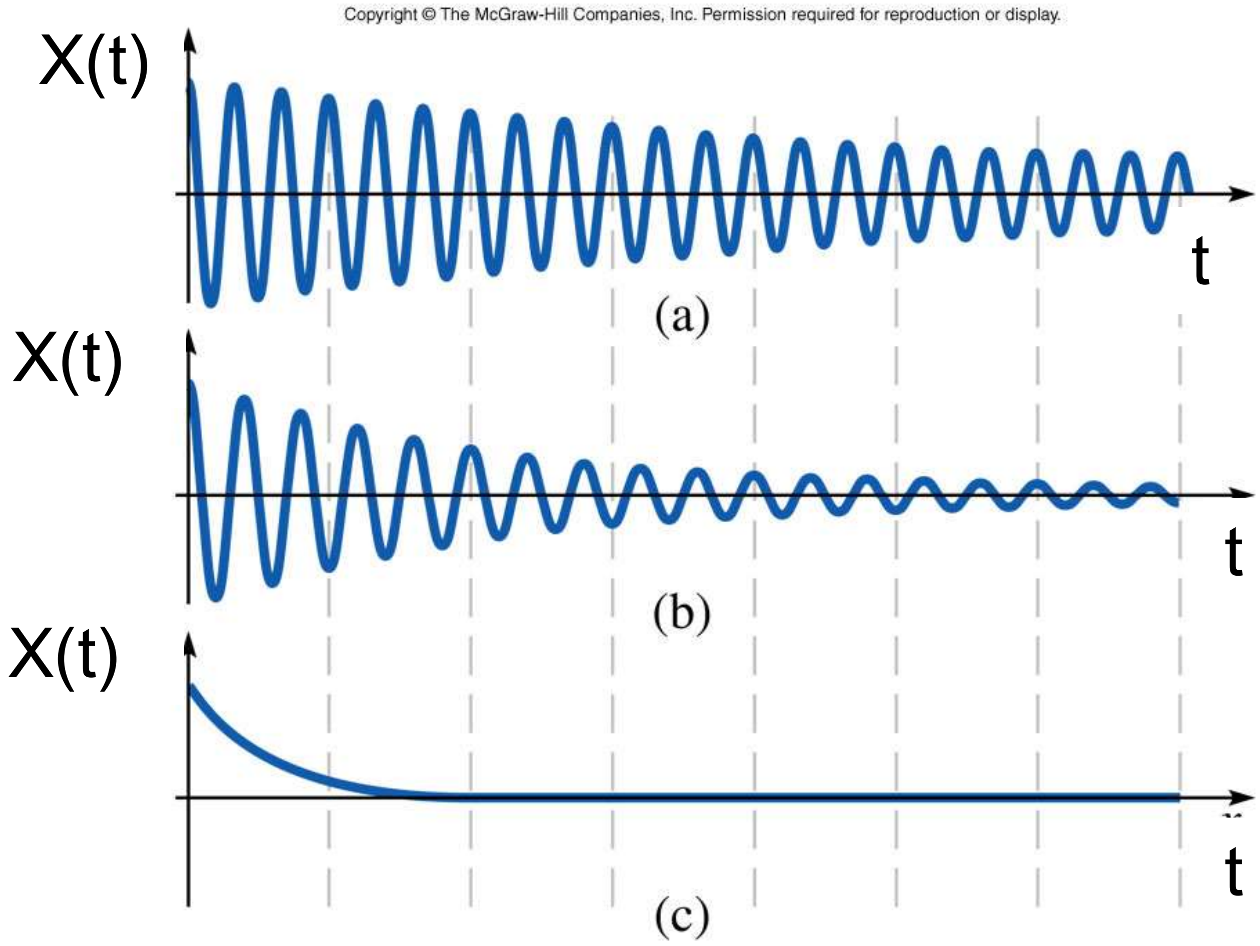
La velocità si annulla agli estremi dell'oscillazione ed è massima quando il corpo passa per la posizione di equilibrio..

Oscillazioni Smorzate

Quando l'attrito non è trascurabile l'ampiezza delle oscillazioni diminuisce nel tempo:

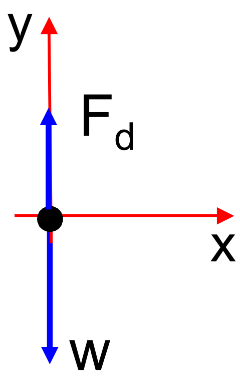
Rappresentazione grafica

delle oscillazioni smorzate:



Resistenza dell'aria

Se in un moto di caduta sotto l'azione della forza di gravità la resistenza dell'aria NON si può trascurare il diagramma di corpo libero del corpo si modifica come segue:



Dalla seconda legge di Newton:

$$\sum F_y = F_d - w = ma$$

dove F_d è l'intensità della forza d'attrito (d=drag).

Questa forza è in verso opposto alla velocità e ad essa proporzionale:

$$F_d = bv^2$$

con b parametro che dipende dalla forma e dalle dimensioni del corpo.

Poichè $F_d \propto v^2$, la forza di attrito aumenta man mano che aumenta la velocità. Si raggiungerà quindi ad un dato istante della caduta una condizione in cui $F_d = w$ cioè

$$\sum F_y = F_d - w = ma = 0$$

$$bv^2 - mg = 0$$

$$\text{quando } v = v_t = \sqrt{\frac{mg}{b}}$$

Figura 4.19. *A causa dell'attrito dell'aria, un paracadutista raggiungerà una velocità d regime massima di caduta libera di circa 350 km/h. Quando ha le braccia e le gambe divari- cate, la velocità di regime si riduce a circa 200 km/h.*

2012 Baumgartner si lancia da 39.004 metri primo uomo a superare il muro del suono in caduta libera raggiungendo i 1 342,8 km/h
2014 Eustace si lancia da 41.419 metri, battendo il record di lancio da maggiore altezza.

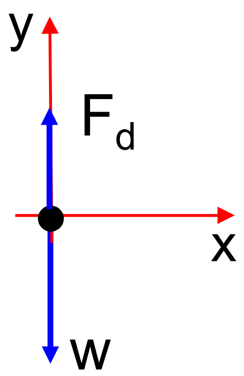
Un paracadutista con indosso lo zaino del paracadute ha una massa di 120 kg. La forza resistente dovuta all'attrito in aria è $F_d = bv^2$ con $b = 0.14\ \mathrm{N\ s^2/m^2}$.

(a) Nel momento in cui il paracadutista cade con velocità di 64 m/s, quanto vale la forza resistente?

$$F_d = bv^2 = \left(0.14\ \mathrm{N\ s^2/m^2}\right)\left(64\ \mathrm{m/s}\right)^2 = 570\ \mathrm{N}$$

(b) Quanto vale la sua accelerazione?

FBD:



Applichiamo la seconda legge di Newton e risolviamo per a.

$$\sum F_y = F_d - w = ma$$

$$a = \frac{F_d - mg}{m} = -5.1\,\mathrm{m/s^2}$$

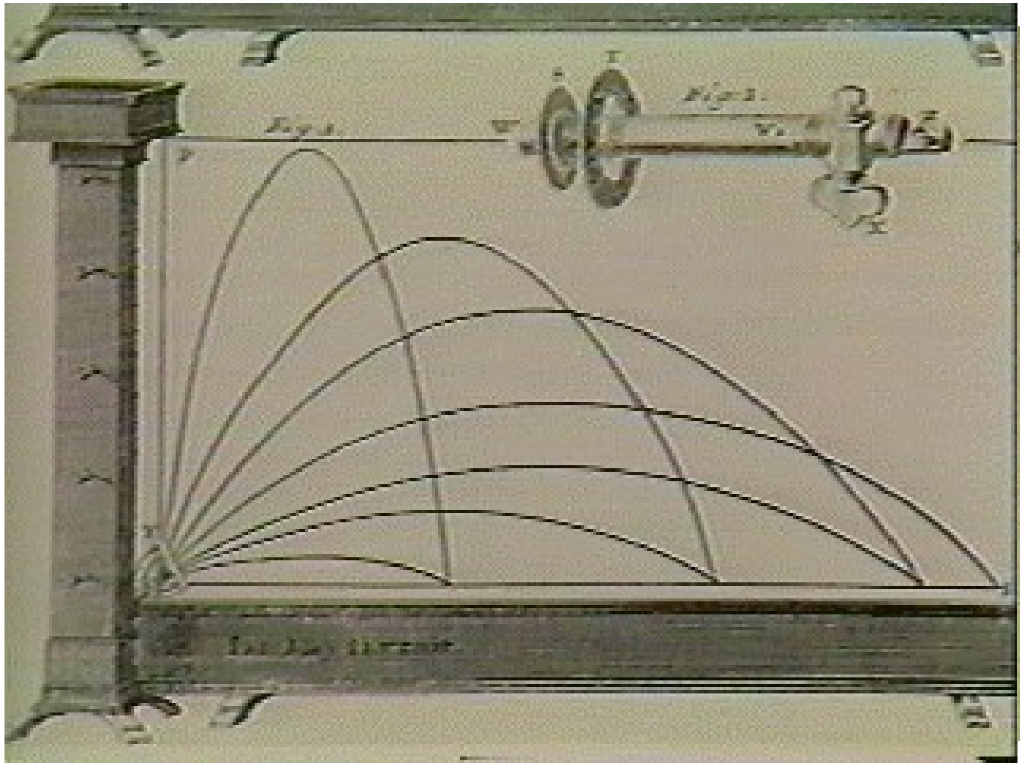
(c) Quanto vale la velocità limite che il paracadutista raggiunge?

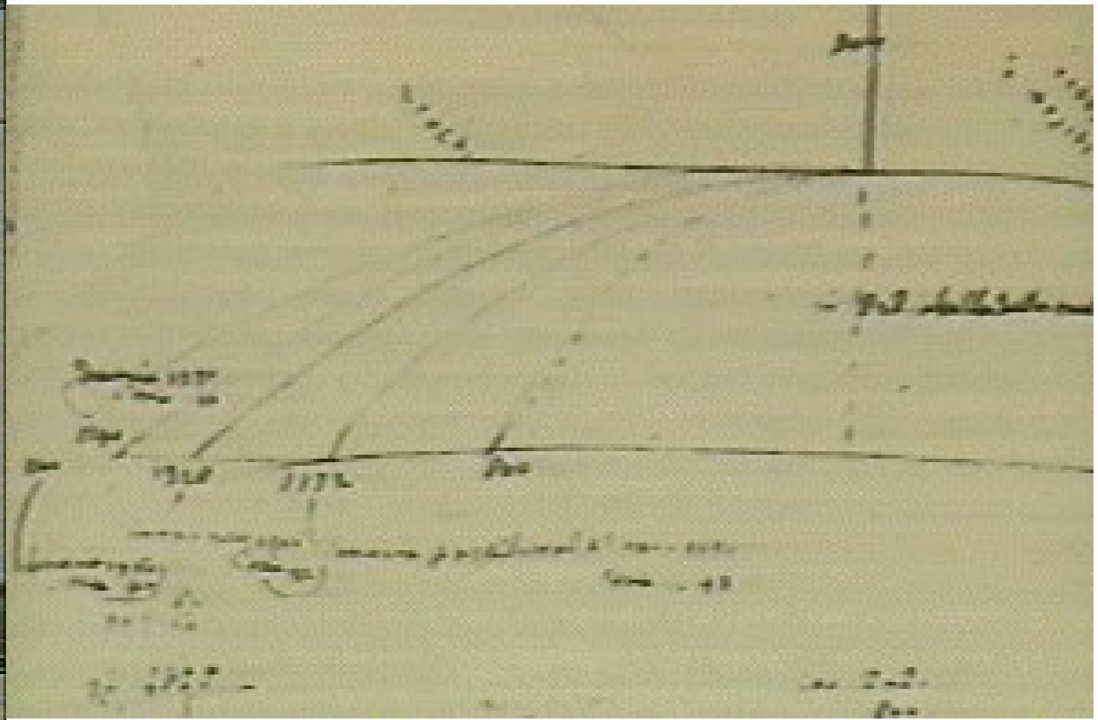
$$\sum F_y = F_d - w = ma = 0$$

$$bv_t^2 - mg = 0$$

$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{b}} = 92\,\mathrm{m/s}$$

... problemi di Galileo!



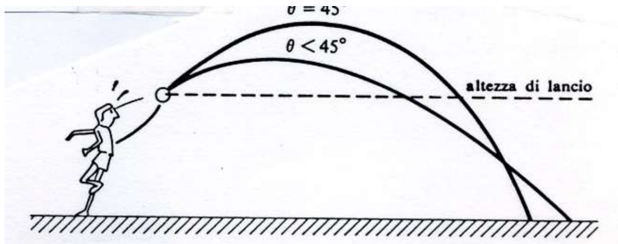


https://www.youtube.com/watch?v=FSb0ePaiPp0

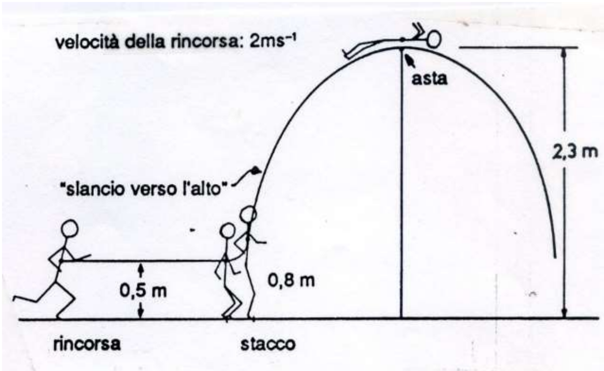
Moto dei proiettili

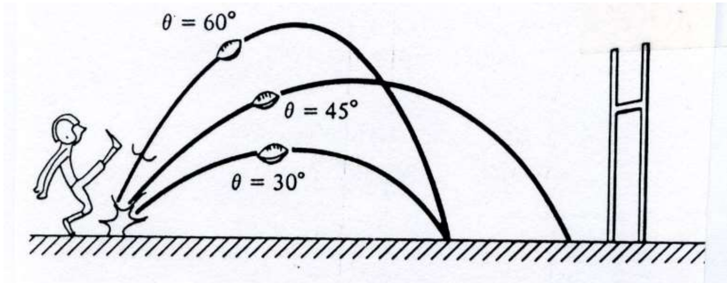
Qual'è il moto di una palla di cannone? Una volta che la palla esce dal cannone se la resistenza dell'aria è trascurabile sulla palla agisce solo la forza di gravità.

Moltissimi moti sono riconducibili a questo:



Un peso è lanciato da sopra il livello del suolo. Le traiettorie corrispondenti ad un angolo di lancio di 45° e ad un angolo di lancio più piccolo si incrociano in un punto sotto l'altezza di lancio. La traiettoria più piatta ha una gittata più lunga.





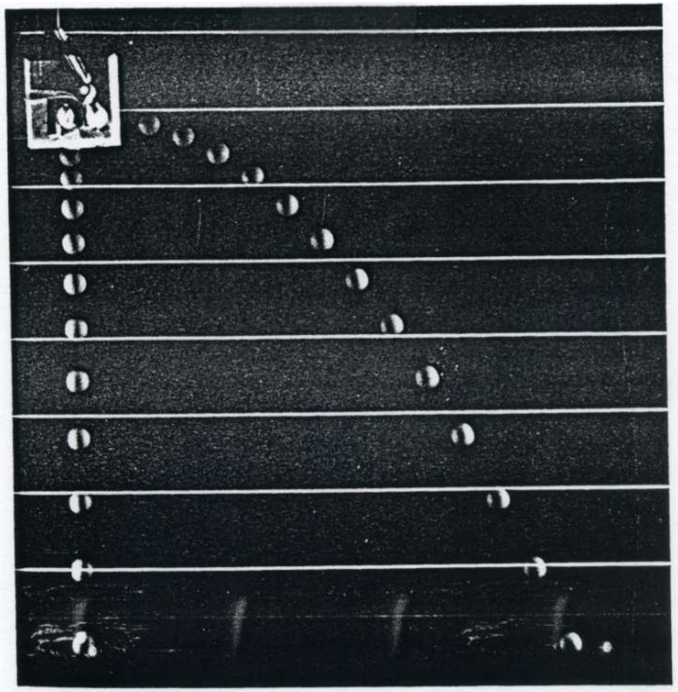
Palloni calciati dal livello del terreno con locità iniziali uguali in modulo ma con angoli di lancio di e 60° hanno la stessa gittata. La gittata è massima quan l'angolo di lancio è di 45°.

In due (o tre) dimensioni i problemi della cinematica si possono studiare sotto un diverso «punto di vista»….

https://www.youtube.com/watch?v=7QbYE3o5qPE

(min 4-9)

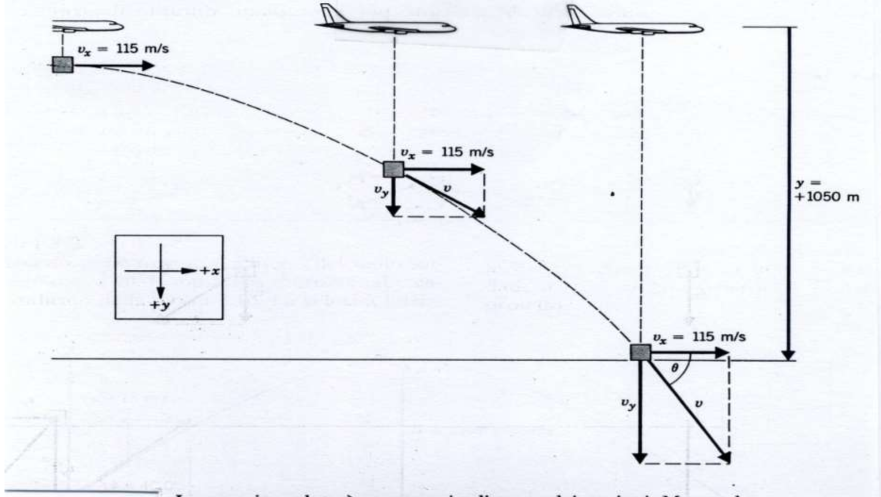
Esempio: Caduta libera verticale (velocità orizzontale nulla)



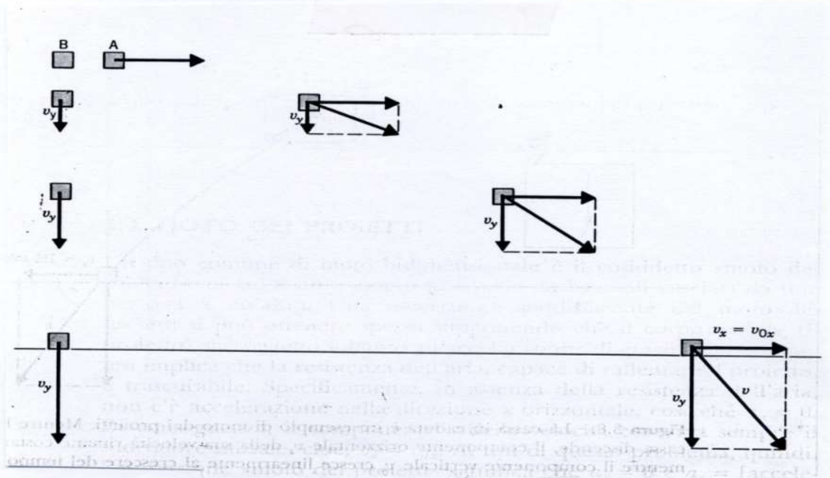
Esempio: Caduta libera verticale con velocità iniziale orizzontale non nulla

In entrambi I casi la palla ha $a_x = 0$ and $a_y = -g$. Nel caso a dx si muove ANCHE con velocità costante lungo l'asse orizzontale x.

Un aereo vola alla quota di 1050 m alla velocità di 115 m/s. Ad un certo istante lancia una cassa contenente generi di pronto soccorso. A quale distanza dal punto di lancio la cassa colpirà il suolo?



La cassa in caduta è un esempio di moto dei proietti. Mentre la cassa discende, il componente orizzontale v_x della sua velocità rimane costante, mentre il componente verticale v_y cresce linearmente al crescere del tempo.



Entrambe le casse colpiscono il suolo allo stesso istante, poiché le loro variabili y (y, a_y, v_{0y}) sono le stesse.

$$\begin{cases} y = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{y_0}} + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{v_{0y}}}\,t + \frac{1}{2} g t^2 \\ x = v_{0x} t + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{x_0}} \end{cases} \qquad v_y = g t + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{v_{0y}}}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} g t^2 \; ; \quad v_y = g t \\ x = v_{0x} t \end{cases}$$

La cassa tocca terra all'istante $\bar{t}$ tale che

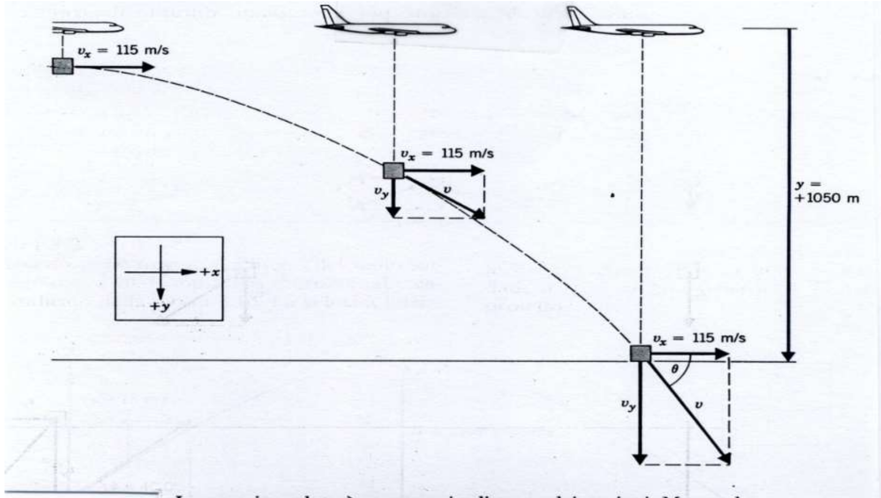
$$\bar{y} = h \qquad \text{con } h = 1050\ \text{m}$$

$$h = \frac{1}{2} g \bar{t}^2 \qquad \bar{t} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 1050}{9{,}8}} =$$

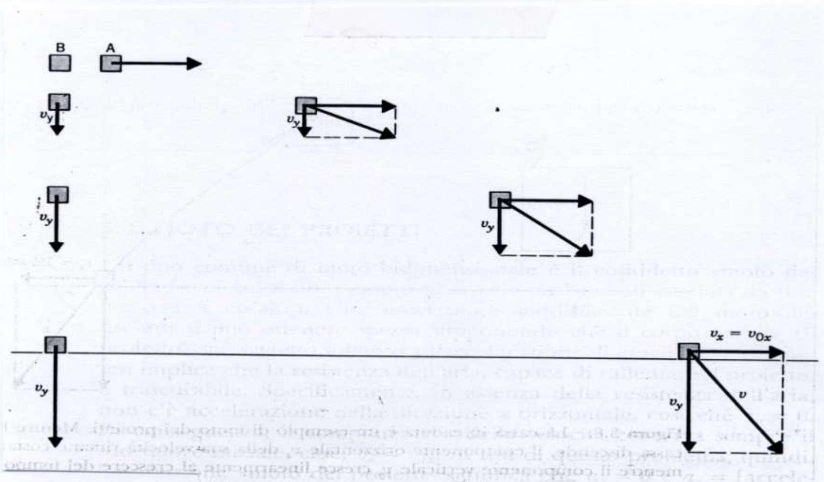
A questo istante la coordinata x vale

$$\bar{x} = v_{0x} \bar{t} = v_{0x} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$= 115 \times \sqrt{\frac{2 \times 1050}{9{,}8}} \simeq \underline{1683{,}43\ \text{m}}$$

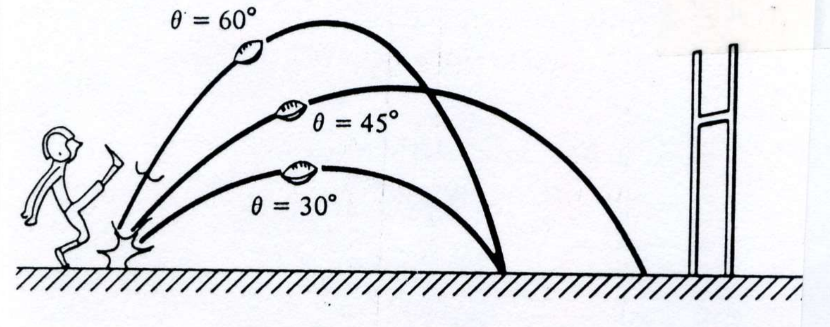


La cassa in caduta è un esempio di moto dei proietti. Mentre la cassa discende, il componente orizzontale v_x della sua velocità rimane costante, mentre il componente verticale v_y cresce linearmente al crescere del tempo.

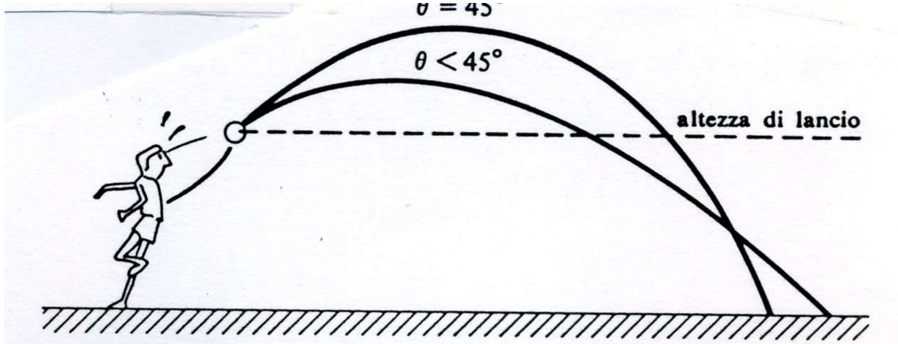


Entrambe le casse colpiscono il suolo allo stesso istante, poiché le loro variabili y (y, a_y, v_{0y}) sono le stesse.

Attenzione alle condizioni iniziali negli esercizi



Palloni calciati dal livello del terreno con locità iniziali uguali in modulo ma con angoli di e 60° hanno la stessa gittata. La gittata è massima quan l'angolo di lancio è di 45°.



Un peso è lanciato da sopra il livello del suolo. Le traiettorie corrispondenti ad un angolo di lancio di 45° e ad un angolo di lancio più piccolo si incrociano in un punto sotto l'altezza di lancio. La traiettoria più piatta ha una gittata più lunga.