

# ALGORITMI E STRUTTURE DATI

**Dr. Manuela Montangero**

A.A. 2022/23

Cammini minimi su grafi

"E' vietata la copia e la riproduzione dei contenuti e immagini in qualsiasi forma.

E' inoltre vietata la redistribuzione e la pubblicazione dei contenuti e immagini non autorizzata espressamente dall'autore o dall'Università di Modena e Reggio Emilia."



**UNIMORE**  
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI  
MODENA E REGGIO EMILIA

# Cammini minimi su grafi

## PROBLEMA

Determinare percorsi più brevi tra nodi di un grafo

Lunghezza di un cammino  $\rightarrow$  numero di archi che lo compongono

Percorso più breve  $\rightarrow$  cammino con minor numero di archi

- Da un nodo ad un altro nodo (point-to-point)
- Da un nodo a tutti gli altri nodi: **SORGENTE SINGOLA** (one-to-all)
- Da ogni nodo a tutti gli altri nodi: **SORGENTI MULTIPLE** (all-to-all)



una BFS  
da ogni nodo



BFS  
(interrotta quando  
si scopre la destinazione)



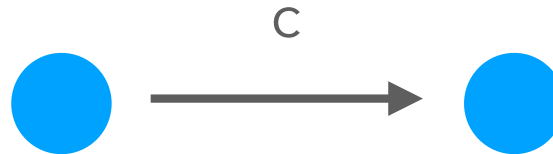
BFS

# Cammini minimi su grafi

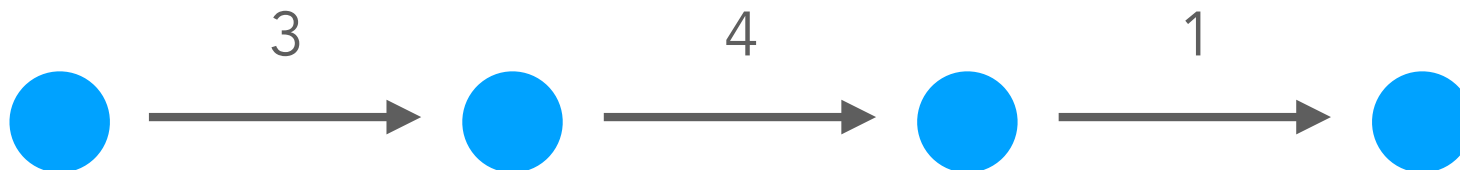
## PROBLEMA

Determinare percorsi più brevi tra nodi di un grafo

IL GRAFO PUO' AVERE DEI PESI/COSTI SUGLI ARCHI



Lunghezza cammino  $\rightarrow$  somma dei pesi degli archi del cammino

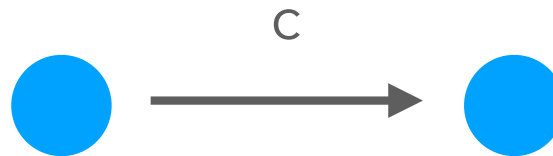


# Cammini minimi su grafi

## PROBLEMA

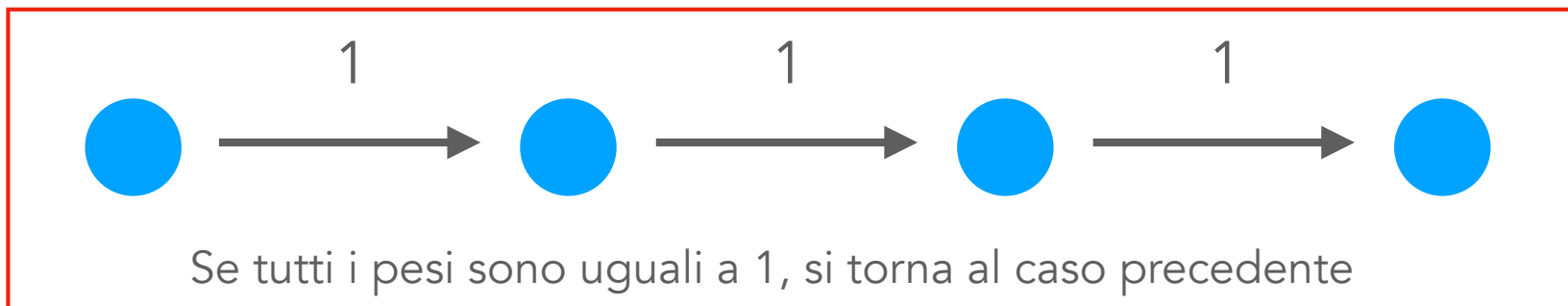
Determinare percorsi più brevi tra nodi di un grafo

IL GRAFO PUO' AVERE DEI PESI/COSTI SUGLI ARCHI



Lunghezza cammino  $\rightarrow$  somma dei pesi degli archi del cammino

## OSSERVAZIONE:



# Cammini minimi da sorgente singola

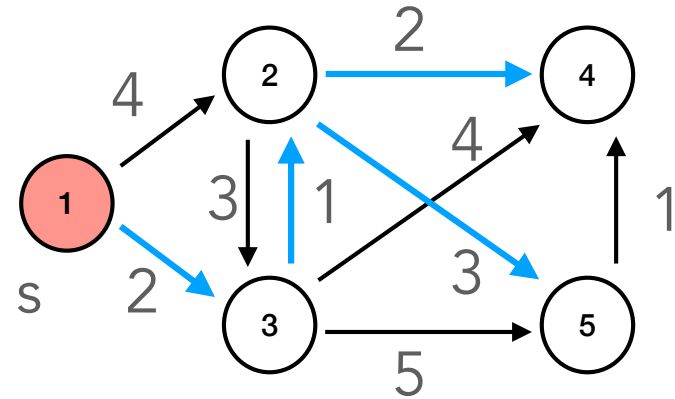
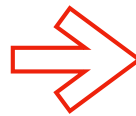
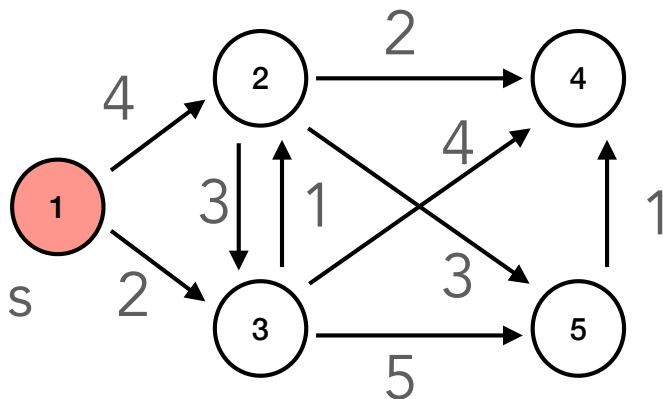
## PROBLEMA:

**INPUT:** Grafo  $G = (V, E)$  (diretto/indiretto)

funzione di costo non negativa sugli archi  $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$

un nodo sorgente  $s \in V$

**OUTPUT:** i cammini minimi da  $s$  a tutti gli altri nodi



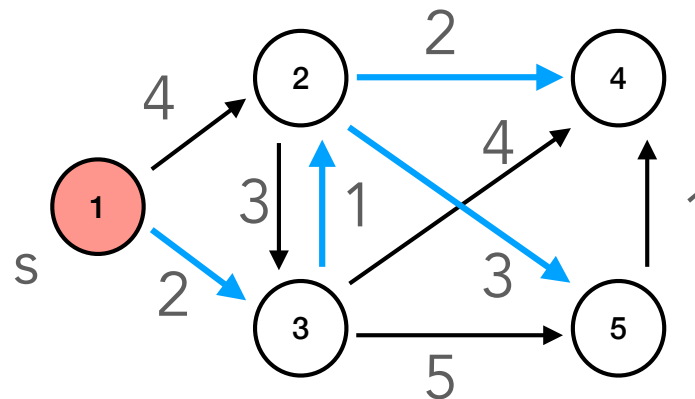
cammini minimi

# Cammini minimi da sorgente singola

## ALBERO dei CAMMINI MINIMI

L'**albero dei cammini minimi** per un nodo  $s$  è  
un **albero di copertura** per i **nodi raggiungibili** da  $s$ ,  
**radicato** nel nodo  $s$  (**sorgente**),  
avente un **cammino minimo** per ogni **nodo raggiungibile** da  $s$

Albero dei  
cammini minimi



# Cammini minimi da sorgente singola

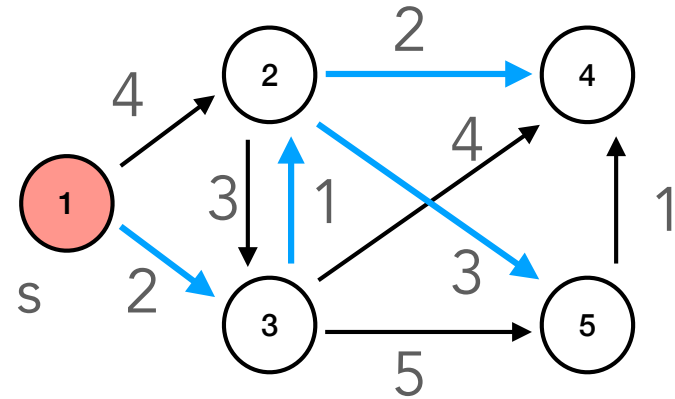
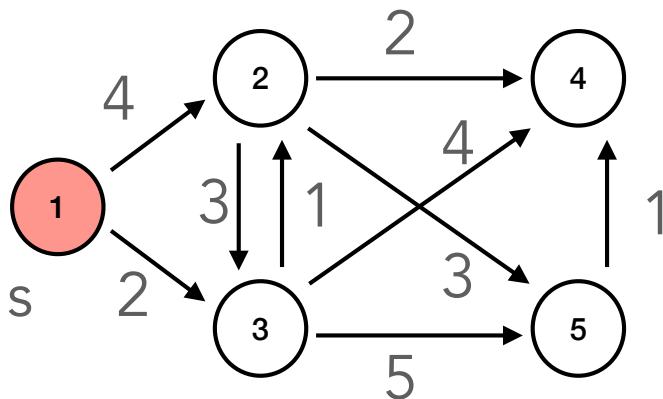
## PROBLEMA:

**INPUT:** Grafo  $G = (V, E)$  (diretto/indiretto)

funzione di costo non negativa sugli archi  $c : E \rightarrow R^+$

un nodo sorgente  $s \in V$

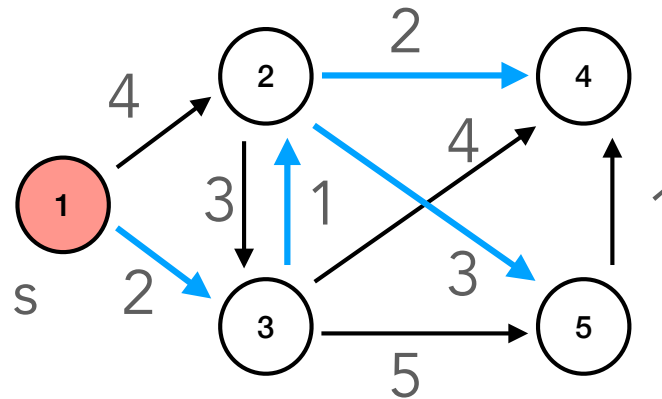
**OUTPUT:** l'albero cammini minimi radicato in  $s$



Albero dei  
cammini minimi

# Cammini minimi da sorgente singola

I cammini minimi da un nodo a tutti gli altri nodi di un grafo possono sempre essere rappresentati come un albero

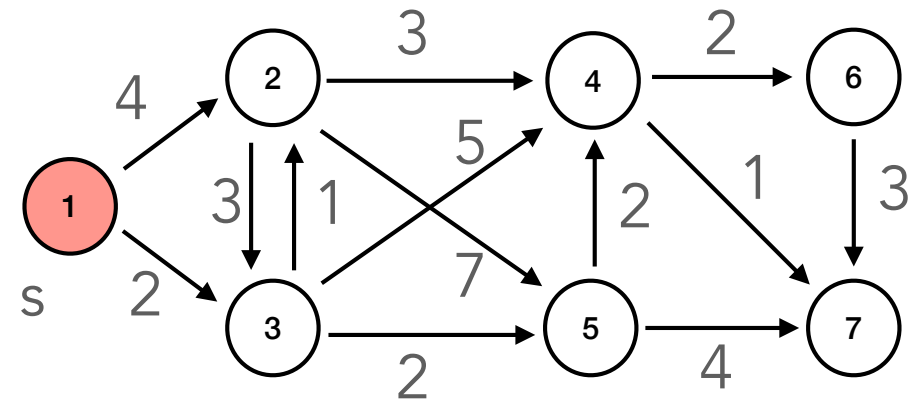
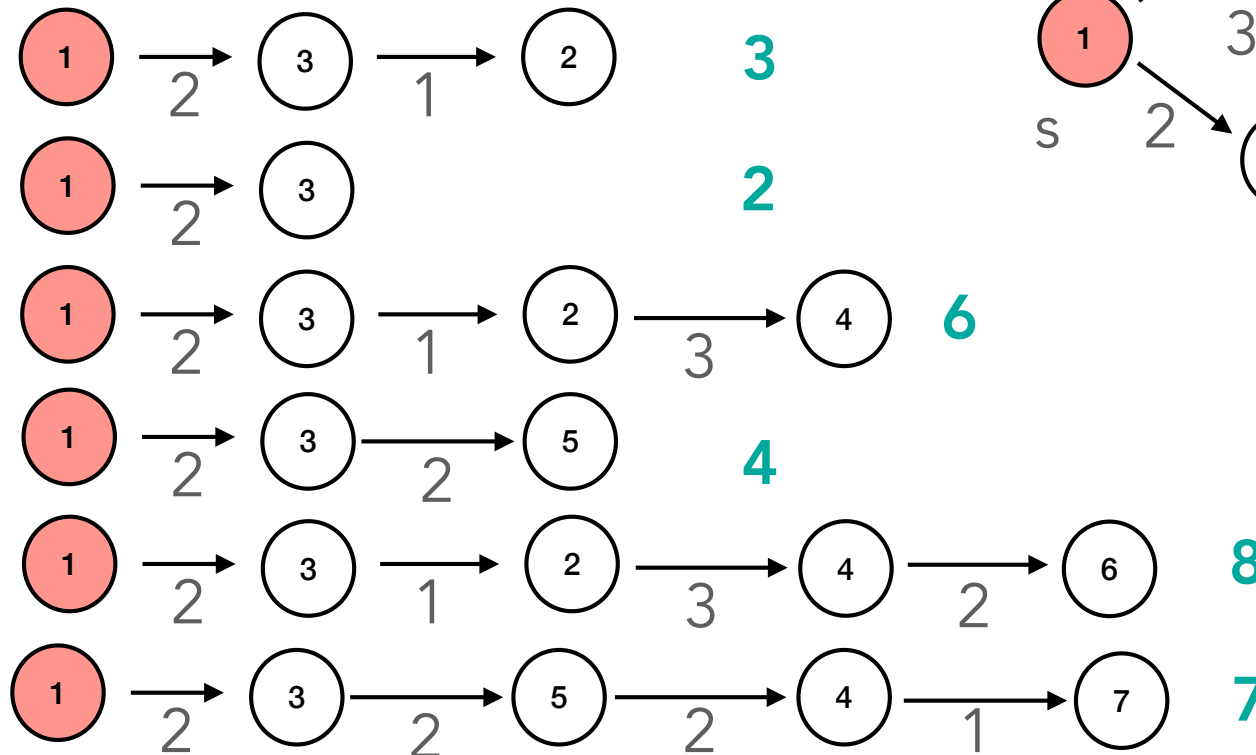




# Cammini minimi da sorgente singola

I cammini minimi da un nodo a tutti gli altri nodi di un grafo possono sempre essere rappresentati come un albero

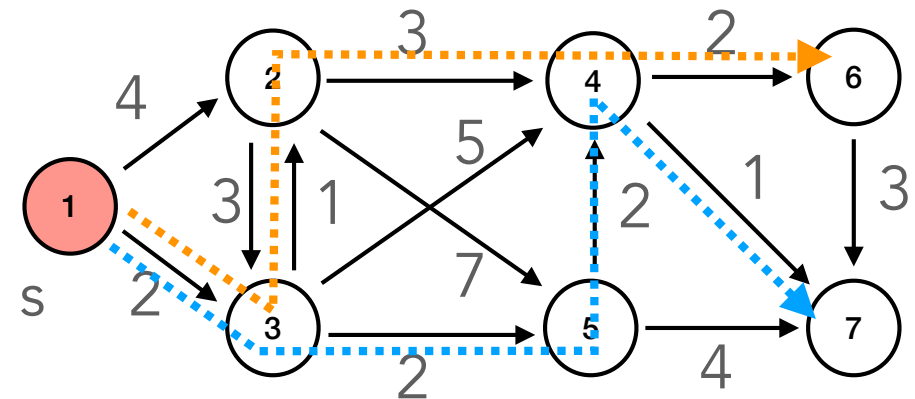
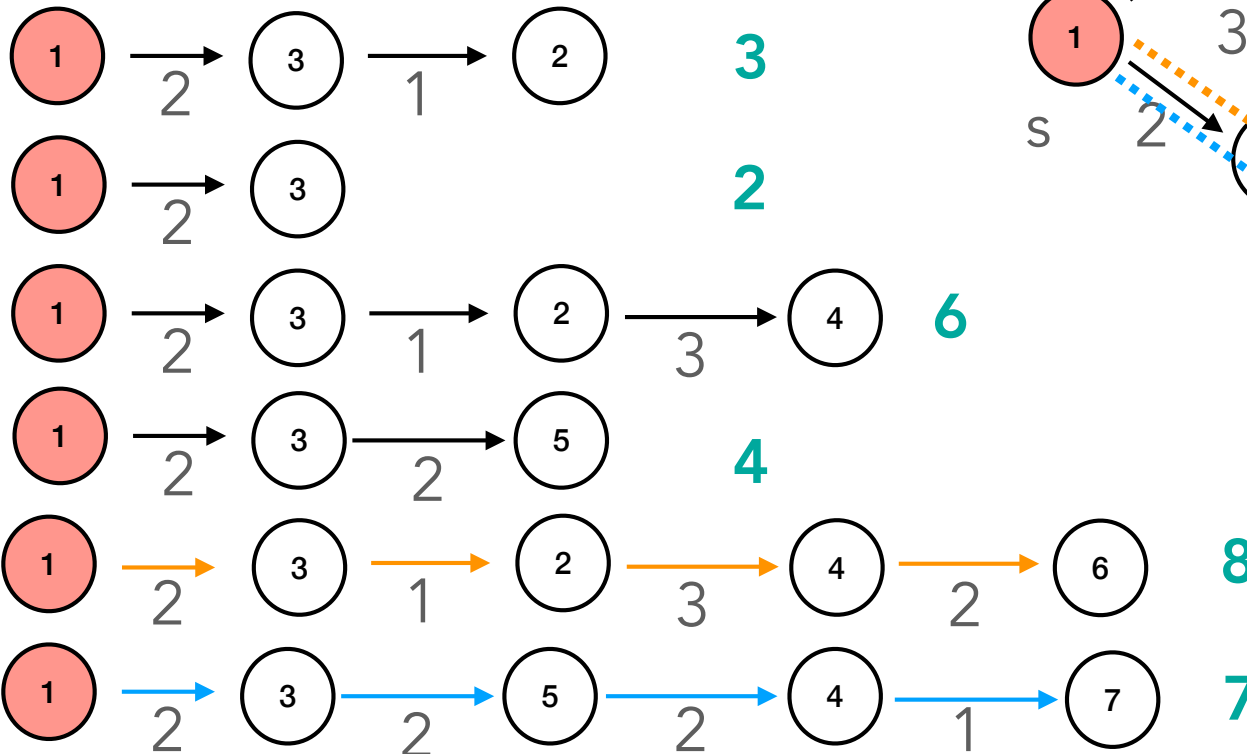
cammini minimi - **lunghezza**



# Cammini minimi da sorgente singola

I cammini minimi da un nodo a tutti gli altri nodi di un grafo possono sempre essere rappresentati come un albero

cammini minimi - **lunghezza**

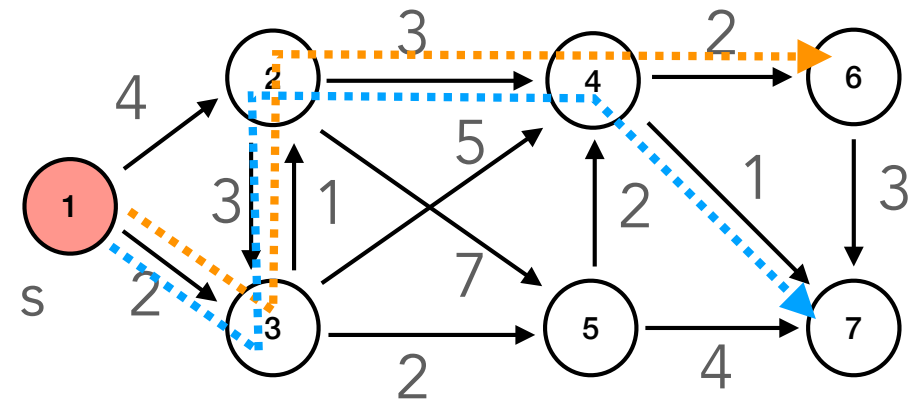
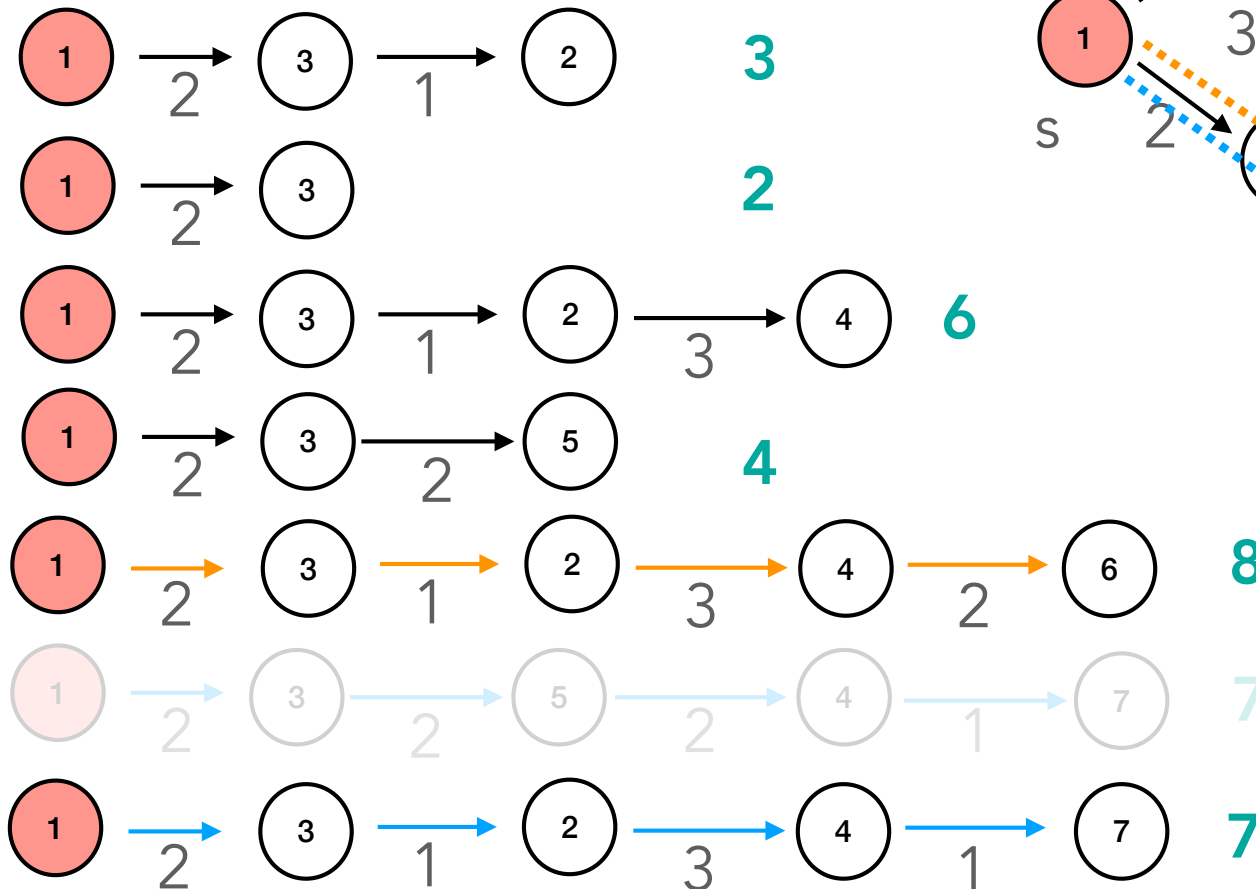


L'unione dei  
due cammini  
NON è un ALBERO

# Cammini minimi da sorgente singola

I cammini minimi da un nodo a tutti gli altri nodi di un grafo possono sempre essere rappresentati come un albero

cammini minimi - **lunghezza**

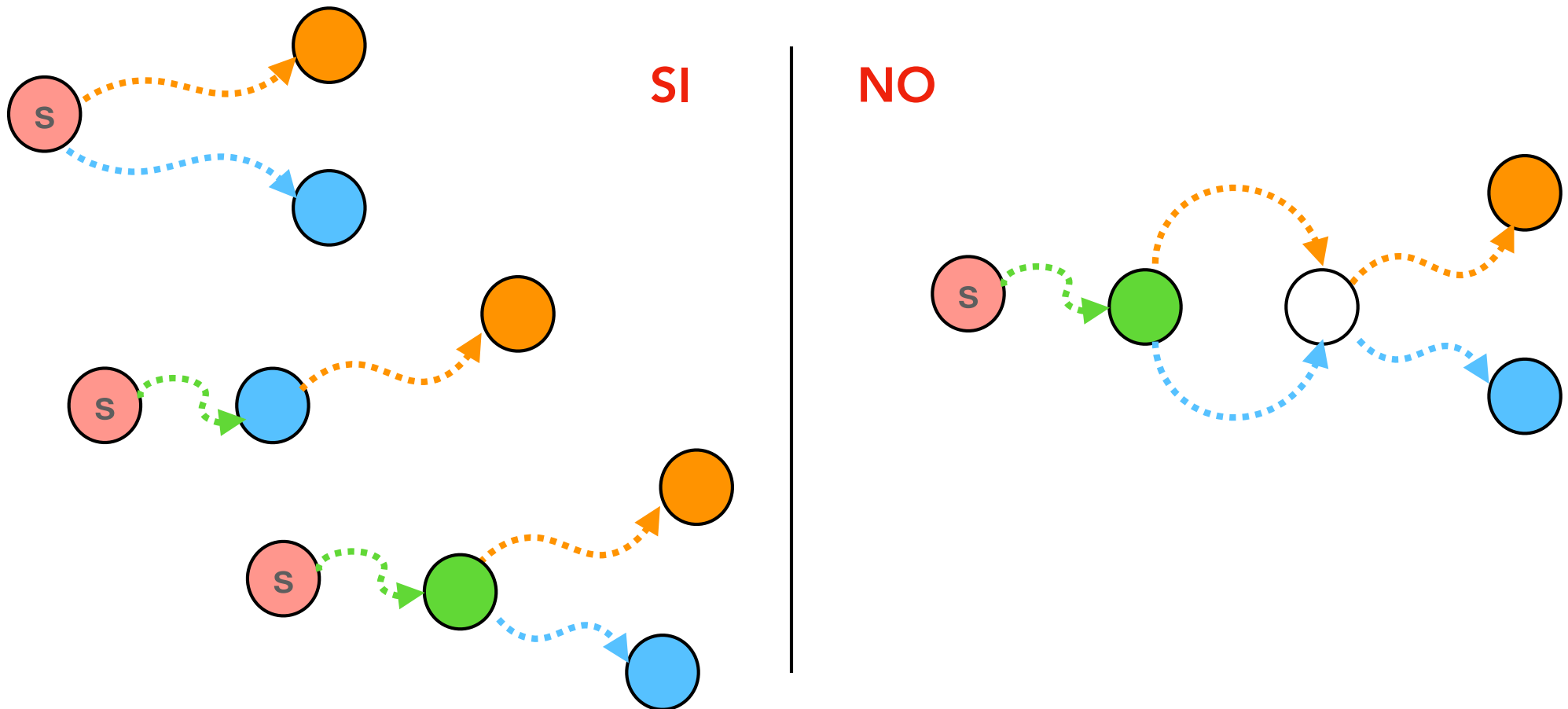


L'unione dei  
due cammini  
è un ALBERO

# Cammini minimi da sorgente singola

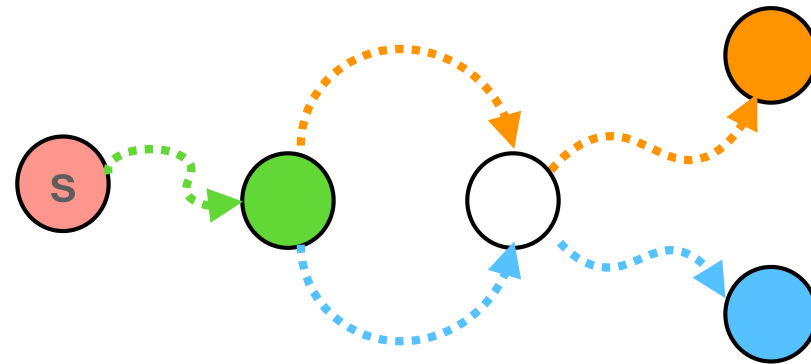
I cammini minimi da un nodo a tutti gli altri nodi di un grafo possono sempre essere rappresentati come un albero

Unione di due cammini minimi qualsiasi

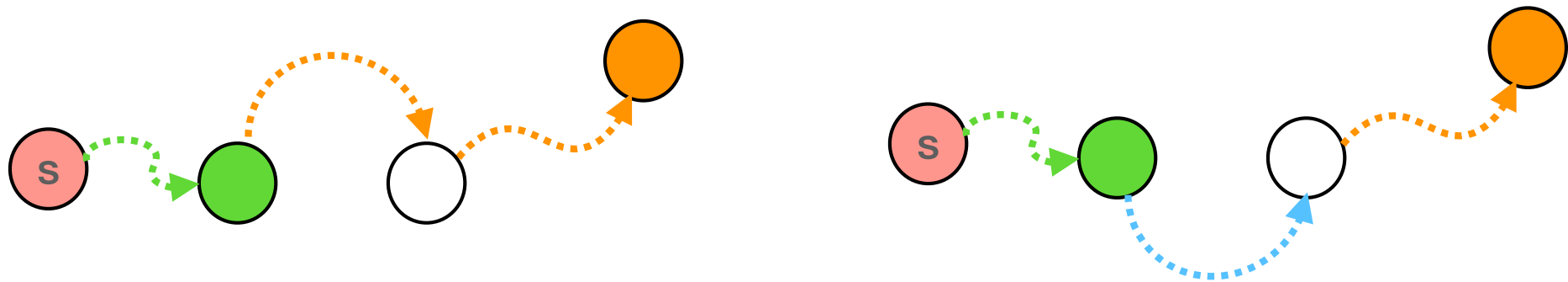


# Cammini minimi da sorgente singola

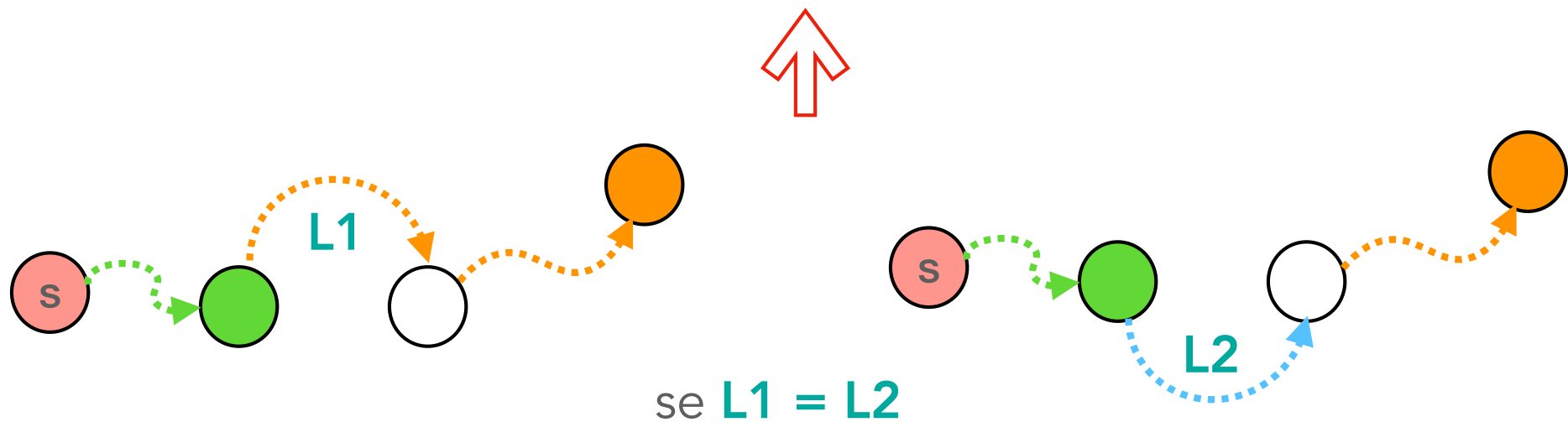
Unione di due cammini minimi



Ci sono due cammini per il nodo arancione (e azzurro):

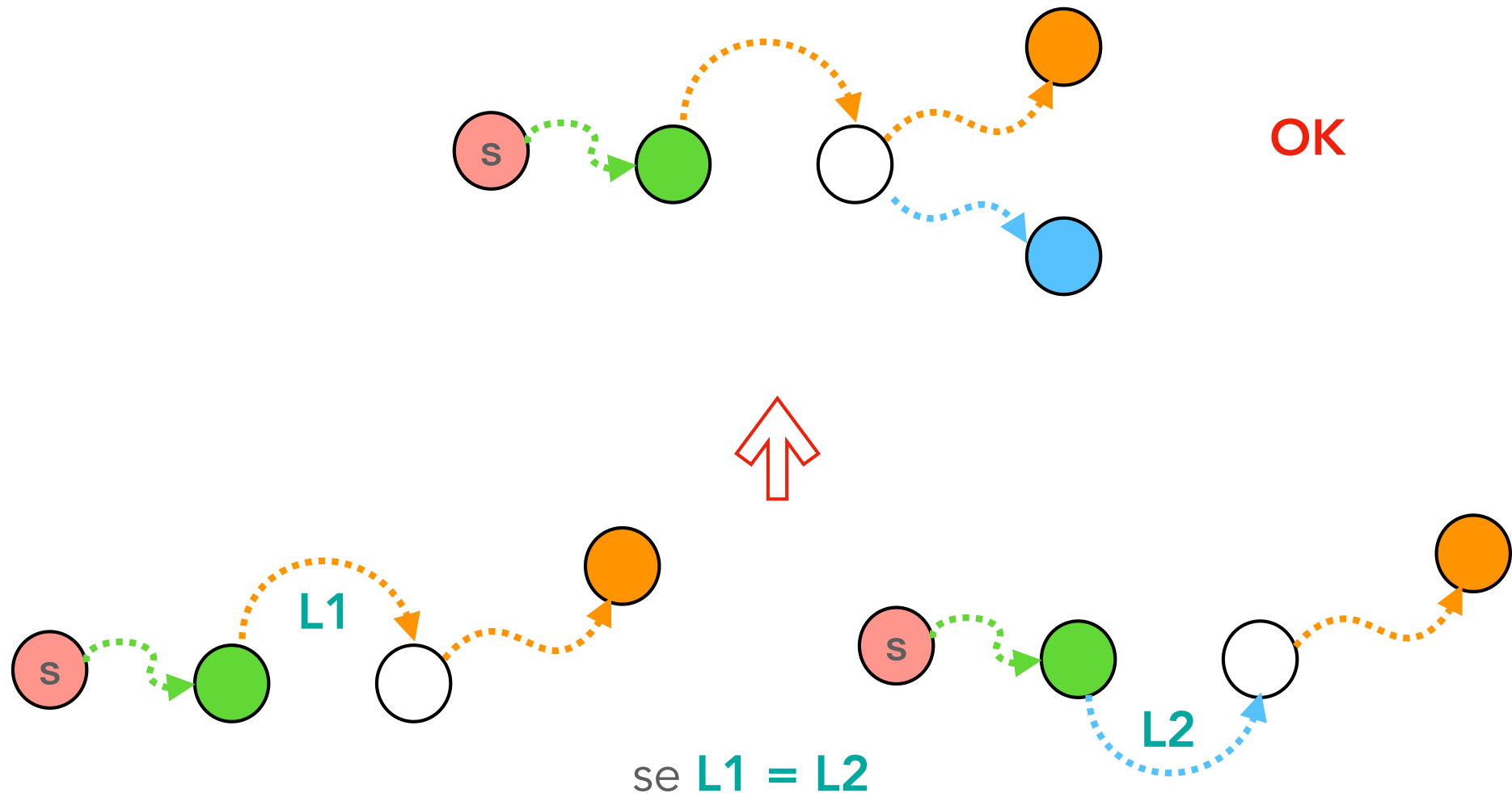


# Cammini minimi da sorgente singola

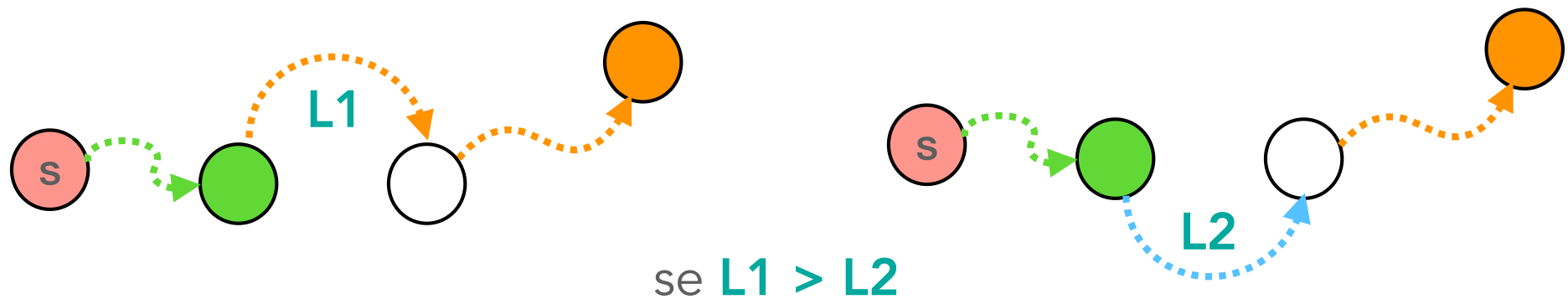


# Cammini minimi da sorgente singola

Unione di due cammini minimi



# Cammini minimi da sorgente singola

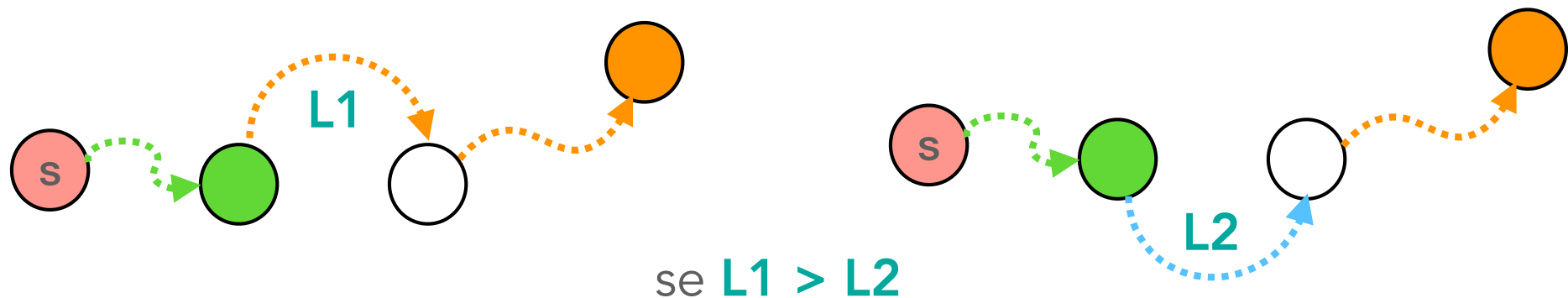




# Cammini minimi da sorgente singola

NON è un  
cammino minimo...

...perché questo cammino  
è più corto!

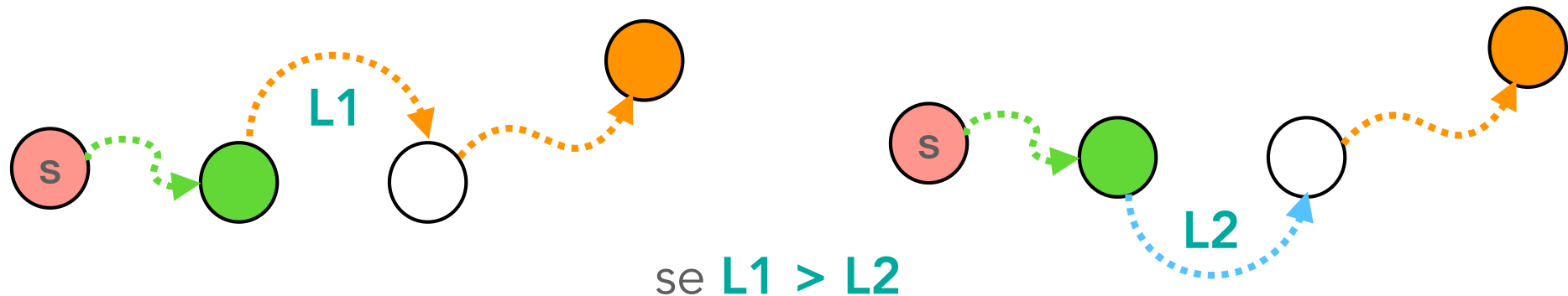


# Cammini minimi da sorgente singola

Non è possibile che  $L1 > L2$

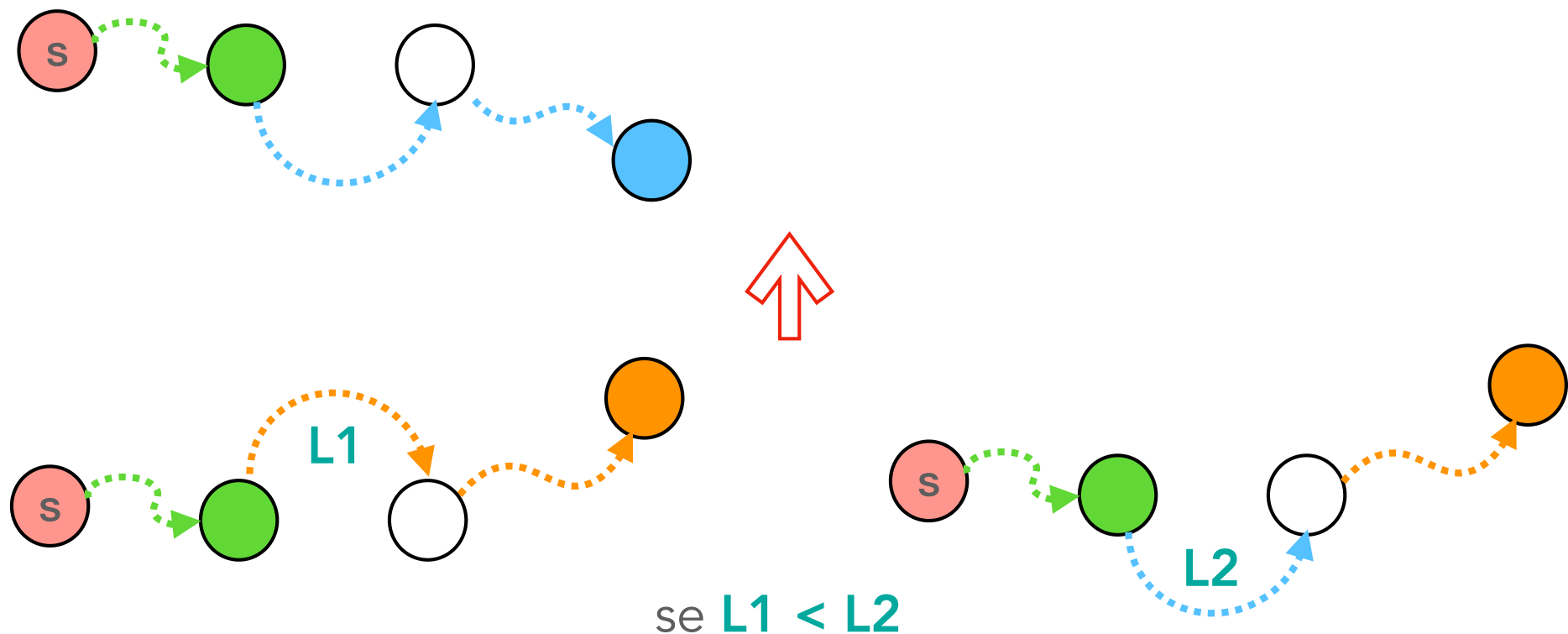
questo NON è un  
cammino minimo...

...perché questo cammino  
è più corto!



# Cammini minimi da sorgente singola

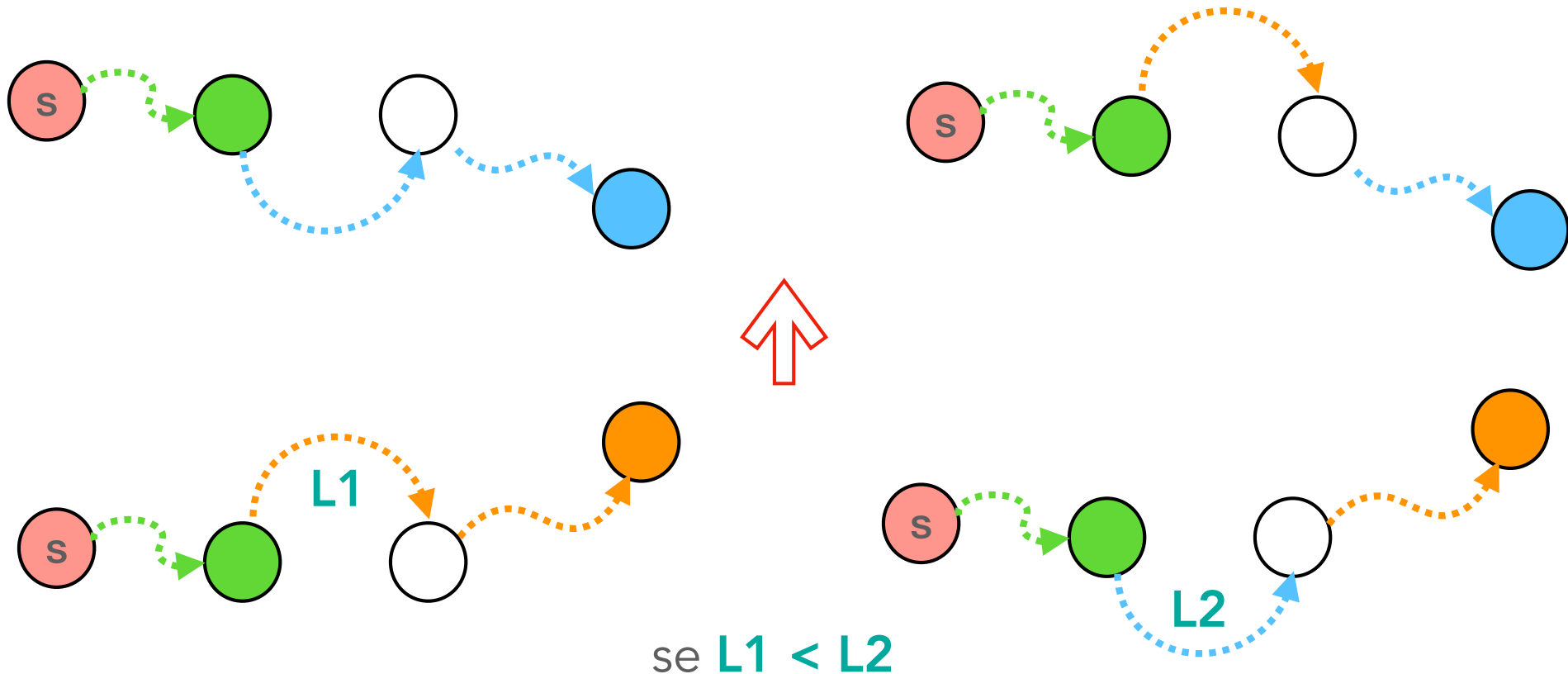
questo NON è un cammino minimo  
per il nodo azzurro...



# Cammini minimi da sorgente singola

questo NON è un cammino minimo  
per il nodo azzurro...

... perché questo è più corto!



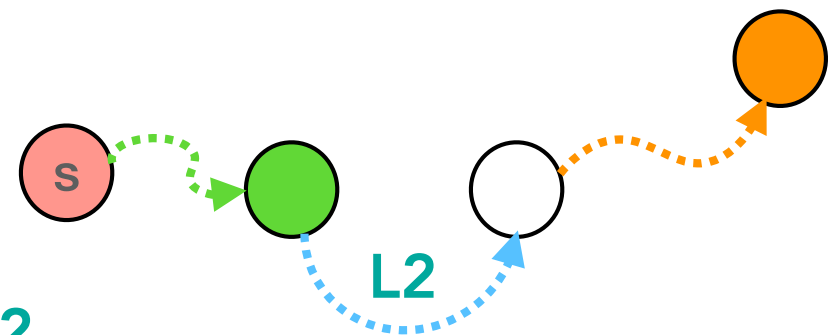
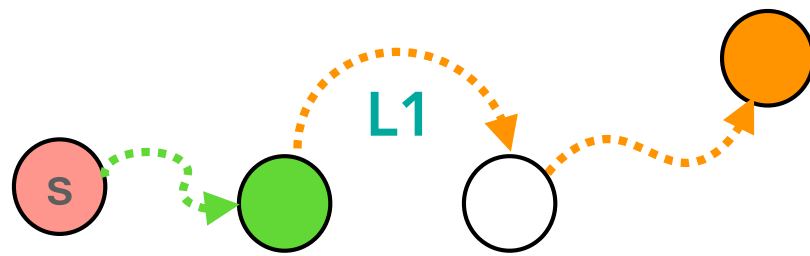
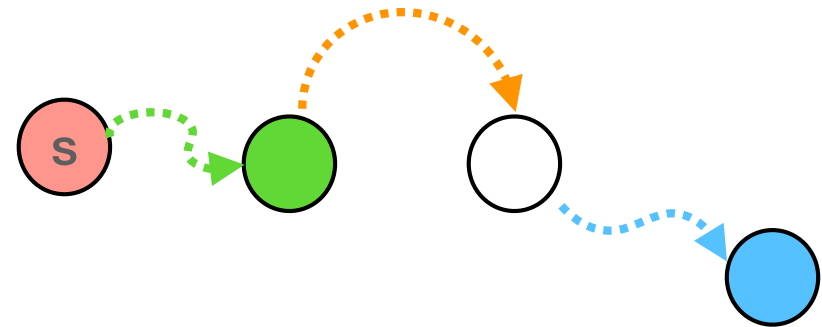
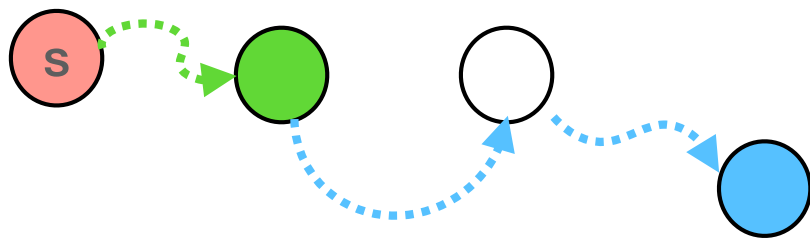
# Cammini minimi da sorgente singola

Non è possibile che  $L1 < L2$

questo NON è un cammino minimo  
per il nodo azzurro...



... perché questo è più corto!



se  $L1 < L2$



# Cammini minimi da sorgente singola

I cammini minimi da un nodo a tutti gli altri nodi di un grafo possono sempre essere rappresentati come un albero

Quindi HA SENSO che l'output del problema della ricerca dei cammini minimi da singola sorgente sia l'albero dei cammini minimi