

ALGORITMI E STRUTTURE DATI

Prof. Manuela Montangero

A.A. 2022/23

Programmazione Dinamica

Problema dello zaino con ripetizione

"E' vietata la copia e la riproduzione dei contenuti e immagini in qualsiasi forma.

E' inoltre vietata la redistribuzione e la pubblicazione dei contenuti e immagini non autorizzata espressamente dall'autore o dall'Università di Modena e Reggio Emilia."



UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI
MODENA E REGGIO EMILIA

Problema dello zaino

PROBLEMA:

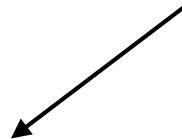
INPUT: Zaino di capacità $W \geq 0$

n item (oggetti) $1, 2, \dots, n$

PESI item $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{N}$

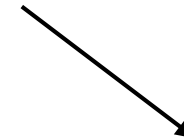
VALORE item $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{N}$

OUTPUT: selezione degli oggetti che abbia peso totale minore o uguale a W e che massimizzi il valore totale degli oggetti selezionati



SENZA RIPETIZIONE

un oggetto può essere selezionato
una volta sola



CON RIPETIZIONE

un oggetto può essere selezionato
più volte

Problema dello zaino

PROBLEMA:

INPUT: Zaino di capacità $W \geq 0$

n item (oggetti) $1, 2, \dots, n$

PESI item $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{N}$

VALORE item $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{N}$

OUTPUT: selezione degli oggetti che abbia peso totale minore o uguale a W e che massimizzi il valore totale degli oggetti selezionati

Soluzione ammissibile:

Selezione di oggetti i_1, i_2, \dots, i_k tale che ogni $i_t \in [1..n]$ e

$$\sum_{t=1}^k w_{i_t} \leq W$$

Problema dello zaino

PROBLEMA:

INPUT: Zaino di capacità $W \geq 0$

n item (oggetti) $1, 2, \dots, n$

PESI item $w_1, w_2, \dots, w_n \in N$

VALORE item $v_1, v_2, \dots, v_n \in N$

OUTPUT: selezione degli oggetti che abbia peso totale minore o uguale a W e che massimizzi il valore totale degli oggetti selezionati

Costo soluzione ammissibile:

Data una selezione di oggetti i_1, i_2, \dots, i_k tale che ogni $i_t \in [1..n]$ e $\sum_{t=1}^k w_t \leq W$,

il costo della soluzione è dato da

$$\sum_{t=1}^k v_t$$

Problema dello zaino

PROBLEMA:

INPUT: Zaino di capacità $W \geq 0$

n item (oggetti) $1, 2, \dots, n$

PESI item $w_1, w_2, \dots, w_n \in N$

VALORE item $v_1, v_2, \dots, v_n \in N$

OUTPUT: selezione degli oggetti che abbia peso totale minore o uguale a W e che massimizzi il valore totale degli oggetti selezionati

Funzione obiettivo: massimo

Problema dello zaino

PROBLEMA:

INPUT: Zaino di capacità $W \geq 0$

n item (oggetti) $1, 2, \dots, n$

PESI item $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{N}$

VALORE item $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{N}$

OUTPUT: selezione degli oggetti che abbia peso totale minore o uguale a W e che massimizzi il valore totale degli oggetti selezionati

ESEMPIO:

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

Soluzione ottima

- **CON RIPETIZIONE:**
1 item 1 + 2 item 4
—> peso 10, valore 48
- **SENZA RIPETIZIONE:**
1 item 1 + 1 item 3
—> peso 10, valore 46

Problema dello zaino

PROBLEMA:

INPUT: Zaino di capacità $W \geq 0$

n item (oggetti) $1, 2, \dots, n$

PESI item $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{N}$

VALORE item $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{N}$

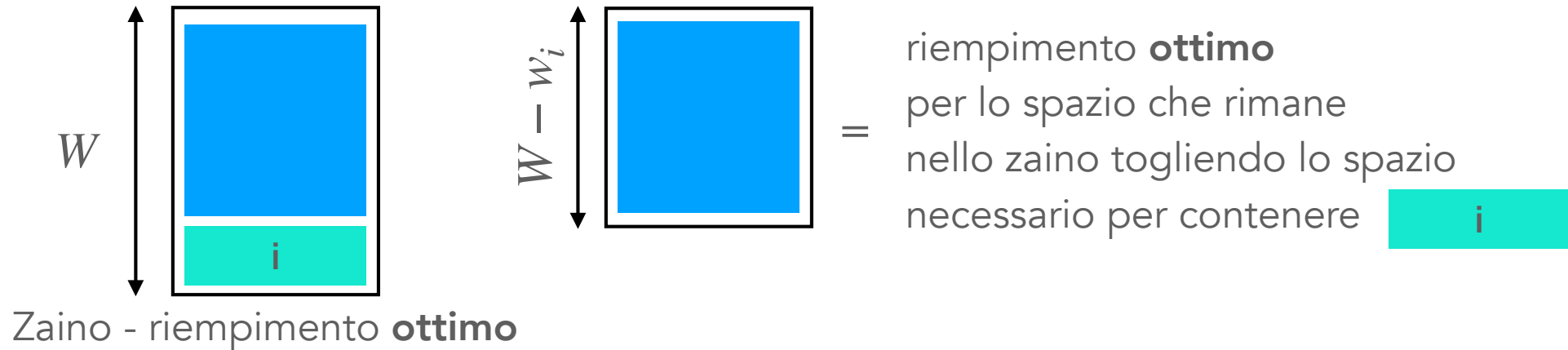
OUTPUT: selezione degli oggetti che abbia peso totale minore o uguale a W e che massimizzi il valore totale degli oggetti selezionati

FORZA BRUTA: proviamo tutti i possibili modi di selezionare gli oggetti, controlliamo se entrano nello zaino. Se sì, calcoliamo il valore totale e teniamo traccia della migliore selezione.

Computazionalmente intrattabile

Problema dello zaino

il problema ha una sottostruttura OTTIMA



Altrimenti potresti costruire una soluzione migliore di quella ottima



Problema dello zaino

GREEDY: Quale scelta GREEDY?

Ordiniamo gli oggetti per **ordine decrescente di VALORE** e scegliamo iterativamente il primo che può essere ancora contenuto nello zaino

W

item	PESO	VALORE
1	W	30
2	$W/2$	20
3	$W/2$	15

Soluzione algoritmo
GREEDY

1 item 1
—> peso W , valore 30

Soluzione ottima

- **CON RIPETIZIONE:**
2 item 2
—> peso W , valore 40
- **SENZA RIPETIZIONE:**
1 item 2 + 1 item 3
—> peso W , valore 35

Problema dello zaino

GREEDY: Quale scelta GREEDY?

Ordiniamo gli oggetti per **ordine decrescente di PESO** e scegliamo iterativamente il primo che può essere ancora contenuto nello zaino

W

item	PESO	VALORE
1	W	30
2	$W/2$	20
3	$W/2$	15

Soluzione algoritmo
GREEDY

1 item 1
—> peso W , valore 30

Soluzione ottima

- **CON RIPETIZIONE:**
2 item 2
—> peso W , valore 40
- **SENZA RIPETIZIONE:**
1 item 2 + 1 item 3
—> peso W , valore 35

Problema dello zaino

GREEDY: Quale scelta GREEDY?

Ordiniamo gli oggetti per **ordine crescente di PESO** e scegliamo iterativamente il primo che può essere ancora contenuto nello zaino

W

item	PESO	VALORE
1	W	30
2	$3W/4$	20
3	$W/2$	15

Soluzione algoritmo
GREEDY

1 item 3
—> peso $W/2$, valore 15

Soluzione ottima

- **CON RIPETIZIONE:**
1 item 1
—> peso W , valore 30
- **SENZA RIPETIZIONE:**
1 item 1
—> peso W , valore 30

Problema dello zaino

GREEDY: Quale scelta GREEDY?

Calcoliamo il valore per unità di peso per ogni oggetto (v_i/w_i)
Ordiniamo gli oggetti per **ordine decrescente di VALORE per UNITÀ di PESO** e scegliamo iterativamente il primo che può essere ancora contenuto nello zaino

$$W = 10$$

item	PESO	VALORE	v/w
1	10	30	$30/10 = 3$
2	6	28	$28/6 = 4.66$

Soluzione algoritmo
GREEDY

1 item 2
—> peso 6, valore 28

Soluzione ottima

- **CON RIPETIZIONE:**
1 item 1
—> peso 10, valore 30
- **SENZA RIPETIZIONE:**
1 item 1
—> peso 10, valore 30

Problema dello zaino

GREEDY: Quale scelta GREEDY?

Nessuno lo sa....

PROGRAMMAZIONE DINAMICA

Il problema ha una sottostruttura ottima

Problema dello zaino

CON RIPETIZIONE

SOTTOPROBLEMA:

Per ogni $w \in N$ tale che $w \leq W$ definiamo

$K(w)$ = massimo valore ottenibile con zaino di capacità $w \leq W$

OSSERVAZIONE:

se sapessimo che nella soluzione ottima al sottoproblema c'è l'item i

$$K(w) = v_i + K(w - w_i)$$

massimo valore
ottenibile con zaino
di capacità w

valore dell'item i ,
che sta nella
soluzione ottima

massimo valore ottenibile con
zaino nella capacità residua
 $(w - w_i)$, considerando
l'occupazione dell'item i

Problema dello zaino

CON RIPETIZIONE

SOTTOPROBLEMA:

Per ogni $w \in N$ tale che $w \leq W$ definiamo

$K(w)$ = massimo valore ottenibile con zaino di capacità $w \leq W$

non sapendo quale item appartiene alla soluzione ottima...
...scegliamo quello che ci permette di ottenere il valore massimo

$$K(w) = \max_{i: w_i \leq w} \{v_i + K(w - w_i)\}$$

massimo valore
ottenibile con zaino
di capacità w

Migliore scelta di item: massimizza la somma
del valore dell'item scelto e
del massimo valore ottenibile con zaino nella capacità residua
($W - w$), considerando l'occupazione dell'item scelto

Problema dello zaino

CON RIPETIZIONE

SOTTOPROBLEMA:

Per ogni $w \in N$ tale che $w \leq W$ definiamo

$K(w)$ = massimo valore ottenibile con zaino di capacità $w \leq W$

se i $K(w - w_i)$ sono già stati calcolati (per $i=1,2,\dots,n$) quando dobbiamo calcolare $K(w)$, per calcolare $K(w)$ dobbiamo solo eseguire $O(n)$ operazioni aritmetiche

$$K(w) = \max_{i:w_i \leq w} \{v_i + K(w - w_i)\}$$

massimo valore
ottenibile con zaino
di capacità w

Migliore scelta di item: massimizza la somma
del valore dell'item e
del massimo valore ottenibile con zaino nella capacità residua
($W - w$), considerando l'occupazione dell'item i

Problema dello zaino

CON RIPETIZIONE

SOTTOPROBLEMA:

Per ogni $w \in N$ tale che $w \leq W$ definiamo

$K(w)$ = massimo valore ottenibile con zaino di capacità $w \leq W$

$$K(w) = \max_{i: w_i \leq w} \{v_i + K(w - w_i)\}$$

Risolviamo i sottoproblemi per w crescente
 $w = 0, 1, 2, \dots, W - 1, W$

ATTENZIONE

I pesi sono interi,
ci interessano solo
i valori di w interi!

CASO BASE: $w < \min_i w_i \rightarrow K(w) = 0$ = massimo valore ottenibile con uno zaino di capacità inferiore all'item più piccolo

SOLUZIONE al PROBLEMA originale:

$w = W \rightarrow K(W)$ = massimo valore ottenibile con uno zaino di capacità W

Problema dello zaino

CON RIPETIZIONE

Per calcolare il valore della soluzione ottima di tutti i sottoproblemi

```
min := min {wi}  
        i∈[1..n]  
for w = 0 to min -1 do  
    K[w] := 0  
for w = min to W do  
    K[w] = max {vi + K(w - wi)}  
                i:wi ≤ w
```

Costo computazionale $O(Wn)$

PSEUDO-POLINIMIALE

(il costo dipende da uno - o più - dei
valori di input)

Per calcolare la **selezione** della soluzione **ottima**
teniamo traccia dell'item che permette di calcolare $K(w)$, per ogni w
(non c'è nello pseudocodice)

Problema dello zaino

ESEMPIO

CON RIPETIZIONE

$$W = 10$$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	0	0									

$$K[w] = \max_{i: w_i \leq w} \{v_i + K(w - w_i)\}$$

item

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0										

Problema dello zaino

ESEMPIO

CON RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

↓

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	0	0									

$$W = 2 \quad \{i: w_i \leq 2\} = \{4\}$$

$$K(2) = v_4 + K(\underbrace{2-2}_{=0}) = 9$$

$$K[w] = \max_{i: w_i \leq w} \{v_i + K(w - w_i)\}$$

item

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0										

Problema dello zaino

ESEMPIO

CON RIPETIZIONE

$$W = 10$$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	0	0	9								

$$W=2 \quad \{i: w_i \leq 2\} = \{4\}$$
$$K(2) = v_4 + K(\underbrace{2-2}_{=0}) = 9$$

$$K[w] = \max_{i:w_i \leq w} \{v_i + K(w - w_i)\}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
item	0	0	4								

Problema dello zaino

ESEMPIO

CON RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

↓

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	0	0	9								

$$W = 3 \quad \{i : w_i \leq 3\} = \{2, 4\}$$

$$K(3) = \max \begin{cases} v_2 + K(\underbrace{3-3}_{=0}) = 14 + 0 \\ v_4 + K(\underbrace{3-2}_{=1}) = 9 + 0 \end{cases}$$

$$K[w] = \max_{i: w_i \leq w} \{v_i + K(w - w_i)\}$$

item

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	4									

Problema dello zaino

ESEMPIO

CON RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

↓

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	0	0	9	14							

$$W = 3 \quad \{i : w_i \leq 3\} = \{2, 4\}$$

$$K(3) = \max \begin{cases} v_2 + K(\underbrace{3-3}_{=0}) = 14 + 0 \\ v_4 + K(\underbrace{3-2}_{=1}) = 9 + 0 \end{cases}$$

$$K[w] = \max_{i: w_i \leq w} \{v_i + K(w - w_i)\}$$

item

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	4	2								

Problema dello zaino

ESEMPIO

CON RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

K

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	9	14							

$W=4 \quad \{i : w_i \leq 4\} = \{2, 3, 4\}$

$$K(4) = \max \begin{cases} v_2 + K(\overset{=1}{4-3}) = 14 + 0 \\ v_3 + K(\overset{=0}{4-4}) = 16 + 0 \\ v_4 + K(\overset{=2}{4-2}) = \textcircled{9 + 9} \end{cases}$$

$$K[w] = \max_{i: w_i \leq w} \{v_i + K(w - w_i)\}$$

item

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	4	2							

Problema dello zaino

ESEMPIO

CON RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

↓

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	0	0	9	14	18						

$$W=4 \quad \{i : w_i \leq 4\} = \{2, 3, 4\}$$

$$K(4) = \max \begin{cases} v_2 + K(\overset{=1}{4-3}) = 14 + 0 \\ v_3 + K(\overset{=0}{4-4}) = 16 + 0 \\ v_4 + K(\overset{=2}{4-2}) = \textcircled{9 + 9} \end{cases}$$

$$K[w] = \max_{i: w_i \leq w} \{v_i + K(w - w_i)\}$$

item

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	4	2	4							

Problema dello zaino

ESEMPIO

CON RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

K

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	9	14	18						

$W = 5 \quad \{i : w_i \leq 5\} = \{2, 3, 4\}$

$$K(5) = \max \begin{cases} v_2 + K(5-3) = 14 + 9 \\ v_3 + K(5-4) = 16 + 0 \\ v_4 + K(5-2) = 9 + 14 \end{cases}$$

$$K[w] = \max_{i: w_i \leq w} \{v_i + K(w - w_i)\}$$

item

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	4	2	4						

Problema dello zaino

ESEMPIO

CON RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

↓

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	0	0	9	14	18	23					

$$W = 5 \quad \{i : w_i \leq 5\} = \{2, 3, 4\}$$

$$K(5) = \max \begin{cases} v_2 + K(5-3) = 14 + 9 \\ v_3 + K(5-4) = 16 + 0 \\ v_4 + K(5-2) = 9 + 14 \end{cases}$$

$$K[w] = \max_{i: w_i \leq w} \{v_i + K(w - w_i)\}$$

item

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	4	2	4	2					

Problema dello zaino

ESEMPIO

CON RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

K

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	9	14	18	23					

$$W = 6 \quad \{i : w_i \leq 6\} = \{2, 3, 4, 1\}$$

$$K(6) = \max \begin{cases} v_1 + K(6-6) = 30 + 0 \\ v_2 + K(6-3) = 14 + 14 \\ v_3 + K(6-4) = 16 + 9 \\ v_4 + K(6-2) = 9 + 18 \end{cases}$$

$$K[w] = \max_{i: w_i \leq w} \{v_i + K(w - w_i)\}$$

item

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	4	2	4	2					

Problema dello zaino

ESEMPIO

CON RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

↙

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	0	0	9	14	18	23	30				

$$W = 6 \quad \{i : w_i \leq 6\} = \{2, 3, 4, 1\}$$

$$K(6) = \max \begin{cases} v_1 + K(6-6) = 30 + 0 \\ v_2 + K(6-3) = 14 + 14 \\ v_3 + K(6-4) = 16 + 9 \\ v_4 + K(6-2) = 9 + 18 \end{cases}$$

$$K[w] = \max_{i: w_i \leq w} \{v_i + K(w - w_i)\}$$

item

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	4	2	4	2	1				

Problema dello zaino

ESEMPIO

CON RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

K

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	9	14	18	23	30				

$$W = 7 \quad \{i : w_i \leq 7\} = \{2, 3, 4, 1\}$$

$$K(7) = \max \begin{cases} v_1 + K(7-6) = 30 + 0 \\ v_2 + K(7-3) = 14 + 18 = 32 \\ v_3 + K(7-4) = 16 + 14 = 30 \\ v_4 + K(7-2) = 9 + 23 = 32 \end{cases}$$

$$K[w] = \max_{i: w_i \leq w} \{v_i + K(w - w_i)\}$$

item

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	4	2	4	2	1				

Problema dello zaino

ESEMPIO

CON RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

K

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	9	14	18	23	30	32			

$$W = 7 \quad \{i : w_i \leq 7\} = \{2, 3, 4, 1\}$$

$$K(7) = \max \begin{cases} v_1 + K(7-6) = 30 + 0 \\ v_2 + K(7-3) = 14 + 18 = 32 \\ v_3 + K(7-4) = 16 + 14 = 30 \\ v_4 + K(7-2) = 9 + 23 = 32 \end{cases}$$

$$K[w] = \max_{i: w_i \leq w} \{v_i + K(w - w_i)\}$$

item

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	4	2	4	2	1	2			

Problema dello zaino

ESEMPIO

CON RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

K

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	9	14	18	23	30	32			

$W = 8 \quad \{i : w_i \leq 8\} = \{2, 3, 4, 1\}$

$$K(8) = \max \begin{cases} v_1 + K(8-6) = 30 + 9 = 39 \\ v_2 + K(8-3) = 14 + 23 = 37 \\ v_3 + K(8-4) = 16 + 18 = 34 \\ v_4 + K(8-2) = 9 + 30 = 39 \end{cases}$$

$$K[w] = \max_{i: w_i \leq w} \{v_i + K(w - w_i)\}$$

item

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	4	2	4	2	1	2			

Problema dello zaino

ESEMPIO

CON RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

K

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	9	14	18	23	30	32	39		

$W = 8 \quad \{i : w_i \leq 8\} = \{2, 3, 4, 1\}$

$$K(8) = \max \begin{cases} v_1 + K(8-6) = 30 + 9 = 39 \\ v_2 + K(8-3) = 14 + 23 = 37 \\ v_3 + K(8-4) = 16 + 18 = 34 \\ v_4 + K(8-2) = 9 + 30 = 39 \end{cases}$$

$$K[w] = \max_{i: w_i \leq w} \{v_i + K(w - w_i)\}$$

item

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	4	2	4	2	1	2	4		

Problema dello zaino

ESEMPIO

CON RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

↙

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	0	0	9	14	18	23	30	32	39		

$$W = 9 \quad \{i : w_i \leq 9\} = \{2, 3, 4, 1\}$$

$$K(9) = \max \begin{cases} v_1 + K(9-6) = 30 + 14 = 44 \\ v_2 + K(9-3) = 14 + 30 = 44 \\ v_3 + K(9-4) = 16 + 23 = 39 \\ v_4 + K(9-2) = 9 + 32 = 41 \end{cases}$$

$$K[w] = \max_{i: w_i \leq w} \{v_i + K(w - w_i)\}$$

item

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	4	2	4	2	1	2	4		

Problema dello zaino

ESEMPIO

CON RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

K

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	9	14	18	23	30	32	39	44	

$$W = 9 \quad \{i : w_i \leq 9\} = \{2, 3, 4, 1\}$$

$$K(9) = \max \begin{cases} v_1 + K(9-6) = 30 + 14 = 44 \\ v_2 + K(9-3) = 14 + 30 = 44 \\ v_3 + K(9-4) = 16 + 23 = 39 \\ v_4 + K(9-2) = 9 + 32 = 41 \end{cases}$$

$$K[w] = \max_{i: w_i \leq w} \{v_i + K(w - w_i)\}$$

item

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	4	2	4	2	1	2	4	1	

Problema dello zaino

ESEMPIO

CON RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

K

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	9	14	18	23	30	32	39	44	

$W = 10 \quad \{i : w_i \leq 10\} = \{2, 3, 4, 1\}$

$$K(10) = \max \begin{cases} v_1 + K(10-6) = 30 + 18 = 48 \\ v_2 + K(10-3) = 14 + 32 = 46 \\ v_3 + K(10-4) = 16 + 30 = 46 \\ v_4 + K(10-2) = 9 + 39 = 48 \end{cases}$$

$$K[w] = \max_{i: w_i \leq w} \{v_i + K(w - w_i)\}$$

item

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	4	2	4	2	1	2	4	1	

Problema dello zaino

ESEMPIO

CON RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

K

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	9	14	18	23	30	32	39	44	48

$W = 10 \quad \{i : w_i \leq 10\} = \{2, 3, 4, 1\}$

$$K(10) = \max \begin{cases} v_1 + K(10-6) = 30 + 18 = 48 \\ v_2 + K(10-3) = 14 + 32 = 46 \\ v_3 + K(10-4) = 16 + 30 = 46 \\ v_4 + K(10-2) = 9 + 39 = 48 \end{cases}$$

$$K[w] = \max_{i: w_i \leq w} \{v_i + K(w - w_i)\}$$

item

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	4	2	4	2	1	2	4	1	1

Problema dello zaino

ESEMPIO

CON RIPETIZIONE

$$W = 10$$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

K

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	9	14	18	23	30	32	39	44	48

calcoliamo la selezione di
oggetti che ha permesso di
ottenere il valore massimo

item

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	4	2	4	2	1	2	4	1	1

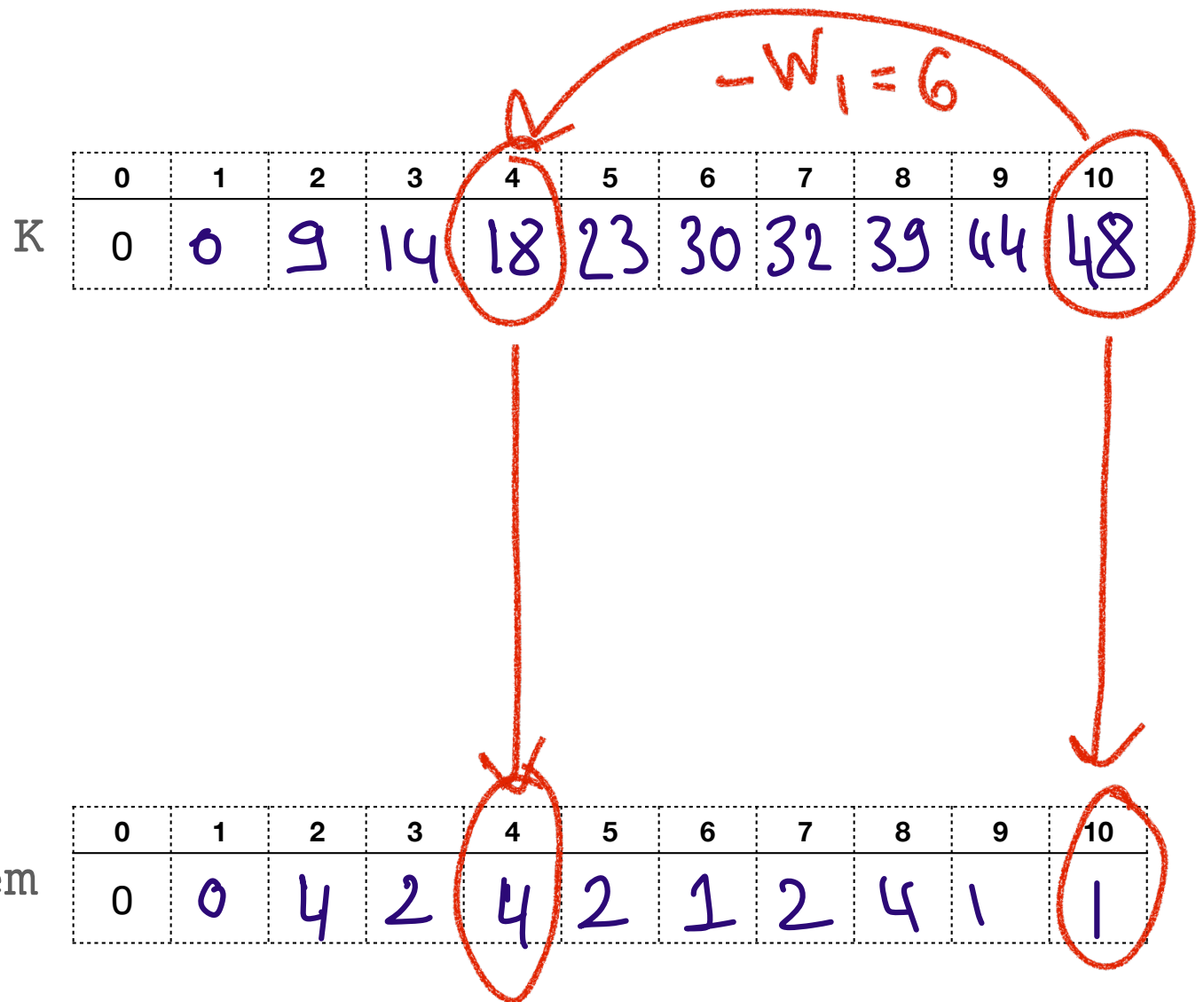
Problema dello zaino

ESEMPIO

CON RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9



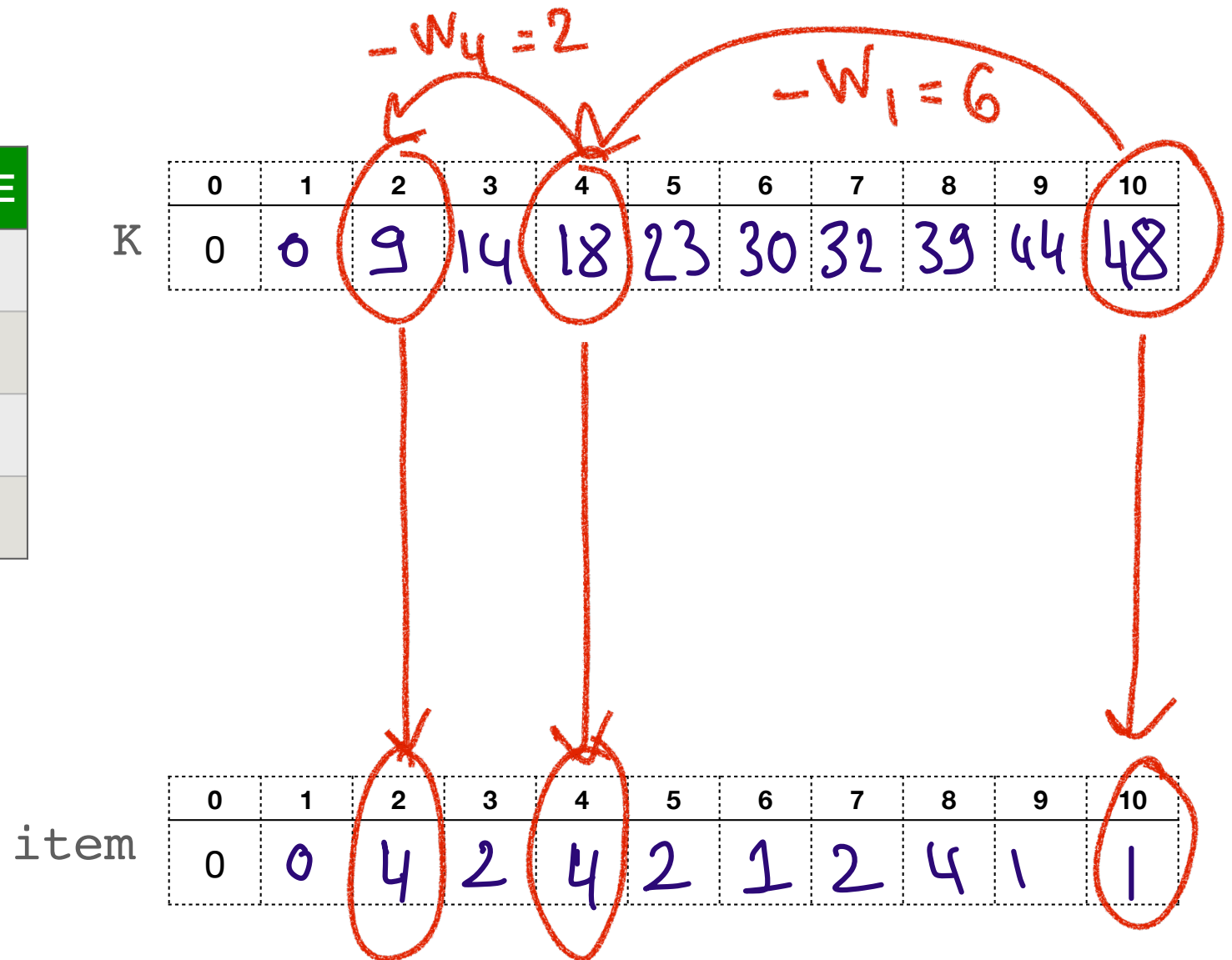
Problema dello zaino

ESEMPIO

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

CON RIPETIZIONE



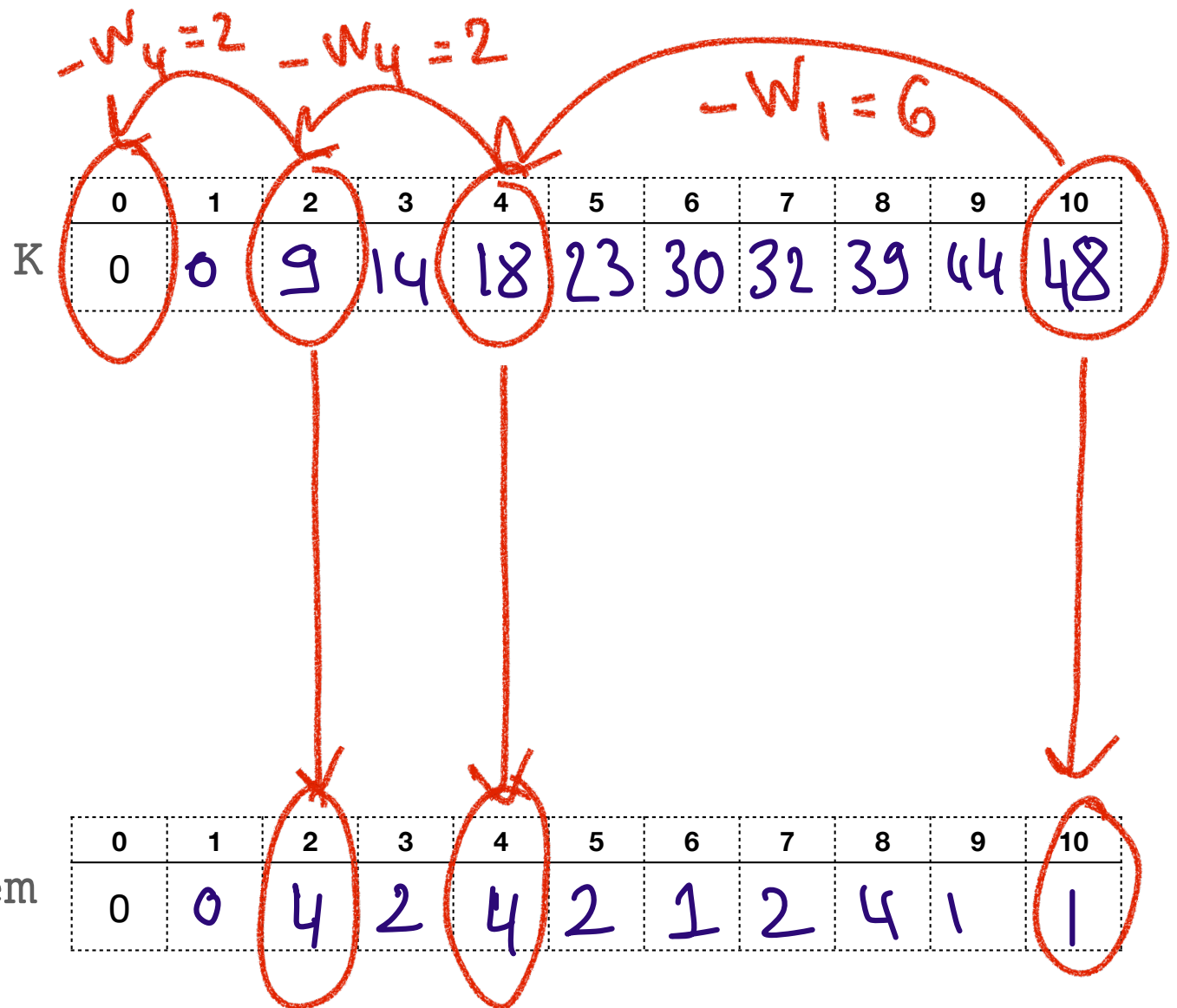
Problema dello zaino

ESEMPIO

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

CON RIPETIZIONE



Problema dello zaino

ESEMPIO

CON RIPETIZIONE

$W = 10$

item	PESO	VALORE
1	6	30
2	3	14
3	4	16
4	2	9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	0	0	9	14	18	23	30	32	39	44	48

SELEZIONE OGGETTI

2 item 4 + 1 item 1

VALORE: 48 PESO: 10

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
item	0	0	4	2	4	2	1	2	4	1	1