ALGORITMI E STRUTTURE DATI

Prof. Manuela Montangero

A.A. 2022/23

Programmazione Dinamica

All Pairs Shortest Paths

UNIMORE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

All-Pairs Shortest Paths

PROBLEMA:

INPUT: Grafo G = (V,E), con V = {1,2,…,n}
funzione peso sugli archi $c : E \to R$ che non genera cicli negativi

OUTPUT: cammini minimi tra ogni coppia di nodi di G

SOLUZIONE 1:

Eseguire l'algoritmo di Bellman-Ford |V| volte, usando ogni nodo del grafo come sorgente.

Costo computazionale $O(|V|) \cdot O(|V| \cdot |E|) \in O(|V|^2 |E|)$

All-Pairs Shortest Paths

PROBLEMA:

INPUT: Grafo G = (V,E)

funzione peso sugli archi $c : E \rightarrow R$ che non genera cicli negativi

OUTPUT: cammini minimi tra ogni coppia di nodi di G

SOLUZIONE 2:

Progettare un algoritmo che usi la programmazione dinamica

All-Pairs Shortest Paths

SOTTOPROBLEMA:
Dati tre nodi i,j,k di V, definiamo

`dist(i,j,k)` = lunghezza del cammino minimo tra i e j
che usa SOLO i nodi in {1,2,…,k}

$i, j, k = 0,1,2,\ldots,n$

Se tale cammino minimo non esiste dist(i,j,k) = $+\infty$

Abbiamo bisogno di n matrici!

assomiglia a quello che abbiamo fatto per lo zaino senza ripetizione!

All-Pairs Shortest Paths

`dist(i,j,k)` = lunghezza del cammino minimo tra i e j
che usa SOLO i nodi in {1,2,…,k}

Quali lunghezze siamo in grado di calcolare facilmente?

`dist(i,j,0)` = `c(i,j)` se esite l'arco (i,j)

= 0 se i = j

= $+\infty$ se non esite l'arco (i,j) e i$\neq$j

Nessun nodo intermedio

All-Pairs Shortest Paths

`dist(i,j,k)` = lunghezza del cammino minimo tra i e j
che usa SOLO i nodi in {1,2,…,k}

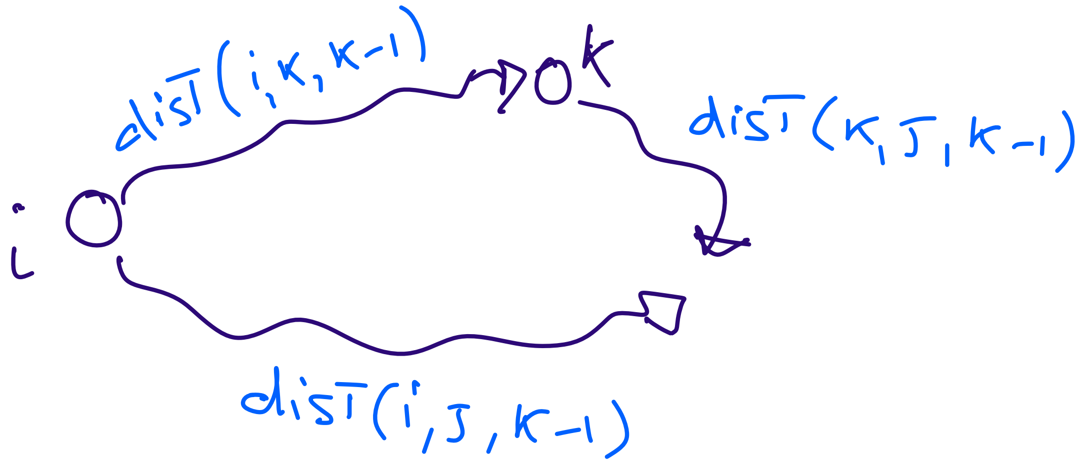
Come possiamo scrivere `dist(i,j,k)` in funzione di sottoproblemi più piccoli?

Il cammino più breve tra i e j
o passa per k o non ci passa

All-Pairs Shortest Paths

`dist(i,j,k)` = lunghezza del cammino minimo tra i e j
che usa SOLO i nodi in {1,2,…,k}

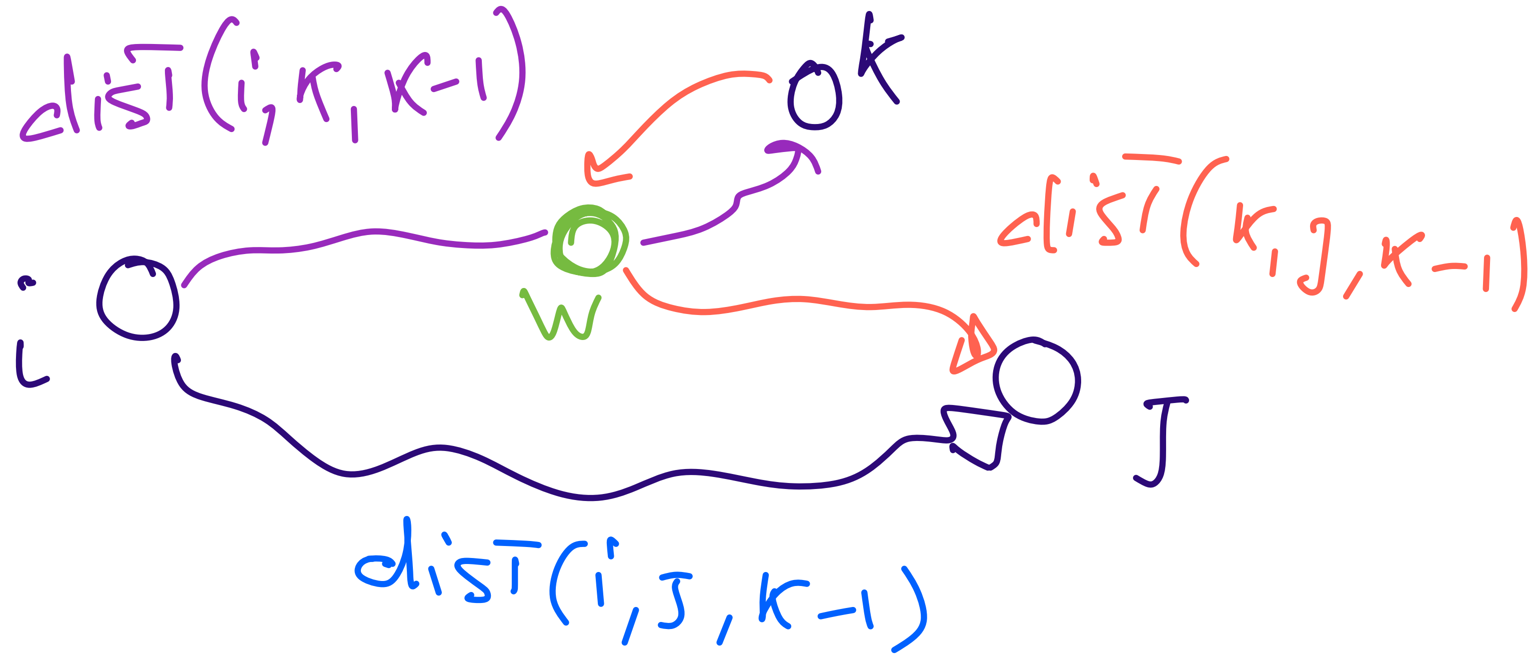
Come possiamo scrivere `dist(i,j,k)` in funzione di sottoproblemi più piccoli?



$$\mathtt{dist}(\mathtt{i},\mathtt{j},\mathtt{k}) = \min \begin{cases} \mathtt{dist}(\mathtt{i},\mathtt{j},\mathtt{k}-1) \\ \mathtt{dist}(\mathtt{i},\mathtt{k},\mathtt{k}-1) + \mathtt{dist}(\mathtt{k},\mathtt{j},\mathtt{k}-1) \end{cases}$$

All-Pairs Shortest Paths

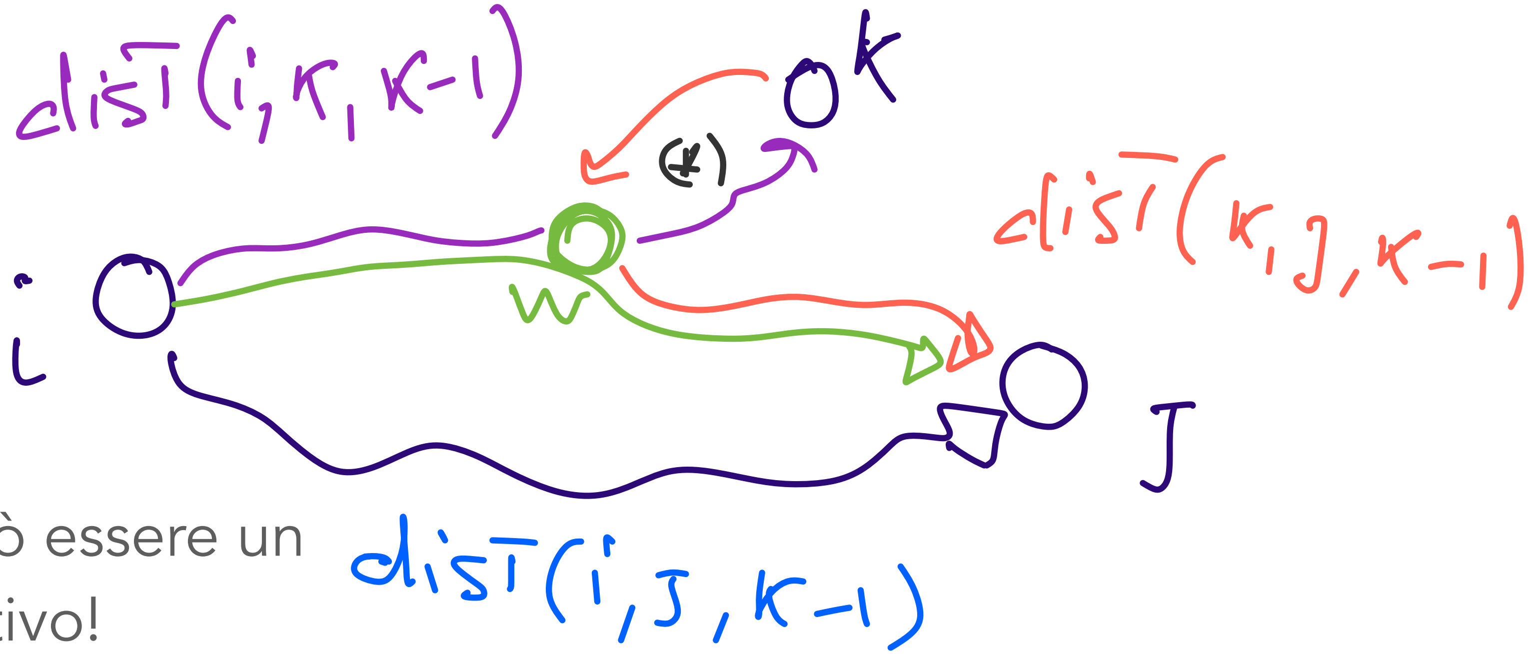
E se i cammini da i a k e da k a j
condividono (almeno) un nodo?



UNIMORE

All-Pairs Shortest Paths

Il cammino che va da i a j passando per w
ma non per k, non è più lungo della somma di
`dist(i,k,k-1)` e `dist(k,j, k-1)`
ed è lungo almeno come `dist(i,j,k-1)`

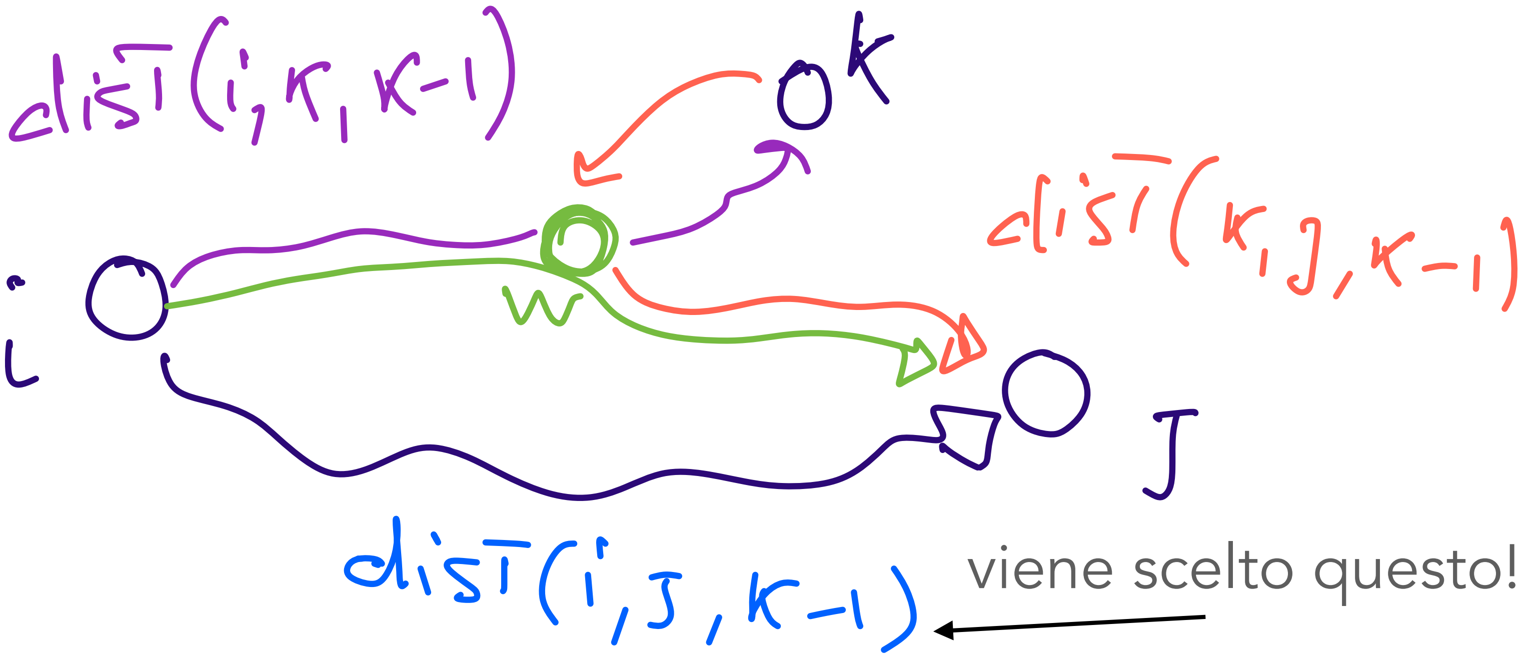


(*) non può essere un
ciclo negativo!

All-Pairs Shortest Paths

`dist(i,j,k-1)` $\leq$ `dist(i,k,k-1)+ dist(k,j,k-1)`

minimo



viene scelto questo!

All-Pairs Shortest Paths

`dist(i,j,k)` = lunghezza del cammino minimo tra i e j
che usa SOLO i nodi in {1,2,…,k}

Come possiamo scrivere `dist(i,j,k)` in funzione di sottoproblemi più piccoli?

Per calcolare la matrice relativa a k abbiamo bisogno solo della matrice relativa a k-1

$$\mathtt{dist}(\mathtt{i},\mathtt{j},\mathtt{k}) = \min \begin{cases} \mathtt{dist}(\mathtt{i},\mathtt{j},\mathtt{k}-1) \\ \mathtt{dist}(\mathtt{i},\mathtt{k},\mathtt{k}-1) + \mathtt{dist}(\mathtt{k},\mathtt{j},\mathtt{k}-1) \end{cases}$$

All-Pairs Shortest Paths

`dist(i,j,k)` = lunghezza del cammino minimo tra i e j
che usa SOLO i nodi in {1,2,…,k}

Quali sono le lunghezze dei cammini minimi?
(valore della soluzione ottima)

`dist(i,j,n)` per ogni coppia (i,j)

È
(correttamente)
una matrice!

All-Pairs Shortest Paths

Per calcolare tutte le lunghezze dei cammini minimi

```
Floyd-Warshall(G,c)
for i = 1 to n do
 for j = 1 to n do
  if i = j
   then dist[i,j,0] := 0
   else dist[i,j,0] := +∞
for all (i,j)∈ E do
  dist[i,j,0] := c(i,j)
for k = 1 to n do
 for i = 1 to n do
  for j = 1 to n do
```

$$\mathtt{dist}[\mathtt{i},\mathtt{j},\mathtt{k}] = \min \begin{cases} \mathtt{dist}[\mathtt{i},\mathtt{j},\mathtt{k}-1] \\ \mathtt{dist}[\mathtt{i},\mathtt{k},\mathtt{k}-1] + \mathtt{dist}[\mathtt{k},\mathtt{j},\mathtt{k}-1] \end{cases}$$

```
return dist[i,j,n] ∀(i,j)
```

Costo computazionale
$O(n^3)$

Inizializzazione $O(n^2)$

Tre for annidati $O(n^3)$

Riempimento una cella di una matrice $O(1)$

All-Pairs Shortest Paths

OSSERVAZIONE:

se `i=k`, per ogni `j = 1, 2, …, n` abbiamo che:

$$\mathtt{dist}(k, j, k) = \min \begin{cases} \mathtt{dist}(k, j, k-1) \\ \underbrace{\mathtt{dist}(k, k, k-1)}_{=0} + \mathtt{dist}(k, j, k-1) \end{cases}$$

$$\mathtt{dist}(k, j, k) = \mathtt{dist}(k, j, k-1)$$

La riga `k`-esima della matrice `k` è
UGUALE alla riga `k`-esima della matrice `k-1`

All-Pairs Shortest Paths

OSSERVAZIONE:

se `j=k`, per ogni i `= 1, 2, …, n` abbiamo che:

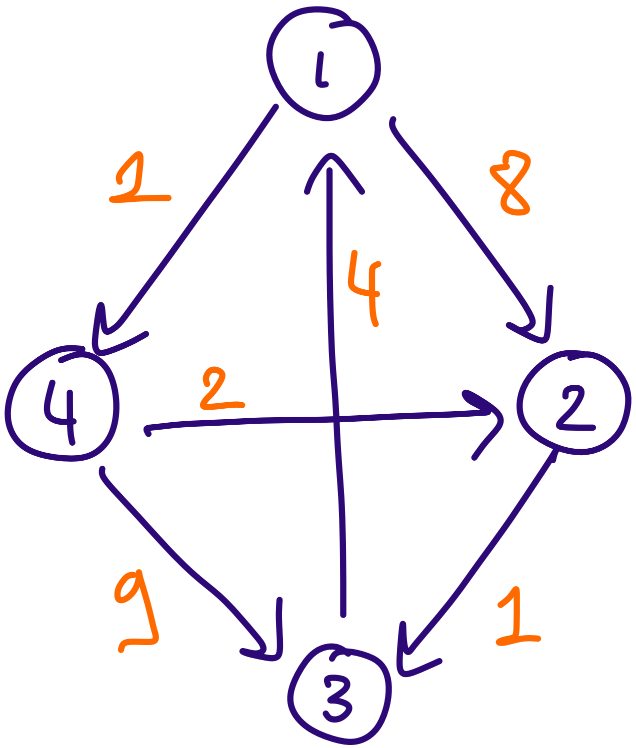
$$\mathtt{dist}(\mathtt{i},\mathtt{k},\mathtt{k}) = \min \begin{cases} \mathtt{dist}(\mathtt{i},\mathtt{k},\mathtt{k}-1) \\ \mathtt{dist}(\mathtt{i},\mathtt{k},\mathtt{k}-1) + \underbrace{\mathtt{dist}(\mathtt{k},\mathtt{k},\mathtt{k}-1)}_{=0} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathtt{dist}(\mathtt{i},\mathtt{k},\mathtt{k}) = \mathtt{dist}(\mathtt{i},\mathtt{k},\mathtt{k}-1)$$

La colonna `k`-esima della matrice `k` è
UGUALE alla colonna `k`-esima della matrice `k-1`

ESEMPIO



K j i

$$D^{(0)} = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

$$D^{(0)} = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & +\infty & 0 & +\infty \\ +\infty & 2 & 9 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

ESEMPIO

Ricopiamo in $D^{(1)}$
la riga 1,
la colonna 1
e la diagonale

$$\overset{k}{D^{(0)}} = \begin{array}{c c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}^{\,j} & \\
\begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & +\infty & 0 & +\infty \\ +\infty & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\end{array}$$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & & \\ 4 & & 0 & \\ +\infty & & & 0 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO

PER CALCOLARE $D^{(1)}[2,3]$ CI SERVONO $D^{(0)}[2,3]$

$D^{(0)}[2,1]$ e $D^{(0)}[1,3]$

K J i

$$D^{(0)} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & +\infty & 0 & +\infty \\ +\infty & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

$$D^{(1)} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} & & 3 & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & \boxed{1} & \\ 4 & & 0 & \\ +\infty & & & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ 2 \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

ESEMPIO

PER CALCOLARE $D^{(1)}[2,4]$ CI SERVONO $D^{(0)}[2,4]$, $D^{(0)}[2,1]$ e $D^{(0)}[1,4]$

K, J, i

$$D^{(0)} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & +\infty & 0 & +\infty \\ +\infty & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$$

$$D^{(1)} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} & & & 4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & \boxed{+\infty} \\ 4 & & 0 & \\ +\infty & & & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ 2 \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

ESEMPIO

PER CALCOLARE $D^{(1)}[3,2]$ CI SERVONO $D^{(0)}[3,2]$, $D^{(0)}[3,1]$ e $D^{(0)}[1,2]$

K, J, i

$$D^{(0)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & +\infty & 0 & +\infty \\ +\infty & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

$$D^{(1)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 2 & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & \boxed{12} & 0 & \\ +\infty & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ 3 \\ \\ \end{array}$$

ESEMPIO

PER CALCOLARE $D^{(1)}[3,4]$ CI SERVONO $D^{(0)}[3,4]$

$D^{(0)}[3,1]$ e $D^{(0)}[1,4]$

K J i

$$D^{(0)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & +\infty & 0 & +\infty \\ +\infty & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

$$D^{(1)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \ & \ & \ & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & 12 & 0 & \boxed{5} \\ +\infty & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ 3 \\ \\ \end{array}$$

ESEMPIO

PER CALCOLARE $D^{(1)}[4,2]$

CI SERVONO

$D^{(0)}[4,2]$

$D^{(0)}[4,1]$ e $D^{(0)}[1,2]$

$$D^{(0)} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & +\infty & 0 & +\infty \\ +\infty & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

K, J, i

$$D^{(1)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & 2 & & \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ +\infty & \boxed{2} & & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ 4 \end{array} \end{array}$$

ESEMPIO

PER CALCOLARE $D^{(1)}[4,3]$ CI SERVONO $D^{(0)}[4,3]$

$D^{(0)}[4,1]$ e $D^{(0)}[1,3]$

K J i

$$D^{(0)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & +\infty & 0 & +\infty \\ +\infty & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

$$D^{(1)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & 3 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ +\infty & 2 & \boxed{9} & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ 4 \end{array}$$

ESEMPIO

Ricopiamo in $D^{(2)}$
la riga 1,
la colonna 1
e la diagonale

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & & \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ & 12 & 0 & \\ & 2 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ +\infty & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO

PER CALCOLARE

$D^{(2)}[1,3]$

CI SERVONO

$D^{(1)}[1,3]$

$D^{(1)}[1,2]$ e $D^{(1)}[2,3]$

$$D^{(2)} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & 3 & \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 8 & \boxed{9} & \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ & 12 & 0 & \\ & 2 & & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ +\infty & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ +\infty & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ +\infty & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ +\infty & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & & 9 & \\ & 0 & 1 & \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ & & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ +\infty & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Alcuni valori sono migliorati perché si può usare anche il nodo 3

ESEMPIO

$$D^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & 0 & & 6 \\ & & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

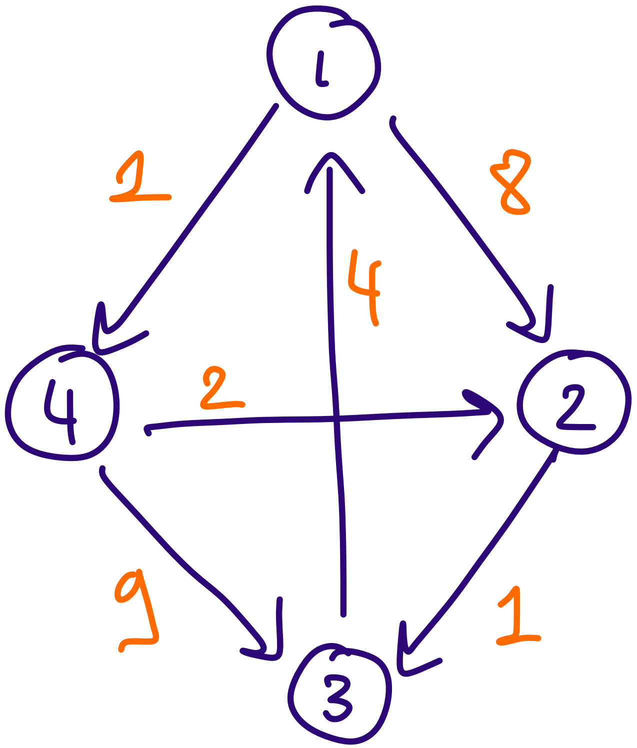
ESEMPIO

$$D^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & 7 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

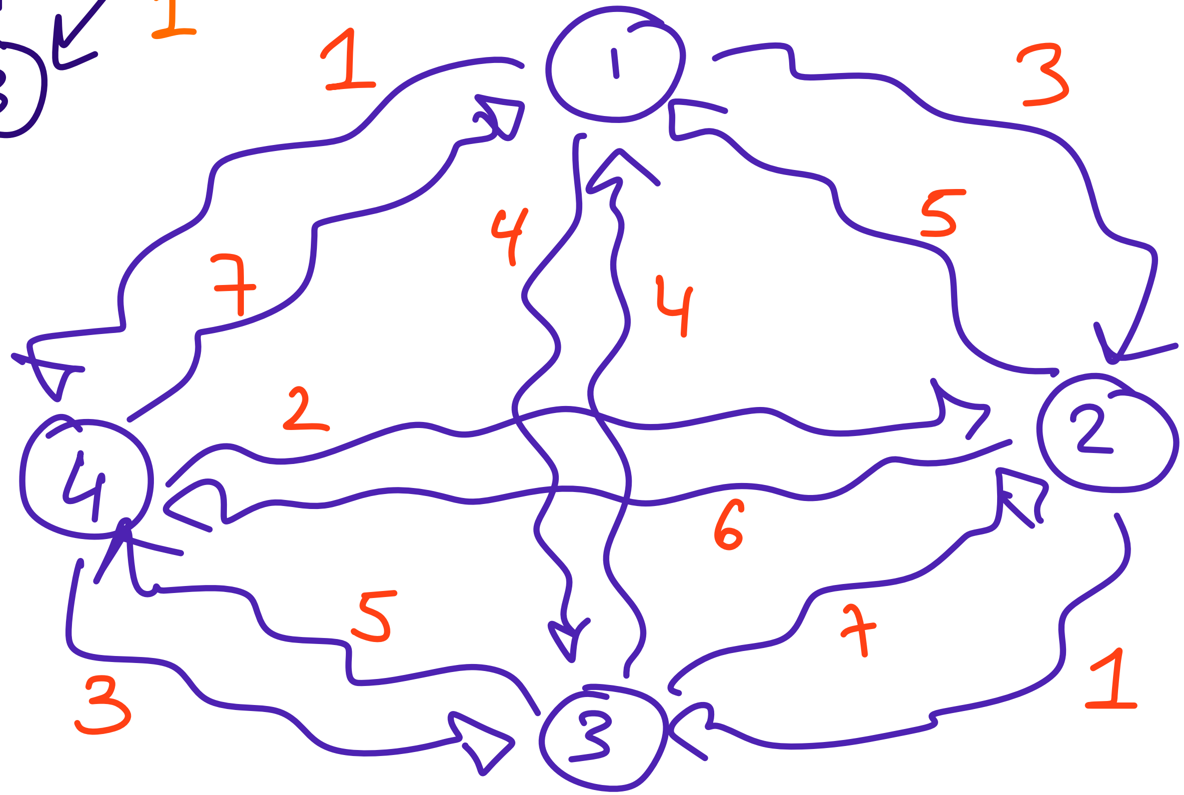
$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Alcuni valori sono migliorati perché si può usare anche il nodo 4

ESEMPIO



$$D^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & 7 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$



All-Pairs Shortest Paths

Per calcolare tutti i cammini minimi

per ogni coppia di nodi (i,j) teniamo traccia del predecessore di j sul cammino minimo che va da i a j
—> P[i,j]

Inizializzazione:

$$\mathtt{P[i,j]} = \begin{cases} i \text{ se esiste } (i,j) \in E \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

FACOLTATIVO da qua in poi

All-Pairs Shortest Paths

Per calcolare tutti i cammini minimi

per ogni coppia di nodi (i,j) teniamo traccia del predecessore di j sul cammino minimo che va da i a j
—> P[i,j]

Durante la computazione dei `dist[i,j,k]`

```
if dist[i,j,k-1] > dist[i,k,k-1]+dist[k,j,k-1]
 then P[i,j] := P[k,j]
```

il nuovo predecessore di j sul cammino minimi da i a j
è il predecessore di j sul cammino minimi da k a j

se abbiamo trovato un cammino più breve di quello precedentemente trovato passando da k

All-Pairs Shortest Paths

Per calcolare tutti i cammini minimi

per ogni coppia di nodi (i,j) teniamo traccia del predecessore di j sul cammino minimo che va da i a j

—> `P[i,j]`

Alla fine, per trovare il cammino minimo da i a j:

$p_1 = P[i,j]$, $p_2 = P[i,p_1]$, $p_3 = P[i,p_2]$,

… , $p_t = P[i,p_{t-1}]$, $i = P[i,p_t]$

e il cammino è dato da: $i, p_t, p_{t-1}, \dots, p_3, p_2, p_1, j$

All-Pairs Shortest Paths

Per calcolare tutti i cammini minimi

per ogni coppia di nodi (i,j) teniamo traccia del predecessore di j sul cammino minimo che va da i a j
—> `P[i,j]`

Alla fine, per trovare il cammino minimo da i a j:

p_1 = P[i,j], p_2 = P[i,p_1], p_3 = P[i,p_2],

… , p_t = P[i,p_{t-1}], i = P[i,p_t]

e il cammino è dato da: i, p_t, p_{t-1}, …., p_3, p_2, p_1, j

Costo computazionale $O(n)$