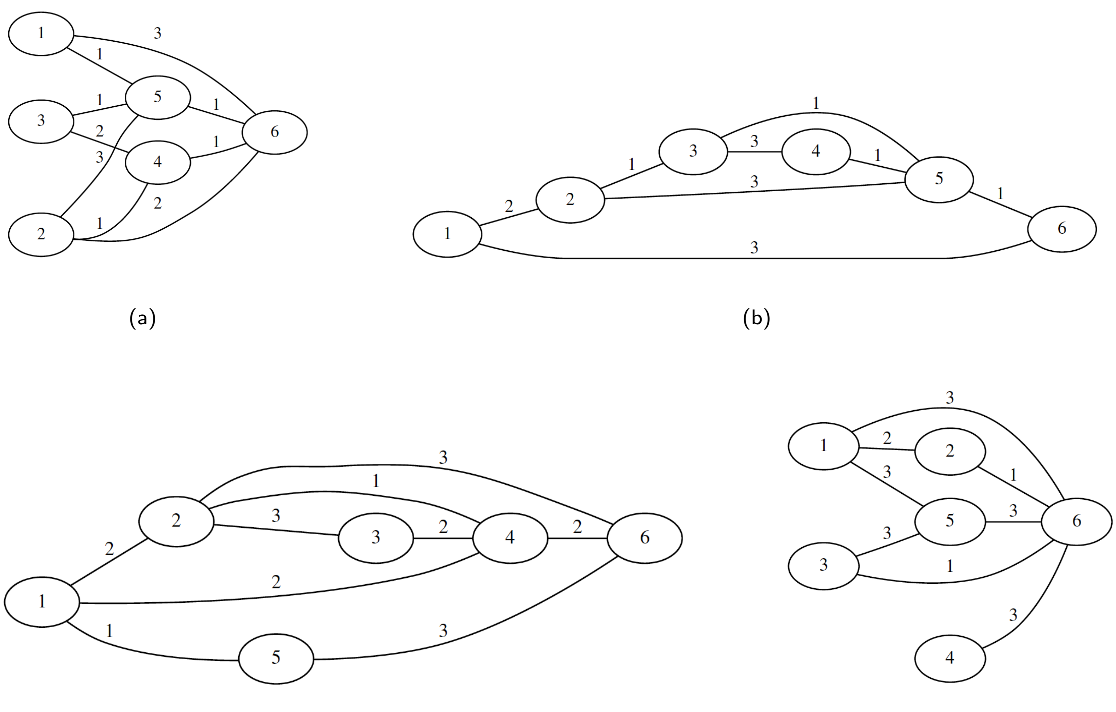
Algoritmi e Strutture Dati	Anno Accademico 2021–2022

Esercizi: Minimum Spanning Tree

Manuela Montangero

1 Esercizi

Esercizio 1 [Prima Parte] *Si considerino i grafi pesati mostrati nelle figure 1 e 2. Per ognuno di essi, si determini il minimo albero di copertura calcolato dall'*algoritmo di Kruskal *nel caso in cui, a pariti peso, gli archi siano ordinati in senso lessicografico (cioè , l'arco* (i, j) *viene prima, nell'ordine lessicografico, dell'arco* (i', j') *se* $i < i'$ *oppure se* $i = i'$ *e* $j < j'$*. Esempio:* $(2, 3)$ *viene prima di* $(3, 1)$ *e prima di* $(2, 4)$*).*



(a) (b) (c) (d)

Figura 1: Grafi esercizio 1

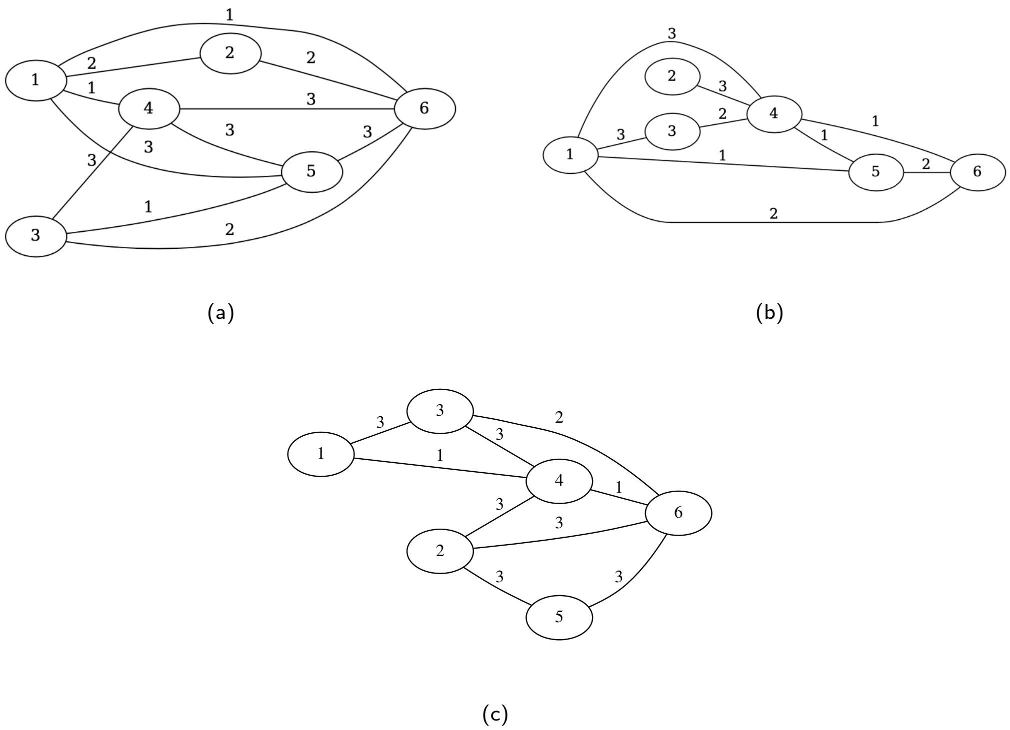
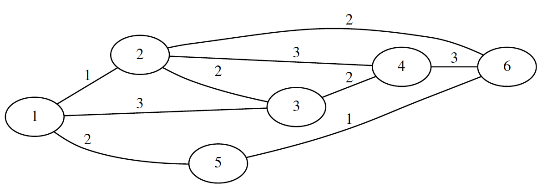


Figura 2: Grafi esercizi 1 e 2. Per l'algoritmo di PRIM iniziare dal nodo 6.

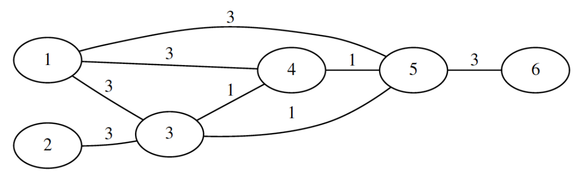
Esercizio 2 [Prima Parte] *Si considerino i grafi pesati mostrati nelle figure 3 e 2. Per ognuno di essi, si determini il minimo albero di copertura calcolato, partendo dal nodo indicato in figura, dall'*algoritmo di Prim *nel caso in cui, a parità di peso, gli archi siano ordinati in senso lessicografico (cioè , l'arco* (i, j) *viene prima, nell'ordine lessicografico, dell'arco* (i', j') *se* $i < i'$ *oppure se* $i = i'$ *e* $j < j'$*. Esempio:* $(2, 3)$ *viene prima di* $(3, 1)$ *e prima di* $(2, 4)$*).*

Esercizio 3 *Mostrare un esempio in cui, sullo stesso grafo, l'algoritmo di Prim determina un Minimum Spanning Tree diverso da quello determinato dall'Algoritmo di Kruscal. Per semplicità potete assumere che, in caso di archi con lo stesso peso, se ne possa scegliere uno a caso, ovvero non è necessario ordinare gli archi in ordine lessicografico. (Osservazione: il grafo deve avere più di un Minimum Spanning Tree).*

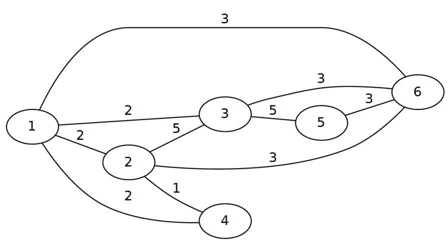
Esercizio 4 *Mostrare un esempio di grafo in cui esiste un minimum spanning tree che coincide con un albero dei cammini minimi (scegliete quale nodo è la sorgente). Modificare poi il grafo cambiando i pesi degli archi e/o aggiungendo archi in modo che questo non sia più vero.*



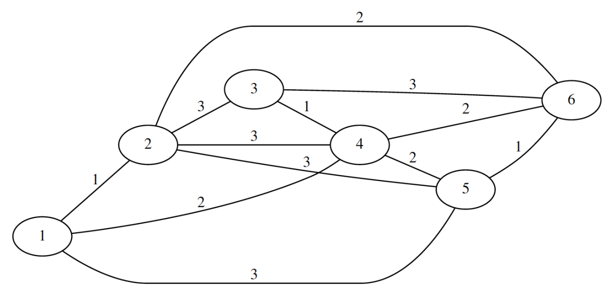
(a) partenza dal nodo 6



(b) partenza dal nodo 6



(c) partenza dal nodo 1



(d) partenza dal nodo 6

Figura 3: Esercizio 2

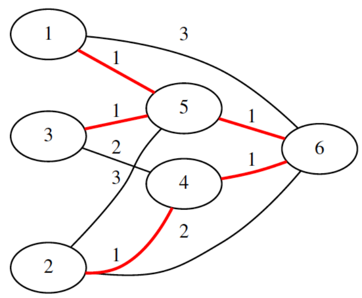
Idea per la soluzione dell'esercizio 3:

Il modo più semplice è quello di prendere un grafo con tutti gli archi di peso uguale. Calcolare il MST usando Prim e poi selezionare un altro spanning tree, cambiando almeno un arco.

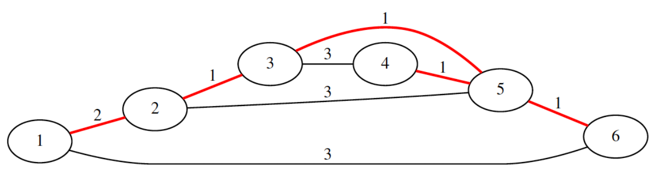
Idee per la soluzione dell'esercizio 4: Ci sono almeno due modi abbastanza semplici:

- disegnate un grafo con archi di peso tutti uguali e calcolate l'albero dei cammini minimi con Dijkstra. Gli stessi archi dell'albero dei cammini minimi formano un MST.
- disegnate un albero con archi di peso k qualunque (basta che sia lo stesso per tutti), aggiungete archi a caso con peso maggiore di $n \cdot k$. Gli archi di peso k formano sia l'albero dei cammini minimi che l'unico MST.

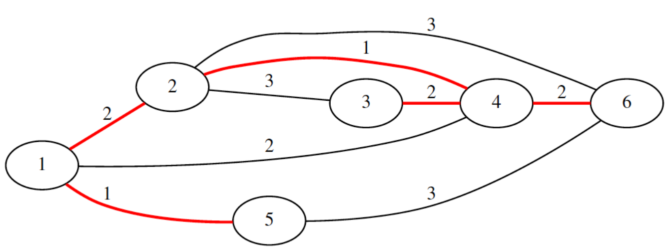
Ovviamente si possono trovare esempi più complicati.



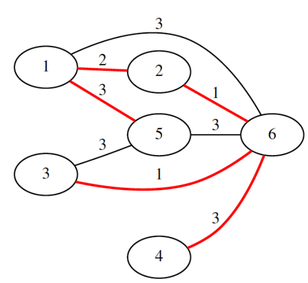
(a)



(b)

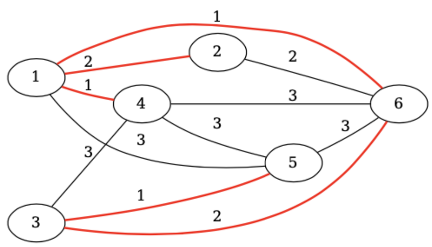


(c)

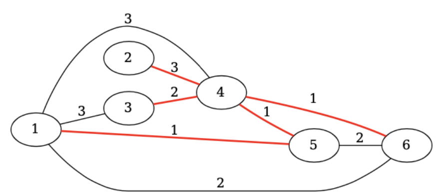


(d)

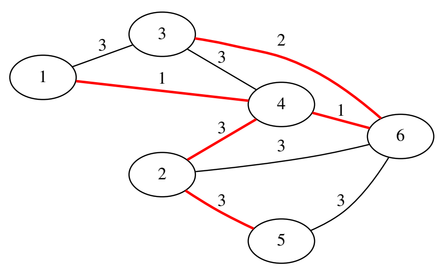
Figura 4: Soluzioni esercizio 1 (MSP con algoritmo di Kruscal)



(a)

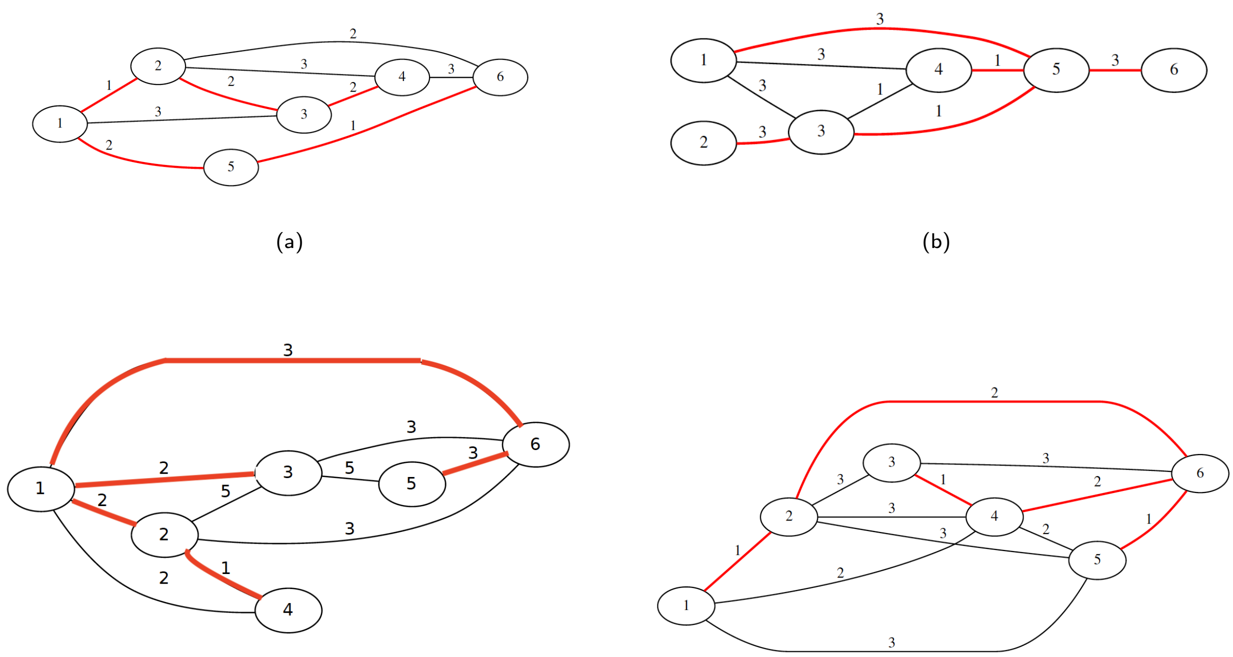


(b)



(c)

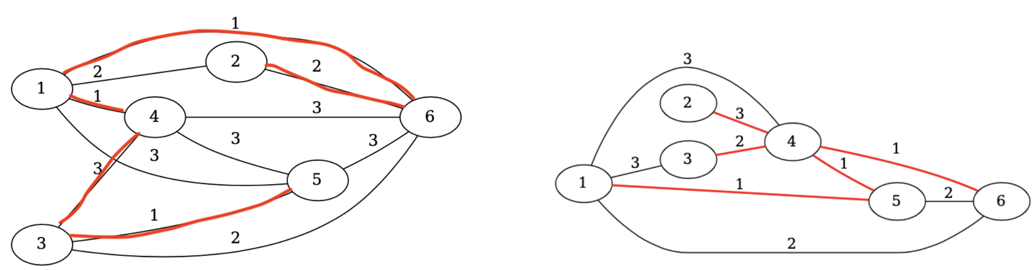
Figura 5: Soluzioni esercizio 1 (MSP con algoritmo di Kruscal)



(a) (b)

(c) (d)

Figura 6: Soluzioni esercizio 2 (MSP con algoritmo di Prim)



(a) (b)

Figura 7: Soluzioni esercizio 2 (MSP con algoritmo di Prim). SOLUZIONE grafo c: archi selezionati (1,4), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6).