Calcolo Numerico, I Esercitazione

CdL Informatica

Esercizi svolti a lezione

1) Senza usare il calcolatore, si scriva il risultato dei seguenti comandi. Quindi si verifichi l'esattezza dei risultati usando `MATLAB`.

```
x=[pi pi/2];   y=[0  pi/2];
v=sin(x)+cos(y);   t1=x.*y;   t2=x*y;  t3=x*y';   t4=x./y;
A=[-1 2 ; 5 4] ;   B=A.∧2;   C=exp(A);   D=sqtr(A);
a=realmax*10;   b=realmin/1.e5;   c=1+eps/4;  d=0/0;   e=1/0;
```

2) Utilizzando sia i cicli `for` che la notazione vettoriale, assegnare i seguenti vettori:

- $z \in \mathbb{R}^{20}$ tale che $z_k = k$, per $k = 1, 2, \ldots, 20$;
- $v \in \mathbb{R}^{100}$ tale che $v_1 = 3$, $v_i = 10^{-3}$, $i = 2, 3, \ldots, 100$;
- $w \in \mathbb{R}^n$ tale che $w_k = a + (k-1) * h$, per $k = 1, 2, \ldots, n$, con $n = 21$, $a = 0$, $h = 1/(n-1)$.

3) Scrivere una function MATLAB `norma2` che, dato un vettore x in ingresso, ne calcola la norma euclidea (detta anche "norma due"). Si ricorda che la norma euclidea di un vettore è definita come

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Scrivere uno script in cui si calcola la norma dei vettori $x = (5, -8, 7)^T$, $y = (-3.2, 5 \cdot 10^{-4}, 2.8, 3 \cdot 10^2)^T$ e del vettore così definito:

$$w(1) = 1, \quad w(i) = 3 * i/(i-1), \quad i = 2, \ldots, 30,$$

usando la funzione `norma2`, e in cui si confrontano i risultati ottenuti con quelli forniti dalla funzione nativa `norm` di MATLAB.

4) Scrivere una function che, dato in ingresso un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ ed uno scalare $p \geq 1$, restituisce

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, && \text{se } p \neq \text{inf} \\ \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, && \text{se } p = \text{inf} . \end{aligned}$$

Se il dato in ingresso p è minore di 1, la function stampa un messaggio di errore.

5) Scrivere una function `MATLAB` che, data in ingresso la matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, restituisce il minimo elemento di A e la sua posizione, ovvero gli indici di riga e di colonna.

6) Scrivere una function che, assegnata una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, restituisce in uscita $\|A\|_\infty$. Si ricorda che la norma infinito di una matrice è così definita:

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Si utilizzi tale funzione per calcolare la norma infinito della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 4e-3 \\ 3 & 21 & 5 \\ 5 & 0.01 & -4e2 \end{pmatrix}$$

e si confronti il risultato ottenuto con quello fornito dalla funzione predefinita `norm`, calcolando l'errore relativo.

7) Scrivere una function che, dati in ingresso una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ed un vettore $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, calcola $y = Ax$, ovvero il vettore colonna $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ la cui i-esima componente ha la forma

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \qquad i = 1, \dots, m.$$

Eseguire la function e confrontare il risultato con quello ottenuto usando l'istruzione `y=A*x`.

8) Consideriamo la successione $\{3k^2\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.
Si utilizzi un ciclo `while` per determinare il numero minimo di termini N richiesti affinché la somma $\sum_{k=1}^{N} 3k^2$ sia maggiore di 2000. (Soluzione: 13 termini, la cui somma è 2457).

9) Si scriva una function per approssimare e^x mediante la somma dei primi n termini del suo sviluppo di Taylor. La function deve avere in ingresso il valore di x in cui approssimare l'esponenziale e il numero n di termini da utilizzare. In uscita deve fornire l'approssimazione calcolata y, ovvero

$$y = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Si utilizzi tale funzione per approssimare e^{30} e e^{-30} e si confronti il risultato ottenuto con quello fornito dalla funzione MATLAB `exp`. Per effettuare il confronto si calcoli l'errore relativo.

Esercizi suggeriti per casa

1) Scrivere una function che, preso in input un numero $0 \leq n \leq 10$ naturale, ne calcoli il fattoriale:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

2) Scrivere una function che, assegnata una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, restituisce in uscita $\|A\|_1$. Si ricorda che la norma uno di una matrice è così definita:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Si utilizzi tale funzione per calcolare la norma uno della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 4e-3 \\ 3 & 21 & 5 \\ 5 & 0.01 & -4e2 \end{pmatrix}$$

e si confronti il risultato ottenuto con quello fornito dalla funzione predefinita `norm`, calcolando l'errore relativo.

3) Scrivere una funzione MATLAB che, date due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in ingresso, calcola la matrice C tale che $C = A * B$ (senza usare l'operatore * di MATLAB). Si ricorda che il prodotto tra matrici è definito come:

$$C_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} A_{i,\ell} B_{\ell,j}, \quad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, n.$$

Utilizzare tale funzione per calcolare il prodotto tra la matrice A definita nell'esercizio 1 e la matrice B tale che

$$B_{i,j} = A^2_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Confrontare il risultato ottenuto con quello fornito dal comando `A*B`.

4) Scrivere una function che, date in input le coordinate di un punto $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e un raggio R, controlli che tale punto sia all'interno o meno della circonferenza di raggio R, stampando un messaggio a video; la function dovr restituire anche la lunghezza di tale vettore.

5) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 2 \\ 9 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

e il vettore $b = (19, 20, 10)$, scrivere una function che, preso in input un vettore y, controlli che esso sia soluzione del sistema $Ax = b$.

6) Dato un polinomio p, scrivere una function che, dati in input un punto x_0 e i coefficienti del polinomio, calcoli il valore del polinomio in x_0. Confrontare il risultato ottenuto con il risultato

fornito dalla funzione nativa `polyval`.
Suggerimento: i coefficienti del polinomio possono essere memorizzati in un vettore. Per esempio, i coefficienti di

$$p(x) = 4x^3 + x^2 - 1$$

possono essere memorizzati nel vettore `p = [4 1 0 -1]`.